Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência de soluções positivas para equações e sistemas semilineares via fundamentos topológicos e baricentro

por

Elson Leal de Moura

Brasília

2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília - DF, 09 de março de 2017

Comissão Examinadora:

Dra. Liliane de Almeida Maia - UnB - Orientadora

Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - UFJF - Examinador

Dr. José Valdo Abreu Gonçalves - UFG - Examinador

Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UnB - Examinador

Dr. Ricardo Ruviaro - UnB - Examinador

"O futuro tem muitos nomes: para os fracos, é o inatingível; para os temerosos, o desconhecido; para os valentes, é a oportunidade."

Agradecimentos

Ao meu Senhor, Criador, Pai, Redentor. A Ele dou graças sempre. Em especial, neste momento, agradeço por esta grandiosa conquista.

A minha mãe Maria, Nossa Senhora Aparecida, eu te escolhi como Padroeira e Defensora dos meus estudos. Iluminou com Tua claridade as obscuridades da minha inteligência, foi e será o meu guia. Não cabe mais palavras Mãe Santíssima, apenas o silêncio de meu coração feliz e agradecido.

Ao meu filho Bernardo que mesmo longe de mim torceu para eu chegar a este dia. *A você, meu filho amado, dedico esta tese. A você dedico todos os meus dias de vida.*

A minha família: Elza, Pai(falecido em 2016), Elcio, Elisiane, Ednéia, Júnior que estão sempre comigo espiritualmente. Nós conseguimos!

A meus dois grandes amigos que a Vida me permitiu conhecer e aprender com eles : "João Olímpio Cardoso" (falecido em 2016) e "José Geraldo Alves de Amaral". Obrigado por tudo!

A minha avó, tios, tias e primos que rezaram por mim. A graça de Deus esteja convosco.

A minha orientadora, professora Liliane, obrigado pela orientação no Mestrado e Doutorado, por me ensinar a ser melhor do que eu era. Peço desculpas pelos meus erros.

Ao professor Olímpio, por me incentivar a estudar e crescer. Obrigado pela amizade e felicidade de permitir conhecer uma pessoa de tão grande coração. Que Deus lhe dê muitas graças e bençãos.

Ao professor Ricardo, obrigado pela amizade e disponibilidade para colaborar com a minha tese. Obrigado grande amigo!

Aos professores José Valdo e Giovany Figueiredo por participarem da banca, pelas correções e pelas sugestões para a finalização deste trabalho.

Aos amigos Adriano, Camila, Cid e Dióscoros por terem tornado esse período mais agradável.

Agradeço a *UFVJM* pelo apoio financeiro durante este trabalho.

Resumo

O problema semilinear elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

é estudado com $N \geq 2$, f uma função assintoticamente linear ou superlinear não necessariamente homogênea e a função peso $a(x)$ tendendo a zero no infinito e podendo mudar de sinal.

Além disso, o sistema do tipo gradiente não homogêneo, assintoticamente linear e fortemente acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))\dfrac{u\left(u^2 + v^2\right)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1 + a(x))\dfrac{v\left(u^2 + v^2\right)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

é estudado com $N \geq 3$, λ e s parâmetros reais satisfazendo $0 < s < \dfrac{1}{1+\lambda}$, $0 < \lambda < 1$ e condições na função peso $a(x)$ semelhantes as do caso escalar.

Usando argumentos topológicos que envolvem uma função baricentro, obtem-se existência de soluções positivas para ambos os problemas em situações em que não existem soluções de energia mínima *ground state*.

Palavras-Chaves: Equações de Schrödinger; assintoticamente linear; superlinear; solução positiva; métodos variacionais; sistema fortemente acoplado; decaimento exponencial, baricentro.

Abstract

The semilinear elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

is studied with $N \geq 2$, f an asymptotically linear or superlinear not necessarily homogeneous function e the weight function $a(x)$, vanishing at infinity and may change its signal.

In addition, the asymptotically linear and strongly coupled non-homogeneous gradient type system

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))\dfrac{u\left(u^2 + v^2\right)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda v \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1 + a(x))\dfrac{v\left(u^2 + v^2\right)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda u \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

is studied with $N \geq 3$, λ and s real parameters satisfying $0 < s < \dfrac{1}{1+\lambda}$, $0 < \lambda < 1$ and conditions on the weight function $a(x)$ such as in the scalar case.

Using topological arguments involving a barycenter function, we obtain existence of positive solutions for both problems in situations where there are no *ground state* solutions.

Key-Words: Schrödinger equations; asymptotically linear; superlinear; positive solution; variational methods; strongly coupled system; exponential decay, barycenter.

Sumário

Introdução **1**

1 Caso escalar **7**

1.1 Preliminares e resultados auxiliares 9

1.2 Compacidade 19

1.3 Projeção sobre Nehari 21

1.4 Estimativas assintóticas 29

1.5 Demonstração do resultado principal 46

2 Sistema fortemente acoplado **50**

2.1 Preliminares 52

2.2 Decaimento das soluções do problema limite 53

2.3 Variedade de Nehari e limitação da sequência de Palais-Smale 66

2.4 Compacidade 77

2.5 Estimativas assintóticas 79

2.6 Demonstração do resultado principal do sistema 97

Introdução

A busca de soluções de campos escalares de equações não lineares usando métodos variacionais tem sido vigoroso nas últimas três décadas, vide [10, 13, 12, 23, 39, 42], entre muitos outros. Neste assunto, equações semilineares elípticas em $\mathbb{R}^N$ surgem como ondas estacionárias das equações de Schrödinger e equações de Klein-Gordon surgem na modelagem, por exemplo, da propagação de um feixe de luz em meios Kerr e não-Kerr, como em [3, 44] e suas referências, o que leva ao problema elíptico

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

O interesse por este tipo de problema é duplo: por um lado, a vasta gama de aplicações e, por outro lado, o desafio matemático introduzido quando se trabalha em um domínio não limitado como o espaço vetorial $\mathbb{R}^N$.

Neste trabalho estamos preocupados especificamente com a seguinte versão simplificada do problema (P):

$$(P_a) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = (1+a(x))f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com hipóteses sobre $a(x)$ que implicam este problema não ter uma solução de energia mínima e conduzem ao desafio de procurar soluções em níveis mais elevados de energia. Nossa motivação especial foi o importante trabalho de Bahri e Li [9] onde introduziram um procedimento de *min-max* para provar a existência de uma solução positiva *bound state* de

$$(P_q) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = q(x)|u|^{p-1}u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, e $1 < p < +\infty$, se $N = 1, 2$ com $q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo algum limite assintótico exponencial, quando a solução *ground state* não existe para o problema.

Nosso objetivo é ampliar o artigo [9] para não linearidades $f(u)$ não homogêneas que são superlineares ou assintoticamente lineares no infinito e em que $a(x)$ também satisfaz um limite assintótico exponencial. Nós utilizamos uma abordagem variacional e um argumento topológico introduzido em [9] e atualizado em [18, 24, 31].

Há uma extensa literatura sobre o assunto. Vamos destacar alguns artigos que são mais relevantes no que diz respeito aos nossos principais objetivos. Nos casos autônomos onde $V(x) = m$ e $f(x,u) = f(u)$, o trabalho pioneiro de Berestycki e Lions [13] exibiu uma solução *ground state* para (P). Usando argumentos de minimização com restrição, eles mostraram a existência de uma solução positiva, radial e investigaram a sua regularidade e o seu decaimento exponencial no infinito. Em 1984 , P. L. Lions [27] introduziu idéias inovadoras notáveis de concentração-compacidade que permitiu inúmeras investigações sobre este tipo de problema.

Lehrer e Maia em [29] estudaram o problema (P) com $V(x) = \lambda > 0$ e $f(x,u) = a(x)f(u)$ em $\mathbb{R}^N$, $f(u)$ assintoticamente linear no infinito e impuseram várias hipóteses sobre $a(x)$. Trabalhando com a conhecida variedade de Pohozaev e usando argumento de *Linking*, elas provaram a existência de uma solução *bound state* para o problema.

Clapp e Maia em [18] investigaram a existência de solução *ground state* positiva para a equação $-\Delta u + V(x)u = f(u)$ in $\mathbb{R}^N$ onde f é superlinear ou assintoticamente linear no infinito utilizando técnicas variacionais, no caso em que o nível crítico de energia mínima do problema não é atingido.

Recentemente, Weth e Évéquoz [24] consideraram a equação em (P) com hipóteses sobre $a(x)$, o que os levou a trabalhar com o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ na forma de decomposição espectral $E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$ e com F, a primitiva de f, do tipo superquadrático no infinito. Para ter sucesso na obtenção de estimativas de energia convenientes, eles tiveram que impor outras hipóteses, tais como a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$F(x,u) \geq F_{+\infty} - Ce^{-\alpha\sqrt{a_\infty}|x|}(|u|^2 + |u|^p); \quad \alpha > 0,$$

e com $f(u) = o(|u|^{1+\nu})$, quando $|u| \to 0$, para algum $\nu > 0$. Assumindo essas hipóteses, eles obtiveram uma solução positiva que não é, necessariamente, *ground state*.

Inspirado pelas idéias em [24] e [31] nós realizamos algumas estimativas precisas de energia e aplicamos um argumento topológico envolvendo a função baricentro para mostrar que existe um valor crítico para o funcional relacionado com a equação de Euler em (P_a), em um nível adequado de energias, dando uma solução para o problema.

Em contraste com as obras mencionadas acima, podemos destacar alguns aspectos relevantes. Distintamente do método em [9], nós evitamos a utilização de uma identidade algébrica (Lema 2.1 em [9]) ao trabalhar com o vínculo da variedade de Nehari e, portanto, permitindo não linearidades f mais gerais que são não homogêneas. Além disso, diferentemente de [29], trabalhamos com a variedade de Nehari em vez da variedade de Pohozaev o que nos permitiu trabalhar com pesos $a(x)$ mais gerais, assim, com menos restrições para o problema. Finalmente, fomos capazes de melhorar as restrições de regularidade da função f exigindo apenas $f \in C^1[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$ explorando alguns cálculos técnicos com a nossa hipótese (ver Observação 1.2 e Lema 1.14) e evitando também a utilização do Lema 2.2 em [1] ou as hipóteses (F_2') e (4) em [24].

Segundo o nosso conhecimento, este resultado é novo e examinando as interações de duas cópias de translações da solução positiva *ground state* do problema limite

$$(P_\infty) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

e manipulando estimativas exponenciais delicadas dessas translações, fomos capazes de estender o resultado em [9].

Vamos assumir $N \geq 2$ e também as seguintes hipóteses para a função peso:

(a_1) $a \in C(\mathbb{R}^N)$; $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N}(1 + a(x)) = \tau > 0$ e $\lim\limits_{|x| \to +\infty} a(x) = 0$;

(a_2) existem constantes p_1, p_2 com $1 < p_1 \le p_2 < 2^* - 1$ tais que $|a(x)| \le C_1 e^{-k|x|}$ onde $k \in (2, p_1 + 1)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e C_1 uma constante positiva.

Ademais, nós vamos considerar f, não necessariamente homogênea, satisfazendo:

(f_1) $f \in C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$;

(f_2) f e sua derivada de primeira ordem têm o seguinte crescimento

$$\left| f^{(k)}(t) \right| \le C(|t|^{p_1 - k} + |t|^{p_2 - k}),$$

para $k \in \{0, 1\}$ para $t > 0$ e $C > 0$ uma constante;

(f_3) $f'(t) > \dfrac{f(t)}{t}$, se $t > 0$;

(f_4) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} \ge l_\infty > 1$ para algum $l_\infty \in \mathbb{R}$;

(f_5) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \{f(t)t - 2F(t)\} = +\infty$ onde $F(t) := \int_0^t f(\varsigma)\, d\varsigma$;

(U) A solução positiva do problema (P_∞) é única.

Nosso primeiro objetivo neste trabalho é tentar demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Assumindo que as hipóteses $(a_1) - (a_2)$, $(f_1) - (f_5)$ e (U) são satisfeitas, então o problema (P_a) tem uma solução positiva $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $a \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então a solução é clássica.*

A hipótese de unicidade de solução positiva de (P_∞) é fundamental para o método construtivo que será aplicado na obtenção de solução positiva de (P). Tal unicidade é conhecida no caso da pôtencia pura superlinear e subcrítica $f(s) = |s|^p$, com $1 < p < 2^* - 1$ demonstrado por Kwong em [26], e no caso da não linearidade modelo, assintoticamente linear, $f(s) = l_\infty \dfrac{s^3}{1 + s^2}$ demonstrado em Serrin e Tang [40]. Estes dois exemplos de não linearidades f satisfazem as nossas hipóteses $(f_1) - (f_5)$. Porém, em geral a unicidade pode não ocorrer. Resultados de condição suficiente podem ser encontrados em [36] e [40]. Por exemplo, se a função $h(u) := \dfrac{-u + f(u)}{uf'(u) - f(u)}$ é não decrescente em (τ, ∞) onde τ é o único número positivo satisfazendo $\frac{f(\tau)}{\tau} = 1$, então tem-se uma condição suficiente para a unicidade da solução positiva de $P_\infty)$.

A hipótese (f_4) complementa (f_3) afirmando que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t}$ pode ser $+\infty$ ou uma constante l_∞. Neste segundo caso, a constante l_∞ deve ser maior que 1 para que (P_∞) tenha solução não trivial segundo Berestycki e Lions [13] com $m = 1$.

Em um segundo momento, sobre o estudo de sistemas, podemos citar o clássico trabalho de Ambrosetti-Cerami - Ruiz [5]. Usando argumentos de concentração de compacidade os autores mostraram resultados de existência de solução positiva do tipo *ground* e *bound state* do seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= (1 + a(x))|u|^{p-1}u + \lambda v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v &= (1 + b(x))|v|^{p-1}v + \lambda u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

considerando $N \geq 2$, $(u,v) \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $0 < \lambda < 1$ um parâmetro real, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} a(x) = 0 = \lim\limits_{|x|\to+\infty} b(x)$ e, ainda $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}(1+a(x)) > 0$ e $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}(1+b(x)) > 0$, além de assumirem normas $|a|_{L^\infty}$ e $|b|_{L^\infty}$ suficientemente pequenas.

Ambrosetti [4], usando métodos de perturbação, provou a existência de soluções para o sistema não autônomo não linear de equações de Schrödinger as quais são linearmente acopladas

$$\begin{cases} -u_1'' + u_1 &= (1+\varepsilon b_1(x))u_1^3 + \gamma u_2 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \\ -u_2'' + u_2 &= (1+\varepsilon b_2(x))u_2^3 + \gamma u_1 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde γ e ε são parâmetros reais, $b_i \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} b_i(x) = 0$; $u_1, u_2 \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ com $i = 1, 2$. Quando $\varepsilon = 0$, este sistema foi estudado em [3] do ponto de vista analítico e numérico e quando $b_i \equiv 0$ e $\varepsilon = 1$, o sistema foi estudado por [6] mostrando a existência de solução com componente multi-bump.

Em 2013, Zhang, Xu e Zhang em [48] estudaram o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + (1+a(x))u &= F_u(u,v) + \lambda v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + (1+b(x))v &= F_v(u,v) + \lambda u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

para $N \geq 2$, a, b periódicos ou assintoticamente periódicos e F superlinear. A ferramenta utilizada para mostrar a existência de *ground state* positiva foi a variedade de Nehari e princípio de concentração de compacidade.

Lehrer e Maia em [29] estudaram o problema $-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u)$ em $\mathbb{R}^N$, com f assintoticamente linear no infinito e impondo várias hipóteses sobre $a(x)$. Usando a variedade de Pohozaev e argumentos de *Linking*, as autoras provaram a existência de solução *bound state* para o problema. Com as devidas adaptações, Lehrer e Maia também garantiram a existência de solução não nula via Teorema de *Linking* para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = a(x)\dfrac{u\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\[2ex] -\Delta v + v = a(x)\dfrac{v\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Apesar de no caso modelo o termo não linear f, assintoticamente linear, satisfazer a hipótese $f(t)/t$ crescente para $t > 0$, ou no caso do sistema $\nabla F(tu,tv)(u,v)/t$ crescente na variável t, para $(u,v) \neq (0,0)$ e permitir a projeção sobre a variedade de Nehari do funcional e a obtenção de pontos críticos dos funcionais associados sob este vínculo, este aspecto não foi utilizado em [29] permitindo-se não linearidades mais gerais, sem esta característica. Assim sendo, tanto no caso escalar quanto no caso do sistema foram usadas projeções sob a variedade de Pohozaev do funcional. Entretanto para tratar os termos não lineares não homogêneos com hipóteses de crescimento menos restritivas, foram necessárias hipóteses extras de regularidade e crescimento sobre o peso $a(x)$.

Existe uma motivação Física para o estudo deste tipo de sistema de duas equações de Schrödinger acopladas, nas quais encontra-se um acoplamento linear nas duas componentes. Um exemplo é o sistema de duas equações que modelam os condensados de Bose-Einstein compostos por dois estados hiperfinos (Ver [11] e suas referências). Tais modelos consideram um grande número de pequenos componentes individuais que interagem uns com os outros; o fenômeno é descrito pelas equações de Gross-Pitaevskii em [34, 35]

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \psi_1}{\partial t} = (L_1 + U_{11}|\psi_1|^2 + U_{12}|\psi_2|^2)\psi_1 + \lambda\psi_2, \\ i\dfrac{\partial \psi_2}{\partial t} = (L_2 + U_{22}|\psi_2|^2 + U_{21}|\psi_2|^2)\psi_2 + \lambda\psi_1, \end{cases} \tag{1}$$

onde $L_j = -\partial^2/\partial x^2 + V_j$ com $j = 1, 2$. Embora a dinâmica dos condensados acoplados de Bose-Einstein tenha atraído a atenção nos últimos anos, o problema acima também surge em outros contextos físicos, mais especificamente em modelos ópticos não-lineares em que as equações descrevem feixes de luz em fibras ópticas onde ψ_1 e ψ_2 representam o campo de luz dentro de ondas eletromagnéticas ou ondas sonoras em [47]. Os sistemas elípticos encontrados em [5, 29] podem ser obtidos de (1) quando se estuda a existência de soluções estacionárias (solitárias) para o sistema, isto é, uma solução da forma $\psi_1(x,t) = \exp(-iEt)u(x)$ e $\psi_2(x,t) = \exp(-iEt)v(x)$.

Inspirados pelos trabalhos de Ambrosetti - Cerami - Ruiz em [5], Clapp - Maia em [18] e Lehrer - Maia em [29], nos propusemos a estudar o seguinte sistema fortemente acoplado com não-linearidade assintoticamente linear no infinito

$$(\mathbb{S}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))\dfrac{u\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1 + a(x))\dfrac{v\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $N \geq 3$, $0 < \lambda < 1$ e s um parâmetro real satisfazendo $0 < s < \dfrac{1}{1+\lambda}$. Baseados no método de Bahri - Li em [9] realizamos estimativas de energia mais precisas e aplicamos um argumento topológico envolvendo a função baricentro para mostrar que existe um valor crítico para o funcional relacionado com a equação de Euler do sistema $(\mathbb{S})$, em um nível adequado de energias, dando uma solução para o sistema.

Comparando-se com as obras mencionadas acima, podemos destacar alguns aspectos relevantes. Distintamente do método em [5] que trata do problema homogêneo, utilizamos técnicas de combinação convexa de duas cópias da solução *ground state* transladadas, técnica introduzida por Bahri-Li em [9], para tratarmos do nosso problema não homogêneo. Além disso, diferentemente de [5] que admite $|a|_{L^\infty}$ e $|b|_{L^\infty}$ suficientemente pequenas, estamos livres para não assumir esta restrição nas normas do supremos, porém assumir um decaimento exponencial para $a(x)$, visto que $a(x)$ é positivo e/ou negativo (isto é, podendo mudar de sinal). Complementando os resultados em [29], trabalhamos com a variedade de Nehari em vez da variedade de Pohozaev o que nos permitiu trabalhar com funções pesos $a(x)$ contínuas e assim mais gerais do que os pesos de classe C^2 encontrados em [29]. Por fim, destacamos a necessidade de demonstrar o decaimento exponencial da solução do problema limite relacionado ao sistema $(\mathbb{S})$ na Seção 2.2, visto que o resultado provavelmente existe na literatura, entretanto não encontramos uma referência.

Vamos assumir as seguintes hipóteses sobre a função peso para o sistema $(\mathbb{S})$

(a_1) $a \in C(\mathbb{R}^N)$; $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}(1 + a(x)) = \varsigma > 0$ e $\lim\limits_{|x|\to+\infty} a(x) = 0$;

(a_2) $|a(x)| \leq Ce^{-k|x|}$ onde $k \in \left(2\sqrt{1-\lambda}, 4\sqrt{1-\lambda}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e C uma constante positiva;

(U) A solução positiva $(u,v), u>0, v>0$ do sistema limite

$$(\mathbb{S}_\infty) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{u\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda v, & \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = \dfrac{v\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda u, & \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

é única ou qualquer solução positiva está no mesmo nível de energia do funcional associado a $(\mathbb{S}_\infty)$.

O nosso principal resultado sobre sistemas é o seguinte teorema

Teorema 0.2. *Assuma* $0<\lambda<1,\ 0<s<\dfrac{1}{1+\lambda}$*, as hipóteses* $(a_1),(a_2)$ *e* (U)*, então o problema* $(\mathbb{S})$ *tem uma solução positiva* $(u,v)\in H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)$*. Além disso, se* $a\in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$*, então a solução* (u,v) *é clássica.*

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1, estudaremos o problema escalar

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1+a(x))f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

realizando algumas estimativas de energia e aplicando um argumento topológico envolvendo a função baricentro para mostrar que existe um valor crítico para o funcional relacionado com a equação de Euler do problema acima, em um nível adequado de energias, dando uma solução para o problema. Especificamente, na Seção 1.1 trataremos de alguns resultados auxiliares; na Seção 1.2 estudaremos a compacidade da sequência de Palais-Smale para o funcional associado; na Seção 1.3 demonstraremos a projeção sobre a variedade de Nehari; na Seção 1.4 realizaremos as estimativas de energia assintótica do funcional associado e decaimento exponecial das soluções do problema limite, por fim, na Seção 1.5 apresentaremos a prova do resultado principal deste capítulo utilizando argumentos topológicos.

No Capítulo 2, estudaremos o sistema do tipo gradiente não homogêneo, fortemente acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1+a(x))\dfrac{u\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1+a(x))\dfrac{v\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $0<\lambda<1$ e s é um parâmetro real satisfazendo $0<s<\dfrac{1}{1+\lambda}$. Mostraremos primeiramente o decaimento exponencial da solução do problema limite na Seção 2.2 e, obteremos uma solução positiva para o sistema seguindo a técnica utilizada no caso escalar e em Clapp - Maia [18]. Especificamente, na Seção 2.1 trataremos de alguns resultados preliminares; na Seção 2.2 estudaremos o decaimento exponecial das soluções do problema limite; na Seção 2.3 estudaremos a variedade de Nehari e provaremos a limitação da sequência de Palais-Smale; na Seção 2.4 estudaremos a compacidade da sequência de Palais-Smale para o funcional associado; na Seção 2.5 estudaremos as estimativas assintóticas do funcional associado; por fim, na Seção 2.6 apresentaremos a prova do resultado principal deste capítulo.

Capítulo
1

Caso escalar

Neste capítulo, como descrito na introdução, estudaremos o problema

$$(P_a) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = (1+a(x))f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Vamos assumir $N \geq 2$ e também as seguintes hipóteses para a função peso:

(a_1) $a \in C(\mathbb{R}^N)$; $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}(1+a(x)) = \tau > 0$ e $\lim\limits_{|x|\to+\infty} a(x) = 0$;

(a_2) existem constantes p_1, p_2 com $1 < p_1 \leq p_2 < 2^* - 1$ tais que $|a(x)| \leq C_1 e^{-k|x|}$ onde $k \in (2, p_1+1)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e C_1 uma constante positiva.

Outrossim, vamos considerar f não necessariamente homogênea satisfazendo

(f_1) $f \in C^1[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$;

(f_2) f e sua derivada de primeira ordem têm o seguinte crescimento

$$\left| f^{(k)}(t) \right| \leq C(|t|^{p_1-k} + |t|^{p_2-k}),$$

para $k \in \{0,1\}$ para $t > 0$ e onde $C > 0$ é uma constante;

(f_3) $f'(t) > \dfrac{f(t)}{t}$, se $t > 0$;

(f_4) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{t} \geq l_\infty > 1$ para algum $l_\infty \in \mathbb{R}$;

(f_5) $\lim\limits_{t\to+\infty} \{f(t)t - 2F(t)\} = +\infty$, em que $F(t) := \displaystyle\int_0^t f(\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma$;

(U) A solução positiva do problema (P_∞) é única.

Observação 1.1. *Note que a hipótese (f_3) implica que*

$$\frac{1}{2}f(t)t - F(t) > 0, \quad se \ \ t \neq 0. \tag{1.1}$$

Esta implicação junto com a hipótese (f_5) *é conhecido por condição de não quadraticidade de* f.

Observação 1.2. *Note também que a hipótese* (f_2) *implica que, para toda constante positiva* μ *satisfazendo* $0 < 1 + \mu < p_1$, *tem-se* $f(u) = o(|u|^{1+\mu})$, *quando* $|u| \to 0$.

Como o problema é variacional, nós precisamos introduzir ferramentas variacionais para podermos demonstrar os resultados subsequentes. Inicialmente vamos definir $f(t) := -f(-t)$ para $t < 0$. Assim temos que f é de classe $C^2(\mathbb{R})$ e é uma função ímpar. É importante observar que se u é solução positiva do problema (P_a) para essa nova função, u é também solução do problema (P_a) para a função original. Vamos, então, considerar esta extensão e estabelecer a existência de solução positiva para o problema.

Iremos usar a constante geral $C > 0$ para simplificar a notação e assim C não será sempre a mesma constante no que segue. Considerando o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N)$ com o produto interno definido por

$$\langle u, v\rangle := \int_{R^N} (\nabla u \nabla v + uv)\, \mathrm{d}x$$

e a norma associada

$$\|u\|^2 := \int_{R^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) \mathrm{d}x.$$

O funcional associado ao problema (P_a) é definido por

$$I(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{R^N} (1 + a(x))F(u)\, \mathrm{d}x \tag{1.2}$$

e a sua derivada

$$I'(u)v = \langle u, v\rangle - \int_{R^N} (1 + a(x))f(u)v\, \mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

Trabalharemos com a variedade de Nehari definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus \{0\}\,;\, J(u) = 0\right\} \\ &= \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus \{0\}\,;\, \|u\|^2 = \int_{R^N} (1 + a(x))f(u)u\, \mathrm{d}x\right\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

cujo funcional associado é

$$J(u) := I'(u)u = \|u\|^2 - \int_{R^N} (1 + a(x))f(u)u\, \mathrm{d}x. \tag{1.5}$$

Consideremos também o nível de energia mínima associado ao funcional I definido por

$$m := \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u). \tag{1.6}$$

Associado ao problema (P_a), por (a_1), utilizaremos fortemente o problema limite

$$(P_\infty) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

e, associado a este problema limite, definimos o nível de energia mínima:

$$m_\infty := \inf_{u\in\mathcal{N}_\infty} I_\infty(u), \tag{1.7}$$

para o funcional associado definido por

$$I_\infty(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{R^N} F(u)\,\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

e sua derivada dada por

$$I'_\infty(u)v = \langle u, v\rangle - \int_{R^N} f(u)v\,\mathrm{d}x, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{1.9}$$

Analogamente, o funcional associado a $\mathcal{N}_\infty$ é definido por

$$J_\infty(u) := I'_\infty(u)u = \|u\|^2 - \int_{R^N} f(u)u\,\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

1.1 Preliminares e resultados auxiliares

Feitas estas considerações iniciais, nós pretendemos demonstrar o primeiro resultado que contém as propriedades principais sobre a variedade $\mathcal{N}$ associada ao funcional I.

