Grupos Solúveis

Autoras: Débora de Faria Pereira Senise e Julia Mitsuno Kato Aiza Alvarez
Orientador: Emerson Ferreira de Melo

Conteúdo

1 Introdução

Este trabalho apresenta um estudo sobre os grupos solúveis. Tem como objetivo mostrar algumas propriedades e alguns resultados associados a esses grupos. Será provado que o subgrupo comutador de um grupo supersolúvel é nilpotente. Mostraremos que um grupo solúvel satisfaz a condição maximal se, e somente se é policíclico e que todo grupo solúvel que satisfaz a condição minimal é uma extensão finita do produto direto de um número finito de grupos quasicíclicos.

Mostraremos também o Teorema de O. J. Schmidt que consiste em classificar os grupos finitos em que todos os seus subgrupos próprios são nilpotentes, mas eles mesmos não o são. Esses grupos são chamados de grupos de *Schmidt*.

Por fim, mostraremos os Teoremas de Hall e o Teorema de Carter.

Grupos Solúveis são aqueles que podem ser obtidos como extensões de grupos abelianos. Eles são bem conhecidos por sua relevância nos problemas de resolução de equações algébricas por radicais, mas também compreendem uma classe de grupos de interesse puramente teórico, sobre as quais iremos explorar.

2 Preliminares

Um grupo abeliano é aquele que satisfaz $xy = yx$ para quaisquer elementos do grupo. Os conjuntos $\mathbb{C}^+, \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{C}^*, \mathbb{R}^*$ e $\mathbb{Q}^*$ são todos exemplos de grupos abelianos com a adição e com a multiplicação, respectivamente.

Seja p um primo, o conjunto $\mathbb{C}_{p^\infty}$ de todas as raízes da equação $x^{p^n} = 1$, com $n = 1, 2, ...$, no corpo dos complexos, é um um p-grupo abeliano (com a multiplicação de $\mathbb{C}$). Esse grupo é chamado de **grupo quasicíclico** e é um p-grupo abeliano infinito com todos os subgrupos próprios cíclicos e finitos, ele representado por

$$\mathbb{C}_{p^\infty} = \langle g_1, g_2, g_3, ... \mid g_1^p = 1, g_2^p = g_1, g_3^p = g_2, ... \rangle$$

Uma classe interessantes dos grupos abelianos são os divisíveis, como por exemplo $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{C}_{p^\infty}$. Um grupo abeliano G é **divisível** se para todo inteiro positivo n e para todo $g \in G$, a equação $nx = g$ possui pelo menos uma solução x em G. Em notação multiplicativa temos $x^n = g$. Podemos caracterizar os grupos divisíveis da seguinte forma:

Teorema 1 ([1], Teorema 9.1.6)**.** *Todo grupo divisível G pode ser decomposto como soma direta de subgrupos todos isomorfos ao grupo dos racionais $\mathbb{Q}$ com a adição ou aos grupos quasicíclicos.*

Um grupo é **nilpotente** se possuir uma **série central**, i.e., se possuir uma série normal de subgrupos

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_s = G \qquad \text{onde } G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$$

ou, equivalentemente, $[G_{i+1}, G] \leq G_i$, para todo i, onde $[G_{i+1}, G]$ é o comutador. Para a construção de uma série central defina

$$\zeta_0(G) = 1 \qquad \zeta_1(G) = Z(G) \qquad \zeta_{i+1}(G)/\zeta_i(G) = Z(G/\zeta_i(G)) \qquad i = 0, 1, 2, ...$$

a sequência de subgrupos $\zeta_i(G)$ é chamada **série central superior**. Denotamos por $Z(G)$ o centro do grupo G. Os p-grupos finitos ou as matrizes uni-triangulares são exemplos de grupos nilpotentes.

