Álgebra Linear - Verão de 2024

1. Seja V um espaço de dimensão finita com produto interno e T um operador linear sobre V. Mostre que a imagem de T^* é o complementar ortogonal do núcleo de T.

2. Seja V um espaço de dimensão finita com produto interno e T um operador linear sobre V. Se T é invertível, mostre que T^* é invertível e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

3. Mostre que o produto de dois operadores auto-adjuntos é auto-adjunto se, e somente se, os dois operadores comutam.

4. Seja V um espaço de dimensão finita com produto interno e E um operador linear idempotente sobre V, isto é $E^2 = E$. Mostre que E é auto-adjunto se, e somente se, $EE^* = E^*E$.

5. Seja V um espaço complexo de dimensão finita com produto interno e T um operador linear sobre V. Mostre que T é auto-adjunto se, e somente se, $< Tv, v >$ é real para todo $v \in V$.

6. Considere $\mathbb{C}^2$ com o produto interno canônico e seja $T \in L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ definido por $T(1,0) = (1+i, 2)$ e $T(0,1) = (i, i)$. T é normal?

7. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 3+2i \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que A é uma matriz normal.

b) Ache uma matriz P tal que $\overline{P}^t AP$ seja diagonal (considere o produto interno canônico).

8. seja A uma matriz 2×2 com elementos reais. Para matrizes colunas X, Y seja

$$f_A(X, Y) = Y^t AX.$$

Mostre que f_A é um produto interno sobre as matrizes colunas se, e somente se, $A = A^t$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ e $det(A) > 0$.