Lema 1.1. *A variedade $\mathcal{N}$ satisfaz:*

a) existe um número $\alpha > 0$ tal que para todo $u \in \mathcal{N}$ tem-se $\|u\| \geq \alpha$;

b) $\mathcal{N}$ é uma subvariedade fechada, de classe C^2 em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e é variedade natural para I;

c) para todo $u \in \mathcal{N}$, a função $t \mapsto g(t) := I(tu)$ é estritamente crescente no intervalo $[0, 1)$ e estritamente decrescente no intervalo $(1, +\infty)$. Assim, em particular, pode-se afirmar que

$$I(u) = \max_{t>0} I(tu) > 0.$$

Demonstração: Verificação de (a) Por (a_1) temos $a \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Segue que $1 + \|a(x)\|_\infty \leq C$. Usando a expressão de J em (1.5), (f_2), para todo $u \in \mathcal{N}$ obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &= I'(u)u = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(u)u\,\mathrm{d}x \\ &\geq \|u\|^2 - C\int_{\mathbb{R}^N} (|u|^{p_1+1} + |u|^{p_2+1})\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Note que $2 < p_1 + 1 \leq p_2 + 1$. Logo, existe um $t \in (0, 1)$ que nos permite escrever $p_1 + 1 = 2t + (1 - t)(p_2 + 1)$. Daí, pela desigualdade de Hölder segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2t}\,|u|^{(1-t)(p_2+1)}\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,\mathrm{d}x\right)^t \left(\int_{R^N} |u|^{p_2+1}\,\mathrm{d}x\right)^{1-t}$$

com $p = \dfrac{1}{t}$ e $p' = \dfrac{1}{1-t}$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1+1}\,\mathrm{d}x \leq \|u\|^{2t}_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\|u\|^{(p_2+1)(1-t)}_{L^{p_2+1}(\mathbb{R}^N)}.$$

Desde que temos a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq q \leq 2^*$ e temos $p_2+1 < 2^*$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1+1}\,\mathrm{d}x \leq \|u\|_{H^1}^{2t}\,\|u\|_{H^1}^{(p_2+1)(1-t)}.$$

Sabendo, pela desigualdade de Young que $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} = ta^{1/t} + (1-t)b^{1/(1-t)}$, podemos reescrever a expressão anterior da seguinte forma

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1+1}\,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{C}\,\|u\|_{H^1}^{2t}\,C\,\|u\|_{H^1}^{(p_2+1)(1-t)} \\ &\leq \frac{t}{C}\,\|u\|_{H^1}^{2} + (1-t)(C)^{1/(1-t)}\,\|u\|_{H^1}^{p_2+1}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Usando a imersão contínua novamente temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_2+1}\,\mathrm{d}x = C\,\|u\|_{L^{p_2+1}(\mathbb{R}^N)}^{p_2+1} \leq C\,\|u\|_{H^1}^{p_2+1}. \tag{1.13}$$

Usando as estimativas (1.12) e (1.13) na expressão de J em (1.11) obtemos

$$\begin{aligned}J(u) &\geq \|u\|^2 - t\,\|u\|^2 - C\,\|u\|^{p_2+1} \\ &= (1-t)\,\|u\|^2 - C\,\|u\|^{p_2+1}.\end{aligned}$$

Por fim, se $u \in \mathcal{N}$ temos $J(u) = 0$. Segue que

$$\|u\|^{p_2-1} = C\frac{\|u\|^{p_2+1}}{\|u\|^2} \geq \frac{1-t}{C}.$$

Portanto, existe $\alpha > 0$ tal que $\|u\| \geq \alpha, \forall\, u \in \mathcal{N}$.
Verificação de (b) Note que $\mathcal{N} := \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}\,;\, J(u) = 0\right\} = J^{-1}(\{0\})$. Como J é contínuo, segue que $\mathcal{N}$ é uma subvariedade fechada de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Além disso, derivando-se o funcional J em (1.5) e aplicando em $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$J'(u)v = 2\langle u, v\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))\,[f'(u)u + f(u)]\,v\,\mathrm{d}x.$$

Em particular, tomando-se $v = u$, segue que

$$\begin{aligned}J'(u)u &= 2\langle u, u\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))\,[f'(u)u + f(u)]\,u\,\mathrm{d}x \\ &= 2\,\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))\,[f'(u)u + f(u)]\,u\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Se $u \in \mathcal{N}$, então $J(u) = 0$, isto é, $\|u\|^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(u)u\,\mathrm{d}x$.

Substituindo na expressão (1.14) temos por (a_1) e (f_3)

$$\begin{aligned} J'(u)u &= 2\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))f(u)u\,\mathrm{d}x \\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left[f'(u)u+f(u)\right]u\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left[-f'(u)u^2+f(u)u\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left[-f'(u)u+f(u)\right]u.\frac{u}{u}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left[\frac{f(u)-f'(u)u}{u}\right]u^2\,\mathrm{d}x<0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

De fato, se a condição (f_3) é verdade, seja $u>0$, então $\dfrac{-f(u)+f'(u)u}{u}>0$. Isto significa que se $u>0$, então $\dfrac{f(u)}{u}$ é crescente. Agora, se considerarmos $u<0$, por (f_3), segue que $\dfrac{f(u)}{u}$ é descrescente. Para verificar isto, note que

$$\left(\frac{f(u)}{u}\right)'=\frac{f'(u)u-f(u)}{u^2}.$$

Como f é ímpar, sua derivada será par. Daí, fazendo $v=-u>0$ segue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(u)}{u}\right)' &= \frac{f'(-v)(-v)-f(-v)}{-v}\frac{1}{-v} \\ &= \frac{f'(v)(-v)+f(v)}{v}\frac{1}{-v} \\ &= \frac{f'(v)(v)-f(v)}{v}\frac{1}{-v}<0. \end{aligned}$$

Segue que $f'(u)u-f(u)<0$, caso $u<0$. Tomando a integral em (1.15) nos conjuntos $\{u>0\}$ e $\{u<0\}$ para u em $\mathcal{N}$ segue que

$$J'(u)u<0.$$

Isto implica que 0 é um valor regular de $J:H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$. Assim, $J^{-1}(\{0\})$ é um conjunto fechado, por ser a imagem inversa de um conjunto fechado por um funcional contínuo. Como $\{u\equiv 0\}$ é um ponto isolado de $J^{-1}(\{0\})$, então temos que $\mathcal{N}$ é de classe C^2 e é uma variedade natural para I.

Verificação de (c) Pelo item (a) existe um $\alpha>0$ tal que $\|u\|\geq\alpha$ e, portanto, que u não é identicamente zero. Defina os seguintes conjuntos:

$$\Gamma^+=\left\{x\in\mathbb{R}^N: u(x)>0\right\}$$

e

$$\Gamma^-=\left\{x\in\mathbb{R}^N: u(x)<0\right\}.$$

Como o funcional associado ao problema (P_a) é definido por

$$I(u):=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_{R^N}(1+a(x))F(u)\,\mathrm{d}x,$$

considere $t>0$ e u fixado, definimos

$$g(t) := I(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \int_{R^N}(1+a(x))F(tu)\,\mathrm{d}x.$$

Derivando g em relação a t e usando os conjuntos Γ^+, Γ^- definidos anteriormente, segue que

$$\begin{aligned}
g'(t) &= t\|u\|^2 - \int_{R^N}(1+a(x))f(tu)u\,\mathrm{d}x \\
&= t\|u\|^2 - \frac{t}{t}\int_{R^N}(1+a(x))f(tu)u\,\mathrm{d}x \\
&= t\left\{\|u\|^2 - \int_{R^N}(1+a(x))\frac{f(tu)}{t}u\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= t\left\{\int_{R^N}(1+a(x))f(u)u\,\mathrm{d}x - \int_{R^N}(1+a(x))\frac{f(tu)}{t}u\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= t\left\{\int_{R^N}(1+a(x))\left(\frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu}\right)u^2\,\mathrm{d}x\right\},
\end{aligned}$$

e reescrevendo $g'(t)$,

$$g'(t) = t\left\{\int_{\Gamma^+}(1+a(x))\left(\frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu}\right)u^2\,\mathrm{d}x\right\} + t\left\{\int_{\Gamma^-}(1+a(x))\left(\frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu}\right)u^2\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Agora observe que se $t \in (0,1)$ e $u \in (0,+\infty)$ temos $tu < u$. Pela hipótese (f_3) temos $\dfrac{f(tu)}{tu} < \dfrac{f(u)}{u}$. Além disso por (a_1) segue que $(1+a(x)) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N$ e resulta que $g'(t) > 0$, isto é, g é estritamente crescente. Se $t \in (0,1)$ e $u \in (-\infty, 0)$ temos $u < tu < 0$ e assim

$$\frac{f(tu)}{tu} = -\frac{f(t(-u))}{tu} = \frac{f(t(-u))}{t(-u)} < \frac{f(-u)}{-u} = \frac{f(u)}{u},$$

analogamente segue que $g'(t) > 0$. De maneira análoga, se $t \in (1,+\infty)$ e $u \in (-\infty, 0)$ temos $u > tu$. Pela hipótese (f_3) temos $\dfrac{f(tu)}{tu} > \dfrac{f(u)}{u}$. Além disso, por (a_1), segue que $(1+a(x)) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N$ e resulta que $g'(t) < 0$, isto é, g é estritamente decrescente. Analogamente, se $t \in (1,+\infty)$ e $u \in (0,+\infty)$. Portanto, temos para todo $u \in \mathcal{N}$ que

$$g(1) := I(u) = \max_{t>0} g(t) = \max_{t>0} I(tu).$$

$\square$

O próximo resultado nos dá uma limitação para uma sequência em $\mathcal{N}$ em qualquer nível d fixado. Isto nos permitirá usar o Lema de Splitting posteriormente.

Lema 1.2. *Suponha que exista uma sequência $\{u_n\}$ em $\mathcal{N}$ satisfazendo*

$$I(u_n) \to d.$$

Então a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Primeiramente fixemos um número real $D > d \geq 0$, por (1.1). Argumentando por contradição, suponha que a sequência $\{u_n\}$ não seja limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $\|u_n\| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$.

Defina agora $\varphi_n := t_n u_n$ onde $t_n := \dfrac{2\sqrt{D}}{\|u_n\|}$. Desta forma, note que

$$\|\varphi_n\| = \frac{2\sqrt{D}}{\|u_n\|}\|u_n\| = 2\sqrt{D} < \infty.$$

Então a sequência $\{\varphi_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para n suficientemente grande, usando o Lema 1.1 (c) segue que

$$D > I(u_n) = \max_{t>0} I(tu_n) \geq I(t_n u_n) = I(\varphi_n).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} D > I(\varphi_n) &= \frac{1}{2}\|\varphi_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F(\varphi_n)\,\mathrm{d}x \\ &= 2D - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F(\varphi_n)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Assim, temos por (a_1) que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$D < \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F(\varphi_n)\,\mathrm{d}x \leq C\int_{\mathbb{R}^N} F(\varphi_n)\,\mathrm{d}x.$$

Usando agora a condição (f_2) segue a seguinte desigualdade

$$D < C\int_{\mathbb{R}^N}(|\varphi_n|^{p_1+1} + |\varphi_n|^{p_2+1})\,\mathrm{d}x = C\left(\|\varphi_n\|_{p_1+1}^{p_1+1} + \|\varphi_n\|_{p_2+1}^{p_2+1}\right). \tag{1.16}$$

Como a sequência $\{\varphi_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos somente dois casos a considerar:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)}|\varphi_n|^2\,\mathrm{d}x\right) = 0;$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)}|\varphi_n|^2\,\mathrm{d}x\right) > 0.$

Suponha que o primeiro caso seja verdade. Usando o Lema de Lions (Lema 1.21 em [46]), temos $\varphi_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$. Por hipótese, temos $2 < p_1 + 1 \leq p_2 + 1 < 2^*$. Isto significa que $\varphi_n \to 0$ em $L^{p_i+1}(\mathbb{R}^N)$, com $i = 1, 2$. Usando este fato, temos uma contradição com a desigualdade (1.16). Logo, a menos de subsequência, temos que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)}|\varphi_n|^2\,\mathrm{d}x\right) = \eta > 0.$$

Fixando $n \in \mathbb{N}$, por definição de supremo, existe uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_n)}|\varphi_n|^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{\eta}{4}. \tag{1.17}$$

Defina a sequência $\psi_n := \varphi_n(x + y_n)$ e utilizando a invariância das integrais por translação,

$$\|\psi_n\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi_n(x+y_n)|^2 + |\varphi_n(x+y_n)|^2\right)^{1/2} = \|\varphi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 2\sqrt{D}.$$

Em outras palavras, temos que $\{\psi_n\}$ é limitada em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Pelas imersões de Sobolev e como $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ é espaço reflexivo segue que

- $\psi_n \rightharpoonup \varphi$ em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$;
- $\psi_n \to \varphi$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq p < 2^*$;
- $\psi_n(x) \to \varphi(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Consequentemente,

$$\psi_n \to \varphi \quad \text{em} \quad L^2(B_1(0)).$$

Fazendo uma mudanca de variáveis, segue por (1.17)

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty} \int_{B_1(0)} |\psi_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{B_1(0)} |\varphi_n(x+y_n)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{B_1(y_n)} |\varphi_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x \geq \frac{\eta}{4} > 0.
\end{aligned}$$

Assim existe um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de medida de Lebesgue positiva em $B_1(0)$ em que $\varphi(x) \neq 0, \forall\, x \in \Omega$. Observe que a convergência pontual em $\mathbb{R}^N$ nos dá

$$0 < |\varphi(x)| = \lim_{n\to+\infty} |\varphi_n(x+y_n)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{D}\,|u_n(x+y_n)|}{\|u_n(x+y_n)\|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{D}\,|u_n(x+y_n)|}{\|u_n\|},$$

para todo $x \in \Omega$. Visto que $\|u_n\| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, necessariamente temos que

$$|u_n(x+y_n)| \to +\infty, \;\; \text{para todo} \;\; x \in \Omega.$$

Desde que $\{u_n\}$ está contida em $\mathcal{N}$, podemos usar o Lema de Fatou, (1.1), a condição (f_5), (1.1) e (a_1) e obter

$$\begin{aligned}
D &> \lim_{n\to+\infty} I(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(u_n)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n))\,\mathrm{d}x \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \tau \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) \mathrm{d}x \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \tau \left(\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n))\right) \mathrm{d}x \\
&> \liminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega} \tau \left(\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n))\right) \mathrm{d}x \\
&\geq \int_{\Omega} \tau \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n))\right) \mathrm{d}x = +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, temos uma contradição e o segundo caso também não pode acontecer. A contradição veio do fato de supor que a sequência $\{u_n\}$ não era limitada em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ e, portanto, finalizamos a demonstração do lema.

$\square$

O resultado seguinte mostra a positividade do ínfimo do funcional associado ao problema (P_a) sobre a variedade $\mathcal{N}$.

Lema 1.3. *Seja m definida em* (1.6). *Então tem-se $m > 0$.*

Demonstração: : A demonstração deste resultado requer o Lema de Lions como já utilizado no Lema 1.2. Primeiramente consideremos uma sequência minimizante $\{u_n\}$ na variedade de Nehari tal que $I(u_n) \to m$. Pelo Lema 1.2 temos que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Assim, utilizando as condições $(a_1), (f_2)$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 0 < \alpha^2 \leq \|u_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) f(u_n) u_n \, \mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n|^{p_1+1} + |u_n|^{p_2+1} \right) \mathrm{d}x \\ &= C \left(\|u_n\|_{p_1+1}^{p_1+1} + \|u_n\|_{p_2+1}^{p_2+1} \right). \end{aligned}$$

Argumentando como no Lema 1.2, pelo Lema de Lions, existe uma constante $\eta_1 > 0$ e uma sequência $\{y_n\} \in \mathbb{R}^N$ tais que

$$\int_{B_1(y_n)} (u_n)^2 \, \mathrm{d}x = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y_n)} (u_n)^2 \, \mathrm{d}x \geq \frac{\eta_1}{4} > 0.$$

Defina a sequência $\psi_n := u_n(x + y_n)$ e note que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|\psi_n\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x + y_n)|^2 + |u_n(x + y_n)|^2 \right)^{1/2} = \|u_n\| \leq M.$$

Em outras palavras, $\{\psi_n\}$ é uma sequência limitada em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Pelas imersões de Sobolev e como $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ é espaço reflexivo segue que

- $\psi_n \rightharpoonup u$ em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$;
- $\psi_n \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq p < 2^*$;
- $\psi_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Consequentemente, $\psi_n \to u \quad \text{em} \quad L^2(B_1(0))$.
Por mudanca de variáveis, segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x &= \lim_{n \to +\infty} \int_{B_1(0)} |\psi_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_{B_1(0)} |u_n(x + y_n)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_{B_1(y_n)} |u_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x \geq \frac{\eta_1}{4} > 0. \end{aligned}$$

Assim, existe um subcontjunto Ω_1 de medida de Lebesgue positiva em $B_1(0)$ no qual $u(x) \neq 0, \forall\, x \in \Omega_1$. Usando o Lema de Fatou, a condição (f_3) e (a_1) segue que

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{n\to+\infty} I(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F(u_n)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right)\mathrm{d}x\\
&\geq \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\tau\left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right)\mathrm{d}x\\
&= \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\tau\left(\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n))\right)\mathrm{d}x\\
&> \liminf_{n\to+\infty}\int_{\Omega}\tau\left(\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n))\right)\mathrm{d}x\\
&\geq \int_{\Omega}\tau\liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n))\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_{\Omega}\tau\left(\frac{1}{2}f(u)u - F(u)\right)\mathrm{d}x > 0.
\end{aligned}
$$

Assim, segue o resultado desejado.

□

Lema 1.4. *Suponha que u seja uma solução do problema (P_a) com $I(u)$ no intervalo $[m,2m)$. Então a solução u não muda de sinal.*

Demonstração: Seja u uma solução fraca do problema (P_a), então $I'(u)=0$, isto é, $I'(u)v=0$ para todo $v\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Em particular, $I'(u)u^+=0$ e $I'(u)u^-=0$ onde consideramos $u^+=\max\{u,0\}$ e $u^-=\min\{u,0\}$. Note que se $I'(u)u^+=0$, então $\langle u,u^+\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))f(u)u^+\,\mathrm{d}x=0$, ou seja,

$$
\langle u,u^+\rangle - \left\{\int_{\{u\geq 0\}}(1+a(x))f\left(u^+\right)u^+\,\mathrm{d}x + \int_{\{u<0\}}(1+a(x))f\left(u^-\right)u^+\,\mathrm{d}x\right\} = 0,
$$

isto é, $\|u^+\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))f\left(u^+\right)u^+\,\mathrm{d}x=0$. Portanto, $I'\left(u^+\right)u^+=0$ e, similarmente, $I'\left(u^-\right)u^-=0$.

Suponha que $u^+\neq 0$ e $u^-\neq 0$, então pelo que acabamos de ver temos que u^+ e u^- estão na variedade $\mathcal{N}$ e ainda

$$
\begin{aligned}
I(u) &= I(u^+ + u^-) = \frac{1}{2}\|u^+ + u^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F(u^+ + u^-)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\langle u^+ + u^-, u^+ + u^-\rangle - \int_{\{u\geq 0\}}(1+a(x))F(u^+ + u^-)\,\mathrm{d}x\\
&\quad - \int_{\{u<0\}}(1+a(x))F(u^+ + u^-)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\left\{\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2\right\} - \int_{\{u\geq 0\}}(1+a(x))F(u^+)\,\mathrm{d}x\\
&\quad - \int_{\{u<0\}}(1+a(x))F(u^-)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\left\{\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2\right\} - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F\left(u^+\right)\,\mathrm{d}x\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F\left(u^-\right)\,\mathrm{d}x\\
&= I(u^+) + I(u^-) \geq 2m.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, por hipótese $I(u)<2m$ e como m é estritamente positivo pelo Lema 1.3, obtemos uma contradição e assim finalizamos a demonstração .

□

Observação 1.3. *Note que o resultado do Lema 1.4 se aplica analogamente ao funcional I_∞ definido em (1.8) , isto é, suponha que u é uma solução do problema (P_∞) com $I_\infty(u)$ no intervalo $[m_\infty, 2m_\infty)$. Então a solução u não muda de sinal.*

Um conceito importante e bastante conhecido que utilizaremos é o conceito de sequência de Palais-Smale. Dizemos que uma sequência $\{u_n\}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência $(PS)_c$ para alguma constante c, se $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, se $n \to +\infty$. Caso a sequência $\{u_n\}$ possua subsequência convergente, dizemos que o funcional I satisfaz $(PS)_c$ no nível c.

O próximo lema nos dá uma importante informação sobre uma sequência (PS) do funcional I restrito à variedade $\mathcal{N}$ no espaco $H^1(\mathbb{R}^N)$. Aqui é o momento em que precisamos utilizar a condição de crescimento (f_2) para a derivada de f.

Lema 1.5. *Suponha que $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para I restrito à variedade $\mathcal{N}$. Então, a menos de subsequência, a sequência $\{u_n\}$ é também uma sequência $(PS)_d$ para o funcional I em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Primeiramente supomos que exista uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$ do tipo $(PS)_d$ para I restrito à variedade $\mathcal{N}$. Por definição,

$$I(u_n) \to d \ \text{ e } \ (I\,|_{\mathcal{N}})'(u_n) \to 0. \tag{1.18}$$

Usando o Lema 1.2, como a sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$ e $I(u_n) \to d > 0$, então a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Para toda $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, como a sequência $\{u_n\}$ é limitada e usando a desigualdade de Hölder e a condição de crescimento (f_2) segue que

$$\begin{aligned}
|J'(u_n)v| &= \left|2\langle u_n, v\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))(f'(u_n)u_n + f(u_n))v\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq 2\|u_n\|\|v\| + \int_{\mathbb{R}^N}|(1+a(x))|\,|(f'(u_n)u_n + f(u_n))|\,|v|\,\mathrm{d}x \\
&\leq 2\|u_n\|\|v\| + c_a\int_{\mathbb{R}^N}|(f'(u_n)u_n + f(u_n))|\,|v|\,\mathrm{d}x \\
&\leq C\Big\{\|v\|\|u_n\| + c_2\int_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{p_1} + |u_n|^{p_2})\,|v|\,\mathrm{d}x\Big\} \\
&= C\Big\{\|v\|\|u_n\| + \int_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{p_1})\,|v|\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{p_2})\,|v|\,\mathrm{d}x\Big\} \\
&\leq C\Big\{\|v\|\|u_n\| + \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|u_n|^{p_1+1}\right)\mathrm{d}x\right)^{p_1/(p_1+1)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|v|^{p_1+1}\right)\mathrm{d}x\right)^{1/(p_1+1)}\Big\} \\
&\quad + C\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|u_n|^{p_2+1}\right)\mathrm{d}x\right)^{p_2/(p_2+1)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|v|^{p_2+1}\right)\mathrm{d}x\right)^{1/(p_2+1)}\right\} \\
&= C\Big\{\|v\|\|u_n\| + \|u_n\|_{p_1+1}^{p_1}\|v\|_{p_1+1} + \|u_n\|_{p_2+1}^{p_2}\|v\|_{p_2+1}\Big\} \\
&\leq C\Big\{\|v\|\|u_n\| + \|u_n\|^{p_1}\|v\| + \|u_n\|^{p_2}\|v\|\Big\}.
\end{aligned}$$

Como a sequência $\{u_n\}$ é limitada, então para toda $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$|J'(u_n)v| \leq C\|v\|.$$

Isto mostra que a sequência $\{J'(u_n)\}$ é limitada em $H^{-1}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Consequentemente,

$$|J'(u_n)u_n| \leq \|J'(u_n)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C, \tag{1.19}$$

em que a constante C não depende de $\{u_n\}$. A menos de subsequência, a sequência de números reais positivos

$$\lambda_n := |J'(u_n)u_n| \to \lambda \geq 0.$$

Além disso, como $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$, pelo Lema 1.1$(a)$ temos que $\|u_n\| \geq \alpha > 0$ e argumentando como na demonstração do Lema 1.3, usando o Lema de Lions, (a_1) e (f_3) segue que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$ e $u(x) \neq 0$ q.t.p. $x \in \Omega_0$ onde Ω_0 é um conjunto de medida positiva . Daí usando o Lema de Fatou e o fato de que $f'(t)t - f(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{n\to+\infty} |J'(u_n)u_n| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left|\left\{2\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))\left(f'(u_n)u_n + f(u_n)\right)u_n \,\mathrm{d}x\right\}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left|\int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))\left(f'(u_n)u_n^2 - f(u_n)u_n\right) \mathrm{d}x\right| \\
&\geq \tau \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega_0} \left(f'(u_n(x))u_n^2(x) - f(u_n(x))u_n(x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \tau \int_{\Omega_0} \left(f'(u)u^2 - f(u)u\right) \mathrm{d}x \\
&= \tau \int_{\Omega_0} (f'(u)u - f(u))u \,\mathrm{d}x > 0.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Como $\mathcal{N}$ é uma variedade de codimensão 1 em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ (vide seção 6.3 em [7]), podemos escrever a projeção gradiente $(I\mid_{\mathcal{N}})'(u)$ sobre o plano tangente

$$T_u\mathcal{N} = \{\ v \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) : \langle J'(u), v\rangle = 0\}$$

por

$$(I\mid_{\mathcal{N}})'(u) = I'(u) - tJ'(u),$$

em que

$$t := \frac{\langle I'(u), J'(u)\rangle}{\|J'(u)\|^2}.$$

Desde que $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$ é uma sequência (PS) de I restrito à variedade de Nehari (pelo Lema 7.19 em [7]) existe uma sequência $\{t_n\}$ tal que

$$(I\mid_{\mathcal{N}})'(u_n) = I'(u_n) - t_nJ'(u_n), \tag{1.21}$$

dada por

$$t_n := \frac{\langle I'(u_n), J'(u_n)\rangle}{\|J'(u_n)\|^2};$$

note que $\|J'(u_n)\| \neq 0$ por (1.15).

O objetivo agora é mostrar que a sequência $\{t_n\}$ converge a zero se $n \to +\infty$ e assim concluiremos o lema. Por (1.18) e (1.21) segue que

$$0 = I'(u_n)u_n = (I\,|_{\mathcal{N}})'(u_n)u_n + t_n J'(u_n)u_n = o_n(1) + t_n J'(u_n)u_n. \tag{1.22}$$

Por (1.19) e (1.20) tem-se

$$C \geq |J'(u_n)u_n| \to \lambda > 0, \quad \text{se} \quad n \to +\infty,$$

e por (1.22) isto implica que, a menos de subsequência,

$$t_n \to 0, \quad \text{se} \quad n \to +\infty. \tag{1.23}$$

Assim, deduzimos de (1.18) e (1.23) que, a menos de subsequência de $\{u_n\}$,

$$I'(u_n) = (I\,|_{\mathcal{N}})'(u_n) + t_n J'(u_n) \to 0, \quad \text{se} \quad n \to +\infty.$$

Concluímos assim a demonstração do lema.

□

Os resultados clássicos relativos ao problema limite (P_∞) encontrados em [12], [13] , e [25] juntamente com o estudo da simetria radial e decaimento exponencial podem ser resumidos da seguinte forma: o problema tem uma solução de energia mínima ω tal que

i) $\omega > 0$ em $\mathbb{R}^N$;

ii) ω é radialmente simétrica: $\omega(x) = \omega(r)$, onde $r = |x|$ e ω decresce com respeito a r;

iii) $\omega \in C^2(\mathbb{R}^N)$;

iv) existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ satisfazendo

$$C_1(1+|x|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-|x|} \leq \omega(x) \leq C_2(1+|x|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.24}$$

Além disso, ω é único dependendo das hipóteses sobre f como em [26, 40].

Lema 1.6. *Não existe solução u para o problema (P_∞) tal que $I_\infty(u) \in (m_\infty, 2m_\infty)$.*

Demonstração: Se u é solução do problema (P_∞) tal que $I_\infty(u) \in (m_\infty, 2m_\infty)$, então pela Observação 1.3, u não muda de sinal, isto é, $u > 0$ ou $u < 0$. Sem perda de generalidade, considere $u > 0$ (no caso $u < 0$, como f é ímpar, segue que $-u > 0$ é solução). Pelos resultados clássicos, u é solução positiva, radialmente simétrica de (P_∞) e única, portanto, $u = \omega$ e $I_\infty(u) = m_\infty$ implicando em contradição com a hipótese.

□

1.2 Compacidade

O próximo resultado que enunciaremos será fundamental para o estudo dos pontos críticos do funcional I . Ele descreve como uma sequência de Palais - Smale de I se comporta assintoticamente.

Lema 1.7. *(Lema de Splitting) Suponha que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$I(u_n) \to d > 0 \quad e \quad (I|_{\mathcal{N}})'(u_n) \to 0 \quad em \quad H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Então, passando se necessário a uma subsequência, existem u_0 solução fraca de (P_a), um número $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, k funções $w^1, ..., w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$ soluções do problema limite (P_∞) e k sequências de pontos $\{y_n^j\}, 1 \leq j \leq k$ tais que

1. $u_n \to u_0$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *ou*
2. $|y_n^j| \to +\infty$ *e* $|y_n^j - y_n^i| \to +\infty; j \neq i;$
3. $u_n - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} w^j(\cdot - y_n^j) \to u_0$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$;
4. $I(u_n) \to d = I(u_0) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} I_\infty(w^j).$

Demonstração: O primeiro passo da demonstração é o Lema 1.5. A demonstração segue como em [33].

□

Como uma consequência dos Lemas 1.2 , 1.5 e 1.6 combinados com o Lema 1.7 temos o seguinte resultado.

Lema 1.8. *Suponha que o ínfimo m definido em (1.6) não seja atingido. Então $m \geq m_\infty$ e, ainda, o funcional I satisfaz a condição de Palais- Smale sobre $\mathcal{N}$ em qualquer nível do intervalo $(m_\infty, 2m_\infty)$.*

Demonstração: Considere uma sequência $\{u_n\}$ tal que satisfaz $(PS)_d$ para o funcional I restrito a $\mathcal{N}$. Então, a menos de subsequência, $\{u_n\}$ é limitada e é $(PS)_d$ para I em todo o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ pelos Lemas 1.2 e 1.5.

Suponha que o nível m não seja atingido. Se existisse uma sequência $u_n \to u_0$, pela continuidade do funcional I, teríamos $I(u_n) \to I(u_0) = d = m$. Contradição com a hipótese neste caso. Logo, não existe tal sequência; o que implica que a possibilidade (1) no Lema de Splitting não ocorre. Decorre então que valem $(2), (3)$ e (4).

Em primeiro lugar, suponha que $u_0 = 0$, então por (4), temos que

$$I(u_n) \to d = m = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(w^j) \geq 0 + kI_\infty(w) \geq km_\infty \geq m_\infty,$$

onde w é a solução de energia mínima para I_∞.

Em segundo lugar, assuma que $u_0 \neq 0$. Como u_0 pertence a $\mathcal{N}$, tem-se $I(u_0) > 0$. Segue que $m > km_\infty \geq m_\infty$. Logo, em ambos os casos, temos $m \geq m_\infty$ e assim a primeira parte do Lema está verificada.