Teorema 2 ([1], Teorema 16.2.6)**.** *Em um grupo nilpotente, todo subgrupo abeliano maximal normal é seu próprio centralizador.*

Demonstração. Seja G um grupo nilpotente e A um subgrupo abeliano maximal normal. Claramente $C_G(A) \cap \zeta_0(G) = C_G(A) \cap 1 = \{1\} \leq A$, onde $C_G(A)$ representa o centralizador em G de todos os elementos de A. Suponha por indução que $C_G(A) \cap \zeta_i(G) \leq A$ e considere $x \in C_G(A) \cap \zeta_{i+1}(G)$. Para todo $g \in G$ temos $[x, g] \in C_G(A) \cap \zeta_i(G) \leq A$, logo $\langle x, A \rangle$ é um grupo normal abeliano de G, contendo A. Portanto, devemos ter que $x \in A$, então $C_G(A) \cap \zeta_{i+1}(G) \leq A$. Como $\zeta_n(G) = G$ para algum n, temos que $C_G(A) = A$ como queríamos mostrar. □

Sabemos que o subgrupo comutador $[G, G]$ é normal em G. Tomando o subgrupo comutador do subgrupo comutador e assim por diante, temos uma cadeia de subgrupos

$$G \geq G' \geq G'' \geq ...$$

chamada de **série derivada** do grupo G. Formalmente definimos os termos da série derivada como: $G^{(i+1)} = [G^i, G^i]$ onde $G^1 = G'$. As seguintes afirmações são equivalentes para um grupo G arbitrário:

(i) G possui uma série normal com fatores abelianos;

(ii) G possui uma série subnormal com fatores abelianos;

(iii) A série derivada de G definida acima termina na identidade após um número finito de passos.

Definição 1. *Grupos que satisfazem qualquer uma das condições acima são chamados de grupos **solúveis**.*

Uma série subnormal com fatores abelianos é chamada de série solúvel e se G é solúvel, o menor inteiro n tal que o termo de sua série derivada $G^{(n)} = 1$ é denominado comprimento de solubilidade. Subgrupos, imagens homomóficas e o produto direto de um número finito de grupos solúveis são solúveis.

3 Grupos supersolúveis

Definição 2. *Um grupo G é dito **metacíclico** se é uma extensão de um grupo cíclico por um grupo cíclico, ou seja, o grupo G possui um subgrupo cíclico normal N tal que o quociente G/N é cíclico.*

Por exemplo, os grupos cíclicos são sempre metacíclicos, pois todo subgrupo é normal e cíclico. Assim o grupo quociente também será cíclico. Os grupos diedrais também são metacíclicos, pois são extensões de um grupo cíclico de ordem n por um grupo de ordem 2.

Definição 3. *Um grupo é dito **supersolúvel** se ele possui uma série normal com fatores cíclicos.*

Exemplos de grupos supersolúveis são os p-grupos finitos e os grupos metacíclicos.

Teorema 3. *O subgrupo comutador de um grupo supersolúvel é nilpotente.*

Demonstração. Dado um grupos G supersolúvel com a série normal

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq ... \leq N_k = G$$

com N_1/N_{i+1} cíclico, queremos mostrar que $[G, G]$ é nilpotente. Primeiramente note que, $[G, G] = G' \trianglelefteq G$ implica em $N_i \cap G' \trianglelefteq G$. Veja que temos a seguinte série de G'

$$\{1\} = N_0 \cap G' \leq N_1 \cap G' \leq ... \leq N_k \cap G' = G'$$

Para mostrar que é uma série central temos que mostrar que

$$N_i \cap G'/N_{i-1} \cap G' \subset Z(G'/N_{i-1} \cap G')$$

Observe que $N_i \cap G'/N_{i-1} \cap G' \trianglelefteq G'/N_{i-1} \cap G'$ pois considerando o seguinte homomorfismo sobrejetivo $\phi : G \to G/N_{i-1} \cap G'$ temos que subgrupos normais do domínio continuam normais na imagem.

Agora, usando o segundo Teorema do Isomorfismo segue que

$$(N_i \cap G')N_{i-1}/N_{i-1} \cong N_i \cap G'/N_{i-1} \cap G'$$

mas $(N_i \cap G')N_{i-1}/N_{i-1}$ é um subgrupo de N_i/N_{i-1} que é cíclico. Os subgrupos de grupos cíclicos continuam sendo cíclicos, então $N_i \cap G'/N_{i-1} \cap G'$ é cíclico.

Afirmamos que o subgrupo derivado centraliza subgrupos normais cujo grupo de automorfismos é abeliano, ou equivalentemente, tais subgrupos estão no centralizador do comutador.

