Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Álgebra Linear II - Verão/2024

Lista de Exercícios 1 - Forma de Jordan

1. Sejam $T: V \to V$ um operador linear, $W \leq V$ um subespaço de V e $\lambda \in K$. Mostre que W é $(\lambda I - T)$-invariante se, e somente se, W é T-invariante.

2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K e $T: V \to V$ um operador linear. Mostre que se para algum $l > 0$ tem-se que $\mathrm{Ker}T^l = \mathrm{Ker}T^{l+1}$, então $\mathrm{Ker}T^l = \mathrm{Ker}T^{l+i}$, para todo $i \geq 0$.

3. Seja $T: V \to V$ um operador linear, com V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K. Mostre que:

   a) se $p_T(x) = x^n$, então existe $m \geq 1$ tal que $T^m = 0$;

   b) se $m_T(x) = (x - \lambda)$, então T é diagonalizável.

4. Encontre todas as possibilidades para o polinômio minimal de um operador linear $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com polinômio característico:

   a) $p_T(x) = (x-3)^3(x-2)^2$;

   b) $p_T(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$;

   c) $p_T(x) = (x-1)^m$, $m \geq 1$.

   É possível concluir que algum deles é necessariamente diagonalizável?

5. Determine a forma de Jordan de $T: \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ definida por

$$T(x, y, z, w, t, k) = (2x, x + 2y, -x + 2z, y + 2w, x + y + z + w + 2t, t - k).$$

6. Encontre a forma de Jordan das seguintes matrizes

$$a) \begin{bmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad c) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

7. Verifique se as seguintes matrizes sobre $\mathbb{C}$ são semelhantes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Seja $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dado por $T(p(x)) = p(x+1)$.

    a) Determine a forma de Jordan de T;

    b) Para $n = 4$, encontre uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ seja a forma de Jordan de T.

9. Seja A uma matriz complexa 9×9 cujo polinômio característico é $(x-3)^5(x-2)^4$ e cujo polinômio minimal é $(x-3)^3(x-2)^2$. Dê as possíveis formas de Jordan de A.

10. Seja T um operador linear sobre um espaço de dimensão finita. Mostre que se o polinômio minimal $m_T(x)$ for um produto de polinômios de grau 1 e sem raízes repetidas, então T é diagonalizável.

11. Determine todas as possíveis formas de Jordan de uma matriz em $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 3$ e de posto 2.

12. Determine, a menos de semelhança, todas matrizes 3×3 complexas A tais que $A^3 = I_3$.

13. Seja A uma matriz 6×6 sobre $\mathbb{R}$ tal que $A^4 - 8A^2 + 16I = \mathbf{0}$. Quais são as possíveis formas de Jordan não semelhantes de A?