Suponha que $d \in (m_\infty, 2m_\infty)$. Assim, para n suficientemente grande,

$$m_\infty < I(u_n) < 2m_\infty.$$

Se não existisse subsequência $\{u_n\}$ convergente, usando o Lema 1.7,

$$I(u_n) \to d = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(w^j).$$

Se $k \geq 2$, então

$$I(u_n) \to d = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(w^j) \geq 0 + kI_\infty(w) \geq km_\infty \geq 2m_\infty.$$

Isto configura um absurdo uma vez que $d < 2m_\infty$. Portanto, obrigatoriamente, tem-se $k = 1$. Neste caso, se $u_0 = 0$, então

$$2m_\infty > I_\infty(w^j) = d > m_\infty.$$

Isto é uma contradição com o Lema 1.6, pois não existe solução w^j de (P_∞) no intervalo $(m_\infty, 2m_\infty)$. Usando mais uma vez o Lema 1.7, como u_0 pertence a $\mathcal{N}$,

$$I(u_n) \to d = I(u_0) + 1.I_\infty(w^j) \geq m + I_\infty(w) = m + m_\infty \geq m_\infty + m_\infty = 2m_\infty.$$

Isto também configura uma contradição, visto que $d < 2m_\infty$. Neste caso, concluimos que k não pode ser maior ou igual a 1 e devemos ter $k = 0$ e, portanto, por (3) existe uma subsequência de $\{u_n\}$ convergente e o lema está provado.

□

1.3 Projeção sobre Nehari

O próximo passo é mostrar que o conjunto $\mathcal{N}$ é não vazio. Com tal objetivo, iremos trabalhar com $y_0 \in \mathbb{R}^N$ fixado, $\|y_0\| = 1$, $y \in \partial B_2(y_0)$ onde $B_2(y_0) := \left\{x \in \mathbb{R}^N; \|x - y_0\| \leq 2\right\}$ e com $0 \leq \lambda \leq 1$.

Como o problema limite (P_∞) tem uma solução *ground state* $w > 0$, trabalhamos com esta solução transladada, isto é,

$$w_0^R := w(x - Ry_0)$$

e

$$w_y^R := w(x - Ry)$$

e definimos uma combinação linear

$$z_{\lambda,y}^R := \lambda w(x - Ry_0) + (1 - \lambda)w(x - Ry) = \lambda w_0^R + (1 - \lambda)w_y^R. \tag{1.25}$$

Para demonstrarmos a projeção sobre $\mathcal{N}$ precisamos utilizar dois resultados. O primeiro deles é

Proposição 1.1. *Considere dois números reais $r \in (0, +\infty)$ e $\lambda \in [0, 1]$ e defina a seguinte função em duas variáveis*

$$\Phi(\lambda, r) := \lambda^2 \left(\|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} w^2 \, \mathrm{d}x \right), \tag{1.26}$$

onde w é a solução ground state do problema (P_∞). Então existe um número $S_0 < 0$ e $T_0 > 0$ de modo que $\forall\, r \geq T_0$ tem-se

$$\Phi(\lambda, r) + \Phi(1-\lambda, r) \leq S_0 < 0.$$

Demonstração: Começamos observando que decorre da hipótese (f_3) que a função Φ é decrescente na variável r. Por outro lado, derivando a função Φ em (1.26) com respeito a variável λ, fixando r, obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, r) &= 2\lambda\left(\|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} w^2 \, \mathrm{d}x\right) \\ &\quad + \lambda^2\left(-\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f^{'}(r\lambda w) r w r\lambda w - f(r\lambda w) r w}{(r\lambda w)^2} w^2\right) \end{aligned} \tag{1.27}$$

Como w é a solução positiva *ground state* do problema (P_∞), então w satisfaz

$$-\Delta w + w = f(w).$$

Segue que

$$\|w\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w|^2 + w^2\right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(w) w \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(w)}{w} w^2 \, \mathrm{d}x. \tag{1.28}$$

Substituindo (1.28) em (1.27), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, r) &= 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}\right) w^2 \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \lambda^2 \left(-\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f^{'}(r\lambda w)}{\lambda} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda^2 w}\right] w^2 \, \mathrm{d}x\right) \\ &= 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}\right) w^2 \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left[-f^{'}(r\lambda w)\lambda + \frac{f(r\lambda w)}{r w}\right] w^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[2\lambda \frac{f(w)}{w} - f^{'}(r\lambda w)\lambda - \frac{\lambda}{\lambda}\frac{f(r\lambda w)}{r w}\right] w^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[2\lambda \frac{f(w)}{w} - \left(f^{'}(r\lambda w)\lambda + \lambda \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}\right)\right] w^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Por (f_3), se $u > 0$ temos $f'(u) > \dfrac{f(u)}{u}$, e assim

$$f'(u) + \frac{f(u)}{u} > 2\frac{f(u)}{u}.$$

Isto implica que $\forall\, \lambda \in (0, 1]$,

$$-\lambda\left(f'(u) + \frac{f(u)}{u}\right) < -2\lambda \frac{f(u)}{u}. \tag{1.30}$$

Agora escolhendo $u = r\lambda w > 0$ em (1.30) e substituindo na derivada da Φ, isto é, em (1.29) tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, r) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[2\lambda \frac{f(w)}{w} - \left(f'(r\lambda w)\lambda + \frac{\lambda}{\lambda}\frac{f(r\lambda w)}{rw}\right)\right] w^2 \,\mathrm{d}x \\ &< \int_{\mathbb{R}^N} \left[2\lambda \frac{f(w)}{w} - 2\lambda \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}\right] w^2 \,\mathrm{d}x \\ &= 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}\right] w^2 \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Escolhendo r suficientemente grande tal que $r\lambda > 1$ e usando, mais uma vez, a condição (f_3) que implica $\dfrac{f(t)}{t}$ crescente para $t > 0$ segue que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, r) < 0.$$

Portanto, Φ é decrescente na variável λ.

Decorre da definição de Φ e pela condição (f_3) que existe uma constante $M_1 > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, 1]$ e $r \in (0, +\infty)$ temos

$$\Phi(\lambda, r) \leq \lambda^2 \|w\|^2 := M_1\lambda^2. \tag{1.31}$$

Por outro lado, como w é solução positiva do problema (P_∞), para todo $0 < \lambda \leq 1$, tem-se por (f_3) e (f_4) que

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \geq l_\infty,$$

e $\dfrac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}$ é crescente na variável r. Isto implica que no caso assintoticamente linear $\dfrac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \nearrow l_\infty$ e

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}\right| w^2 &\leq \left(\left|\frac{f(w)}{w}\right| + \left|\frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}\right|\right) w^2 \\ &\leq 2l_\infty w^2 \in L^1(\mathbb{R}^N).\end{aligned} \tag{1.32}$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, existe uma constante $M_2 > 0$, tal que

$$\begin{aligned}\lim_{r \to +\infty} \Phi(\lambda, r) &= \lim_{r \to +\infty} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}\right] w^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f(w)}{w} - l_\infty\right] w^2 \,\mathrm{d}x := \lambda^2(-M_2).\end{aligned} \tag{1.33}$$

Para o caso superlinear , visto que $\dfrac{f(s)}{s}$ é crescente se $s > 0$, usamos o Teorema da Convergência Monótona para obter o resultado em (1.33).

Vamos considerar λ no intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ devido à simetria de $\Phi(\lambda, r) + \Phi(1 - \lambda, r)$ com respeito à λ. Começamos fixando λ_0 no intervalo $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ tal que

$$M_1\lambda_0^2 < \frac{M_2}{2}(1 - \lambda_0)^2; \tag{1.34}$$

pode-se encontrar $r_0 > 2$ satisfazendo

$$\Phi(1-\lambda_0, r_0) = -\frac{M_2}{2}(1-\lambda_0)^2.$$

De fato, se $0 < \lambda_0 < \frac{1}{2}$, então $(1-\lambda_0)^2 > \frac{1}{4}$. Como $M_2 > 0$, escolha $\lambda_0 < \sqrt{\frac{M_2}{8M_1}}$. Assim, $(1-\lambda_0)^2 \frac{M_2}{2} > \frac{M_2}{8}$ e segue que

$$M_1\lambda_0^2 < M_1\frac{M_2}{8M_1} = \frac{M_2}{8} < (1-\lambda_0)^2\frac{M_2}{2}.$$

Considere agora $\lambda \in (0, \lambda_0]$ e $r \geq r_0$. Como $\frac{1}{2} < 1-\lambda_0 \leq 1-\lambda$, Φ é decrescente em r e em λ, e por (1.31) segue que

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda, r) + \Phi(1-\lambda, r) &\leq \Phi(\lambda, r_0) + \Phi(1-\lambda, r_0) \\
&\leq M_1\lambda_0^2 + \Phi(1-\lambda, r_0) \\
&= M_1\lambda_0^2 - \frac{M_2}{2}(1-\lambda_0)^2 < 0.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Por outro lado, se $\lambda \in \left[\lambda_0, \frac{1}{2}\right]$ e fixando $r_1 > \max\left\{\frac{1}{\lambda_0}, 2\right\}$, note que se

$$r \geq r_1 > \frac{1}{\lambda_0} \Longrightarrow r\lambda \geq r_1\lambda \geq r_1\lambda_0 > 1 \tag{1.36}$$

e como

$$r \geq r_1 > 2 \ \text{ e } \ 1-\lambda \geq \frac{1}{2},$$

então

$$r(1-\lambda) \geq \frac{r}{2} > \frac{2}{2} = 1. \tag{1.37}$$

Visto que $\frac{f(t)}{t}$ é crescente, pela definição de Φ, (1.36) e (1.37) segue que Φ é negativa, isto é, $\Phi(\lambda, r) < 0$ e $\Phi(1-\lambda, r) < 0$. Assim, se $\lambda \in \left[\lambda_0, \frac{1}{2}\right]$ segue que

$$\Phi(\lambda, r) + \Phi(1-\lambda, r) < 0.$$

Para concluir, defina $T_0 := \max\{r_0, r_1\}$. Logo, $T_0 > 2$ e observe que

$$S_0 := \max\{\Phi(\lambda, T_0) + \Phi(1-\lambda, T_0)\} < 0.$$

Assim concluimos que para $r \geq T_0$

$$\Phi(\lambda, r) + \Phi(1-\lambda, r) \leq \Phi(\lambda, T_0) + \Phi(1-\lambda, T_0) \leq S_0 < 0, \ \ \text{para todo} \ \ \lambda \in [0, 1].$$

Portanto, a proposição fica provada.

□

O resultado que segue pode ser encontrado em [1], Lema 2.1.

Lema 1.9. *Suponha que existam $\mu_2 > \mu_1 \geq 0$. Então, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$, existe um número real $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|}e^{-\mu_2|x-x_2|}\,\mathrm{d}x \leq Ce^{-\mu_1|x_1-x_2|}.$$

Outrossim, se $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$ *e* $\mu_3 > \mu_1 \geq 0$ *, então , para quaisquer* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^N$*, existe um número real* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|}e^{-\mu_2|x-x_2|}e^{-\mu_3|x-x_3|}\,\mathrm{d}x \leq Ce^{-\dfrac{\mu_1}{2}\left\{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|x_3-x_1|\right\}}.$$

O próximo resultado garante que a variedade $\mathcal{N}$ é não vazia.

Lema 1.10. *Existem números* $R_0 > 0,\ T_0 > 2$ *e para cada* $R \geq R_0,\ y \in \partial B_2(y_0),\ 0 \leq \lambda \leq 1$*, um único* $T^R_{\lambda,y} > 0$ *satisfazendo*

$$T^R_{\lambda,y} z^R_{\lambda,y} \in \mathcal{N}.$$

Ademais, $T^R_{\lambda,y} \in [0, T_0)$ *e* $T^R_{\lambda,y}$ *é uma função contínua nas variáveis* λ, y, R.

Demonstração: Sejam $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N); u, v > 0$ e $r \in (0, +\infty)$ em (1.10), então

$$\begin{aligned}
J_\infty(ru+rv) &= \|ru+rv\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(ru+rv)(ru+rv)\,\mathrm{d}x \\
&= \|ru+rv\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(ru+rv)(ru+rv)\left(\frac{ru+rv}{ru+rv}\right)\mathrm{d}x \\
&= r^2\Big(\|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u,v\rangle\Big) - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(ru+rv)}{ru+rv}(ru+rv)^2\,\mathrm{d}x \\
&= r^2\Big(\|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u,v\rangle\Big) - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(ru+rv)}{ru+rv}(r^2u^2+2r^2uv+r^2v^2)\,\mathrm{d}x \\
&= r^2\Big(\|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u,v\rangle\Big) - r^2\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(ru+rv)}{ru+rv}(u^2+2uv+v^2)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Por (f_3) , $\dfrac{f(s)}{s}$ é crescente se $s > 0$, assim

$$\begin{aligned}
\frac{J_\infty(ru+rv)}{r^2} &= \|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u,v\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(ru+rv)}{ru+rv}(u^2+2uv+v^2)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u,v\rangle \\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(ru)}{ru}(u^2)\,\mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(ru+rv)}{ru+rv}(uv)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(rv)}{rv}(v^2)\,\mathrm{d}x \\
&< \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(ru)}{ru}(u^2)\,\mathrm{d}x + \|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(rv)}{rv}(v^2)\,\mathrm{d}x + 2\langle u,v\rangle.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Como o resultado em (1.38) é válido para todo $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N); u, v > 0$ e $r \in (0, +\infty)$, podemos substituir u por λw^R_0 e v por $(1-\lambda)w^R_y$ para $0 \leq \lambda \leq 1$ e utilizando mudança de variáveis obter a seguinte desigualdade

$$
\begin{aligned}
\frac{J_\infty(ru+rv)}{r^2} &= \frac{J_\infty(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} \\
&\leq \left\|\lambda w_0^R\right\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w_0^R)}{r\lambda w_0^R}(\lambda w_0)^2 \,\mathrm{d}x \\
&\quad + \left\|(1-\lambda)w_y^R\right\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r(1-\lambda)w_y^R)}{r(1-\lambda)w_y^R}((1-\lambda)w_y^R)^2 \,\mathrm{d}x + 2\left\langle \lambda w_0^R, (1-\lambda)w_y^R \right\rangle \\
&= \lambda^2 \left(\left\|w_0^R\right\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w_0^R)}{r\lambda w_0^R}(w_0^R)^2 \,\mathrm{d}x \right) \\
&\quad + (1-\lambda)^2 \left(\left\|w_y^R\right\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r(1-\lambda)w_y^R)}{r(1-\lambda)w_y^R}(w_y^R)^2 \,\mathrm{d}x \right) + 2\lambda(1-\lambda)\left\langle w_0^R, w_y^R \right\rangle \\
&= \lambda^2 \left(\|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}(w)^2 \,\mathrm{d}x \right) \\
&\quad + (1-\lambda)^2 \left(\|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r(1-\lambda)w)}{r(1-\lambda)w}(w)^2 \,\mathrm{d}x \right) + 2\lambda(1-\lambda)\left\langle w_0^R, w_y^R \right\rangle. \qquad (1.39)
\end{aligned}
$$

Visto que w solução do problema limite, então

$$w_{y-y_0}^R = w(x - R(y-y_0)) \to 0, \text{ se } R \to +\infty.$$

e

$$w_{y-y_0}^R = w(x - R(y-y_0)) \rightharpoonup 0, \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Assim, por definição de convergência fraca, para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\langle w(\cdot - R(y-y_0)), \varphi\rangle \to \langle 0, \varphi\rangle = 0, \text{ se } R \to +\infty.$$

Em particular, escolha $\varphi = w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e segue que

$$\langle w(\cdot - R(y-y_0)), w\rangle \to 0, \text{ se } R \to +\infty.$$

Fazendo uma mudança de variáveis , segue que

$$
\begin{aligned}
o_R(1) &= \langle w(\cdot - R(y-y_0)), w\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w(x - R(y-y_0))\nabla w(x) + w(x - R(y-y_0))w(x)] \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w(x - Ry_0)\nabla w(x - Ry) + w(x - Ry_0)w(x - Ry)] \,\mathrm{d}x \qquad (1.40) \\
&= \langle w(\cdot - Ry_0), w(\cdot - Ry)\rangle \\
&= \left\langle w_0^R, w_y^R \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Pela Proposição 1.1 e usando (1.40) podemos reescrever a desigualdade em (1.39) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{J_\infty(ru+rv)}{r^2} &= \frac{J_\infty(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} \\
&\leq \lambda^2\left(\|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}(w)^2\,\mathrm{d}x\right) \\
&\quad +(1-\lambda)^2\left(\|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(r(1-\lambda)w}{r(1-\lambda)w}(w)^2\,\mathrm{d}x\right) \\
&\quad +2\lambda(1-\lambda)\left\langle w_0^R, w_y^R\right\rangle \\
&= \Phi(\lambda,r)+\Phi(1-\lambda,r)+o_R(1) \\
&< S_0 + o_R(1),
\end{aligned} \tag{1.41}$$

em que $o_R(1)\to 0$, se $R\to+\infty$..

Por outro lado, desejamos obter uma estimativa da seguinte forma

$$\frac{J(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} < 0,$$

para todo $r \geq T_0, 0\leq\lambda\leq 1, R\geq R_0$ e uniformemente em $y\in\partial B_2(y_0)$. Para tanto, observe que para todo $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
J(u) &= \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))f(u)u\,\mathrm{d}x \\
&= \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)u\,\mathrm{d}x \\
&= J_\infty(u) - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)u\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Segue por (1.42) que

$$\begin{aligned}
\frac{J(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} &= \frac{J_\infty(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} \\
&\quad -\frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{J_\infty(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} \\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N} a(x)\frac{f(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R}(\lambda w_0^R + (1-\lambda)w_y^R)^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Agora vamos estimar esta última integral na equação (1.43), isto é, vamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)|\,\frac{f(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R}(\lambda w_0^R + (1-\lambda)w_y^R)^2\,\mathrm{d}x = o_R(1). \tag{1.44}$$

Podemos utilizar a condição $(a_2), (f_2)$ e o Lema 1.9 verificar (1.44). De fato, note que por (f_2)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^N}|a(x)||f(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)|(\lambda w_0^R + (1-\lambda)w_y^R)\,\mathrm{d}x \\
\leq\ & \frac{C}{r}\int_{\mathbb{R}^N}|a(x)|\Big\{2^{p_1}(|r\lambda w_0^R|^{p_1} + |r(1-\lambda)w_y^R|^{p_1}) + 2^{p_2}(|r\lambda w_0^R|^{p_2} + |r(1-\lambda)w_y^R|^{p_2})\Big\}\lambda w_0^R\,\mathrm{d}x \\
& + \frac{C}{r}\int_{\mathbb{R}^N}|a(x)|\Big\{2^{p_1}(|r\lambda w_0^R|^{p_1} + |r(1-\lambda)w_y^R|^{p_1}) + 2^{p_2}(|r\lambda w_0^R|^{p_2} + |r(1-\lambda)w_y^R|^{p_2})\Big\}(1-\lambda)w_y^R\,\mathrm{d}x \\
\leq\ & C\int_{\mathbb{R}^N}|a(x)|\Big\{(w_0^R)^{p_1} + (w_0^R)^{p_2} + (w_y^R)^{p_1} + (w_y^R)^{p_2}\Big\}(\lambda w_0^R + (1-\lambda)w_y^R)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.45)
\end{aligned}$$

Usando agora (a_2) e o Lema 1.9 obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}|a(x)|(w_0^R)^{p_i+1}\,\mathrm{d}x \leq C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|}e^{-(p_i+1)|x-Ry_0|}\,\mathrm{d}x \leq Ce^{-k|0-Ry_0|} = Ce^{-kR} = o_R(1), \qquad (1.46)$$

e também que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|a(x)|(w_0^R)^{p_i}w_y^R\,\mathrm{d}x \leq C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|}e^{-p_i|x-Ry_0|}e^{-|x-Ry|}\,\mathrm{d}x \leq Ce^{-\frac{1}{2}(R+2R+R)} = o_R(1), \qquad (1.47)$$

visto que $Ce^{-\frac{1}{2}(R|y|)} \leq Ce^{-\frac{1}{2}R}$, pois $1 \leq |y| \leq 3$. Logo, de (1.45) , (1.46) e (1.47) verificamos (1.44).

Para concluir o resultado de projeção sobre $\mathcal{N}$, susbtituindo $(1.41), (1.44)$ em (1.43) , podemos tomar R suficientemente grande de forma que

$$\frac{J(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} \leq S_0 + o_R(1) < \frac{S_0}{3} < 0, \qquad (1.48)$$

para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que $T_0 \leq r$, $0 \leq \lambda \leq 1$ e uniformemente em $y \in \partial B_2(y_0)$.

Combinando-se (1.4) e (1.48) pode-se garantir que existe um único $r = T_{\lambda,y}^R \in (0, T_0)$ tal que $T_{\lambda,y}^R z_{\lambda,y}^R$ pertence à variedade $\mathcal{N}$. Consequentemente, $\mathcal{N}$ é uma variedade não vazia.

Para provar a continuidade de $T_{\lambda,y}^R$, considere a aplicação $h \in C^1$ definida por

$$\begin{aligned}
h : \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N) &\to \mathbb{R} \\
(t,u) &\mapsto h(t,u) = t\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))f(tu)u\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Seja (t_0, u_0) tal que $h(t_0, u_0) = 0$ e $u_0 > 0$. Note que se $t_0u_0 \in \mathcal{N}$, então

$$t_0^2\|u_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))f(t_0u_0)t_0u_0\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\frac{f(t_0u_0)}{t_0}t_0^2u_0\,\mathrm{d}x.$$

Assim,

$$\|u_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\frac{f(t_0u_0)}{t_0}u_0\,\mathrm{d}x. \qquad (1.49)$$

Por outro lado, derivando h em relação a t e utilizando (1.49) e (f_3) obtemos

$$\begin{aligned} h'_t(t_0,u_0) &= \|u_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))f'(t_0u_0)u_0^2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left(\frac{f(t_0u_0)}{t_0}u_0 - f'(t_0u_0)u_0^2\right)\mathrm{d}x < 0. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Aplicando o Teorema da Função Implícita, a aplicação $u \mapsto t(u)$ é de classe C^1 onde $t_0 = t(u_0)$. Pelo que provamos, para cada $R > 0, y \in \partial B_2(y_0)$ e $\lambda \in [0,1]$ existe um único $T^R_{\lambda,y} = t(z^R_{\lambda,y})$ tal que t é de classe C^1. Agora, para cada $R > 0$ fixado, a função $(\lambda, y) \mapsto z^R_{\lambda,y}$ é contínua. Desde que $[0,1]\times\partial B_2(y_0)$ é compacto em $\mathbb{R}^2$, existe um $\overline{T}(R) = \max\limits_{(\lambda,y)\in[0,1]\times\partial B_2(y_0)} T^R_{\lambda,y}$ tal que $T^R_{\lambda,y}z^R_{\lambda,y} \in \mathcal{N}$ e $T^R_{\lambda,y} \in [0,\overline{T}(R)]$. Suponha por contradição que $\overline{T}(R_k) \to +\infty$, se $R_k \to +\infty$. Visto que $\overline{T}(R_k) = \max\limits_{(\lambda,y)\in[0,1]\times\partial B_2(y_0)} T^{R_k}_{\lambda,y}$, tem-se $\overline{T}(R_k) = T^{R_k}_{\lambda,y}$ para algum (λ, y). Assim obtemos a continuidade de $T^R_{\lambda,y}$ nas variáveis λ, y, R e o lema está provado.

□

1.4 Estimativas assintóticas

Precisaremos do Lema $II.2$ em Bahri e Lions [8] para nos auxiliar nas delicadas e precisas estimativas. Por motivo de completude de informações iremos demonstrar o lema visto que em [8] tal resultado não está claramente enunciado e demonstrado .

Lema 1.11. *(Lema II.2 - [8]) Suponha que $\varphi \in C(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \psi \in C(\mathbb{R}^N)$ satisfazem para constantes $\alpha, \beta \geq 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi(x)e^{\alpha|x|}\,|x|^\beta \to \gamma; \quad se \quad |x| \to +\infty \tag{1.51}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)|\, e^{\alpha|x|}(1+|x|^\beta)\,\mathrm{d}x < +\infty. \tag{1.52}$$

Então

$$\lim_{|\overline{y}|\longrightarrow+\infty}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x+\overline{y})\psi(x)\,\mathrm{d}x\right)e^{\alpha|\overline{y}|}\,|\overline{y}|^\beta - \gamma\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\alpha\langle x,\overline{y}\rangle}{|\overline{y}|}}\psi(x)\,\mathrm{d}x\right] = 0. \tag{1.53}$$

Demonstração: A demonstração segue do estudo de vários casos e da aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Primeiramente, seja $|x+\overline{y}| \leq 1$. Note que

$$|\overline{y}| - |x| \leq |x+\overline{y}| \leq 1 \Longrightarrow |\overline{y}| \leq 1 + |x|.$$

Por (1.52) e dado que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\varphi(x+\overline{y})\psi(x)|e^{\alpha|\overline{y}|}|\overline{y}|^\beta &\leq C|\psi(x)|e^{\alpha}e^{\alpha|x|}(1+|x|)^\beta \\ &= C|\psi(x)|e^{\alpha|x|}(1+|x|^\beta) \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \tag{1.54}$$

Considere agora $1 < |x+\overline{y}| \leq \dfrac{|\overline{y}|}{2}$. Note que

$$2|\overline{y}| - 2|x| \leq 2|x+\overline{y}| \leq |\overline{y}| \Longrightarrow |\overline{y}| \leq 2|x| \tag{1.55}$$

e

$$|\overline{y}| - |x| \leq |x+\overline{y}| \Longrightarrow -\alpha|x+\overline{y}| + \alpha|\overline{y}| \leq \alpha|x|.$$

Por (1.51), dado $\epsilon > 0$ existe algum $M_o > 0$ tal que $\forall\ |x| \geq M_0$ tem-se

$$|\varphi(x)| \leq (\epsilon + \gamma)e^{-\alpha|x|}|x|^{-\beta} = Ce^{-\alpha|x|}|x|^{-\beta}. \tag{1.56}$$

Combinando as informações de (1.54), (1.55), (1.56) com (1.52) segue que se $1 < |x+\overline{y}| \leq \dfrac{|\overline{y}|}{2}$,

$$\begin{aligned} |\varphi(x+\overline{y})\psi(x)|\, e^{\alpha|\overline{y}|}|\overline{y}|^{\beta} &\leq C|\psi(x)|e^{-\alpha|x+\overline{y}|}|x+\overline{y}|^{-\beta}e^{\alpha|\overline{y}|}(2|x|)^{\beta} \\ &\leq C|\psi(x)|e^{\alpha|x|}|x|^{\beta} \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Finalmente considere o caso $|x+\overline{y}| \geq \dfrac{|\overline{y}|}{2}$. Usando novamente (1.51) e a desigualdade $-\alpha|x+\overline{y}| + \alpha|\overline{y}| \leq \alpha|x|$ tem-se

$$\begin{aligned} |\varphi(x+\overline{y})\psi(x)|e^{\alpha|\overline{y}|}|\overline{y}|^{\beta} &\leq C|\psi(x)|e^{-\alpha|x+\overline{y}|}|x+\overline{y}|^{-\beta}e^{\alpha|\overline{y}|}(2|x+y|)^{\beta} \\ &\leq C|\psi(x)|e^{\alpha|x|}|x|^{\beta} \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \tag{1.58}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, segue de (1.51) que

$$\lim_{|\overline{y}| \longrightarrow +\infty} \varphi(x+\overline{y})\psi(x)e^{\alpha|\overline{y}|}|\overline{y}|^{\beta} = \lim_{|x+\overline{y}| \longrightarrow +\infty} \varphi(x+\overline{y})\psi(x)e^{\alpha|x+\overline{y}|}|x+\overline{y}|^{\beta} = \gamma\psi(x). \tag{1.59}$$

Com os resultados obtidos em (1.54), (1.57), (1.58) e (1.59) podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\lim_{|\overline{y}| \longrightarrow +\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x+\overline{y})\psi(x)\,\mathrm{d}x \right) e^{\alpha|\overline{y}|}\,|\overline{y}|^{\beta} = \gamma \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.60}$$

Por outro lado, observe que se $\langle x, \overline{y} \rangle \geq 0$, então

$$\left| \gamma e^{-\dfrac{\alpha\langle x,\overline{y}\rangle}{|\overline{y}|}} \psi(x) \right| \leq |\gamma||\psi(x)|, \tag{1.61}$$

e $\gamma\psi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ uma vez que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)|e^{\alpha|x|}(1+|x|^{\beta})\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Se $\langle x, \overline{y} \rangle \leq 0$, então

$$0 \leq -\langle x, \overline{y} \rangle = \langle -x, \overline{y} \rangle \leq |x||\overline{y}|$$

implica que

$$\left|\gamma e^{-\dfrac{\alpha\langle x,y\rangle}{|y|}}\psi(x)\right| \leq |\gamma|e^{\alpha|x|}|\psi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N), \tag{1.62}$$

por (1.52). Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, temos ainda

$$\lim_{|\overline{y}|\to+\infty} \gamma e^{-\dfrac{\alpha\langle x,\overline{y}\rangle}{|\overline{y}|}}\psi(x) = \gamma e^0\psi(x). \tag{1.63}$$

Com os resultados obtidos em (1.61), (1.62) e (1.63) podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\lim_{|\overline{y}|\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \gamma e^{-\dfrac{\alpha\langle x,\overline{y}\rangle}{|\overline{y}|}}\psi(x)\,\mathrm{d}x = \gamma\int_{\mathbb{R}^N}\psi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.64}$$

Portanto, de (1.60) e (1.64) o lema está demonstrado.