De fato, basta considerar o homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \operatorname{Aut}(N) \\ g &\longmapsto \varphi(g) : N \longrightarrow N \\ &\qquad\qquad\quad n \longmapsto gng^{-1} \end{aligned}$$

onde N é normal em G e $\operatorname{Aut}(N)$ é abeliano. Note que ker(φ)= $C_G(N)$ e que $[G,G] \subset$ ker(φ), pois $\operatorname{Aut}(N)$ é abeliano. Para o nosso caso, vale ressaltar que o grupo de automorfismo de um grupo cíclico é abeliano.

Aplicando a afirmação acima e usando que $G'/N_{i-1} \cap G'$ é o subgrupo comutador de $G/N_{i-1} \cap G'$, temos que $N_i \cap G'/N_{i-1} \cap G'$ está no centro de $Z(G'/N_{i-1} \cap G')$. □

4 Grupos solúveis que satisfazem a condição maximal

Um grupo satisfaz a **condição maximal** (para subgrupos) se toda cadeia ascendente de subgrupos se torna constante, isto é, para algum n tem-se

$$H_1 \leq H_2 \leq ... \leq H_n = H_{n+1} = ...$$

Os grupos que satisfazem essa condição são também chamados de grupos **noetherianos**. Note que os grupos finitamente gerados tais que todos seus subgrupos também são finitamente gerados satisfazem a condição maximal

Definição 4. *Um grupo com uma série subnormal com fatores cíclicos é chamado de **policíclico**.*

Teorema 4 ([1], Teorema 19.2.3)**.** *Um grupo solúvel satisfaz a condição maximal se, e somente se é policíclico.*

Demonstração. Seja G um grupo policíclico, temos então a série subnormal

$$1 = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft ... \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$$

onde todo fator G_i/G_{i+1} é cíclico, com $1 \leq i \leq n-1$. Sabemos que os grupos que possuem todos seus subgrupos finitamente gerados satisfazem a condição maximal, assim, queremos provar que G é finitamente gerado. Para $n = 0$, temos o grupo trivial, que é gerado por um único elemento. Suponha por indução que vale para G_1, o último subgrupo da série, então

G/G_1 é cíclico e o conjunto de geradores de G_1 junto com o conjunto de geradores de G/G_1 é um conjunto gerador de G, pois todo elemento $x \in G$ está um alguma classe de G_1, onde $x = g^k h$, para algum $k \in \mathbb{Z}, h \in G_1$. Assim, segue que G é finitamente gerado. Veja que subgrupos de grupos policíclico são policíclicos e portanto, finitamente gerados, que por sua vez satisfazem a condição maximal.

Reciprocamente, suponha G um grupo solúvel satisfazendo a condição maximal e com a seguinte série com fatores abelianos

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$$

os fatores dessa série também satisfazem a condição maximal, então são gerados finitamente e podem ser decompostos como produto direto de um número finito de grupos cíclicos, pelo fato dos fatores serem abelianos.

A série acima pode ser refinada para uma série policíclica, então G é policíclico. □

5 Grupos solúveis que satisfazem a condição minimal

Um grupo satisfaz a **condição minimal** (para subgrupos) se toda cadeia decrescente de subgrupos depois de um número finito de passos se torna estacionária, isto é,

$$H_1 \geq H_2 \geq ... \geq H_n = H_{n+1} = ...$$

para algum n. Os grupos que satisfazem essa condição são também chamados de grupos **artinianos**. O seguinte terorema descreve os grupos artinianos solúveis, sua demosntração também pode ser encontrada em [[1], Teorema 19.3.2].

Teorema 5 (S. N. Chernikov)**.** *Todo grupo solúvel satisfazendo a condição minimal é uma extensão finita do produto direto de um número finito de quasicíclicos.*

Demonstração. Seja G um grupo solúvel que satisfaz a condição minimal. Assim, toda cadeia decrescente de subgrupos de G depois de um número finito de passos se torna estaciona, portanto, podemos garantir a existência de um subgrupo H que tem índice finito em G e que não possui subgrupos próprios de índice finito.

