Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas

Research

Analysis Seminar

Integração do século XXI

Fernanda Andrade da Silva
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC)
Universidade de São Paulo

Date: Sept. 13, 2024

Time: 10:30 am

Address: MAT/UnB Auditorium

Abstract. Sendo o carro-chefe da análise moderna, a integral é sem dúvida uma das peças mais familiares do Cálculo. Mas a integral com a qual a maioria está familiarizada, a integral de Riemann, é na verdade apenas uma entre várias e possui algumas limitações. Em primeiro lugar, a classe das funções limitadas Riemann integráveis restringe-se a funções com uma quantidade enumerável de descontinuidades e nem toda derivada é Riemann integrável. Assim, muitas funções importantes não têm uma integral de Riemann, mesmo depois de estendermos ligeiramente a classe de funções integráveis, permitindo integrais de Riemann "impróprias". Além disso, mesmo para funções integráveis, é arduo provar bons teoremas de convergência usando apenas as ferramentas normalmente associadas às integrais de Riemann. Por exemplo, o limite pontual de funções Riemann integráveis não é necessariamente integrável neste sentido. Para superar estas deficiências, Henri Lebesgue propôs uma nova noção de integração, conhecida como integral de Lebesgue. Esta integral é estritamente mais geral do que a integral de Riemann, ou seja, pode-se integrar uma classe maior de funções. Contudo, ao comparar a integral imprópria de Riemann com a integral de Lebesgue, descobrimos que nenhuma é estritamente mais geral que a outra. Ademais, o método de Lebesgue é complexo e é necessário uma quantidade considerável de Teoria da Medida até mesmo para definir sua integral.

Nem a integral imprópria de Riemann nem a integral de Lebesgue geraram uma construção totalmente satisfatória de antiderivadas. Noções um pouco mais gerais de integral foram fornecidas por Arnaud Denjoy (1912) e Oskar Perron (1914). Entretando, suas definições revelaram-se equivalentes.

Décadas mais tarde, de forma independente, Ralph Henstock (1955) e Jaroslav Kurzweil (1957) criaram uma formulação muito mais simples da integral de Denjoy-Perron. Em sua definição, a abordagem intuitiva da integral de Riemann é preservada, mas ao contrário da integral de Riemann que considera partições marcadas de um intervalo com subintervalos cujos comprimentos são limitados por uma constante fixa, Henstock e Kurzweil usaram

uma função estritamente positiva δ (chamada calibre) para medir o comprimento de cada subintervalo, ou seja, o comprimento máximo dos subintervalos pode variar. Ao fazer este pequeno ajuste, descobriu-se que a sua integral também superou algumas das limitações da integral de Riemann, em particular, toda função derivável é integrável. Além disso, a integral de Kurzweil e Henstock nos permite lidar com integrandos que são altamente oscilantes e apresentam uma quantidade não enumerável de descontinuidades.

A integral de Kurzweil e Henstock também é conhecida por vários nomes: integral de Henstock-Kurzweil, integral generalizada de Riemann, integral de Perron e, devido à sua definição, também é chamada de integral de calibre. Por ser uma integral consideravelmente mais simples do que a integral de Lebesgue e por englobar as integrais de Riemann, Newton e até mesmo a de Lebesgue, o interesse por esta integral tem aumentado nas últimas décadas, e alguns matemáticos até defendem que devemos ensinar a integral de Henstock-Kurzweil ao lado ou no lugar da integral de Riemann ou da integral de Lebesgue.

Nosso objetivo é apresentar de modo geral, porém simples, o conceito e as principais propriedades da Integral de Henstock-Kurzweil. Veremos ainda que esta integral é, em alguns casos, mais vantajosa do que as integrais de Riemann e Lebesgue.

Bibliografia

[1] Bartle, R. G. *A Modern Theory of Integrations.* Graduate Studies in Methematics, Vol. 32, American Mathematical Society, Province, Rhode Island, 2001.

[2] Henstock, R. *The General Theory of Integration.* Oford Mathematical Monographs, 2.ed, 1991.

[3] McLeod, R. M. *The Generalized Riemann Integral.* The Mathematical Association of America. 1980.

[4] McShane, E. J. *Integration.* Princeton University Press, 1947.