□

Um resultado encontrado em [37] que iremos utilizar para obter o decaimento exponencial exato para a solução *ground state* do problema limite (P_∞), a saber

Lema 1.12. *[Proposição 6.1 em [37]] Sejam $N > 1$, $\rho \geq 0$ e $W \in C^1((\rho,\infty),\mathbb{R})$. Se*

$$\lim_{s\to\infty} W(s) > 0$$

e para algum $\beta > 0$ tem-se

$$\lim_{s\to\infty} W'(s)s^{1+\beta} = 0,$$

então existe uma função radial não negativa $v : \mathbb{R}^N\backslash B_\rho(0) \to \mathbb{R}$ tal que

$$-\Delta v + Wv = 0 \ \ em \ \ \mathbb{R}^N\backslash B_\rho(0) \tag{1.65}$$

e, para alguma constante $\rho_0 \in (\rho,\infty)$,

$$\lim_{|x|\to\infty} v(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} \exp\int_{\rho_0}^{|x|}\sqrt{W} = 1. \tag{1.66}$$

Seguindo idéias encontradas em [38] , mostraremos que a solução *ground state* positiva do problema limite (P_∞) tem decaimento exponencial exato. Tal demonstração é diferente daquela encontrada no clássico artigo de Gidas, Ni e Niremberg [25] em que os autores demonstraram o decaimento exponencial utilizando função de Green, estimativas interiores e funções de Bessel.

Lema 1.13. *Seja u solução positiva radial ground state do problema*

$$-\Delta u + u = f(u) \ \ em \ \ \mathbb{R}^N,$$

então u satisfaz

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{|x|} \in (0,\infty). \tag{1.67}$$

Demonstração: Inicialmente, visto que $u(x) \to 0$, se $|x| \to \infty$, segue por (f_2) que

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(u(x))}{u(x)} = 0.$$

Logo, existe um $\rho \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $|x| \geq \rho$ temos

$$\frac{f(u(x))}{u(x)} \leq \frac{3}{4}.$$

Note que se $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)$,

$$-\Delta u(x) + u(x) = f(u(x)) = \frac{f(u(x))}{u(x)}u(x) \leq \frac{3u(x)}{4} \quad \text{em } \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0),$$

implicando

$$-\Delta u(x) + \frac{1}{4}u(x) \leq \frac{3u(x)}{4} - \frac{3u(x)}{4} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0). \tag{1.68}$$

Considere uma função radial não negativa $v \in C^2(\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0), \mathbb{R})$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta v + \frac{1}{4}v = 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0), \\ v(x) = u(x), & \text{se } x \in \partial B_\rho(0), \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) = 0. & \end{cases} \tag{1.69}$$

Seja $W_0(x) = \frac{1}{4}$ e note que $W = W_0$ no Lema 1.12, juntamente com (1.65) e (1.66) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$0 < v(x) \leq C|x|^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\frac{|x|}{2}}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0).$$

Defina a função $z := u - v$. Segue por (1.68) e (1.69)

$$-\Delta z + \frac{1}{4}z = -\Delta u + \frac{1}{4}u + \Delta v - \frac{1}{4}v \leq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0) \tag{1.70}$$

e

$$z = 0 \quad \text{sobre } \partial B_\rho(0).$$

Ademais, temos que

$$\lim_{|x|\to\infty} z(x) = 0.$$

Considere $z = z^+ - z^-$. Por (1.70) segue

$$\|z^+\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)} \left(|\nabla z^+|^2 + \frac{1}{4}|z^+| \right) \mathrm{d}x \leq 0, \tag{1.71}$$

logo $z \leq 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)$. Assim

$$0 < u(x) \leq v(x) \leq C|x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{|x|}{2}} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0). \tag{1.72}$$

Combinando a hipótese de crescimento (f_2) e (1.72) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\Big| \frac{f(u)}{u} \Big| \leq C\Big(e^{-\frac{p_1-1}{2}|x|} + e^{-\frac{p_2-1}{2}|x|}\Big). \tag{1.73}$$

Considere $W_1(x) = 1 - C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}|x|} + e^{-\frac{p_2-1}{2}|x|}\right)$ e note que W_1 satisfaz o Lema 1.12 . Aplicando-o mais uma vez e usando (1.73) temos

$$\begin{aligned} -\Delta u + W_1 u &= -\Delta u + u - C\Big(e^{-\frac{p_1-1}{2}|x|} + e^{-\frac{p_2-1}{2}|x|}\Big)u \\ &= \frac{f(u)}{u}u - C\Big(e^{-\frac{p_1-1}{2}|x|} + e^{-\frac{p_2-1}{2}|x|}\Big)u \\ &= \Big[\frac{f(u)}{u} - C\Big(e^{-\frac{p_1-1}{2}|x|} + e^{-\frac{p_2-1}{2}|x|}\Big)\Big]u \\ &\leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$-\Delta u + u \geq 0 \geq -\Delta u + W_1 u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0). \tag{1.74}$$

Defina as funções radiais não negativas $\underline{u}, \overline{u} \in C^2(\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0), \mathbb{R})$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} + \underline{u} = 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0), \\ \underline{u}(x) = u(x), & \text{se} \quad x \in \partial B_\rho(0), \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} \underline{u}(x) = 0 \end{cases} \tag{1.75}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} + W_1 \overline{u} = 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0), \\ \overline{u}(x) = u(x), & \text{se} \quad x \in \partial B_\rho(0), \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} \overline{u}(x) = 0. \end{cases} \tag{1.76}$$

Observe que

$$-\Delta(\underline{u} - u) + (\underline{u} - u) = (-\Delta \underline{u} + \underline{u}) + (\Delta u - u) \leq 0,$$

isto é,

$$-\Delta \underline{u} + \underline{u} \leq -\Delta u + u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)$$

e

$$\underline{u} = u \quad \text{sobre} \quad \partial B_\rho(0).$$

Analogamente, temos

$$-\Delta(\overline{u} - u) + W_1(\overline{u} - u) = (-\Delta \overline{u} + W_1 \overline{u}) + (\Delta u - W_1 u) \geq 0,$$

isto é,

$$-\Delta u + W_1 u \leq -\Delta \overline{u} + W_1 \overline{u} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)$$

e

$$\overline{u} = u \ \text{ sobre } \ \partial B_\rho(0).$$

Com estas duas observações segue analogamente como feito em (1.71) que

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0). \tag{1.77}$$

Utilizando (1.77) e o Lema 1.12 segue que

$$\begin{aligned} 0 < \lim_{|x|\to\infty} \underline{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} &\leq \liminf_{|x|\to\infty} u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} \\ &\leq \limsup_{|x|\to\infty} u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} \\ &\leq \lim_{|x|\to\infty} \overline{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} < \infty. \end{aligned} \tag{1.78}$$

A primeira desigualdade estrita em (1.78) segue do Lema 1.12 e a última desigualdade é finita, pois utilizando o Lema 1.12 e (1.76) obtemos

$$\lim_{|x|\to\infty} \overline{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} = \lim_{|x|\to\infty} \overline{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} \frac{e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1 - C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)}\,dt}}{e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1 - C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)}\,dt}} e^{|x|}$$

$$= \lim_{|x|\to\infty} \overline{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1 - C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)}\,dt} \lim_{|x|\to\infty} \frac{e^{|x|}}{e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1 - C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)}\,dt}} < \infty.$$

O próximo passo é mostrar que o $\lim_{|x|\to\infty} u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|}$ existe. De fato, note que se mostrarmos que a função $\frac{u}{\underline{u}}$ é não decrescente, usando (1.77) tal função seria limitada, pois $1 \leq \frac{u}{\underline{u}} \leq \frac{\overline{u}}{\underline{u}}$ e

$$\begin{aligned} &\lim_{|x|\to\infty} \frac{\overline{u}(x)}{\underline{u}(x)} \\ &= \lim_{|x|\to\infty} \frac{\overline{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1 - C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)}\,dt}}{\underline{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|}} \frac{e^{|x|}}{e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1 - C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)}\,dt}} < \infty, \end{aligned}$$

por (1.75), (1.76) e o Lema 1.12. Assim concluiríamos que $\frac{u}{\underline{u}}$ tem limite finito se $|x| \to +\infty$ e que

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{u(x)}{\underline{u}(x)} \lim_{|x|\to\infty} \underline{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} \in (0, \infty).$$

Finalmente, vamos mostrar que $\frac{u}{\underline{u}}$ é não decrescente. Considere $r, s \in (\rho, \infty)$ tal que $r \leq s$. Desde que u e $\underline{u}$ são ambas funções radiais, defina o seguinte operador

$$Lu = -(-\Delta u + u) = \Delta u - u = u'' + \frac{N-1}{r}u' - u.$$

Segue da definição do operador L e de (1.75) que

$$L\underline{u} = \underline{u}'' + \frac{N-1}{r}\underline{u}' - \underline{u}.$$

Note que $-\Delta(\underline{u} - u) + (\underline{u} - u) = -f(u) < 0$, logo, como feito em (1.71), temos que $\underline{u}(x) \leq u(x)$ para todo $|x| \in (\rho, \infty)$.

Agora considere a função $v = \dfrac{\underline{u}}{u}$ e $g(r) = \dfrac{N-1}{r}$. Observe que

$$L\underline{u} = L(vu) = uv'' + (2u' + gu)v' + L(u)v = 0.$$

Decorre que

$$v'' + \left(2\frac{u'}{u} + g\right)v' + \frac{1}{u}L(u)v; \quad r \in (\rho, \infty), \quad v(\rho) = 1. \tag{1.79}$$

O problema de valor inicial em (1.79) tem solução única desde que $\dfrac{1}{u}L(u) < 0$ e $2\dfrac{u'}{u} + g$ é contínua em $r \in (\rho, \infty)$.

Por outro lado, note que temos

$$L(\underline{u} - u) = 0 - (-f(u)) = f(u) > 0, \quad \text{para} \quad r \in (\rho, \infty),$$

e

$$\underline{u} - u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_\rho(0).$$

Aplicando o Princípio do Máximo e Lema de Hopf , respectivamente, temos

$$\underline{u} - u < 0 \quad \text{para} \quad r > \rho \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\underline{u} - u)}{\partial r} < 0 \quad \text{se} \quad r = \rho, \tag{1.80}$$

que implica

$$\underline{u}'(\rho) < u'(\rho) < 0.$$

Consequentemente,

$$v'(\rho) = \frac{\underline{u}'(\rho)u(\rho) - \underline{u}(\rho)u'(\rho)}{u^2(\rho)} < \frac{u'(\rho)[u(\rho) - \underline{u}(\rho)]}{u^2(\rho)} = 0.$$

Desde que $v(r)$ é continuamente diferenciável em (ρ, ∞), derivando v temos

$$v'(r) = \frac{\underline{u}'(r)u(r) - \underline{u}(r)u'(r)}{u^2(r)}.$$

Supondo $v'(r) \geq 0$ segue que

$$\frac{\underline{u}'(r)}{\underline{u}(r)} \geq \frac{u'(r)}{u(r)},$$

ou seja,

$$(\ln \underline{u}(r))' \geq (\ln u(r))'.$$

Como a função $\ln(x)$ é uma função crescente, isto equivale a

$$\underline{u}(r) \geq u(r). \text{ Contradição com } (1.80).$$

Assim temos que $v'(r) < 0$ para todo $r > \rho$ e , portanto, implicando que $\dfrac{u}{\underline{u}}$ é não decrescente como desejávamos mostrar.

□

No próximo resultado iremos enunciar e provar duas propriedades das funções F e f que são consequências de (f_3) e que foi observado inicialmente no trabalho [24]. Tais propriedades são válidas sem exigir que f seja de classe C^3 como nos trabalhos em [1, 18].

Lema 1.14. *Assuma (f_3). Para todo $u, v > 0$ tem-se*

$$F(u+v) \geq F(u) + f(u)v, \tag{1.81}$$

e para todo $\rho > 0$ existe uma constante $C_\rho > 0$ tal que, para todo $0 \leq u, v \leq \rho$ e μ satisfazendo $0 < 1 + \mu < p_1$, tem-se

$$F(u+v) - F(u) - F(v) \geq f(u)v + f(v)u - C_\rho u^{1+\frac{\mu}{2}} v^{1+\frac{\mu}{2}}. \tag{1.82}$$

Demonstração: Primeiramente, como consequência de (f_3) temos que a função $u \mapsto f(u)$ é crescente e isto implica que

$$F(u+v) - F(u) = \int_u^{u+v} f(t)\,\mathrm{d}t \geq f(u)v.$$

Por outro lado, se $u = 0$ ou $v = 0$, a segunda propriedade é satisfeita. Entretanto, para $0 < v \leq u$, segue de (1.81) que

$$\begin{aligned}
F(u+v) - F(u) - F(v) - f(u)v - f(v)u &\geq -F(v) - f(v)u \\
&= -\int_0^v \frac{f(t)}{t^{1+\nu}} t^{1+\mu}\,\mathrm{d}t - \frac{f(v)}{v^{1+\nu}} u v^{1+\mu} \\
&\geq -\frac{\overline{C}_\rho}{2+\mu} v^{2+\mu} - \overline{C}_\rho u v^{1+\mu} \\
&= \overline{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\mu}{2}} \left\{ -\frac{1}{2+\mu} \frac{v^{1+\frac{\mu}{2}}}{u^{1+\frac{\mu}{2}}} - \frac{v^{\frac{\mu}{2}}}{u^{\frac{\mu}{2}}} \right\} \\
&\geq \overline{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\mu}{2}} \left\{ -\frac{1}{2+\mu} \frac{v^{1+\frac{\mu}{2}}}{u^{1+\frac{\mu}{2}}} - \frac{u^{\frac{\mu}{2}}}{u^{\frac{\mu}{2}}} \right\} \\
&\geq \overline{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\mu}{2}} \left\{ -\frac{1}{2+\mu} - 1 \right\} \\
&\geq \overline{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\mu}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} - 1 \right\} \\
&= -\frac{3}{2} \overline{C}_\rho u^{1+\frac{\mu}{2}} v^{1+\frac{\mu}{2}},
\end{aligned}$$

onde $\overline{C}_\rho := \sup\limits_{0<u\leq\rho} \dfrac{f(u)}{u^{1+\mu}} < \infty$ e para todo μ tal que $0 < 1+\mu < p_1$.

Como (1.81) e (1.82) são simétricas em relação a u e v, a mesma estimativa se mantém para $0 < u \leq v$ e, assim, concluímos a demonstração.

$\square$

Agora iremos iniciar as precisas estimativas. Para isso, começamos definindo para $R > 0$, $y \in \partial B_2(y_0)$, $\|y_0\| = 1$ e $y_0 \in \mathbb{R}^N$ fixado, a quantidade

$$\varepsilon_R := \int_{\mathbb{R}^N} f(w(x - Ry_0))w(x - Ry)\,\mathrm{d}x \tag{1.83}$$

onde estamos trabalhando com w solução positiva radial do problema (P_∞). Para mais informações sobre (1.83), veja os trabalhos [1, 8, 18] e suas referências.

Nos dois próximos lemas iremos estimar a quantidade ε_R, isto é, mostrar o decaimento exato da quantidade ε_R como consequência dos Lemas 1.11 e 1.13 e das hipóteses (f_2) e (f_3).

Lema 1.15. *Assuma (f_2) e considere $y \in \partial B_2(y_0)$ com $y_0 \in \mathbb{R}^N; \|y_0\| = 1$. Então existe uma constante $C_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty} \varepsilon_R(2R)^{\frac{N-1}{2}}e^{2R} = C_0. \tag{1.84}$$

Demonstração: Para demonstrarmos este lema iremos utilizar o Lema 1.11 com $\varphi = \omega$, $\psi = f(\omega)$ e $\overline{y} = -R(y_0 - y)$ e ainda $\alpha = 1$ e $\beta = \dfrac{N-1}{2}$.

Pelo Lema 1.13, se ω é a solução positiva radial do problema limite (P_∞), então ω tem o comportamento assintótico

$$\lim_{|x|\to\infty} \omega(|x|)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{|x|} \in (0, \infty). \tag{1.85}$$

Portanto, a primeira hipótese do Lema 1.11, isto é, (1.51) está verificada em (1.85).

Por outro lado, usando (f_2) e (1.85) existe algum $R_1 > 0$ tal que, para todo $|x| > R_1$,

$$\begin{aligned} \psi = f(\omega) &\leq C\left(|\omega|^{p_1} + |\omega|^{p_2}\right) \\ &\leq C\left(|x|^{-p_1\frac{N-1}{2}}e^{-p_1|x|} + |x|^{-p_2\frac{N-1}{2}}e^{-p_2|x|}\right). \end{aligned} \tag{1.86}$$

Decorre de (1.86) que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} f(\omega)e^{|x|}(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
=\;& \int_{B_{R_1}(0)} f(\omega)e^{|x|}(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}(0)} f(\omega)e^{|x|}(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
\leq\;& C\mu(B_{R_1}(0)) + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}(0)} f(\omega)e^{|x|}(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
\leq\;& C + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}(0)} C(|x|^{-p_1\frac{N-1}{2}}e^{-p_1|x|} + |x|^{-p_2\frac{N-1}{2}}e^{-p_2|x|})e^{|x|}(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
=\;& C + C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}(0)} (|x|^{-p_1\frac{N-1}{2}}e^{(1-p_1)|x|} + |x|^{-p_2\frac{N-1}{2}}e^{(1-p_2)|x|})(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
\leq\;& C + C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}(0)} (R^{-p_1\frac{N-1}{2}}e^{(1-p_1)|x|} + R^{-p_2\frac{N-1}{2}}e^{(1-p_2)|x|})(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
=\;& C + CR^{-p_1\frac{N-1}{2}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}(0)} e^{(1-p_1)|x|}(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&+CR^{-p_2\frac{N-1}{2}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}(0)} e^{(1-p_2)|x|}(1+|x|)^{\frac{N-1}{2}}\,\mathrm{d}x < +\infty,
\end{aligned}$$

pois $1-p_i<0$ para $i\in\{1,2\}$. Desta forma verificamos a segunda hipótese do Lema 1.11, isto é, (1.52) está verificada. Podemos então aplicar o Lema 1.11 que assegura

$$\lim_{R\to+\infty}\varepsilon_R(2R)^{\frac{N-1}{2}}e^{2R} = C_0 > 0.$$

□

No lema seguinte apresentaremos uma estimativa inferior para a quantidade ε_R, se $s=t=1$.

Lema 1.16. *Existe uma constante $\overline{C}_0>0$ tal que para todo $t,s\geq\dfrac{1}{2}$, $y\in\partial B_2(y_0)$ com $y_0\in\mathbb{R}^N$ e R suficientemente grande,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(sw(x-Ry_0))tw(x-Ry)\,\mathrm{d}x \geq \overline{C}_0(2R)^{-\frac{N-1}{2}}e^{-2R}. \tag{1.87}$$

Demonstração: Inicialmente, como $s,t\geq\dfrac{1}{2}$ e usando a hipótese (f_3) segue que

$$\frac{f(sw_0)}{sw_0} \geq \frac{f(\frac{1}{2}w_0)}{\frac{1}{2}w_0}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{R^N} f(sw_0)tw_y\,\mathrm{d}x &= st\int_{R^N}\frac{f(sw_0)}{sw_0}w_0w_y\,\mathrm{d}x\\
&\geq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_{R^N}\frac{f(\frac{1}{2}w_0)}{\frac{1}{2}w_0}w_0w_y\,\mathrm{d}x\\
&\geq \frac{1}{4}\int_{B_1(Ry_0)}\frac{f(\frac{1}{2}w_0)}{\frac{1}{2}w_0}w_0w_y\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{f(s)}{s}$, para $s>0$, é contínua em $B_1(0)$, então $\dfrac{f(\frac{1}{2}w_0)}{\frac{1}{2}w_0}$ atinge um mínimo. Assim, fazendo mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
\int_{R^N} f(sw_0)tw_y\,\mathrm{d}x &\geq \frac{1}{4}\int_{B_1(Ry_0)} \frac{f(\frac{1}{2}w_0)}{\frac{1}{2}w_0}w_0w_y\,\mathrm{d}x\\
&\geq \frac{1}{4}\int_{B_1(0)} \frac{f(\frac{1}{2}w(x))}{\frac{1}{2}w(x)}w(x)w(x-R(y-y_0))\,\mathrm{d}x\\
&\geq \frac{1}{4}\min_{B_1(0)} \frac{f(\frac{1}{2}w(x))}{\frac{1}{2}w(x)}\int_{B_1(0)} w(x)w(x-R(y-y_0))\,\mathrm{d}x\\
&\geq \frac{1}{4}C(2R)^{-\frac{N-1}{2}}e^{-2R} = \overline{C}_0(2R)^{-\frac{N-1}{2}}e^{-2R},
\end{aligned}$$

pois, usando a desigualdade triangular e como $x\in B_1(0)$, para todo $R\geq 1$, segue que

$$1+|x-R(y-y_0)|\leq 1+|x|+R|y-y_0|\leq R+R+2R=4R \tag{1.88}$$

e combinando (1.88) e (1.24) resulta que

$$\begin{aligned}
w(x-R(y-y_0)) &\geq C_1(1+|x-R(y-y_0)|)^{-\frac{N-1}{2}}e^{-|x-R(y-y_0|}\\
&\geq C_1(4R)^{-\frac{N-1}{2}}e^{-|x|}e^{-|R(y-y_0|}\\
&\geq C(2R)^{-\frac{N-1}{2}}e^{-1}e^{-2R}\\
&= C(2R)^{-\frac{N-1}{2}}e^{-2R}.
\end{aligned}$$

Assim, o lema está demonstrado.

□

Para nossas precisas estimativas de energia precisaremos utilizar os próximos dois resultados técnicos.

Corolário 1.1. *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\left|\int_{R^N}(sf(w_0^R)-f(sw_0^R))w_y^R\,\mathrm{d}x\right|\leq C\,|s-1|\,O(\varepsilon_R),$$

uniformemente para $y\in\partial B_2(y_0), s\in[0,d]; d>1$ e R suficientemente grande.

Demonstração: Defina $\psi(s):=sf(u)-f(su)$ para u no conjunto dos números reais. Pela regularidade da f podemos usar o Teorema do Valor Médio para ψ o qual garante a existência de um ξ entre s e 1, sem perda de generalidade, considere $s>1$ tal que

$$|\psi(s)-\psi(1)|\leq|\psi'(\xi)|\,|s-1|\,. \tag{1.89}$$

Derivando ψ em relação a s e usando a hipótese (f_2) tem-se

$$\begin{aligned}
|\psi'(s)| &= |f(u) - f'(su)u| \\
&\leq |f(u)| + |f'(su)|\,|u| \\
&\leq |f(u)| + C\left(|su|^{p_1-1}|u| + |su|^{p_2-1}|u|\right) \qquad (1.90) \\
&\leq |f(u)| + C\max\left\{|s|^{p_1-1}, |s|^{p_2-1}\right\}(|u|^{p_1} + |u|^{p_2}) \\
&\leq |f(u)| + C(|u|^{p_1} + |u|^{p_2}).
\end{aligned}$$

Combinando as desigualdades em (1.89) e (1.90) segue que

$$|\psi(s)| = |\psi(s) - \psi(1)| \leq (|f(u)| + C(|u|^{p_1} + |u|^{p_2}))\,|s-1|.$$

Tomando $u = w_0^R := w(x - Ry_0)$, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{R^N}(sf(w_0^R) - f(sw_0^R))w_y^R\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{R^N}\psi(s)w_y^R\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_{R^N}\left\{\left|f(w_0^R)\right| + C\left(\left|w_0^R\right|^{p_1} + \left|w_0^R\right|^{p_2}\right)\right\}w_y^R\,|s-1|\,\mathrm{d}x \\
&= |s-1|\left\{\int_{R^N}\left|f(w_0^R)w_y^R\right|\,\mathrm{d}x + C\int_{R^N}\left(\left|w_0^R\right|^{p_1}w_y^R + \left|w_0^R\right|^{p_2}w_y^R\right)\mathrm{d}x\right\} \\
&\leq |s-1|\{\varepsilon_R + O(\varepsilon_R)\},
\end{aligned}$$

pois para $i \in \{1,2\}$, usando (1.24), o Lema 1.9 e argumentando como no Lema 1.15 temos

$$\int_{R^N}\left|w_0^R\right|^{p_i}w_y^R\,\mathrm{d}x = \int_{R^N}|w(z)|^{p_i}w(z - R(y-y_0))\,\mathrm{d}z \leq O(\varepsilon_R).$$

Assim concluímos a demonstração do corolário.

□

Lema 1.17. *Considere* $\lambda = \dfrac{1}{2}$. *Se* $R \to +\infty$, *então tem-se que*

$$T^R_{\frac{1}{2},y} \to 2,$$

uniformemente em $y \in \partial B_2(y_0)$.

Demonstração: Considerando $z^R_{\lambda,y}$ definido em (1.25) e fazendo $\lambda = \dfrac{1}{2}$ temos

$$z^R_{\frac{1}{2},y} = \frac{1}{2}w(x - Ry_0) + \frac{1}{2}w(x - Ry) = \frac{1}{2}w_0^R + \frac{1}{2}w_y^R.$$

Usando o funcional J dado em (1.5) segue que

$$\begin{aligned} J(2z^R_{\frac{1}{2},y}) = J(w_0^R + w_y^R) &= \|w_0^R + w_y^R\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) f\left(w_0^R + w_y^R\right)\left(w_0^R + w_y^R\right) \mathrm{d}x \\ &= \left\|w_0^R\right\|^2 + \left\|w_y^R\right\|^2 + 2\left\langle w_0^R, w_y^R\right\rangle \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) \frac{f\left(w_0^R + w_y^R\right)}{w_0^R + w_y^R}\left(w_0^R + w_y^R\right)^2 \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.91}$$

Como $\dfrac{f(t)}{t}$ é crescente se $t>0$, podemos reescrever (1.91) como

$$\begin{aligned} J(2z^R_{\frac{1}{2},y}) &\leq \left\|w_0^R\right\|^2 + \left\|w_y^R\right\|^2 + 2\left\langle w_0^R, w_y^R\right\rangle \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) \frac{f(w_0^R)}{w_0^R}\left(w_0^R\right)^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) \frac{f(w_y^R)}{w_y^R}\left(w_y^R\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) \frac{f\left(w_0^R + w_y^R\right)}{w_0^R + w_y^R}\left(2w_0^R w_y^R\right) \mathrm{d}x \\ (i) \quad &\leq \left\|w_0^R\right\|^2 + \left\|w_y^R\right\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f\left(w_0^R\right) w_0^R \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f\left(w_y^R\right) w_y^R \,\mathrm{d}x \\ (ii) \quad &\quad +2\left\langle w_0^R, w_y^R\right\rangle \\ (iii) \quad &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\Big[f\left(w_0^R\right) w_0^R + f(w_y^R) w_y^R\Big] \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Vamos agora observar o que acontece em $(i),(ii),(iii)$. Em (i), note que w_0^R satisfaz

$$-\Delta w_0^R + w_0^R = f(w_0^R) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

visto que w é solução do problema limite. Segue que $\left\|w_0^R\right\|^2 - \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R)(w_0^R)\,\mathrm{d}x = 0$.
O mesmo resultado acontece para w_y^R. Portanto, o caso (i) é igual a zero. Em (ii), temos que $2\left\langle w_0^R, w_y^R\right\rangle = o_R(1)$ como já provamos em (1.40). Em (iii), usando (a_2), (f_2) e o Lema 1.9 afirmamos que

$$\left| - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\Big[f\left(w_0^R\right) w_0^R + f\left(w_y^R\right) w_y^R\Big] \mathrm{d}x \right| = o_R(1). \tag{1.92}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} \left| - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(w_0^R) w_0^R \,\mathrm{d}x \right| &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|}\Big[|w_0^R|^{p_1+1} + |w_0^R|^{p_2+1}\Big] \mathrm{d}x \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|}\Big[e^{-(p_1+1)|x-Ry_0|} + e^{-(p_2+1)|x-Ry_0|}\Big] \mathrm{d}x \\ &\leq Ce^{-k|0-Ry_0|} + Ce^{-k|0-Ry_0|} \\ &= Ce^{-kR} = o_R(1), \end{aligned}$$

e similarmente para $\left| - \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(w_y^R) w_y^R \,\mathrm{d}x \right|$. Assim, obtemos (1.92).