A interseção de subgrupos de índice finito também tem índice finito então escolhemos H de modo que ele seja normal.

Suponha agora o caso em que H é abeliano. Considere o grupo

$$H^p = \langle h^p : h \in H \rangle = \{h^p : h \in H\}$$

onde p é um primo. Note que $H^p \trianglelefteq H$, pois H é abeliano. Denotando por h_1, h_2, h_3, ... os elementos de H e olhando para o grupo quociente

$$H/H^p = \{h_1 H^p, h_2 H^p, h_3 H^p, ...\}$$

queremos concluir que H é divisível. Primeiro veja que H/H^p é um grupo abeliano elementar, pois $h^p = 1$ para todo $h \in H$, ou seja, todo elemento não trivial de H/H^p tem ordem p. Sabemos que todo grupo abeliano elementar forma um espaço vetorial, no caso, sobre o corpo $\mathbb{F}_p$. H e H^p satisfazem a condição minimal, assim, H/H^p também satisfaz a condiçao minimal. O quociente é portanto um grupo de ordem finita, isto é, $|H : H^p| < \infty$, mas H foi definido de modo que não exista subgrupo próprio de índice finito, então $H = H^p$.

Agora vamos mostrar que H é divisível. Para isso, lembremos que $H^p = H$ com p um primo qualquer. Tomando $n \in \mathbb{Z}^+$ podemos escrever $n = p_1 p_2 ... p_r$ onde p_i são primos, então

$$H^n = H^{p_1 p_2 ... p_r} = (H^{p_1})^{p_2 ... p_r} = H$$

isto é, $H^n = H$ pelo fato de H ser abeliano, para qualquer n. Em outras palavras, todo elemento $h \in H$ pode ser escrito como $h = a^n$ onde $a \in H$ para todo n inteiro positivo, ou seja, H é de fato divisível.

Visto que H é divisível, segue do Teorema 1 que H pode ser decomposto como soma direta de subgrupos isomorfos ao grupo dos racionais $\mathbb{Q}$ com a adição ou ao grupo dos policíclicos. Mas sabemos que $\mathbb{Q}$ contém uma cópia do conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ que é um grupo cíclico infinito e não satisfaz a condição minimal. Portanto, H deve ser soma direta finta de quasicíclicos e o teorema segue para esse caso.

Vamos ao caso em que H não é abeliano. Considere sua série derivada e denote por A o último termo não trivial de tal série, vamos mostrar que A é um subgrupo do centro de H.

Observe que A é abeliano e satisfaz a condição minimal. Usando a primeira parte do teorema, A possui um número finito de elementos de cada ordem, logo, os elementos de A possuem um número finito de conjugados em H. Tomando $a \in A$ e seu centralizador $C_H(a) = \{h \in H : ah = ha\}$, temos que o quociente $H/C_H(a)$ nos dá as classes de conjugação de a, como esse elemento possui um número finito de conjugados, ele também possui um número finito de classes de conjugação, i.e., $|H : C_H(a)| < \infty$. Pelo fato de H não ter subgrupo de índice finito, segue que $H = C_H(a)$ e $A \leq Z(H)$.

H é nilpotente. Isso pode ser feito mostrando que se H é solúvel, então $H^{(k-i)} \leq \zeta_i(H)$. Já mostramos que $A = H^{(k-1)} \leq \zeta_1(H)$. O mesmo argumento aplicado ao grupo $H/H^{(k-1)}$ de tamanho $k-1$, implica que $H^{(k-2)}/H^{(k-1)} \leq \zeta_1(H/H^{(k-1)})$, logo $H^{(k-2)} \leq \zeta_2(H)$, e assim por diante.

Agora seja B um subgrupo maximal abeliano e normal de H. Usando a ideia anterior podemos mostrar que B é um subgrupo do centro de H. Agora, aplicando o Teorema 2 segue que B é seu próprio centralizador em H e portanto $H = B$. Então provamos que H deve ser de fato abeliano. □

6 Teorema de O. J. Schmidt

Teorema 6. *Seja G um grupo finito não nilpotente em que todos os subgrupos próprios são nilpotentes. Então:*

i) G é solúvel;

ii) $|G| = p^\alpha q^\beta$, onde p e q são primos distintos;

iii) O p-subgrupo de Sylow P é normal em G e o q-subgrupo de Sylow Q é cíclico.