Combinandos os resultados em $(i),(ii),(iii)$ e (1.92) segue que para $\lambda = \dfrac{1}{2}$, uniformemente em $y \in$

$\partial B_2(y_0)$, se $R \to +\infty$,

$$J(2z^R_{\frac{1}{2},y}) = J(w^R_0 + w^R_y) \to 0.$$

Resta provar que

$$T^R_{\frac{1}{2},y} \to 2, \text{ quando } R \to \infty.$$

Argumentando por contradição, suponha que suponha que existam $\delta > 0$ e subsequências $R_n \to \infty$ e $y_n \in \partial B_2(y_0)$ tais que

$$T_n := T^{R_n}_{\frac{1}{2},y_n} \quad \text{satisfaz } |T_n - 2| \geq \delta. \tag{1.93}$$

Como $\{T_n\}$ é limitada pelo Lema 1.10, então existe uma constante T tal que

$$T_n \to T, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Por (1.5), se $tu \in \mathcal{N}$, então

$$\|u\|^2 = \int_{R^N} (1 + a(x)) \frac{f(tu)}{tu} u^2 \, \mathrm{d}x.$$

Por um lado, note que

$$\begin{aligned} \left\| z^{R_n}_{\frac{1}{2},y_n} \right\|^2 &= \left\| \frac{1}{2} w^{R_n}_{y_0} + \frac{1}{2} w^{R_n}_{y_n} \right\|^2 = \frac{1}{4} \left\| w^{R_n}_{y_0} \right\|^2 + \frac{1}{4} \left\| w^{R_n}_{y_n} \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\langle w^{R_n}_{y_0}, w^{R_n}_{y_n} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \|w\|^2 + \frac{1}{4} \|w\|^2 + o_{R_n}(1). \end{aligned} \tag{1.94}$$

Por outro lado, por (a_1), mudança de variáveis e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{f\left(\frac{T_n}{2}\left(w^{R_n}_{y_0} + w^{R_n}_{y_n}\right)\right)}{\frac{T_n}{2}\left(w^{R_n}_{y_0} + w^{R_n}_{y_n}\right)} \left(\frac{1}{4} \left(w^{R_n}_{y_0}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(w^{R_n}_{y_n}\right)^2 + \frac{1}{2} w^{R_n}_{y_0} w^{R_n}_{y_n} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x + R_n y_0)) \frac{f\left(\frac{T_n}{2}\left(w + w^{R_n}_{y_n + y_0}\right)\right)}{\frac{T_n}{2}\left(w + w^{R_n}_{y_n + y_0}\right)} \left(\frac{1}{4} w^2 + \frac{1}{4} \left(w^{R_n}_{y_n + y_0}\right)^2 + \frac{1}{2} w w^{R_n}_{y_n + y_0} \right) \mathrm{d}x \\ &\xrightarrow{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f\left(\frac{T}{2} w\right)}{\frac{T}{2} w} \left(\frac{2}{4} w^2 \right) \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.95}$$

De (1.94) e (1.95) resulta que

$$\frac{2}{4} \|w\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f\left(\frac{T}{2} w\right)}{\frac{T}{2} w} \left(\frac{2}{4} w^2 \right) \mathrm{d}x$$

e desde que w é solução do problema limite, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f\left(\frac{T}{2} w\right)}{\frac{T}{2} w} \right) w^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

Como $\dfrac{f(s)}{s}$ é crescente para $s > 0$, obtemos $T = 2$. Contradição com (1.93). Portanto, $T^R_{\frac{1}{2},y} \to 2$, quando $R \to \infty$ e o lema está provado.

$\square$

Lema 1.18. *Existem números $R_2 > 0$ e $\alpha > 0$ tal que*

$$I(T^R_{\lambda,y} z^R_{\lambda,y}) \leq 2m_\infty - \alpha$$

para cada $R > R_2$ e para todo $y \in \partial B_2(y_0)$ e $\lambda \in [0,1]$.

Demonstração: Primeiramente escrevemos a combinação linear

$$\lambda T^R_{\lambda,y} w(x - Ry_0) + (1-\lambda) T^R_{\lambda,y} w(x - Ry) := s w^R_0 + t w^R_y. \tag{1.96}$$

Já sabemos pelo Lema 1.10 que s e t pertencem ao intervalo $(0, T_0)$, ou seja , já sabemos que são limitados. Tomando $u = sw^R_0 + tw^R_y$ em I definido em (1.2) obtemos

$$\begin{aligned}
I(sw^R_0 + tw^R_y) &= \frac{1}{2}\int_{R^N} \left(s^2 \left|\nabla w^R_0\right|^2 + t^2 \left|\nabla w^R_y\right|^2 + 2st \nabla w^R_0 \nabla w^R_y\right) \mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{R^N} \left(s^2 \left|w^R_0\right|^2 + t^2 \left|w^R_y\right|^2 + 2st w^R_0 w^R_y\right) \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{R^N} (1 + a(x)) F(sw^R_0 + tw^R_y)\, \mathrm{d}x \\
(A) \qquad &= \frac{s^2}{2}\int_{R^N} \left(\left|\nabla w^R_0\right|^2 + (w^R_0)^2\right) \mathrm{d}x + \frac{t^2}{2}\int_{R^N} \left(\left|\nabla w^R_y\right|^2 + (w^R_y)^2\right) \mathrm{d}x \\
(B) \qquad &\quad - \int_{R^N} F(sw^R_0)\, \mathrm{d}x - \int_{R^N} F\left(tw^R_y\right) \mathrm{d}x \\
(C) \qquad &\quad - \int_{R^N} \left[F\left(sw^R_0 + tw^R_y\right) - F\left(sw^R_0\right) - F(tw^R_y)\right] \, dx \\
(D) \qquad &\quad + st\int_{R^N} \left(\nabla w^R_0 \nabla w^R_y + w^R_0 w^R_y\right) \mathrm{d}x - \int_{R^N} \left(f\left(sw^R_0\right) tw^R_y + f\left(tw^R_y\right) sw^R_0\right) \mathrm{d}x \\
(E) \qquad &\quad + \int_{R^N} \left(f\left(sw^R_0\right) tw^R_y + f\left(tw^R_y\right) sw^R_0\right) \mathrm{d}x \\
(F) \qquad &\quad - \int_{R^N} (1 + a(x)) F\left(sw^R_0 + tw^R_y\right) \mathrm{d}x + \int_{R^N} F\left(sw^R_0 + tw^R_y\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{1.97}$$

Vamos estimar cada linha em (1.97). Nas linhas (A) e (B) tem-se

$$\frac{s^2}{2}\int_{R^N} \left(\left|\nabla w^R_0\right|^2 + \left(w^R_0\right)^2\right) \mathrm{d}x - \int_{R^N} F\left(sw^R_0\right) \mathrm{d}x = I_\infty\left(sw^R_0\right) \leq m_\infty \tag{1.98}$$

e

$$\frac{t^2}{2}\int_{R^N} \left(\left|\nabla w^R_0\right|^2 + (w^R_0)^2\right) \mathrm{d}x - \int_{R^N} F(tw^R_0)\, \mathrm{d}x = I_\infty(tw^R_0) \leq m_\infty. \tag{1.99}$$

Na linha (C) , utilizamos o Lema 1.14 para obter

$$\begin{aligned}
&\int_{R^N} \left[F\left(sw^R_0 + tw^R_y\right) - F\left(sw^R_0\right) - F\left(tw^R_y\right)\right] \mathrm{d}x \\
\geq\ & t\int_{R^N} f\left(sw^R_0\right) w^R_y\, \mathrm{d}x + s\int_{R^N} f\left(tw^R_y\right) w^R_0\, \mathrm{d}x - C_\rho (st)^{1+\frac{\mu}{2}} \int_{R^N} \left(w^R_0\right)^{1+\frac{\mu}{2}} \left(w^R_y\right)^{1+\frac{\mu}{2}} \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{1.100}$$

Tomando $1<\overline{\mu}<1+\dfrac{\mu}{2}$ e o Lema 1.9 implica que

$$\begin{aligned}\int_{R^N}\left(w_0^R\right)^{1+\frac{\mu}{2}}\left(w_y^R\right)^{1+\frac{\mu}{2}}\,\mathrm{d}x &\leq C\int_{R^N}e^{-\left(1+\frac{\mu}{2}\right)|x-Ry_0|}e^{-\left(1+\frac{\mu}{2}\right)|x-Ry|}\,\mathrm{d}x\\ &\leq Ce^{-\overline{\mu}|Ry_0-Ry|}=Ce^{-2\overline{\mu}R}=o(\varepsilon_R). \qquad (1.101)\end{aligned}$$

Portanto, segue de (1.100) e (1.101) que

$$\begin{aligned}&-\int_{R^N}\left[F\left(sw_0^R+tw_y^R\right)-F\left(sw_0^R\right)-F\left(tw_y^R\right)\right]\mathrm{d}x\\ \leq\ &-t\int_{R^N}f\left(sw_0^R\right)w_y^R\,\mathrm{d}x-s\int_{R^N}f\left(tw_y^R\right)w_0^R\,\mathrm{d}x+o(\varepsilon_R). \qquad (1.102)\end{aligned}$$

Combinando (1.102) e (E) obtemos

$$(C)+(E)\leq o(\varepsilon_R). \qquad (1.103)$$

Para a linha (D), usamos o Corolário 1.1 e o Lema 1.16 para obter

$$\begin{aligned}&st\int_{R^N}\left(\nabla w_0^R\nabla w_y^R+w_0^Rw_y^R\right)\mathrm{d}x-\int_{R^N}\left(f\left(sw_0^R\right)tw_y^R+f\left(tw_y^R\right)sw_0^R\right)\mathrm{d}x\\ =\ &\frac{st}{2}\int_{R^N}\left(\nabla w_0^R\nabla w_y^R+w_0^Rw_y^R\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{R^N}f(sw_0^R)tw_y^R\,\mathrm{d}x\\ &+\frac{st}{2}\int_{R^N}\left(\nabla w_y^R\nabla w_0^R+w_y^Rw_0^R\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{R^N}f(tw_y^R)sw_0^R\,\mathrm{d}x\\ &-\frac{1}{2}\int_{R^N}(f(sw_0^R)tw_y^R+f(tw_y^R)sw_0^R)\,\mathrm{d}x\\ =\ &\frac{t}{2}\int_{R^N}(sf(w_0^R)-f(sw_0^R))w_y^R\,\mathrm{d}x+\frac{s}{2}\int_{R^N}(tf(w_y^R)-f(tw_y^R))w_0^R\\ &-\frac{1}{2}\int_{R^N}(f(sw_0^R)tw_y^R+f(tw_y^R)sw_0^R)\,\mathrm{d}x\\ \leq\ &C(|s-1|+|t-1|)O(\varepsilon_R)-C_0\varepsilon_R. \qquad (1.104)\end{aligned}$$

Resta-nos estimar a linha (F), isto é,

$$-\int_{R^N}(1+a(x))F(sw_0^R+tw_y^R)\,\mathrm{d}x+\int_{R^N}F(sw_0^R+tw_y^R)\,\mathrm{d}x=-\int_{R^N}a(x)F(sw_0^R+tw_y^R)\,\mathrm{d}x.$$

Pela hipótese (a_2) e o Lema 1.9 segue que

$$\begin{aligned}&\left|-\int_{R^N}a(x)F(sw_0^R+tw_y^R)\,\mathrm{d}x\right|\\ \leq\ &C\int_{\mathbb{R}^N}e^{-k|x|}(\left|w_0^R\right|^{p_1+1}+\left|w_0^R\right|^{p_2+1}+\left|w_y^R\right|^{p_1+1}+\left|w_y^R\right|^{p_2+1})\,\mathrm{d}x\\ \leq\ &Ce^{-k|0-Ry_0|}+Ce^{-k|0-Ry|}\leq Ce^{-kR}=o(\varepsilon_R). \qquad (1.105)\end{aligned}$$

Resulta do Lema 1.17 que se $\lambda=\dfrac{1}{2}$, então $s,t\to 1$, quando $R\to+\infty$. Tomando R_2 suficientemente grande e $\sigma=\sigma(R)\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ segue por (1.98) , (1.99), (1.100), (1.101), (1.102), (1.103) , (1.104), (1.105) que

$$I(sw_0^R + tw_y^R) = I(\lambda T_{\lambda,y}^R w(x - Ry_0) + (1-\lambda))T_{\lambda,y}^R w(x - Ry) \leq 2m_\infty - \frac{C}{3}\varepsilon_R + o(\varepsilon_R). \tag{1.106}$$

Por continuidade, para todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2} - \sigma, \frac{1}{2} + \sigma\right]$, $y \in \partial B_2(y_0), R > R_2$, vale que

$$I(sw_0^R + tw_y^R) = I(\lambda T_{\lambda,y}^R w(x - Ry_0) + (1-\lambda))T_{\lambda,y}^R w(x - Ry) \leq 2m_\infty - \frac{C}{3}\varepsilon_R + o(\varepsilon_R). \tag{1.107}$$

Resta analisar o caso $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2} - \sigma\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \sigma, 1\right]$. Para isto, sem perda de generalidade, fixemos λ tal que $0 \leq \lambda < \frac{1}{2} - \sigma$. Então $1 \geq 1 - \lambda > \frac{1}{2} + \sigma$. Note que, se $T_{\lambda,y}^R \leq 2$, então $s = T_{\lambda,y}^R \lambda \in [0, 1 - 2\sigma]$ e $t = T_{\lambda,y}^R(1 - \lambda) \in [1 + 2\sigma, 2]$, ou seja, temos $s < 1$ e $t > 1$. Por outro lado, se $T_{\lambda,y}^R \geq 2$, então $s = T_{\lambda,y}^R \lambda \in [1 - 2\sigma, +\infty]$ e $t = T_{\lambda,y}^R(1 - \lambda) \in [1 + 2\sigma, +\infty]$. Ademais, sabemos que sendo w solução positiva *ground state* do problema limite, utilizando o Lema 1.1 segue que $I_\infty(tw_0^R) < m_\infty - \eta$ para algum $\eta \in (0, m_\infty), t \in [0, 1 - \sigma_0] \cup [1 + \sigma_0, \infty)$, para algum σ_0. Juntando isto e as estimativas anteriores de (1.98) a (1.105) mostramos que

$$I(sw_0^R + tw_y^R) = I(\lambda T_{\lambda,y}^R w(x - Ry_0) + (1-\lambda))T_{\lambda,y}^R w(x - Ry) \leq m_\infty - \eta + m_\infty - \eta + O(\varepsilon_R), \tag{1.108}$$

$\forall\, \lambda \in \left[0, \frac{1}{2} - \sigma\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \sigma, 1\right]$.

Portanto, concluímos o lema juntando os resultados em (1.106), (1.107) e (1.108) para todo $\lambda \in [0, 1]$, $y \in \partial B_2(y_0), R > R_2$.

□

Lema 1.19. *Dado número real $\eta > 0$, existe um número real $R_3 > 0$ tal que*

$$I(T_{0,y}^R z_{0,y}^R) < m_\infty + \eta,$$

para todo $y \in \partial B_2(y_0)$, $R > R_3$. Em particular, $m \leq m_\infty$.

Demonstração: Inicialmente iremos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left|F(T_{0,y}^R w_y^R)\right| \, \mathrm{d}x = o_R(1).$$

De fato, por $(a_2), (f_2), (1.24)$ e o Lema 1.9 existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left|F(T_{0,y}^R w_y^R)\right| \mathrm{d}x &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left(\left|T_{0,y}^R w_y^R\right|^{p_1+1} + \left|T_{0,y}^R w_y^R\right|^{p_2+1} \right) \mathrm{d}x \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} \left(\left|T_{0,y}^R w_y^R\right|^{p_1+1} + \left|T_{0,y}^R w_y^R\right|^{p_2+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} \left(\left(T_{0,y}^R\right)^{p_1+1} \left|w_y^R\right|^{p_1+1} + \left(T_{0,y}^R\right)^{p_2+1} \left|w_y^R\right|^{p_2+1} \right) \mathrm{d}x \\
&\leq C(T_{0,y}^R)^{p_1+1} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} e^{-(p_1+1)|x-Ry|} \mathrm{d}x \\
&\quad + C \left(T_{0,y}^R\right)^{p_2+1} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} e^{-(p_2+1)|x-Ry|} \mathrm{d}x \\
&\leq C(T_{0,y}^R)^{p_1+1} e^{-k|0-Ry|} + C(T_{0,y}^R)^{p_2+1} e^{-k|0-Ry|} \\
&\leq C \left(T_{0,y}^R\right)^{p_1+1} e^{-kR} + C \left(T_{0,y}^R\right)^{p_2+1} e^{-kR} = o(\varepsilon_R),
\end{aligned} \tag{1.109}
$$

com $2 < k < p_i + 1$; $i \in \{1, 2\}$ e $T_{0,y}^R$ é limitado.

Considerando $\lambda = 0$ na equação (1.96) temos

$$T_{0,y}^R z_{0,y}^R = T_{0,y}^R w(x - Ry) := T_{0,y}^R w_y^R.$$

Usando o Lema 1.1(c) e tomando $u = T_{0,y}^R w_y^R$ em (1.2) segue que

$$
\begin{aligned}
I(T_{0,y}^R w_y^R) &= I_\infty(T_{0,y}^R w_y^R) - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(T_{0,y}^R w_y^R) \,\mathrm{d}x \\
&\leq \max_{t>0} I_\infty(t w_y^R) + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left|F(T_{0,y}^R w_y^R)\right| \mathrm{d}x \\
&= I_\infty(w_y^R) + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left|F(T_{0,y}^R w_y^R)\right| \mathrm{d}x \\
&= m_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left|F(T_{0,y}^R w_y^R)\right| \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{1.110}
$$

Combinando (1.109) e (1.110), o lema está provado.

□

1.5 Demonstração do resultado principal

Para a demonstrar o teorema principal deste capítulo utilizaremos ferramentas do tipo "min-max". Precisaremos introduzir a função baricentro $\beta : H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^N$. Inicialmente definiremos as funções $\Psi_u, v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$\Psi_u := \frac{1}{\mu(B_1(0))} \int_{B_1(x)} |u(y)| \,\mathrm{d}y \quad \text{e} \quad v(x) := \left(\Psi_u - \frac{1}{2} \max_{x \in \mathbb{R}^N} \Psi_u(x) \right)^+,$$

onde $\mu(B_1(0))$ é a medida de Lebesgue da bola unitária. A função baricentro de u é a aplicação definida por

$$\beta(u) := \frac{1}{|v|_1} \int_{\mathbb{R}^N} x v(x) \,\mathrm{d}x.$$

A função baricentro possui as seguintes propriedades:

i) β é contínua em $H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$;

ii) Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ é radialmente simétrica, então $\beta(u) = 0$;

iii) Para todo $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ tem-se $\beta(u) = \beta(tu)$;

iv) Dado $z \in \mathbb{R}^N$ tem-se $\beta(u(x-z)) = \beta(u) + z$.

Definida a função baricentro, podemos demonstrar o seguinte resultado:

Lema 1.20. *Suponha que m não seja atingido. Então $m = m_\infty$ e existe um $\eta > 0$ tal que*

$$\beta(u) \neq 0, \ \textit{para toda}\ u \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty+\eta};$$

onde denotamos

$$I^{m_\infty+\eta} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); \quad I(u) \leq m_\infty + \eta\}.$$

Demonstração: Suponha que m não é atingido. Pelo Lema 1.8, $m \geq m_\infty$ e do Lema 1.19, a desigualdade invertida. Logo temos a igualdade $m = m_\infty$.

Argumentando por contradição, suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$ exista $\{v_n\} \subset \mathcal{N} \cap I^{m_\infty+\alpha}$, isto é, $\{v_n\} \subset \mathcal{N}$ satisfazendo $I(v_n) < m_\infty + o_n(1)$ e, ainda, $\beta(v_n) = 0$. Segue disto que $\{v_n\} \subset \mathcal{N}$ é uma sequência minimizante para I. O Princípio Variacional de Ekeland, por instante vide [46], nos fornece uma sequência $\{u_n\}$ para I restrito $\mathcal{N}$ no nível m_∞ onde tal sequência é (PS) e satisfaz

$$\|v_n - u_n\| \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Já vimos pelo Lema 1.2 e 1.5 que toda sequência (PS) em $\mathcal{N}$ é limitada e como m não é atingido, podemos usar o Lema 1.7 para garantir a existência de uma sequência

$$\{z_n\} \subset \mathbb{R}^N; \ \|z_n\| \to \infty \ \text{ e } \ \|u_n - w(\cdot - z_n)\| \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

onde w é a solução positiva, radial de energia mínima do problema limite.

Por translação temos

$$u_n(x + z_n) = w(x) + o_n(1).$$

Usando as propriedades da função baricentro e que $\beta(v_n) = 0$ temos

$$\beta(v_n(x + z_n)) = \beta(v_n) - z_n = -z_n$$

e, ainda, pela continuidade da função baricentro β na norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\beta(v_n(x + z_n)) \to \beta(w(x)) = 0,$$

que configura uma contradição, pois $\|z_n\| \to \infty$.

$\square$

Por fim iremos demonstrar o resultado principal onde utilizaremos os resultados que obtivemos anteriormente.

Prova do Teorema 0.1:

Inicialmente, suponha que m seja atingido para algum $u \in \mathcal{N}$. Consequentemente, pelos Lemas 1.1(b) e 1.3 temos que u é uma solução não trivial para o problema (P). Suponha então que m não seja atingido. Segue do Lema 1.20 que $m = m_\infty$, $\beta(u) \neq 0$, para toda $u \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta}$ e podemos fixar η entre $\left(0, \dfrac{m_\infty}{8}\right)$ e, ainda pelo Lema 1.19, para todo $R > R_3$

$$I(T^R_{0,y} z^R_{0,y}) \leq m_\infty + \eta, \quad \forall\, y \in \partial B_2(y_0). \tag{1.111}$$

Pelo Lema 1.18 podemos escolher α entre $\left(0, \dfrac{m_\infty}{8}\right)$ e para todo $R > R_2$

$$I(T^R_{\lambda,y} z^R_{\lambda,y}) \leq 2m_\infty - \alpha, \quad \forall\, y \in \partial B_2(y_0), \quad \lambda \in [0,1]. \tag{1.112}$$

Considere $R > \max\{R_2, R_3\}$ e defina a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} : B_2(0) & \longrightarrow & \mathcal{N} \cap I^{2m_\infty - \eta} \\ \lambda y_0 + (1-\lambda) y & \longrightarrow & T^R_{\lambda,y} z^R_{\lambda,y}, \ \forall\, y \in \partial B_2(y_0), \quad \lambda \in [0,1]. \end{array} \tag{1.113}$$

O objetivo agora é mostrar que o funcional I tem um valor crítico no intervalo $(m_\infty, 2m_\infty)$. Argumentando por contradição, suponha que tal valor crítico não exista . Como m não é atingido, podemos utilizar o Lema 1.8 para garantir que o funcional I satisfaz a condição de Palais - Smale no intervalo $(m_\infty, 2m_\infty)$. Logo, existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|(I\,|_{\mathcal{N}})'(u)\| \geq \varepsilon \ \text{ para todo } \quad u \in \mathcal{N} \cap I^{-1}[m_\infty + \eta, 2m_\infty - \alpha].$$

Isso implica que, pelo Lema 5.15 em [46], existe uma aplicação (deformação) contínua

$$\mathcal{D} : \mathcal{N} \cap I^{2m_\infty - \alpha} \to \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta} \tag{1.114}$$

tal que $\mathcal{D} = id$ (aplicação identidade) para todo $u \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta}$.

Por (1.111), (1.112), (1.113) e (1.114) podemos definir a seguinte aplicação contínua

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : B_2(0) & \to & \partial B_2(0) \\ x & \to & A_2\left(2\dfrac{\beta o \mathcal{D} o \mathcal{H} o A_1(x)}{|\beta o \mathcal{D} o \mathcal{H} o A_1(x)|}\right), \end{array} \tag{1.115}$$

onde β é a aplicação baricentro e as aplicações contínuas A_1 e A_2 são definidas como segue

$$\begin{array}{rcl} A_1 : B_2(0) & \to & B_2(y_0) \\ x & \to & x + y_0 \end{array} \tag{1.116}$$

e

$$\begin{array}{rcl} A_2 : \partial B_2(0) & \to & \partial B_2(0) \\ \dfrac{2y}{|y|} & \to & y - y_0 \end{array} \tag{1.117}$$

onde $y \in \partial B_2(y_0)$. Além disso, se $\lambda = 0$ segue que

$$\mathcal{H}(y) = T^R_{0,y} Z^R_{0,y}. \tag{1.118}$$

Por outro lado, usando as propriedades da função baricentro note que

$$\beta(T^R_{0,y} z^R_{0,y}) = \beta(T^R_{0,y} \omega^R_y) = \beta(\omega^R_y) = \beta(\omega(x - Ry)) = \beta(\omega(x)) + Ry = Ry. \tag{1.119}$$

Como $\mathcal{D} = id$ para todo $u \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta}$ tem-se por (1.115), (1.116), (1.117), (1.118) e (1.119) que

$$\Gamma(y - y_0) = A_2 \left(2 \frac{\beta o \mathcal{D} o \mathcal{H} o A_1(y - y_0)}{|\beta o \mathcal{D} o \mathcal{H} o A_1(y - y_0)|} \right) = A_2 \left(2 \frac{\beta(T^R_{0,y} z^R_{0,y})}{|\beta(T^R_{0,y} z^R_{0,y})|} \right) = A_2 \left(2 \frac{Ry}{|Ry|} \right) = y - y_0.$$

Temos uma contradição visto que tal aplicação contínua Γ não pode existir pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, veja Teorema 3.5 em [7]. Portanto, a contradição veio de supor que I não tem um valor crítico no intervalo $(m_\infty, 2m_\infty)$.

Concluimos a demonstração do Teorema observando a positividade da solução, pois a solução u não muda de sinal pelo Lema 1.4. Ademais, como f é uma função ímpar, $-u$ também é solução do problema (P). Assim, o resultado segue e o teorema está provado.

$\square$

Capítulo

2

Sistema fortemente acoplado

Neste capítulo vamos investigar a existência de solução positiva para o seguinte sistema

$$(\mathbb{S}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = (1+a(x))\dfrac{u\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda v, & \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1+a(x))\dfrac{v\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda u, & \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $N \geq 3$, $0 < \lambda < 1$ e s é um parâmetro real satisfazendo $0 < s < \dfrac{1}{1+\lambda}$.

Vamos assumir as seguintes hipóteses sobre a função peso:

(a_1) $a \in C(\mathbb{R}^N)$; $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}(1+a(x)) = \varsigma > 0$ e $\lim\limits_{|x|\to+\infty} a(x) = 0$;

(a_2) $|a(x)| \leq Ce^{-k|x|}$ onde $k \in \left(2\sqrt{1-\lambda}, 4\sqrt{1-\lambda}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e C uma constante positiva.

Considere

$$f(u,v) := \frac{u\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)}, \quad g(u,v) := \frac{v\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)}$$

e

$$F(u,v) := \frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2}\ln(1+s(u^2+v^2)) \text{ onde } \frac{\partial F}{\partial u} = f \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = g.$$

A seguir serão feitas algumas afirmações com suas respectivas provas referentes a algumas particularidades do sistema.

Afirmação 2.1. *A seguinte afirmação é verificada.*

(F_1) $\dfrac{\nabla F(tu,tv)(u,v)}{t}$ *é crescente para* $t > 0$ *onde* $u, v \neq 0$.

Demonstração: Considere a função

$$G(t) \quad = \quad \frac{\nabla F(tu,tv)(u,v)}{t} = \frac{1}{t}\frac{(tu)^2+(tv)^2}{1+s((tu)^2+(tv)^2)}(tu^2+tv^2) = \frac{t^2(u^2+v^2)^2}{1+st^2(u^2+v^2)}.$$

Derivando $G(t)$ em t obtemos

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{2t(u^2+v^2)^2 + 2st^3(u^2+v^2)^3 - 2st^3(u^2+v^2)^3}{(1+st^2(u^2+v^2))^2} \\ &= \frac{2t(u^2+v^2)^2}{(1+st^2(u^2+v^2))^2} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, segue que $\dfrac{\nabla F(tu,tv)(u,v)}{t}$ é crescente em $t>0$.

□

Afirmação 2.2. *A seguinte afirmação é verificada.*
(F_2) *F satisfaz a condição de não quadraticidade :*
(a) $\displaystyle\lim_{\|(u,v)\|\to\infty} \frac{1}{2}\nabla F(u,v)(u,v) - F(u,v) = +\infty$*;*
(b) $\dfrac{1}{2}\nabla F(u(x),v(x))(u(x),v(x)) - F(u(x),v(x)) \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$*.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos o item (b). Considere

$$h(t) := \frac{t^2(u^2+v^2)^2}{2(1+s(u^2+v^2))} - \frac{t^2(u^2+v^2)}{2s} + \frac{1}{2s^2}\ln(1+t^2s(u^2+v^2)),$$

para todo $t \geq 0$. Derivando h em t,

$$h'(t) = \frac{t(u^2+v^2)^2}{1+s(u^2+v^2)} - \frac{t^3(u^2+v^2)^2}{1+st^2(u^2+v^2)},$$

o que implica

$$h'(t) < 0, \ \text{ se } \ t>1;$$

$$h'(t) > 0, \ \text{ se } \ t<1;$$

$$h'(t) = 0, \ \text{ se } \ t=1.$$

Assim, $h(t) \leq h(1)$ para todo $t>0$. Ademais,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla F(u(x),v(x))(u(x),v(x)) - F(u(x),v(x)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{(u^2+v^2)u}{1+s(u^2+v^2)}, \frac{(u^2+v^2)v}{1+s(u^2+v^2)}\right)(u,v) - F(u,v) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(u^2+v^2)u^2}{1+s(u^2+v^2)} + \frac{(u^2+v^2)v^2}{1+s(u^2+v^2)}\right] - F(u,v) \\ &= \frac{(u^2+v^2)^2}{2(1+s(u^2+v^2))} - \frac{u^2+v^2}{2s} + \frac{1}{2s^2}\ln(1+s(u^2+v^2)) \\ &= h(1) > h(0) = 0, \ \ \forall\, (u,v) \neq (0,0). \end{aligned}$$

Portanto, este item fica verificado.

Verificaremos agora o item (a). Para isso, considere a mudança de coordenadas $u^2+v^2 = z^2$ e obtemos para todo $z^2>0$ que

$$\frac{z^4}{2(1+sz^2)} - \frac{z^2}{2s} \geq -\frac{1}{2s^2},$$

e fazendo $z \to +\infty$ temos

$$\frac{z^4}{2(1+sz^2)} - \frac{z^2}{2s} + \frac{1}{2s^2}\ln(1+sz^2) \geq -\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2s^2}\ln(1+sz^2) \to +\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{z\to+\infty}\left[\frac{z^4}{2(1+sz^2)} - \frac{z^2}{2s} + \frac{1}{2s^2}\ln(1+sz^2)\right] = +\infty.$$

Assim, concluímos o item (a).

□

Afirmação 2.3. *Comportamento de ∇F na origem e no infinito.*
(F_3) $\nabla F(u,v).(u,v) = o\left(u^2+v^2\right)$ *e* $\lim_{\|(u,v)\|\to\infty} \frac{\nabla F(u,v).(u,v)}{u^2+v^2} = \frac{1}{s}$.

Demonstração: A verificação segue diretamente da não linearidade.

□

2.1 Preliminares

Iremos utilizar uma constante geral $C > 0$ para simplificar a notação e assim C não será sempre a mesma constante no que segue.

Consideramos o espaço de Hilbert $H := H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ com norma dada por

$$\|(u,v)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + v^2\right) \mathrm{d}x.$$

O funcional associado ao problema $(\mathbb{S})$ é definido por

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} uv\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F(u,v)\,\mathrm{d}x, \tag{2.1}$$

e sua derivada

$$\begin{aligned} I'(u,v)(\varphi,\psi) \quad = \quad & \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla u\nabla\varphi + \nabla v\nabla\psi + u\varphi + v\psi\Big)\,\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}(v\varphi + u\psi)\,\mathrm{d}x \\ & - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\nabla F(u,v)(\varphi,\psi)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Trabalharemos com a variedade de Nehari definida por

$$\mathcal{N} := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N\backslash\{(0,0)\} : J(u,v) = 0\right\}, \tag{2.3}$$

cujo funcional associado é

$$J(u,v) = I'(u,v)(u,v) = \|(u,v)\|^2 - 2\lambda\int_{\mathbb{R}^N} uv\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\nabla F(u,v)(u,v)\,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Consideramos também o nível de energia do funcional I definido por

$$m := \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}} I(u,v). \tag{2.5}$$

Decorre de (a_1) que o problema limite associado ao sistema $(\mathbb{S})$ é

$$(\mathbb{S}_\infty)\quad \begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{u\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda v, & \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = \dfrac{v\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)} + \lambda u, & \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Analogamente para o sistema $(\mathbb{S}_\infty)$, podemos definir $I_\infty, J_\infty, \mathcal{N}_\infty$ e m_∞, respectivamente.

Note que temos para quaisquer u, v em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$

$$\begin{aligned} I(u,v) &= \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))\, F(u,v)\mathrm{d}x \\ &= I_\infty(u,v) - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(u,v)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.6}$$

A hipótese $0 < s < 1/(1+\lambda)$ é suficiente para que a identidade de Pohozaev possa ser satisfeita por pares $(u,v) \neq (0,0)$. De fato, considere $G(u,v) = F(u,v) + \lambda uv - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{v^2}{2}$. Desejamos mostrar que a identidade de Pohozaev associado ao sistema $(\mathbb{S}_\infty)$

$$\frac{N-2}{2}\|(\nabla u, \nabla v)\|_{L^2}^2 = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\, \mathrm{d}x$$

pode ser válida para algum $(u,v) \neq (0,0)$. Observe que se $0 < \lambda < \left(\dfrac{1}{s} - 1\right)$, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2}\ln\left(1+s\left(u^2+v^2\right)\right) + \lambda uv - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{u^2+v^2}{2}\left(\frac{1}{s}-1\right) + \lambda uv - \frac{1}{2s^2}\ln\left(1+s\left(u^2+v^2\right)\right)\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{M}{2}\left[u^2+v^2+\frac{2\lambda}{M}uv\right] \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2s^2}\ln\left(1+s\left(u^2+v^2\right)\right)\right] \mathrm{d}x > 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $M = \left(\dfrac{1}{s} - 1\right)$.

Observação 2.1. *Pelo Teorema 2.1 em [28] existe solução positiva radial de energia mínima (ground state solution) do problema $(\mathbb{S}_\infty)$. Por [14], se (u,v) é positiva segue que (u,v) é uma solução radialmente simétrica e estritamente decrescente para $(\mathbb{S}_\infty)$. No que segue, iremos denotar uma solução ground state positiva por (w_1, w_2). Nós enfatizamos em todo trabalho que ser uma solução positiva significa ser positiva em cada coordenada do vetor (u,v).*

2.2 Decaimento das soluções do problema limite

Observe que quando $u = v = z$ em $(\mathbb{S}_\infty)$, o sistema se reduz à equação

$$-\Delta z + (1-\lambda)z = h(z), \quad \mathbb{R}^N,$$

onde $h(z) = \dfrac{2z^3}{1+2sz^2}$. Uma condição necessária para que esta equação tenha solução não trivial é

$$\frac{1}{s} = \lim_{z \to +\infty} \frac{h(z)}{z} > 1 - \lambda.$$

Note que temos

$$0 < s < \frac{1}{1+\lambda} < \frac{1}{1-\lambda}.$$

Considere a equacão

$$-\Delta z = \psi(z) := h(z) - (1-\lambda)z.$$

Note que,

i) $\psi(0) = 0$;

ii) $\psi'(z) = \lambda - 1 + h'(z)\cdot$ Assim, $\psi'(0) = \lambda - 1 < 0$.

Com os resultados em $(i), (ii)$ podemos utilizar a observação do Teorema 2 em [25] para obter que

$$\lim_{|x|\to\infty} z(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} \in (0, +\infty).$$

A solução (z, z) é positiva, radial com decaimento exponencial, porém não sabemos se é solução *ground state.*

Nosso objetivo agora é mostrar que se o par (u, v) é solução de $(\mathbb{S}_\infty)$, então mantém-se o mesmo decaimento por meio do seguinte teorema

Teorema 2.1. *Uma solução positiva de energia mínima* (w_1, w_2) *do problema* $(\mathbb{S}_\infty)$ *satisfaz*

$$\lim_{|x|\to\infty} w_1(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} = \mu_1,$$

e

$$\lim_{|x|\to\infty} w_2(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} = \mu_2$$

com $\mu_1, \mu_2 \in (0, +\infty)$.

No resultado seguinte iremos mostrar um decaimento para o problema $(\mathbb{S}_\infty)$ que ainda não é o decaimento " ideal" que almejamos. Isto será útil para obtermos o decaimento ideal, exato. A prova é semelhante a encontrada no Teorema 2.2 em [21] ou Proposição 4.4 em [43].

Lema 2.2. *Se* (u, v) *é solução positiva do problema* $(\mathbb{S}_\infty)$*, então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$0 < u(x), v(x) \leq C|x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\theta|x|},$$

para $|x| > R$, $R > 0$ *suficientemente grande ,* $\theta = \sqrt{1-\lambda-\varepsilon}$ *,* $N \geq 3$ *e* $\varepsilon > 0$ *é uma constante dada.*

Demonstração: Inicialmente, vamos reescrever o problema $(\mathbb{S}_\infty)$ na forma matricial, isto é , $U \in H$,

$$L(U) + AU = \mathcal{F}$$

onde

$$U := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad L := \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathcal{F} := \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix}.$$

Defina agora a função auxiliar

$$\varphi(x) = \frac{M}{R^{-\frac{N-1}{2}}}|x|^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\theta(|x|-R)} = \overline{M}(R)|x|^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\theta|x|}$$

onde $M = u(R) + v(R),\ |x| = R$.

Vamos calcular o Laplaciano de φ. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} &= \overline{M}\left(-\frac{N-1}{2}\right)|x|^{-\frac{N-1}{2}-1}\frac{x_i}{|x|}e^{-\theta|x|} + \overline{M}|x|^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\theta|x|}\left(-\frac{\theta x_i}{|x|}\right)\\ &= \varphi(x)\frac{x_i}{|x|}\left(-\frac{N-1}{2|x|} - \theta\right).\end{aligned}$$

Derivando a função φ mais uma vez, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i^2} &= \varphi(x)\frac{x_i^2}{|x|^2}\left(-\frac{N-1}{2|x|} - \theta\right)^2 + \varphi(x)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^2}\right)\left(-\frac{N-1}{2|x|} - \theta\right)\\ &\quad+\varphi(x)\frac{x_i}{|x|}\frac{(N-1)x_i}{2|x|^3}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Agora vamos somar (2.8) em i, de 1 a N. Segue que

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x) &= \varphi(x)\left(-\frac{N-1}{2|x|} - \theta\right)^2 + \varphi(x)\left(\frac{N-1}{|x|}\right)\left(-\frac{N-1}{2|x|} - \theta\right) + \varphi(x)\frac{(N-1)}{2|x|^2}\\ &= \varphi(x)\left\{\frac{(N-1)^2}{4|x|^2} + \frac{(N-1)\theta}{|x|} + \theta^2 - \frac{(N-1)^2}{2|x|^2} - \frac{(N-1)\theta}{|x|} + \frac{(N-1)}{2|x|^2}\right\}\\ &= \varphi(x)\left\{\frac{(N-1)^2}{4|x|^2} + \theta^2 - \frac{2(N-1)^2}{4|x|^2} + \frac{2(N-1)}{4|x|^2}\right\}\\ &= \varphi(x)\left\{\theta^2 + \frac{(N-1)}{4|x|^2}(N-1-2N+2+2)\right\}\\ &= \varphi(x)\left\{\theta^2 - \frac{(N-1)}{4|x|^2}(N-3)\right\}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Como (u, v) é solução de $(\mathbb{S}_\infty)$, então $u(x), v(x) \to 0$, quando $|x| \to +\infty$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ tal que $1 - \lambda \geq \dfrac{4\varepsilon}{3}$ e $\theta = \sqrt{1-\lambda-\varepsilon}$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que se $u^2 + v^2 < \delta$ tem-se

$$\frac{f(u,v)}{u} = \frac{g(u,v)}{v} < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Considere $L > R$ e o conjunto aberto

$$\Omega_L := \left\{x \in \mathbb{R}^N : R < |x| < L;\ u(x) + v(x) > \varphi(x)\right\}.$$

Desejando mostrar que o conjunto Ω_L é vazio. Suponha então, por contradição, que $\Omega_L \neq \emptyset$. Note que, para todo $|x| \geq R$, temos por (2.9), (2.10) e $N \geq 3$ que

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi - u - v) &= \varphi\left\{\theta^2 - \frac{(N-1)}{4|x|^2}(N-3)\right\} - \Delta u - \Delta v \\
&< \varphi\left\{\theta^2 - \frac{(N-1)}{4|x|^2}(N-3)\right\} - u + \lambda v + \varepsilon u - v + \lambda u + \varepsilon v \\
&\leq \varphi\theta^2 - (1-\lambda-\varepsilon)u - (1-\lambda-\varepsilon)v \\
&\leq \theta^2(\varphi - u - v) < 0 \quad \text{em} \quad \Omega_L. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Desde que Ω_L é limitado, $\Delta(\varphi - u - v) < 0$ em Ω_L, pelo Princípio do Máximo, temos por (2.11) que

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - u(x) - v(x) &\geq \min\{(\varphi - u - v)(x) : x \in \partial\Omega_L\} \\
&= \min\left\{\varphi(R) - u(R) - v(R), \varphi(L) - u(L) - v(L)\right\} \\
&\geq \min\left\{0, \varphi(L) - u(L) - v(L)\right\}, \quad \forall x \in \Omega_L.
\end{aligned}$$

Quando $L \to +\infty$, observe que $u, v, \varphi \to 0$, logo temos $\varphi(x) - u(x) - v(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega_L$ tal que $|x| \geq R$, implicando em contradição. Portanto, Ω_L é vazio e finalizamos a prova do lema.

□

Vamos adaptar os argumentos de [37] para o sistema a fim de obter os decaimentos exponenciais exatos. No que segue, vamos tomar $\gamma = 0$ na Proposição 6.1 em [37]. Observe no Teorema 2.1 o fato de μ_1 e μ_2 serem constantes positivas significa que tem-se o decaimento a zero das soluções w_1 e w_2 em ordem exata e será fundamental em argumento posterior.

No que segue, denotaremos (w_1, w_2) solução positiva radial de $(\mathbb{S}_\infty)$, obtida em [28], em que $I_\infty(w_1, w_2) = m_\infty$.

Lema 2.3. *Sejam* $N \geq 3$, $\rho > 0$ *e* $0 < \lambda < 1$. *Então existem funções radiais não negativas* $u, v : \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0) \to \mathbb{R}$ *do sistema linear*

$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u - \lambda v = 0, & \textit{em} \quad \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0), \\ -\Delta v + v - \lambda u = 0, & \textit{em} \quad \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0), \\ \quad u = \omega_1, \quad v = \omega_2, & \textit{sobre} \quad \partial B_\rho(0) \end{cases}$$

e, para algum $\rho_0 \in (\rho, +\infty)$,

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\displaystyle\int_{\rho_0}^{|x|} \sqrt{1-\lambda}\,\mathrm{d}t} = \sigma_1 > 0 \qquad (2.12)$$

e

$$\lim_{|x| \to \infty} v(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\displaystyle\int_{\rho_0}^{|x|} \sqrt{1-\lambda}\,\mathrm{d}t} = \sigma_2 > 0. \qquad (2.13)$$

Demonstração: A prova de existência de solução para $(\mathcal{H})$ é consequência da teoria de EDO lineares, entretanto iremos incluí-la com detalhes para efeito de completude. Primeiramente, iremos mostrar que o problema $(\mathcal{H})$ possui uma subsolução e supersolução. Depois iremos usar [19] para garantir a existência de solução entre essa subsolução e supersolução .

Considere $0 \leq \beta < 1,\ t > \rho$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Defina a função

$$\phi_\tau(t) = -\frac{N-1}{2t} - \sqrt{1-\lambda} + \frac{\tau}{t^{1+\beta}} \tag{2.14}$$

e para $x \in \mathbb{R}^N \backslash \bar{B}_\rho(0)$ considere

$$\psi_\tau(x) = \begin{pmatrix} \Phi_\tau(x) \\ \Phi_\tau(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^{\displaystyle\int_\rho^{|x|} \phi_\tau(t)\,\mathrm{d}t} \\ e^{\displaystyle\int_\rho^{|x|} \phi_\tau(t)\,\mathrm{d}t} \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Pela regra da cadeia tem-se

$$\frac{\partial \Phi_\tau(x)}{\partial x_i} = \Phi_\tau(x)\phi_\tau(|x|)\frac{x_i}{|x|}.$$

Derivando novamente temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_\tau(x)}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial \Phi_\tau(x)}{\partial x_i}\phi_\tau(|x|)\frac{x_i}{|x|} + \Phi_\tau(x)\phi_\tau'(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + \Phi_\tau(x)\phi_\tau(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right) \\
&= \Phi_\tau(x)\left[\phi_\tau(|x|)\frac{x_i}{|x|}\right]^2 + \Phi_\tau(x)\phi_\tau'(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + \Phi_\tau(x)\phi_\tau(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right) \\
&= \Phi_\tau(x)\left[\phi_\tau^2(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + \phi_\tau'(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + \phi_\tau(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right)\right].
\end{aligned}$$

Somando em i de 1 a N temos

$$-\Delta\Phi_\tau(x) = \Phi_\tau(x)\left[-\phi_\tau^2(|x|) - \phi_\tau'(|x|) - \phi_\tau(|x|)\left(\frac{N-1}{|x|}\right)\right]. \tag{2.16}$$

Por outro lado, derivando (2.14) em t obtemos

$$\phi_\tau'(t) = \frac{N-1}{2t^2} - \frac{\tau(1+\beta)}{t^{2+\beta}}.$$

Segue para $t = |x| \geq \rho$ que

$$\phi_\tau'(|x|) = \frac{N-1}{2|x|^2} - \frac{\tau(1+\beta)}{|x|^{2+\beta}}. \tag{2.17}$$

Agora, substituindo (2.14) e (2.17) em (2.16) temos

$$\begin{aligned}
-\Delta\Phi_\tau(x) &= \Phi_\tau(x)\Bigg[-\left(\frac{N-1}{2|x|}-\sqrt{1-\lambda}+\frac{\tau}{|x|^{1+\beta}}\right)^2-\frac{N-1}{2|x|^2}+\frac{\tau(1+\beta)}{|x|^{2+\beta}}\\
&\quad+\frac{(N-1)(N-1)}{2|x|^2}+\frac{\sqrt{1-\lambda}(N-1)}{|x|}-\frac{\tau(N-1)}{|x|^{2+\beta}}\Bigg]\\
&= \Phi_\tau(x)\Bigg[-\left(\frac{N-1}{2|x|}\right)^2-(1-\lambda)-\frac{\tau^2}{|x|^{2+2\beta}}-\frac{(N-1)\sqrt{1-\lambda}}{|x|}+\frac{\tau(N-1)}{|x|^{2+\beta}}\\
&\quad+\frac{2\sqrt{1-\lambda}\tau}{|x|}-2\frac{(N-1)}{4|x|^2}+\frac{\tau(1+\beta)}{|x|^{2+\beta}}\\
&\quad+2\frac{(N-1)(N-1)}{4|x|^2}+\frac{\sqrt{1-\lambda}(N-1)}{|x|}-\frac{\tau(N-1)}{|x|^{2+\beta}}\Bigg]\\
&= \Phi_\tau(x)\Bigg[\frac{(N-1)(N-3)}{4|x|^2}-(1-\lambda)-\frac{\tau^2}{|x|^{2+2\beta}}+\frac{\tau(1+\beta)}{2|x|^{2+2\beta}}+\frac{2\tau\sqrt{1-\lambda}}{|x|^{1+\beta}}\Bigg].
\end{aligned}$$

Segue que

$$-\Delta\Phi_\tau(x)+(1-\lambda)\Phi_\tau(x)=\frac{\Phi_\tau(x)}{|x|^{1+\beta}}\left[2\tau\sqrt{1-\lambda}+\frac{(N-1)(N-3)}{4|x|^{1-\beta}}-\frac{\tau^2}{|x|^{1+\beta}}+\frac{\tau(1+\beta)}{|x|^1}\right].$$

Reescrevendo de forma mais conveniente temos

$$-\Delta\Phi_\tau(x)+(1-\lambda)\Phi_\tau(x)=\Phi_\tau(x)\left[\frac{2\tau\sqrt{1-\lambda}}{|x|^{1+\beta}}+\frac{\pi_\tau(x)}{|x|^{1+\beta}}\right], \tag{2.18}$$

onde $\pi_\tau(x):\mathbb{R}^N\backslash B_\rho(0)\to\mathbb{R}$ é dada por

$$\pi_\tau(x)=\frac{(N-1)(N-3)}{4|x|^{1-\beta}}-\frac{\tau^2}{|x|^{1+\beta}}+\frac{\tau(1+\beta)}{|x|}.$$

Como $\beta<1$ segue que

$$\lim_{|x|\to+\infty}\pi_\tau(x)=0.$$

Assim, podemos escolher ρ_0 suficientemente grande tal que para todo $\rho\geq\rho_0$, se $|x|\geq\rho$ temos $\pi_\tau(x)$ pequeno de tal forma que escolhendo $\bar\tau>0$ e $\underline{\tau}<0$, segue por (2.18) que existem funções

$$\psi_{\underline{\tau}}(x)=\begin{pmatrix}\Phi_{\underline{\tau}}(x)\\ \Phi_{\underline{\tau}}(x)\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad \psi_{\bar\tau}(x)=\begin{pmatrix}\Phi_{\bar\tau}(x)\\ \Phi_{\bar\tau}(x)\end{pmatrix}$$

subsolução e supersolução do problema $(\mathcal{H})$, ou seja, em termos de matrizes

$$\begin{pmatrix}-\Delta & 0\\ 0 & -\Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{\bar\tau}(x)\\ \Phi_{\bar\tau}(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -\lambda\\ -\lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{\bar\tau}(x)\\ \Phi_{\bar\tau}(x)\end{pmatrix}\gg\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{2.19}$$

e

$$\begin{pmatrix}-\Delta & 0\\ 0 & -\Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{\underline{\tau}}(x)\\ \Phi_{\underline{\tau}}(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -\lambda\\ -\lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{\underline{\tau}}(x)\\ \Phi_{\underline{\tau}}(x)\end{pmatrix}\ll\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{2.20}$$

onde o símbolos $\ll$ e $\gg$ significam $\leq$ e $\geq$, respectivamente, em cada linha do sistema.

Resta mostrar que existe um vetor solução $Z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de $(\mathcal{H})$ satisfazendo

$$\begin{pmatrix} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix} \ll Z \ll \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\bar{\tau}}(x) \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Vamos utilizar o método de redução de ordem. Desde que as soluções do sistema são radiais por ([14]), vamos reescrever o sistema $(\mathcal{H})$ da seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta u(r) + u(r) = \lambda v(r), \quad r \in (\rho, +\infty), \\ -\Delta v(r) + v(r) = \lambda u(r), \quad r \in (\rho, +\infty), \\ \qquad u(\rho) = \omega_1(\rho), \quad v(\rho) = \omega_2(\rho). \end{cases}$$

Como u e v são radiais, então $(\mathcal{H})$ é dado por

$$(\mathcal{H}_r) \quad \begin{cases} u'' + \dfrac{N-1}{r}u' - u(r) = -\lambda v(r), \quad r \in (\rho, +\infty), \\ v'' + \dfrac{N-1}{r}v' - v(r) = -\lambda u(r), \quad r \in (\rho, +\infty), \\ \qquad u(\rho) = \omega_1(\rho), \quad v(\rho) = \omega_2(\rho). \end{cases}$$

Consideremos a seguinda mudança de variáveis:

$$x_1 = u; \qquad x_2 = x_1'; \qquad x_3 = v; \qquad x_4 = x_3'$$

com condições iniciais

$$x_1(\rho) = \omega_1(\rho); \qquad x_3(\rho) = \omega_2(\rho); \qquad x_2 < 0; \qquad x_4 < 0.$$

Assim, obtemos o sistema de EDO linear

$$(\mathcal{H}_R) \quad \begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_1 + \dfrac{1-N}{r}x_2 - \lambda x_3, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = -\lambda x_1 + x_3 + \dfrac{1-N}{r}x_3. \end{cases}$$

Ou seja,

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1-N}{r} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 0 & 1 & \frac{1-N}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Podemos olhar o sistema na forma $X' = A(r)X$ onde $A(r)X = f(r, x_1, x_2, x_3, x_4)$. Como os coeficientes da matriz A são limitados e contínuos para $r > \rho$, podemos usar o Teorema 5.2 em [19] para garantir que existe solução $(u(x), v(x)) = (u(r), v(r))$ para qualquer $r \in (\rho, +\infty)$. Feito isto, observe que, por construção temos que

$$\Phi_{\underline{\tau}}(x) \leq u(x), v(x) \leq \Phi_{\bar{\tau}}(x). \tag{2.22}$$

A fim de mostrar o decaimento das soluções u e v, nós precisamos de dois resultados auxiliares.

Afirmação 2.4. *As seguintes afirmativas são verdadeiras:*

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\Phi_{\bar{\tau}}(x)}{\Phi_{\underline{\tau}}(x)} < +\infty \tag{2.23}$$

e

$$\lim_{|x|\to+\infty} \Phi_{\underline{\tau}}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1-\lambda}\,\mathrm{d}t} \in (0,+\infty). \tag{2.24}$$

Demonstração: Começamos observando que, por (2.14),

$$\phi_{\bar{\tau}}(t) - \phi_{\underline{\tau}}(t) = -\frac{N-1}{2t} - \sqrt{1-\lambda} + \frac{\bar{\tau}}{t^{1+\beta}} + \frac{N-1}{2t} + \sqrt{1-\lambda} - \frac{\underline{\tau}}{t^{1+\beta}} = \frac{\bar{\tau}-\underline{\tau}}{s^{1+\beta}}.$$

Integrando de ρ a $|x|$ temos

$$\begin{aligned}
\int_\rho^{|x|} (\phi_{\bar{\tau}}(t) - \phi_{\underline{\tau}}(t))\,\mathrm{d}t &= \int_\rho^{|x|} \frac{\bar{\tau}-\underline{\tau}}{s^{1+\beta}}\,\mathrm{d}t = (\bar{\tau}-\underline{\tau}) \int_\rho^{|x|} t^{-(1+\beta)}\,\mathrm{d}t \\
&= (\bar{\tau}-\underline{\tau}) \left\{-\frac{1}{t^\beta}\right\} \Bigg|_{t=\rho}^{|x|} = (\bar{\tau}-\underline{\tau}) \left\{-\frac{1}{|x|^\beta} + \frac{1}{\rho^\beta}\right\}.
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\Phi_{\bar{\tau}}(x)}{\Phi_{\underline{\tau}}(x)} &= \lim_{|x|\to+\infty} e^{\int_\rho^{|x|} (\phi_{\bar{\tau}}(t) - \phi_{\underline{\tau}}(t))\,\mathrm{d}t} \\
&= \lim_{|x|\to+\infty} e^{\left\{(\bar{\tau}-\underline{\tau}) \left\{-\frac{1}{|x|^\beta} + \frac{1}{\rho^\beta}\right\}\right\}} \\
&= e^{\left\{(\bar{\tau}-\underline{\tau}) \left\{\frac{1}{\rho^\beta}\right\}\right\}} < +\infty.
\end{aligned}$$

Assim, mostramos (2.23). Por outro lado, por (2.14) temos

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\underline{\tau}}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda}\,\mathrm{d}t} &= \left(e^{\int_\rho^{|x|}\phi_{\underline{\tau}}(t)\,\mathrm{d}t}\right)\left(|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda}\,\mathrm{d}t}\right)\\
&= |x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_\rho^{|x|}\left(-\frac{N-1}{2t}-\sqrt{1-\lambda}+\frac{\underline{\tau}}{t^{1+\beta}}+\sqrt{1-\lambda}\right)\mathrm{d}t}\\
&= |x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_\rho^{|x|}\left(-\frac{N-1}{2t}+\frac{\underline{\tau}}{t^{1+\beta}}\right)\mathrm{d}t}\\
&= |x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\left(-\frac{N-1}{2}\ln|x|+\frac{N-1}{2}\ln\rho-\frac{\underline{\tau}}{|x|^\beta}+\frac{\underline{\tau}}{\rho^\beta}\right)}\\
&= |x|^{\frac{N-1}{2}}|x|^{-\frac{N-1}{2}}e^{\left(\frac{N-1}{2}\ln\rho-\frac{\underline{\tau}}{|x|^\beta}+\frac{\underline{\tau}}{\rho^\beta}\right)}\\
&= e^{\left(\frac{N-1}{2}\ln\rho-\frac{\underline{\tau}}{|x|^\beta}+\frac{\underline{\tau}}{\rho^\beta}\right)}.
\end{aligned}
$$

Aplicando o limite obtemos

$$
\lim_{|x|\to\infty}\Phi_{\underline{\tau}}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda}\,\mathrm{d}t} = e^{\left(\frac{N-1}{2}\ln\rho+\frac{\underline{\tau}}{\rho^\beta}\right)}.
$$

Portanto, concluímos (2.24).

Para concluirmos o lema e obtermos (2.12) e (2.13), podemos utilizar (2.22) , (2.23) e (2.24) e obter que

$$
\begin{aligned}
0 &< \lim_{|x|\to\infty}u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda}\,\mathrm{d}t}\\
&= \left(\lim_{|x|\to\infty}\frac{u(x)}{\Phi_{\underline{\tau}}(x)}\right)\left(\lim_{|x|\to\infty}\Phi_{\underline{\tau}}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda}\,\mathrm{d}t}\right)\\
&\le \left(\lim_{|x|\to\infty}\frac{\Phi_{\bar{\tau}}(x)}{\Phi_{\underline{\tau}}(x)}\right)\left(\lim_{|x|\to\infty}\Phi_{\underline{\tau}}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda}\,\mathrm{d}t}\right)\in(0,+\infty).
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Similarmente, (2.25) vale para $v(x)$.

□

Prova do Teorema 2.1. Primeiramente denotamos uma solução positiva radial de $(\mathbb{S}_\infty)$ por

$$
U(x) := \begin{pmatrix} w_1(x)\\ w_2(x)\end{pmatrix}.
$$

Vamos considerar dois problemas auxiliares, a saber: sejam $H_0, H^0 \in C^2(\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)) \times C^2(\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0))$ satisfazendo

$$(\mathcal{H}_0) \quad \begin{cases} -\Delta H_0 + AH_0 = 0, & \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0), \\ \qquad H_0(x) = U(x), & \Gamma = \partial B_\rho(0), \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} H_0(x) = 0, \end{cases}$$

e

$$(\mathcal{H}^0) \quad \begin{cases} -\Delta H^0 + WH^0 = 0, & \mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0), \\ \qquad H^0(x) = U(x), & \Gamma = \partial(B_\rho(0), \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} H^0(x) = 0, \end{cases}$$

onde $H_0(x) := \begin{pmatrix} h_{0,1}(x) \\ h_{0,2}(x) \end{pmatrix}$, $H^0(x) := \begin{pmatrix} h^{0,1}(x) \\ h^{0,2}(x) \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$, $0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W(x) := \begin{pmatrix} 1 - ce^{-\theta|x|} & -\lambda \\ -\lambda & 1 - ce^{-\theta|x|} \end{pmatrix}$ onde c é uma constante positiva e $\theta > 0$ escolhido no Lema 2.2. Note que H_0 satisfaz o Lema 2.3, então existe $\mu_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \to \infty} H_0(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1-\lambda}\, \mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Similarmente como feito nos passos de (2.14) a (2.20) tomando $\phi_\tau(t) = -\dfrac{N-1}{2t} - W(t) + \dfrac{\tau}{t^{1+\beta}}$ em vez de $\phi_\tau(t) = -\dfrac{N-1}{2t} - \sqrt{1-\lambda} + \dfrac{\tau}{t^{1+\beta}}$ em (2.14), com $W(t) = \sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta t}}$, desde que para algum $\beta > 0$ tem-se $\lim\limits_{t \to \infty} W'(t)t^{1+\beta} = 0$, veja a Proposição 6.1 em [37], obtemos

$$\lim_{|x| \to \infty} H^0(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta t}}\, \mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \mu^0 \\ \mu^0 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

com $\mu^0 \in (0, +\infty)$. Ademais,

$$\begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\bar{\tau}}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - ce^{-\theta|x|} & -\lambda \\ -\lambda & 1 - ce^{-\theta|x|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\bar{\tau}}(x) \end{pmatrix} \gg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - ce^{-\theta|x|} & -\lambda \\ -\lambda & 1 - ce^{-\theta|x|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix} \ll \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resta mostrar que existe um vetor solução $V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de $(\mathcal{H}^0)$ satisfazendo

$$\begin{pmatrix} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix} \ll V(x) \ll \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\bar{\tau}}(x) \end{pmatrix}.$$

Porém, é similar aos passos de (2.21) a (2.22).