Demonstração. i) Suponha que G seja um contra-exemplo de menor ordem possível. Se N é um subgrupo normal próprio não-trivial de G, temos que N é nilpotente, logo, é solúvel. Como G/N tem ordem menor que G, e seus subgrupos são todos imagens homomorfas dos subgrupos de G, seus subgrupos são todos nilpotentes e o teorema segue, daí G/N também é solúvel, então G é solúvel. Portanto, basta provar que G não é simples. Suponha, por contradição, que G seja simples.

Suponha que a interseção de quaisquer dois maximais de G seja trivial. Seja $n = |G|$ e M um maximal de G de ordem m. Se G é simples, então existem $[G : N_G(M)] = [G : M] = n/m$ conjugados de M em G, e quaisquer dois conjugados de M terão interceção nula, pois os conjugados de M são maximais, assim teremos $\frac{n}{m}(m-1) = n - n/m$ elementos não triviais nos conjugados de M. Mas veja que $n - n/m \geq n - n/2 = n/2 > (n-1)/2$ e $n - n/m \leq n - 2 < n - 1$, então $\frac{n-1}{2} < n - \frac{n}{m} < n - 1$. Tomando outro maximal K que não seja conjugado de M, temos também que $\frac{n-1}{2} < n - \frac{n}{k} < n - 1$, onde k é a ordem de K, e $n - n/k$ é o número de elementos não triviais nos conjugados de K. Porém, o número de elementos não triviais em G é $n-1$, e não é possível que a soma de dois números estritamente entre $\frac{n-1}{2}$ e $n-1$ seja $n-1$. Isso implica que existem maximais distintos M_1 e M_2 de G cuja interseção I é não-trivial.

Escolha $I = M_1 \cap M_2$ a maior interseção entre dois maximais. Seja $N = N_G(I)$. Como M_1 é nilpotente, $I < N_{M_1}(I)$, assim $I < N \cap M_1$. Se I não é normal, $N < G$, então N está contido em um maximal M de G, logo, $I < N \cap M_1 \leq M \cap M_1$, o que contradiz a escolha maximal de I. Logo, G não pode ser simples e isso termina a demonstração de i).

ii) Suponha, por contradição, que $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, $k \geq 3$. Seja M um normal maximal de G. Isso implica que G/M é simples (caso contrario existiria um subgrupo normal de G contendo M) e, ao mesmo tempo, G/M é solúvel pois G é solúvel. Logo, $|G/M| = p_1$. Seja P_i o p_i-Sylow de G, então M contém P_i para i = 2,..., k. Como M é nilpotente, $P_i \triangleleft M$ e assim $M \leq N_G(P_i)$. Pelo lema de Frattini, $G = MN_G(P_i) = N_G(P_i)$, então $P_i \triangleleft G$ para i= 2,..., k.

Se $k \geq 3$, temos que $P_1 P_i < G$ para i = 2,..., k. Mas isso implica que $P_1 P_i$ é nilpotente, ou seja, seus Sylows são normais. Assim $[P_1, P_i] = 1$, e $P_i \leq N_G(P_1)$ para i= 1,..., k. Logo, $G = N_G(P_i)$. Mas então todos os Sylows de G são normais, o que implica que G é nilpotente, contradição. Portanto, $k = 2$ e $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} = p^\alpha q^\beta$.

iii) Seja P o p-Sylow de G e Q o q-Sylow de G. Seja M um normal maximal de G. Pelas observações anteriores $[G : M] = q$. Então M contêm um p-Sylow P. Como M é nilpotente, $P \triangleleft M$ e, novamente pelo argumento de Frattini, $G = MN_G(P) = N_G(P)$, logo $P \triangleleft G$.

Suponha, por contradição, que Q não é cíclico. Então para todo $g \in Q$ temos $\langle g, P \rangle \neq G$, e isso implica que $\langle g, P \rangle$ é nilpotente, logo $[g, P] = 1$. Como isso vale para todo $g \in Q$, $[Q, P] = 1$ e $P < N_G(Q)$, então Q é normal em G (pois $G = PQ = N_G(Q)$). Mas isso implica que todos os Sylows de G são normais, então G é nilpotente, contradição. Logo, Q é cíclico.

□

7 Teorema de Hall

Definição 5. *Seja G um grupo tal que $|G| = n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s}$. Dizemos que k é um* **divisor de Hall** *de n quando k divide n e $mdc(k, n/k) = 1$, ou seja, $k = p_i^{\alpha_i} ... p_j^{\alpha_j}$, para $i, ..., j \in \{1, ..., s\}$*

Teorema 7. *Seja G um grupo solúvel finito de ordem n e seja k um divisor de Hall de n. Então:*

i) Existe um subgrupo de G de ordem k.

ii) Quaisquer dois subgrupos de ordem k são conjugados em G

iii) Qualquer subgrupo de ordem k' tal que k' divide k está contido em algum subgrupo de ordem k

Demonstração. Usaremos indução sobre n. Sendo o teorema verdadeiro para o grupo trivial, suponha $n > 1$ e, como hipótese de indução, que o teorema seja válido para todo grupo de ordem menor que n.

Devido a hipótese de que G é solúvel, sabemos que G possui um normal minimal A que é abeliano elementar, então $|A| = p^m$, $m \in \mathbb{N}$. Se p divide k, então olharemos para o grupo G/A de ordem n/p^m. Por ter ordem menor que G, G/A satisfaz a hipótese de indução. Como (k/p^m) divide (n/p^m) e $1 \leq mdc(k/p^m, n/p^m) \leq mdc(k, n) = 1$, temos que k/p^m é um divisor de Hall de n/p^m. Assim, G/A possui um subgrupo B/A de ordem k/p^m, logo, B é um subgrupo de G de ordem k. Além disso, todo subgrupo de ordem k deve conter A (porque qualquer grupo de ordem k contém um p-Sylow, e como todos os p-Sylows são conjugados, todos os p-Sylows contém A). Sejam B_1 e B_2 dois subgrupos de ordem k, então podemos formar seus quocientes B_1/A e B_2/A. Pela hipótese de indução, esses grupos são conjugados em G/A. Logo, B_1 e B_2 são conjugados em G.

Suponha agora que p não divide k. Seja D o maior subgrupo normal de G cuja ordem é relativamente prima com k. Como G/D é solúvel, pela hipótese de indução, possui um menor minimal H/D cuja ordem é q^s para algum primo q. Se q^s não dividisse k, então H seria um subgrupo normal de G com ordem relativamente prima a k maior do que D, o que não ocorre devido a escolha maximal de D. Logo, q^s divide k.

Se $|D| = d$, então $|H| = q^s d$. Seja Q um q-Sylow de H, e $N_G(Q)$ o normalizador de Q em G. Se $N_G(Q) = G$, então $Q \triangleleft G$, e como q^s divide k, segue da mesma maneira que no caso anterior, com Q e q no lugar de A e p. Logo, suponha $N_G(Q) \neq G$. Como $H \triangleleft G$ e Q é um Sylow de H podemos usar o lema de Frattini, daí $G = N_G(Q)H = N_G(Q)D$ (pois $Q \subseteq H \cap N_G(Q)$). Disso, como k é primo com a ordem de D, temos que k divide a ordem de $N_G(Q)$, que é um grupo menos que G. Segue pela hipótese de indução que $N_G(Q)$, e portanto G, possuem um subgrupo de ordem k

Vamos mostrar agora que B_1 e B_2 são conjugados. Como B_1 e B_2 tem ordem k e $|H| = q^s d$, temos que $B_1 \cap H$ e $B_2 \cap H$ são q-Sylows de H, logo, são conjugados de Q. Então exitem $\hat{B_1}$ e $\hat{B_2}$ conjugados de B_1 e B_2 tais que $\hat{B_1} \cap H = \hat{B_2} \cap H = Q$. Considere agora o grupo $\langle \hat{B_1}, \hat{B_2} \rangle$. Como $H \triangleleft G$, temos também que $\hat{B_1} \cap H = Q \triangleleft \langle \hat{B_1}, \hat{B_2} \rangle$. Então podemos olhar para o quociente $\langle \hat{B_1}, \hat{B_2} \rangle / Q$, e daí, pela hipótese de indução, $\hat{B_1}/Q$ e $\hat{B_2}/Q$

são conjugados em $\langle \hat{B}_1, \hat{B}_2 \rangle / Q$. Portanto, $\hat{B}_1$ e $\hat{B}_2$ são conjugados e assim B_1 e B_2 também o são.