Vamos escrever o problema $(\mathbb{S}_\infty)$ de uma forma compacta, isto é, considere $LU + AU = \mathcal{F}$ onde

$$LU = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} f(w_1, w_2) \\ g(w_1, w_2) \end{pmatrix}.$$

A demonstração da estimativa exponencial para a solução do sistema $(\mathbb{S}_\infty)$ repousa no Princípio do Máximo em [22]. No domínio $\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)$,

$$L(U - H_0) = L(U) - L(H_0) = -AU + \mathcal{F} + AH_0 = -A(U - H_0) + \mathcal{F}.$$

Como $\mathcal{F} \gg 0$, $-A = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}$ e $U(x) - H_0(x) = 0$ sobre Γ, pelo Princípio do Máximo, ver Teorema 1.1 em [22], segue que

$$U(x) \gg H_0(x) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{B}_\rho(0). \tag{2.28}$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} L(H^0 - U) &= L(H^0) - L(U) \\ &= -WH^0 + AU - \mathcal{F} \\ &= -A(H^0 - U) + \begin{pmatrix} ce^{-\theta|x|} & 0 \\ 0 & ce^{-\theta|x|} \end{pmatrix} H^0 - \mathcal{F} \\ &= -A(H^0 - U) + \begin{pmatrix} ce^{-\theta|x|} h^{0,1} - f(w_1, w_2) \\ ce^{-\theta|x|} h^{0,2} - g(w_1, w_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Para utilizar o Princípio do Máximo, precisamos verificar que a matriz

$$\begin{pmatrix} ce^{-\theta|x|} h^{0,1} - f(w_1, w_2) \\ ce^{-\theta|x|} h^{0,2} - g(w_1, w_2) \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

é não negativa em cada linha. Pelo Lema 2.2, a solução vetorial do sistema

$$L(U) + AU = \mathcal{F}$$

tem decaimento do tipo

$$0 < w_1(x), w_2(x) \leq C|x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\theta|x|},$$

para $|x| > R$, $R > 0$ suficientemente grande. Note que

$$f(w_1, w_2) = \frac{w_1(w_1^2 + w_2^2)}{1 + s(w_1^2 + w_2^2)} \leq w_1(w_1^2 + w_2^2) = w_1^3 + w_2^2 w_1 \leq \bar{C}|x|^{-\frac{3(N-1)}{2}} e^{-3\theta|x|}$$

e, similarmente, para $g(w_1, w_2)$. Consequentemente, estimando a primeira linha da matriz em (2.30), pois a segunda linha é similar, notamos que utilizando o decaimento exponencial de H^0 em (2.27) temos

$$\begin{aligned}
& ce^{-\theta|x|}h^{0,1} - f(w_1,w_2) \\
\geq\ & \bar{c}e^{-\theta|x|}C|x|^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}}|x|} - \bar{C}|x|^{-\frac{3(N-1)}{2}}e^{-3\theta|x|} \\
\geq\ & Ce^{-\theta|x|}|x|^{-\frac{N-1}{2}}\left(e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}}|x|} - |x|^{-\frac{2(N-1)}{2}}e^{-2\theta|x|}\right) \\
\geq\ & Ce^{-\theta|x|}|x|^{-\frac{N-1}{2}}\left(e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}}|x|} - |R|^{-\frac{2(N-1)}{2}}e^{-2\theta|x|}\right) \\
\geq\ & Ce^{-\theta|x|}|x|^{-\frac{N-1}{2}}\left(e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}}|x|} - e^{-2\theta|x|}\right) \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

pois dado $\varepsilon > 0,\ 1-\lambda \geq \dfrac{4\varepsilon}{3}$ e $\theta = \sqrt{1-\lambda-\varepsilon}$ temos para $|x| > R$, R suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
& ce^{-\theta|x|} + 3(1-\lambda) - 4\varepsilon \geq 0 \\
& \Leftrightarrow 1-\lambda-ce^{-\theta|x|} \leq 4(1-\lambda-\varepsilon) \\
& \Leftrightarrow 1-\lambda-ce^{-\theta|x|} \leq 4\theta^2 \\
& \Leftrightarrow \sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}} \leq 2\theta \\
& \Leftrightarrow -\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}}|x| \geq -2\theta|x| \\
& \Leftrightarrow e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}}|x|} \geq e^{-2\theta|x|} \\
& \Leftrightarrow e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}}|x|} - e^{-2\theta|x|} \geq 0,
\end{aligned}$$

donde segue (2.31). Logo, de (2.29), (2.30), aplicando o Princípio do Máximo [22] obtemos

$$H^0(x) \gg U(x) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{B}_\rho(0). \tag{2.32}$$

Portanto, combinando (2.28) e (2.32) temos

$$H_0(x) \ll U(x) \ll H^0(x) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{B}_\rho(0), \tag{2.33}$$

similarmente como feito em [38]. Utilizando (2.26), (2.27) e (2.33), temos que

$$\begin{aligned}
0 < \mu_0 = \lim_{|x|\to\infty} h_{0,1}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|} &\leq \liminf_{|x|\to\infty} w_1(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|} \\
&\leq \limsup_{|x|\to\infty} w_1(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|} \\
&\leq \lim_{|x|\to\infty} h^{0,1}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|} < \infty.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

A primeira desigualdade estrita segue de (2.26) e a última desigualdade é finita, pois usando (2.27) temos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{|x|\to\infty} h^{0,1}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|} \\
&= \lim_{|x|\to\infty} h^{0,1}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} \frac{e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta t}}\,\mathrm{d}t}}{e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta t}}\,\mathrm{d}t}} e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|} \\
&= \lim_{|x|\to\infty} h^{0,1}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta t}}\,\mathrm{d}t} \lim_{|x|\to\infty} \frac{e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|}}{e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta t}}\,\mathrm{d}t}} < \infty.
\end{aligned}
$$

O próximo passo é mostrar que o $\lim_{|x|\to\infty} w_1(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|}$ existe. De fato, note que se mostrarmos que a função $\frac{w_1}{h_{0,1}}$ é não decrescente, usando (2.33) tal função seria limitada, pois $1 \leq \frac{w_1}{h_{0,1}} \leq \frac{h^{0,1}}{h_{0,1}}$ e

$$
\lim_{|x|\to\infty} \frac{h^{0,1}(x)}{h_{0,1}(x)} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{h^{0,1}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta t}}\,\mathrm{d}t}}{h_{0,1}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|}} \frac{e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|}}{e^{\int_\rho^{|x|}\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta t}}\,\mathrm{d}t}} = \frac{\mu^0}{\mu_0} C < \infty,
$$

por (2.26) e (2.27). Assim concluiríamos que $\frac{w_1}{h_{0,1}}$ tem limite finito quando $|x| \to \infty$ e que

$$
\lim_{|x|\to\infty} w_1(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{w_1(x)}{h_{0,1}(x)} \lim_{|x|\to\infty} h_{0,1}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}\,|x|} \in (0,\infty).
$$

Finalmente, vamos mostrar que $\frac{w_1}{h_{0,1}}$ é não decrescente. Considere $r, s \in (\rho,\infty)$ tal que $r \leq s$. Desde que w_1 e $h_{0,1}$ são ambas funções radiais, defina o seguinte operador

$$
Sw_1 = -(-\Delta w_1 + w_1) = \Delta w_1 - w_1 = w_1'' + \frac{N-1}{r} w_1' - w_1.
$$

Segue da definição do operador S e de $(\mathcal{H}_0)$ que

$$
Sh_{0,1} = h_{0,1}'' + \frac{N-1}{r} h_{0,1}' - h_{0,1}.
$$

Note que, $-\Delta(h_{0,1} - w_1) + (h_{0,1} - w_1) = \lambda(h_{0,2} - w_2) - f(w_1, w_2) < 0$, logo pelo Princípio do Máximo, temos que $h_{0,1}(x) \leq w_1(x)$ para todo $|x| \in (\rho,\infty)$. Agora considere a função $w = \frac{h_{0,1}}{w_1}$ e $\sigma(r) = \frac{N-1}{r}$. Observe que

$$
Sh_{0,1} = S(ww_1) = w_1 w'' + (2w_1' + \sigma w_1)w' + S(w_1)w = 0.
$$

Decorre que

$$
w'' + \left(2\frac{w_1'}{w_1} + \sigma\right) w' + \frac{1}{w_1} S(w_1) w; \quad r \in (\rho,\infty), \quad w(\rho) = 1. \tag{2.35}
$$

O problema de valor inicial em (2.35) tem solução única desde que $\frac{1}{w_1}S(w_1) < 0$ e $2\frac{w_1'}{w_1} + \sigma$ é contínua em $r \in (\rho, \infty)$.
Por outro lado, note que temos

$$S(h_{0,1} - w_1) = 0 - (-f(w_1, w_2) - \lambda w_2) = f(w_1, w_2) + \lambda w_2 > 0 \quad \text{para} \quad r \in (\rho, \infty),$$

e

$$h_{0,1} - w_1 = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_\rho(0).$$

Aplicando o Princípio do Máximo e Lema de Hopf , respectivamente, temos

$$h_{0,1} - w_1 < 0 \quad \text{para} \quad r > \rho \quad \text{e} \quad \frac{\partial(h_{0,1} - w_1)}{\partial r} < 0 \quad \text{se} \quad r = \rho, \tag{2.36}$$

que implica

$$h_{0,1}'(\rho) < w_1'(\rho) < 0.$$

Consequentemente,

$$w'(\rho) = \frac{h_{0,1}'(\rho)w_1(\rho) - h_{0,1}(\rho)w_1'(\rho)}{w_1^2(\rho)} < \frac{w_1'(\rho)[w - 1(\rho) - h_{0,1}(\rho)]}{w_1^2(\rho)} \leq 0.$$

Desde que $w(r)$ é continuamente diferenciável em (ρ, ∞) , derivando w temos

$$w'(r) = \frac{h_{0,1}'(r)w_1(r) - h_{0,1}(r)w_1'(r)}{w_1^2(r)}.$$

Supondo $w'(r) \geq 0$ segue que

$$\frac{h_{0,1}'(r)}{h_{0,1}(r)} \geq \frac{w_1'(r)}{w_1(r)},$$

ou seja, $(\ln h_{0,1}(r))' \geq (\ln w_1(r))'$, isto é, $\ln h_{0,1}(r) \geq \ln w_1(r)$, Como a função $\ln(x)$ é uma função crescente, isto equivale a $h_{0,1}(r) \geq w_1(r)$. Contradição com (2.36). Implicando que $\frac{w_1}{h_{0,1}}$ é não decrescente como queríamos mostrar. Similarmente para w_2, obtendo assim

$$\lim_{|x|\to\infty} w_1(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} = \mu_1 > 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{|x|\to\infty} w_2(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} = \mu_2 > 0$$

com $\mu_1, \mu_2 \in (0, +\infty)$.

□

2.3 Variedade de Nehari e limitação da sequência de Palais-Smale

O resultado a seguir contém as propriedades principais sobre a variedade $\mathcal{N}$ associado ao funcional I.

Lema 2.4. *A variedade $\mathcal{N}$ satisfaz:*

a) existe um número $\alpha > 0$ tal que para todo $(u, v) \in \mathcal{N}$ tem-se $\|(u, v)\| \geq \alpha$;

b) $\mathcal{N}$ é uma subvariedade fechada, de classe C^2 em H e é variedade natural para I;

c) *para todo* $(u,v) \in \mathcal{N}$*, a função* $t \mapsto I(tu,tv)$ *é estritamente crescente no intervalo* $[0,1)$ *e estritamente decrescente no intervalo* $(1,+\infty)$*. Assim, em particular, pode-se afirmar que*

$$I(u,v) = \max_{t>0} I(tu,tv) > 0.$$

Demonstração: Verificação de (a) Por (a_1), (F_3) e o funcional J associado a $\mathcal{N}$ definido em (2.4) tem-se

$$\begin{aligned} J(u,v) &= I'(u,v)(u,v) = \|(u,v)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))\nabla F(u,v)(u,v)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \|(u,v)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^2+v^2\right)\,\mathrm{d}x - C\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(u,v)(u,v)\,\mathrm{d}x \\ &\geq (1-\lambda-\varepsilon)\|(u,v)\|^2 - C\|(u,v)\|^p, \ \ 2<p<2^*. \end{aligned}$$

Desde que $(u,v) \in \mathcal{N}$, tem-se $J(u,v)=0$. Assim, (a) segue de

$$C\|(u,v)\|^{p-2} \geq (1-\lambda-\varepsilon).$$

Verificação de (b) Note que

$$\mathcal{N} := \{(u,v) \in H \backslash \{(0,0)\}\,; J(u,v)=0\} = J^{-1}\left(\{(0,0)\}\right).$$

Como J é contínuo, implica que $\mathcal{N}$ é uma subvariedade fechada de $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Se $(u,v) \in \mathcal{N}$, por (2.4) então

$$\|(u,v)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))\nabla F(u,v)(u,v)\,\mathrm{d}x.$$

Derivando com respeito a u o gradiente $\nabla F(u,v)(u,v) = \dfrac{(u^2+v^2)^2}{1+s(u^2+v^2)}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{2(u^2+v^2)2u(1+s(u^2+v^2))u - (u^2+v^2)^2 2suu}{(1+s(u^2+v^2))^2} \\ = & \frac{4u^2(u^2+v^2) + 4su^2(u^2+v^2)^2 - 2su(u^2+v^2)^2}{(1+s(u^2+v^2))^2} \\ = & \frac{4u^2(u^2+v^2) + 2su^2(u^2+v^2)^2}{(1+s(u^2+v^2))^2}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Derivando agora com respeito a v, analogamente, tem-se

$$\frac{4v^2(u^2+v^2) + 2sv^2(u^2+v^2)^2}{(1+s(u^2+v^2))^2}. \tag{2.38}$$

Somando (2.37) e (2.38) obtemos

$$\frac{4(u^2+v^2)^2 + 2s(u^2+v^2)^3}{(1+s(u^2+v^2))^2}. \tag{2.39}$$

Derivando (2.4) e combinado com (2.39) e o fato de que $(u,v)\in\mathcal{N}$,

$$\begin{aligned}
J'(u,v)(u,v) &= 2\|(u,v)\|^2 - 4\lambda\int_{\mathbb{R}^N} uv\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\nabla^2F(u,v)(u,v)\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\nabla F(u,v)(u,v)\,\mathrm{d}x\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\frac{4(u^2+v^2)^2+2s(u^2+v^2)^3}{(1+s(u^2+v^2))^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left\{\frac{2(u^2+v^2)^2}{1+s(u^2+v^2)}-\frac{4(u^2+v^2)^2+2s(u^2+v^2)^3}{(1+s(u^2+v^2))^2}\right\}\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left\{\frac{2(u^2+v^2)^2+2s(u^2+v^2)^3-4(u^2+v^2)^2-2s(u^2+v^2)^3}{(1+s(u^2+v^2))^2}\right\}\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left\{\frac{-2(u^2+v^2)^2}{(1+s(u^2+v^2))^2}\right\}\mathrm{d}x<0
\end{aligned}$$

visto que $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}(1+a(x))=\varsigma>0$, por (a_1). Isto implica que $(0,0)$ é um valor regular de $J:H\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$. Assim, $J^{-1}(\{(0,0)\})$ é um conjunto fechado, por ser a imagem inversa de um conjunto fechado por um funcional contínuo. Como $\{(u,v)\equiv(0,0)\}$ é um ponto isolado de $J^{-1}(\{(0,0)\})$, então temos que $\mathcal{N}$ é de classe C^2 e é uma variedade natural para I. Assim verificamos (b).
Verificação de (c) Note que,

$$\begin{aligned}
I(tu,tv) &= \frac{t^2}{2}\|(u,v)\|^2-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}(tu)(tv)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F(tu,tv)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left\{\frac{t^2}{2}\nabla F(tu,tv)(tu,tv)-F(tu,tv)\right\}\mathrm{d}x. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

Considere a aplicação $\xi(t):=\dfrac{t^2}{2}\nabla F(tu,tv)(tu,tv)-F(tu,tv)$ para $t\geq 0$. Observe que

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \frac{t^2}{2}\frac{(u^2+v^2)^2}{1+s(u^2+v^2)}-\frac{t^2(u^2+v^2)}{2s}+\frac{1}{2s^2}\ln(1+st^2(u^2+v^2))\\
&:= \frac{t^2}{2}\frac{z^4}{1+sz^2}-\frac{t^2z^2}{2s}+\frac{1}{2s^2}\ln(1+st^2z^2). \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

Derivando (2.41) em t, com $z^2=u^2+v^2$ tem-se

$$\begin{aligned}
\xi'(t) &= t\frac{z^4}{1+sz^2}-t\frac{z^2}{s}+\frac{tz^2}{s(1+st^2z^2)}\\
&= \frac{tsz^4-tz^2(1+sz^2)}{s(1+sz^2)}+\frac{tz^2}{s(1+st^2z^2)}\\
&= \frac{-tz^2}{s(1+sz^2)}+\frac{tz^2}{s(1+st^2z^2)}\\
&= \frac{-tz^2-st^3z^4+tz^2+stz^4}{s(1+sz^2)(st^2z^2)}=\frac{stz^2(-t^2+1)}{s(1+sz^2)(st^2z^2)}.
\end{aligned}$$

Segue que se $0<t<1$, então

$$\xi'(t)>0. \qquad (2.42)$$

Se $t > 1$, então

$$\xi'(t) < 0. \tag{2.43}$$

Se $t = 1$, então

$$\xi'(t) = 0. \tag{2.44}$$

Por (a_1), (2.40),(2.42),(2.43) e (2.44), (c) fica provado.

□

O próximo resultado nos dá uma limitação para uma sequência em $\mathcal{N}$ em qualquer nível $d \geq 0$ fixado. Isto nos permitirá usar o Lema de Splitting posteriormente .

Lema 2.5. *Suponha que exista uma sequência $\{(u_n, v_n)\}$ em $\mathcal{N}$ satisfazendo*

$$I(u_n, v_n) \to d.$$

Então a sequência $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em H.

Demonstração: Por $(F_2)(b)$ temos $d \geq 0$. Fixemos $D > d \geq 0$ e consideramos que $z_n := (u_n, v_n)$. Vamos supor que a sequência $\{z_n\}$ não seja limitada, isto é, $\|z_n\| \to \infty$. Considere a sequência $\{\varphi_n\} := \{t_n z_n\}$ onde $t_n = \dfrac{2\sqrt{D}}{\sqrt{1-\lambda}\|z_n\|}$. Assim, $\|\varphi_n\| = \dfrac{2\sqrt{D}}{\sqrt{1-\lambda}} < \infty$, significando a limitação desta sequência. Pelo Lema 2.4, para n suficientemente grande, temos que

$$I(\varphi_n) = I(t_n z_n) \leq \max_{t>0} I(tz_n) = I(z_n) < D.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
D &> I(t_n z_n) = \frac{1}{2}\|t_n(u_n, v_n)\|_H^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} t_n^2 u_n v_n \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(t_n(u_n, v_n))\,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{2}\|t_n(u_n, v_n)\|^2 - t_n^2 \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{u_n^2}{2} + \frac{v_n^2}{2}\right\} \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(t_n(u_n, v_n))\,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{2}\|t_n(u_n, v_n)\|^2 - t_n^2 \lambda \|(u_n, v_n)\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(t_n(u_n, v_n))\,\mathrm{d}x \\
&= \left\{\frac{1-\lambda}{2}\right\}\|t_n(u_n, v_n)\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(t_n(u_n, v_n))\,\mathrm{d}x \\
&= \left\{\frac{1-\lambda}{2}\right\}\frac{4D}{1-\lambda} - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(t_n(u_n, v_n))\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Isto implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(t_n(u_n, v_n))\,\mathrm{d}x \geq 2D - D = D.$$

Para obtermos a contradição, precisamos mostrar que $\int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(t_n(u_n, v_n))\,\mathrm{d}x = o_n(1)$, pois $D > 0$. De fato, desde que $\{\varphi_n\}$ é limitada em H, então $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ em H. Temos dois casos a considerar:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\varphi_n|^2 \,\mathrm{d}x \right) = 0;$

2. $\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)}|\varphi_n|^2\,\mathrm{d}x\right)=\eta>0.$

Suponha que o primeiro caso seja verdade. Usando o Lema de Lions, logo $\varphi_n \to 0$ em $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ para $2<p<2^*$. Usando (F_3), como $\varepsilon>0$ é arbitrário, φ_n é limitada e $\|\varphi_n\|_{L^p}\to 0$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F(t_n(u_n,v_n))\,\mathrm{d}x \le C\left(\varepsilon\|\varphi_n\|_{L^2}^2+C_\varepsilon\|\varphi_n\|_{L^p}^p\right)<D. \tag{2.46}$$

Contradição. Então suponha que o segundo caso ocorra, a menos de subsequência, fixando $n\in\mathbb{N}$, por definição de supremo existe uma sequência $\{y_n\}\subset\mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_n)}\left|\varphi_n^1\right|^2\,\mathrm{d}x \ge \frac{\eta}{4}, \tag{2.47}$$

onde $\varphi_n=(\varphi_n^1,\varphi_n^2)$. Defina $\varphi_n^1:=\varphi_n^1(x+y_n)$. Desde que φ_n é limitada e pela invariância do domínio, φ_n^1 é limitada em H^1 e, portanto, converge fraco para alguma φ^1. Temos ainda que $\varphi_n^1\to\varphi^1$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $2\le p<2^*$ e também q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Usando mudanca de variáveis, segue que

$$\begin{aligned}\int_{B_1(0)}\left|\varphi^1(x)\right|^2\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\int_{B_1(0)}\left|\varphi_n^1(x+y_n)\right|^2\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{B_1(y_n)}\left|\varphi_n^1(x)\right|^2\,\mathrm{d}x \ge \frac{\eta}{4}>0.\end{aligned}$$

Assim existe um subconjunto $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ de medida de Lebesgue positiva em $B_1(0)$ em que $\varphi(x)\not\equiv 0, \forall\, x\in\Omega$. Observe que a convergência pontual em $\mathbb{R}^N$ nos dá

$$0<\left|\varphi^1(x)\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\varphi_n^1(x+y_n)\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{D}\,|u_n(x+y_n)|}{\|z_n(x+y_n)\|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{D}\,|u_n(x+y_n)|}{\|z_n\|},$$

para todo $x\in\Omega$. Visto que $\|z_n\|\to+\infty$, quando $n\to+\infty$, necessariamente temos que

$$|u_n(x+y_n)|\to+\infty, \ \text{ para todo } \ x\in\Omega.$$

Desde que $\{(u_n,v_n)\}$ está contida em $\mathcal{N}$, podemos usar o Lema de Fatou, a condição de não quadraticidade (F_2), (a_1) e obter

$$
\begin{aligned}
D &> \lim_{n\to+\infty} I(u_n,v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\|(u_n,v_n)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} u_n v_n \,\mathrm{d}x\right) \\
&\quad - \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F(u_n,v_n)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left(\frac{1}{2}\nabla F(u_n,v_n)(u_n,v_n) - F(u_n,v_n)\right)\mathrm{d}x \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\varsigma\left(\frac{1}{2}\nabla F(u_n,v_n)(u_n,v_n) - F(u_n,v_n)\right)\mathrm{d}x \\
&= \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\varsigma\frac{1}{2}\nabla F(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))\right. \\
&\quad \left. -\varsigma F(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n)\right)\mathrm{d}x \\
&> \liminf_{n\to+\infty}\int_{\Omega}\left(\varsigma\frac{1}{2}\nabla F(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))\right. \\
&\quad \left. -\varsigma F(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))\right)\mathrm{d}x \\
&\geq \varsigma\int_{\Omega}\left(\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\nabla F(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))\right. \\
&\quad \left. -F(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))\right)\mathrm{d}x = +\infty.
\end{aligned}
$$

Assim, o segundo caso também não pode ocorrer. A contradição veio do fato de supor que a sequência $\{(u_n,v_n)\}$ não era limitada em H e obtemos assim o resultado desejado.

□

O resultado a seguir mostra a positividade do ínfimo do funcional associado ao problema $(\mathbb{S})$ sobre a variedade $\mathcal{N}$.

Lema 2.6. *Seja m definida em* (2.5), *então tem-se $m > 0$.*

Demonstração: A demonstração é análoga à do Lema 2.5 . Considere $\{(u_n,v_n)\}$ na variedade $\mathcal{N}$ tal que $I(u_n,v_n)\to m$. Pelo Lema 2.5, $\{(u_n,v_n)\}$ é limitada em H e $(u_n,v_n)\rightharpoonup(u,v)$ com $u\not\equiv 0$ e $v\not\equiv 0$. Segue que

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{n\to+\infty} I(u_n,v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\|(u_n,v_n)\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} u_n v_n\,\mathrm{d}x\right) \\
&\quad - \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))F(u_n,v_n)\,\mathrm{d}x\right) \\
&\geq \varsigma\int_{\Omega}\left(\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\nabla F(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))\right. \\
&\quad \left. -F(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))\right)\mathrm{d}x \\
&= \varsigma\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\nabla F(u,v)(u,v) - F(u,v)\right)\mathrm{d}x > 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

Observação 2.2. *Note que o resultado obtido no Lema 2.6 também se aplica ao funcional I_∞, ou seja, $m_\infty > 0$.*

O próximo lema nos dá uma importante informação sobre uma sequência (PS) do funcional I restrito à $\mathcal{N}$ e no espaço H.