Isso demonstra i) e ii), agora vamos demosntrar iii). Seja $\hat{B}$ o subgrupo de ordem k', e seja A, como antes, o minimal normal de G cuja ordem é p^m. Se p divide k, então a ordem do grupo $A\hat{B}$ também divide k. Então o grupo $A\hat{B}/A$, por hipótese de indução, está contigo em algum subgrupo de ordem k/p^m de G/A. Segue que $A\hat{B}$, e logo $\hat{B}$, está contido em um subgrupo de ordem k em G.

Suponha agora que p não divide k. Nesse caso a hipótese de indução em G/A nos dá que $A\hat{B}$ esta contido em um subgrupo C/A de ordem k. Logo, o subgrupo C tem ordem $p^m k$. Por i), C contém um subrupo B de ordem k. O grupo AB tem ordem $p^m k$, que coincide com C. Então certamente $A\hat{B}B = C$. Dessa igualdade, temos:

$$|C| = \frac{|A\hat{B}| \cdot |B|}{|A\hat{B} \cap B|}, \qquad |C| = p^m k, \qquad |A\hat{B}| = p^m k', \qquad |B| = k,$$

vemos que o grupo $D = A\hat{B} \cap B$ tem ordem k', além disso $D \in B$, que é um subgrupo de ordem k. Por ii), sabemos que D e $\hat{B}$ são conjugados em $A\hat{B}$, digamos $\hat{B} = D^g$. Portanto, $\hat{B}$ está contido no subgrupo B^g de ordem k. Isso completa a demonstração.

□

8 Teorema de Carter

Definição 6. *Um subgrupo H de um grupo G é chamado* **subgrupo de Carter** *de G quando H é nilpotente e $H = N_G(H)$.*

Lema 1 (Generalização do teorema de Frattini)**.** *Seja C um subgrupo normal do grupo G, e seja B um subgrupo de C com a propriedade de que qualquer $B_1 \leq C$ que é conjugado de B em G, é conjugado de B em C. Então $G = C \cdot N_G(B)$.*

Demonstração. Seja $g \in G$. Como $C \triangleleft G$, $C^g = C$, daí $B^g \subseteq C$. Por hipótese, existe $c \in C$ tal que $B^g = B^c$, então $B^{gc^{-1}} = B$ e assim $gc^{-1} \in N_G(B)$. Logo, $G = CN_G(B)$. □

Lema 2. *Se A é um subgrupo de Hall de um grupo solúvel finito G e H é um subgrupo contendo $N_G(A)$, então $N_G(H) = H$*

Demonstração. É claro que $H \triangleleft N_G(H)$. Além disso, $A \leq H$ é um subgrupo de Hall de H, e todo subgrupo $A_1 \leq H$ que é conjugado de A em G é também subgrupo de Hall de H. Pelo teorema de Hall, A_1 é conjugado de A em H. Nas condições do lema 1, temos que $N_G(H) = HN_G(A)$, e como $N_G(A) \leq H$, $N_G(H) = H$. □

Teorema 8. *Um grupo solúvel finito G possui pelo menos um subgrupo de Carter. Quaisquer dois subgrupos de Carter são conjugados.*

Demonstração. Novamente usaremos indução sobre $|G|$. Suponha $|G| > 1$ e o teorema verdadeiro para grupos solúveis de ordem menor que G. Seja A um normal minimal de G, então $|A| = p^m$ para algum primo p. Pela hipótese de indução, G/A possui um subgrupo de Carter, digamos $\hat{K}/A$, ou seja, $\hat{K}/A$ é nilpotente e $\hat{K}/A = N_{G/A}\Big(\hat{K}A\Big)$. Considere $\hat{K}$, e Q um p'-subgrupo de Hall de $\hat{K}$, ou seja, p não divide $|Q|$ e $|\hat{K}| = |Q| \cdot p^l$. Mostraremos a seguir que $K = N_{\hat{K}}(Q)$ é um subgrupo de Carter de G.

Utilizaremos o Lema 1 sobre $\hat{K}$, com $C = AQ$ e $B = Q$. Podemos utilizar esse lema porque $\hat{K}/A$ é nilpotente, ou seja, seus Sylows são normais, e sendo AQ/A um subgrupo de Hall de $\hat{K}/A$ ele é produto de Sylows normais, logo $AQ/A \triangleleft \hat{K}/A$. Dessa forma, $AQ \triangleleft \hat{K}$. Além disso, pelo teorema de Hall, se $Q_1 \leq \hat{K}$ é conjugado de Q em G, então ele é um subgrupo de Hall de $\hat{K}$, logo Q_1 é conjugado de Q em $\hat{K}$. Então, utilizando o Lema 1, temos que $\hat{K} = N_{\hat{K}}(Q) \cdot QA = KA$.

O subgrupo K é produto direto de Q e $K \cap P$, onde P é um p-Sylow de $\hat{K}$ (note que P é normal em $\hat{K}$, pois $\hat{K}/A$ é nilpotente). Além disso, como Q é imagem homomorfa do grupo nilpotente AQ/A, Q é nilpotente. $K \cap P$ também é nilpotente porque é p-grupo. Logo, K é nilpotente.

Queremos mostrar agora que $K = N_G(K)$. Seja $g \in N_G(K)$, ou seja, $K^g = K$. Como $A \triangleleft G$ e $\hat{K} = KA$, temos que $\hat{K}^g = K^g A^g = KA = \hat{K}$, dai $g \in N_G(\hat{K}) = \hat{K}$ e $N_G(K) \subseteq N_{\hat{K}}(K)$. Pelo Lema 2, $N_{\hat{K}}(K) = K$. Portanto, $K = N_G(K)$.

Agora, sejam K_1 e K_2 dois subgrupos de Carter em G. Vamos mostrar que eles são conjugados.

Primeiro provaremos que AK_i/A, $i = 1, 2$, são subrupos de Carter de G/A. Como K_i é nilpotente porque é subgrupo de Carter, AK_i/A também é nilpotente, pois é imagem homomorfa de K_i.

Seja g tal que $(K_iA)^g = K_iA$ e $g \notin K_iA$. Assim temos $|K_iA| < |G|$ e pela hipótese de indução aplicada aos subgrupos de Carter de K_iA, temos que existe $a \in K_iA$ tal que $K_i^g = K_i^a$, ou $K_i^{ga^{-1}} = K_i$. Mas como K_i é o seu próprio normalizador, temos que $ga^{-1} \in K_i$, contradizendo a hipótese de que $g \notin K_iA$. Logo $K_iA = N_G(K_iA)$.

Seja Q_i um p'-subgrupo de Hall de K_i. Então Q_i é também um p'-subgrupo de Hall de K_iA. Da mesma forma que foi feito antes, temos que $N_{K_iA}(Q_i)$ é nilpotente, e $K_iA = N_{K_iA}(Q_i) \cdot Q_iA = N_{K_iA}(Q_i)A$. Logo, $N_{K_iA}(Q_i) = K_i$.

Pela hipótese de indução, AK_1/A e AK_2/A são conjugados. Assumiremos então, substituindo K_2 por um de seus conjugados, que $K_1A = K_2A$. Temos que Q_2, sendo um p'-subgrupo de Hall de K_2A, é também um p'-subgrupo de Hall de K_1A. Logo Q_1 e Q_2 são conjugados em K_1A. Isso implica que seus normalizadores também são conjugados. Mas no paragrafo anterior mostramos que os normalizadores são exatamente K_1 e K_2. Portanto, K_1 e K_2 são conjugados. Isso completa a demonstração. $\square$

Referências

[1] KARGAPOLOV, M. I.; MERZLJAKOV, J. I; *Fundamentals of the Theory of Groups.* Graduate Texts in Mathematics. 2. ed. Springler Verlag. 1979;

[2] GORENSTEIN, D., *Finite Groups*, Harper and Row, London, New York, 1968;

[3] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra.* 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA. 2015;