Lema 2.7. *Suponha que $\{(u_n, v_n)\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para I restrito à variedade $\mathcal{N}$. Então, a menos de subsequência, a sequência $\{(u_n, v_n)\}$ é também uma sequência $(PS)_d$ para o funcional I em $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Considere $\{(u_n, v_n)\} \subset \mathcal{N}$ do tipo $(PS)_d$. Então pelo Lema 2.5, $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada e satisfaz

$$I(u_n, v_n) \to d \qquad \text{e} \qquad (I\,|_{\mathcal{N}})'(u_n, v_n) \to 0. \tag{2.48}$$

Observe que para qualquer $(\varphi, \psi) \in H$

$$\begin{aligned} J'(u_n, v_n)(\varphi, \psi) &= 2\Big(\langle u_n, \varphi\rangle + \langle v_n, \psi\rangle\Big) - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \Big(v_n\varphi + u_n\psi\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))\nabla(\nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n))(\varphi, \psi)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando a hipótese (a_1) e a desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned} |J'(u_n, v_n)(\varphi, \psi)| &\leq 2\Big\{\|u_n\|\|\varphi\| + \|v_n\|\|\psi\|\Big\} + 2\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|v_n||\varphi| + |u_n||\psi|\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n))(\varphi, \psi)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq 2\Big\{\|u_n\|\|\varphi\| + \|v_n\|\|\psi\|\Big\} \\ &\quad + 2\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right\} \\ &\quad + C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(\nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n)\right)(\varphi, \psi)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq 2\Big\{\|u_n\|\|\varphi\| + \|v_n\|\|\psi\|\Big\} + 2\left\{\|v_n\|\|\varphi\| + \|u_n\|\|\psi\|\right\} \\ &\quad + C\int_{\mathbb{R}^N} \frac{4|u_n|(u_n^2 + v_n^2) + 2s|u_n|(u_n^2 + v_n^2)^2}{(1 + s(u_n^2 + v_n^2))^2}|\varphi|\,\mathrm{d}x \\ &\quad + C\int_{\mathbb{R}^N} \frac{4|v_n|(u_n^2 + v_n^2) + 2s|v_n|(u_n^2 + v_n^2)^2}{(1 + s(u_n^2 + v_n^2))^2}|\psi|\,\mathrm{d}x \\ &\leq 2\Big\{\|u_n\| + \|v_n\|\Big\}\left\{\|\varphi\| + \|\psi\|\right\} + C\int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{4|u_n||\varphi|}{s} + \frac{4|v_n||\psi|}{s}\right\}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|(u_n,v_n)\|\|(\varphi,\psi)\| + \frac{4C}{s}\left\{\|v_n\|\|\varphi\| + \|u_n\|\|\psi\|\right\}\\
&\leq 2\|(u_n,v_n)\|\|(\varphi,\psi)\| + \frac{4C}{s}\left\{\Big(\|v_n\| + \|u_n\Big)\|\varphi\| + \Big(\|u_n\| + \|v_n\Big)\|\psi\|\right\}\\
&\leq \|(u_n,v_n)\|\|(\varphi,\psi)\| + \frac{4C}{s}\|(u_n,v_n)\|\|(\varphi,\psi)\|\\
&\leq \max\left\{2, \frac{4C}{s}\right\}\|(u_n,v_n)\|\|(\varphi,\psi)\|.
\end{aligned}
$$

Desde que a sequência $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em H, então para toda $(\varphi, \psi) \in H$,

$$|J'(u_n,v_n)(\varphi,\psi)| \leq C\,\|(\varphi,\psi)\|_H\,.$$

Isto mostra que a sequência $\{J'(u_n, v_n)\}$ é limitada em H^{-1}. Consequentemente, $|J'(u_n, v_n)(u_n, v_n)| \leq \|J'(u_n, v_n)\|_{H^{-1}} \|(u_n, v_n)\|_H \leq C$, onde a constante C não depende de $\{(u_n, v_n)\}$. A menos de subsequência, a sequência de números reais positivos

$$\varrho_n := |J'(u_n,v_n)(u_n,v_n)| \to \varrho \geq 0.$$

Por outro lado, note que

$$
\begin{aligned}
\varrho &= \liminf_{n\to\infty} |J'(u_n,v_n)(u_n,v_n)|\\
&= \liminf_{n\to\infty}\left|2\,\|(u_n,v_n)\|^2 - 4\lambda\int_{\mathbb{R}^N} u_nv_n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\nabla\left(\nabla F(u_n,v_n)(u_n,v_n)\right)(u_n,v_n)\,\mathrm{d}x\right|\\
&= \liminf_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))2\nabla F(u_n,v_n)(u_n,v_n)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\nabla\left(\nabla F(u_n,v_n)(u_n,v_n)\right)(u_n,v_n)\,\mathrm{d}x\right|\\
&= \liminf_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\left\{\frac{2(u_n^2+v_n^2)^2}{(1+s(u_n^2+v_n^2))^2}\right\}\mathrm{d}x\right|\\
&\geq \varsigma\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left\{\frac{2\left(u_n^2+v_n^2\right)^2}{(1+s(u_n^2+v_n^2))^2}\right\}\mathrm{d}x\\
&\geq \varsigma\liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega_0}\left\{\frac{2(u_n^2+v_n^2)^2}{\left(1+s(u_n^2+v_n^2)\right)^2}\right\}\mathrm{d}x\\
&= \varsigma\int_{\Omega_0}\left\{\frac{2(u^2+v^2)^2}{(1+s(u^2+v^2))^2}\right\}\mathrm{d}x > 0,
\end{aligned}
$$

pois como $\{(u_n, v_n)\} \in \mathcal{N}$, pelo Lema 2.4 temos que $\|(u_n, v_n)\| \geq \alpha > 0$ e argumentando como na demonstração do Lema 2.6, usando o Lema de Lions tem-se que $(u_n(x), v_n(x)) \to (u(x), v(x))$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$ e $u(x), v(x) \neq 0$ q.t.p. $x \in \Omega_0$ onde Ω_0 é um conjunto de medida positiva, e tudo isto adicionado com o Lema de Fatou e (a_1).

Como $\mathcal{N}$ é uma variedade de codimensão 1 em H (vide seção 6.3 em [7]) podemos escrever a projeção gradiente $(I\mid_{\mathcal{N}})'(u, v)$ sobre o plano tangente

$$T_{(u,v)}\mathcal{N} = \{\ (\varphi,\psi) \in H : \langle J'(u), (\varphi,\psi)\rangle = 0\}$$

por

$$(I\mid_{\mathcal{N}})'(u,v) = I'(u,v) - tJ'(u,v),$$

em que

$$t := \frac{\langle I'(u,v), J'(u,v)\rangle}{\|J'(u,v)\|^2}.$$

Desde que $\{(u_n, v_n)\} \subset \mathcal{N}$ é uma sequência (PS) de I restrito a $\mathcal{N}$ (vide Lema 7.19 em [7]) existe uma sequência $\{t_n\}$ tal que

$$(I\mid_{\mathcal{N}})'(u_n,v_n) = I'(u_n,v_n) - t_nJ'(u_n,v_n) = o_n(1), \tag{2.49}$$

dada por

$$t_n := \frac{\langle I'(u_n,v_n), J'(u_n,v_n)\rangle}{\|J'(u_n,v_n)\|^2};$$

note que $\|J'(u_n,v_n)\| \neq 0$ pelo Lema 2.4.

O objetivo agora é mostrar que a sequência $\{t_n\}$ converge a zero, se $n \to +\infty$. Assim concluíremos o lema.

Por (2.48) e (2.49) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= I'(u_n,v_n)(u_n,v_n) \\ &= (I\mid_{\mathcal{N}})'(u_n,v_n)(u_n,v_n) + t_nJ'(u_n,v_n)(u_n,v_n) \\ &= o_n(1) + t_nJ'(u_n,v_n)(u_n,v_n). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Por (2.49) e (2.50) tem-se $C \geq |J'(u_n,v_n)(u_n,v_n)| \to \varrho > 0$, se $n \to +\infty$, e isto implica que, a menos de subsequência,

$$t_n \to 0, \quad \text{se} \quad n \to +\infty. \tag{2.51}$$

Assim, deduzimos de (2.48) e (2.51) que, a menos de subsequência de $\{(u_n,v_n)\}$,

$$I'(u_n,v_n) = (I\mid_{\mathcal{N}})'(u_n,v_n) + t_nJ'(u_n,v_n) \to 0, \quad \text{se} \quad n \to +\infty.$$

Concluimos assim a demonstração do lema.

□

Pretendemos usar ferramentas do tipo *min-max* para encontrar solução de $(\mathbb{S})$. Entretanto, o conjunto de soluções do sistema autônomo pode ser complicado e, ao contrário do caso escalar, precisamos impor hipóteses similares às que implicam em unicidade de solução no caso escalar. Definimos

$$\widehat{m}_\infty = \inf\{m^* > m_\infty : m^* \text{ é valor crítico de } I_\infty\}.$$

Observação 2.3. *O problema escalar que tem solução positiva única satisfaz esta hipótese. Supor que o sistema tenha solução positiva (u,v) única é mais artificial, entretanto podemos supor que todas as soluções positivas (caso exista mais de uma) estejam no mesmo nível de energia é razoável.*

Observação 2.4. *Em 2013 Maia-Montefusco-Pellacci [32] investigaram o problema fracamente acoplado*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = \dfrac{u\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)}, & \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \lambda v = \dfrac{v\left(u^2+v^2\right)}{1+s(u^2+v^2)}, & \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{2.52}$$

com $\lambda > 0$ e $N \geq 2$. O Teorema 2.1 em [32] mostra que se $s \in (0, 1/\lambda)$, então existe uma única solução $U = (u, v)$, a menos de rotação, com ambas componentes positivas de (2.52) dada por $(u, v) = (\cos\theta, \sin\theta)z_\lambda$ onde $\theta \in (0, \pi/2)$ e z_λ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta z_\lambda + \lambda z_\lambda = \dfrac{z_\lambda^3}{1+sz_\lambda^2}, & \mathbb{R}^N, \\ z_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{2.53}$$

Outrossim, o nível de energia da única solução vetorial do sistema (2.52) é igual ao nível de energia das soluções de (2.53). Em outras palavras, para o problema modelo (2.52) não podemos encontrar uma solução vetorial com nível de energia estritamente menor que o nível de energia das soluções de (2.53).

Assumindo a hipótese (U) vamos mostrar que $2m_\infty \leq \widehat{m}_\infty$. Precisaremos do seguinte lema auxiliar

Lema 2.8. *Se (u, v) é solução de $(\mathbb{S}_\infty)$ que muda de sinal, então*

$$supt(u^+) \cap supt(v^-) \subset \{x : u(x) = 0 \;\; e \;\; v(x) = 0\} \tag{2.54}$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $v^- = \max\{-v, 0\}$.

Demonstração: Primeiramente note que o acoplamento forte do sistema $(\mathbb{S}_\infty)$ implica $v = 0$ se, e somente se, $u = 0$ (isto é, as regiões nodais de u e v são as mesmas). Considere $\Omega := \operatorname{supt}\{u^+\} \subset \mathbb{R}^N$. Se $v(x) < 0$ para algum $x \in \Omega$, então $x \in int(\Omega)$, (pois $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$). Logo, obtemos que $\Omega := \operatorname{supt}\{v^-\} \subset \mathbb{R}^N$. Dado $x_0 \in \partial\Omega$, $u(x_0) = v(x_0) = 0$ e pela continuidade de u e v dado um $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, se $x \in \Omega$ e $|x - x_0| < \delta$, então $|u^+(x)| = |u(x)| < \varepsilon$ e $|v^-(x)| = |v(x)| < \varepsilon$. Subtraindo as duas equações do sistema $(\mathbb{S}_\infty)$, temos

$$-\Delta(u - v) + (u - v) = \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)}(u - v) - \lambda(u - v)$$

e para todos os pontos $x \in \Omega$, vamos ter

$$-\Delta(u^+ + v^-) + \left[1 + \lambda - \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)}\right](u^+ + v^-) = 0. \tag{2.55}$$

Tomando ε suficientemente pequeno tal que $\dfrac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)} < \dfrac{1 + \lambda}{2}$, para todo $x \in \Omega$ e $|x - x_0| < \delta$.

Multiplicando a equação (2.55) por $u^+ + v^-$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega\cap B_\delta(x_0)} \left(|\nabla(u^+ + v^-)|^2 + \left[1+\lambda - \frac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)}\right](u^+ + v^-)^2 \right) \mathrm{d}x \\ &> \int_{\Omega\cap B_\delta(x_0)} \left(|\nabla(u^+ + v^-)|^2 + \left[\frac{1+\lambda}{2}\right](u^+ + v^-)^2 \right) \mathrm{d}x > 0, \end{aligned}$$

visto que, $u^+(x) + v^-(x) > 0$ no interior $\Omega \cap B_\delta(x_0)$, pelo Lema de Hopf e do fato que u e v são soluções clássicas de $(\mathbb{S}_\infty)$. Este absurdo veio de termos assumido que $v(x) < 0$ para algum $x \in \Omega$, portanto $v(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$ e assim $\operatorname{supt}(u^+) \cap \operatorname{supt}(v^-) \subset \{x : u(x) = 0 \;\; e \;\; v(x) = 0\}$. Analogamente verifica-se que

$$\operatorname{supt}(u^-) \cap \operatorname{supt}(v^+) \subset \{x : u(x) = 0 \;\; e \;\; v(x) = 0\}. \tag{2.56}$$

□

Segue o seguinte lema de não existência de solução

Lema 2.9. *Suponha (U), então não existe solução (u,v) para o problema $(\mathbb{S}_\infty)$ tal que $I_\infty(u,v) \in (m_\infty, 2m_\infty)$.*

Demonstração: Seja (u,v) uma solução de $(\mathbb{S}_\infty)$. Segue que $I'_\infty(u,v) = 0$, isto é, $I'_\infty(u,v)(\phi,\psi) = 0$ para qualquer $(\phi,\psi) \in H$. Em particular, $I'_\infty(u,v)(u^+,v^+) = 0$ e $I'_\infty(u,v)(u^-,v^-) = 0$. Desejamos mostrar que (u^+,v^+) e (u^-,v^-) estão na variedade $\mathcal{N}$. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= I'_\infty(u,v)(u^+,v^+) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla(u^+ + u^-)\nabla u^+ + \nabla(v^+ + v^-)\nabla v^+ + (u^+ + u^-)u^+ + (v^+ + v^-)v^-]\, \mathrm{d}x \\ &\quad -\lambda \int_{\mathbb{R}^N} [(v^+ + v^-)u^+ + (u^+ + u^-)v^+]\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(u^+ + u^-, v^+ + v^-)(u^+,v^+)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u^+|^2 + |\nabla v^+|^2 + (u^+)^2 + (v^+)^2]\, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (u^+v^+ + u^+v^+ + v^-u^+ + u^-v^+)\, \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(u^+ + u^-, v^+ + v^-)(u^+,v^+)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u^+|^2 + |\nabla v^+|^2 + (u^+)^2 + (v^+)^2]\, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (u^+v^+ + u^+v^+ + v^-u^+ + u^-v^+)\, \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\{u,v\geq 0\}} \nabla F(u^+,v^+)(u^+,v^+)\, \mathrm{d}x - \int_{\{u,v<0\}} \nabla F(u^-,v^-)(u^+,v^+)\, \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\{u\geq 0, v\leq 0\}} \nabla F(u^+,v^-)(u^+,v^+)\, \mathrm{d}x - \int_{\{u<0, v>0\}} \nabla F(u^-,v^+)(u^+,v^+)\, \mathrm{d}x \\ &= I'_\infty(u^+,v^+)(u^+,v^+), \end{aligned}$$

em que a última desigualdade é consequência de (2.54) e (2.56). Logo, $(u^+,v^+) \in \mathcal{N}_\infty$. De modo análogo mostra-se que $(u^-,v^-) \in \mathcal{N}_\infty$.

Agora, note que

$$
\begin{aligned}
& I_\infty(u^+ + u^-, v^+ + v^-) \\
= \; & \frac{1}{2}\|(u^+ + u^-, v^+ + v^-)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^+ + u^-, v^+ + v^-\right)\left(u^+ + u^-, v^+ + v^-\right) \mathrm{d}x \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} F\left(u^+ + u^-, v^+ + v^-\right) \mathrm{d}x \\
= \; & \frac{1}{2}\|(u^+, v^+)\|^2 + \frac{1}{2}\|(u^-, v^-)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^+v^+ + u^-v^-\right) \mathrm{d}x \\
& - \int_{\{u,v \geq 0\}} F(u^+, v^+)\, \mathrm{d}x - \int_{\{u,v<0\}} F(u^-, v^-)\, \mathrm{d}x \\
& - \int_{\{u \geq 0, v \leq 0\}} F(u^+, v^-)\, \mathrm{d}x - \int_{\{u<0, v>0\}} F(u^-, v^+)\, \mathrm{d}x \\
= \; & I_\infty(u^+, v^+) + I_\infty(u^-, v^-) \geq m_\infty + m_\infty = 2m_\infty,
\end{aligned}
$$

em que novamente utilizamos (2.54) e (2.56). Como m_∞ é estritamente positivo pela Observação 2.2, acabamos de mostrar que não existe solução (u, v) de $(\mathbb{S}_\infty)$ que muda de sinal em $[m_\infty, 2m_\infty)$. Suponha (u, v) solução de $(\mathbb{S}_\infty)$ tal que $I_\infty(u, v) \in (m_\infty, 2m_\infty)$. Pela hipótese (U) temos que é única ou qualquer solução positiva está no mesmo nível de energia do funcional associado a $(\mathbb{S}_\infty)$. Sem perda de generalidade, suponha (u, v) solução positiva. Por [14], (u, v) é radial e por (U) segue que $(u, v) = (w_1, w_2)$ e $I_\infty(u, v) = m_\infty$ ou $I_\infty(u, v) = m_\infty$ implicando em contradição com a hipótese de $I_\infty(u, v) > m_\infty$.

□

2.4 Compacidade

O próximo resultado que enunciaremos será fundamental para o estudo dos pontos críticos do funcional I. Ele descreve como uma sequência de Palais - Smale de I se comporta assintoticamente.

Lema 2.10. *(Lema de Splitting) Suponha que $\{(u_n, v_n)\}$ é uma sequência limitada em H tal que*

$$I(u_n, v_n) \to d > 0 \quad e \quad (I|_{\mathcal{N}})'(u_n, v_n) \to 0 \quad em \quad H^{-1}.$$

Então, passando se necessário a uma subsequência, existem (u_0, v_0) solução fraca de $(\mathbb{S})$, um número $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, k funções $(u^1, v^1), ..., (u^k, v^k) \in H$ soluções do problema limite $(\mathbb{S}_\infty)$ e k sequências de pontos $\{y_n^j\}, 1 \leq j \leq k$ tais que

1. *$(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$ em H ou*
2. *$|y_n^j| \to +\infty$ e $|y_n^j - y_n^i| \to +\infty; j \neq i$;*
3. *$(u_n, v_n) - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (u^j(\cdot - y_n^j), v^j(\cdot - y_n^j)) \to (u_0, v_0)$ em H;*
4. *$I(u_n, v_n) \to d = I(u_0, v_0) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} I_\infty(u^j, v^j)$.*

Demonstração: Inicialmente obtemos do Lema 2.7 que a sequência $\{(u_n, v_n)\}$ satisfaz $I'(u_n, v_n) \to 0$. A prova segue como em [5] considerando que a não linearidade $F(u, v)$ é de classe $C^2(H)$ e seguindo os passos (2.11) e (2.46) a (2.55) da Proposição 2.31 em [20].

□

Como uma consequência dos Lemas 2.5 , 2.7 e 2.9 combinados com o Lema 2.10 temos o seguinte resultado

Lema 2.11. *Suponha que o ínfimo m definido em (2.5) não seja atingido. Então $m \geq m_\infty$ e, ainda, o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale sobre $\mathcal{N}$ em qualquer nível do intervalo $(m_\infty, 2m_\infty)$.*

Demonstração: Considere uma sequência $\{(u_n, v_n)\}$ tal que satisfaz $(PS)_d$ para o funcional I restrito a $\mathcal{N}$. Então, a menos de subsequência, $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada e é $(PS)_d$ para I em todo espaco H pelos Lemas 2.5 e 2.7.

Suponha que o nível m não seja atingido. Se $d = m$, então existe uma sequência $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$, pela continuidade do funcional I, teríamos $I(u_n, v_n) \to I(u_0, v_0) = d = m$. Contradição com a hipótese neste caso. Logo, não existe tal sequência; o que implica que a possibilidade 1 no Lema de Splitting não ocorre. Decorre então que valem $(2), (3)$ e (4).

Em primeiro lugar, suponha que $(u_0, v_0) = (0, 0)$, então por (4),

$$I(u_n, v_n) \to d = m = I(u_0, v_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(u^j, v^j) \geq 0 + kI_\infty(w_1, w_2) \geq km_\infty \geq m_\infty,$$

onde (w_1, w_2) é a solução de energia mínima para I_∞.

Em segundo lugar, assuma que $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$. Como (u_0, v_0) pertence a $\mathcal{N}$, tem-se $I(u_0, v_0) > 0$. Segue que $m > km_\infty \geq m_\infty$. Logo, em ambos os casos, temos $m \geq m_\infty$ e assim a primeira parte do lema está verificada.

Por outro lado, seja $d \in (m_\infty, 2m_\infty)$. Assim, para n suficientemente grande,

$$m_\infty < I(u_n, v_n) < 2m_\infty.$$

Se não existisse subsequência $\{(u_n, v_n)\}$ convergente, usando o Lema 2.10,

$$I(u_n, v_n) \to d = I(u_0, v_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(u^j, v^j).$$

Se $k \geq 2$, então

$$\begin{aligned} I(u_n, v_n) \to d &= I(u_0, v_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(u^j, v^j) \\ &\geq 0 + kI_\infty(w_1, w_2) \geq km_\infty \geq 2m_\infty. \end{aligned}$$

Isto configura um absurdo uma vez que $d < 2m_\infty$. Portanto, obrigatoriamente, tem-se $k = 1$. Neste caso, se $(u_0, v_0) = (0, 0)$, então

$$2m_\infty > I_\infty(u^j, v^j) = d > m_\infty.$$

Isto é uma contradição com o Lema 2.9, pois não existe solução (u^j, v^j) de $(\mathbb{S})_\infty$ no intervalo $(m_\infty, 2m_\infty)$. Usando mais uma vez o Lema 2.10, como (u_0, v_0) pertence a $\mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} I(u_n, v_n) \to d = I(u_0, v_0) + 1.I_\infty(u^j, v^j) \\ \geq m + I_\infty(w_1, w_2) = m + m_\infty \geq m_\infty + m_\infty = 2m_\infty. \end{aligned}$$

Isto também configura uma contradição, visto que $d < 2m_\infty$. Neste caso, concluimos que k não pode ser maior ou igual a 1 e devemos ter $k = 0$ e, portanto, por (3) existe uma subsequência de $\{(u_n, v_n)\}$ convergente e o lema está provado.

□

2.5 Estimativas assintóticas

Visto que problema limite $(\mathbb{S}_\infty)$ tem uma solução (w_1, w_2) positiva de energia mínima, trabalharemos com esta solução transladada, isto é,

$$w_i^{Ry_0} := w_i(x - Ry_0) \quad \text{e} \quad w_i^{Ry} := w_i(x - Ry)$$

para $i = 1, 2$. Seja $\beta \in [0, 1]$, $R > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$ fixado, $y \in \partial B_2(y_0)$ e definimos a combinação linear

$$Z_{\beta,y}^R := \beta\Big(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\Big) + (1-\beta)(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) = \Big(\beta w_1^{Ry_0} + (1-\beta)w_1^{Ry}, \beta w_2^{Ry_0} + (1-\beta)w_2^{Ry}\Big). \quad (2.57)$$

Novamente iremos precisar do resultado técnico em [1]. Por comodidade, vamos enunciá-lo novamente.

Lema 2.12. *Assuma que $\mu_2 > \mu_1 \geq 0$. Então, existe um número $C > 0$ tal que, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|}e^{-\mu_2|x-x_2|}\,\mathrm{d}x \leq Ce^{-\mu_1|x_1-x_2|}.$$

Se $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$ e $\mu_3 > \mu_1 \geq 0$. Então, existe um número $C > 0$ tal que, para quaisquer $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|}e^{-\mu_2|x-x_2|}e^{-\mu_3|x-x_3|}\,\mathrm{d}x \leq Ce^{-\frac{\mu_1}{2}(|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+|x_2-x_3|)}.$$

O próximo resultado garante que a variedade $\mathcal{N}$ é não vazia.

Lema 2.13. *Existem números $R_0 > 0, T_0 > 2$ e para cada $R \geq R_0, y \in \partial B_2(y_0)$ e $0 \leq \beta \leq 1$, um único $T_{\beta,y}^R > 0$ satisfazendo*

$$T_{\beta,y}^R Z_{\beta,y}^R \in \mathcal{N}.$$

Ademais, $T_{\beta,y}^R \in [0, T_0)$ e $T_{\beta,y}^R$ é uma função contínua nas variáveis β, y, R.

Demonstração: Sejam $r, u_1, u_2, v_1, v_2 > 0$. Escrevendo a combinação $(r(u_1+u_2), r(v_1+v_2))$ e aplicando o funcional J_∞ nesta combinação temos

$$\begin{aligned}
J_\infty(r(u_1+u_2), r(v_1+v_2)) &= \|(ru_1+ru_2, rv_1+rv_2)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} r^2\,(u_1+u_2)\,(v_1+v_2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(ru_1+ru_2, rv_1+rv_2)(ru_1+ru_2, rv_1+rv_2)\,\mathrm{d}x \\
&= r^2\|u_1\|^2 + r^2\|u_2\|^2 + r^2\|v_1\|^2 + r^2\|v_2\|^2 + 2r^2\langle u_1, u_2\rangle + 2r^2\langle v_1, v_2\rangle \\
&\quad -2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} r^2\,(u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad -r^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(ru_1+ru_2, rv_1+rv_2)}{r}(u_1+u_2, v_1+v_2)\,\mathrm{d}x \\
&= r^2\|u_1\|^2 + r^2\|u_2\|^2 + r^2\|v_1\|^2 + r^2\|v_2\|^2 + 2r^2\langle u_1, u_2\rangle + 2r^2\langle v_1, v_2\rangle \\
&\quad -2\lambda r^2 \int_{\mathbb{R}^N} (u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad -r^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(ru_1+ru_2, rv_1+rv_2)}{r}(u_1, v_1)\,\mathrm{d}x \\
&\quad -r^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(ru_1+ru_2, rv_1+rv_2)}{r}(u_2, v_2)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Por (F_1) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{J_\infty(r(u_1+u_2), r(v_1+v_2))}{r^2} &\leq \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2\langle u_1, u_2\rangle + 2\langle v_1, v_2\rangle \\
&\quad -2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} (u_1v_1 + u_2v_2)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(ru_1, rv_1)}{r}(u_1, v_1)\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(ru_2, rv_2)}{r}(u_2, v_2)\,\mathrm{d}x. \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

Tomando $u_1 = \beta w_1^{Ry_0}, u_2 = (1-\beta)\,w_1^{Ry}, v_1 = \beta w_2^{Ry_0}, v_2 = (1-\beta)\,w_2^{Ry}$ em (2.58),

$$\begin{aligned}
&\frac{J_\infty\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r\,(1-\beta)\,w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r\,(1-\beta)\,w_2^{Ry}\right)}{r^2} \\
&\leq \|\beta w_1^{Ry_0}\|^2 + \|(1-\beta)\,w_1^{Ry}\|^2 + \|\beta w_2^{Ry_0}\|^2 + \|(1-\beta)\,w_2^{Ry}\|^2 + 2\left\langle \beta w_1^{Ry_0}, (1-\beta)\,w_1^{Ry}\right\rangle \\
&\quad + 2\left\langle \beta w_2^{Ry_0}, (1-\beta)\,w_2^{Ry}\right\rangle - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\beta w_1^{Ry_0}\beta w_2^{Ry_0} + (1-\beta)\,w_1^{Ry}\,(1-\beta)\,w_2^{Ry}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(r\beta w_1^{Ry_0}, r\beta w_2^{Ry_0}\right)}{r}\left(\beta w_1^{Ry_0}, \beta w_2^{Ry_0}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(r\,(1-\beta)\,w_1^{Ry}, r\,(1-\beta)\,w_2^{Ry}\right)}{r}\left((1-\beta)\,w_1^{Ry}, (1-\beta)\,w_2^{Ry}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta^2 \left\{ \|w_1^{Ry_0}\|^2 + \|w_2^{Ry_0}\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(w_1^{Ry_0} w_2^{Ry_0} \right) \mathrm{d}x \right\} - \beta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(r\beta w_1^{Ry_0}, r\beta w_2^{Ry_0} \right)}{r} \left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \mathrm{d}x \\
&\quad + (1-\beta)^2 \left\{ \|w_1^{Ry}\|^2 + \|w_2^{Ry}\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(w_1^{Ry} w_2^{Ry} \right) \mathrm{d}x \right\} \\
&\quad - (1-\beta) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(r(1-\beta) w_1^{Ry}, r(1-\beta) w_2^{Ry} \right)}{r} \left(w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) \mathrm{d}x \\
&\quad + 2 \left\langle \beta w_1^{Ry_0}, (1-\beta) w_1^{Ry} \right\rangle + 2 \left\langle \beta w_2^{Ry_0}, (1-\beta) w_2^{Ry} \right\rangle \\
&= \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \mathrm{d}x - \beta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(r\beta w_1^{Ry_0}, r\beta w_2^{Ry_0} \right)}{r} \left(\beta w_1^{Ry_0}, \beta w_2^{Ry_0} \right) \mathrm{d}x \\
&\quad + (1-\beta)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F\left(w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) \left(w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) \mathrm{d}x \\
&\quad - (1-\beta) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(r(1-\beta) w_1^{Ry}, r(1-\beta) w_2^{Ry} \right)}{r} \left(w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) \mathrm{d}x \\
&\quad + 2 \left\langle \beta w_1^{Ry_0}, (1-\beta) w_1^{Ry} \right\rangle + 2 \left\langle \beta w_2^{Ry_0}, (1-\beta) w_2^{Ry} \right\rangle \\
&= \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \mathrm{d}x - \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(r\beta w_1^{Ry_0}, r\beta w_2^{Ry_0} \right)}{r\beta} (w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) \mathrm{d}x \\
&\quad + (1-\beta)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F\left(w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) (w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) \mathrm{d}x \\
&\quad - (1-\beta)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(r(1-\beta) w_1^{Ry}, r(1-\beta) w_2^{Ry} \right)}{r(1-\beta)} (w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) \mathrm{d}x \\
&\quad + 2 \left\langle \beta w_1^{Ry_0}, (1-\beta) w_1^{Ry} \right\rangle + 2 \left\langle \beta w_2^{Ry_0}, (1-\beta) w_2^{Ry} \right\rangle .
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

Considere a aplicação

$$
\Gamma(\beta, r) = \beta^2 \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(u,v)(u,v) \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(r\beta u, r\beta v)}{r\beta} (u,v) \,\mathrm{d}x \right\}. \tag{2.60}
$$

Por (F_1) , $\Gamma(\beta, r)$ é decrescente em relação a β e r. Argumentando como no caso escalar, confira Proposição 1.1, existirá um $T_0 > 2$ e $S_0 < 0$ tais que

$$
\Gamma(\beta, r) + \Gamma(1-\beta, r) < S_0 < 0, \ \forall r \geq T_0, \ \forall \beta \in [0,1].
$$

Além disso, T_0 e S_0 independem de R pela invariância por translações das integrais em $\mathbb{R}^N$.

Usando (2.60) em (2.59) segue que

$$
\begin{aligned}
&\frac{J_\infty\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta) w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta) w_2^{Ry} \right)}{r^2} \\
&\leq \Gamma(\beta, r) + \Gamma(1-\beta, r) + 2\left\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry} \right\rangle + 2\left\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry} \right\rangle \\
&\leq \Gamma(\beta, r) + \Gamma(1-\beta, r) + o_R(1) < S_0 + o_R(1).
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

Desde que podemos escrever para (u,v) em H

$$J(u,v) = J_\infty(u,v) - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\nabla F(u,v)(u,v)\,\mathrm{d}x,$$

segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{J\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta)w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta)w_2^{Ry}\right)}{r^2}\\
&= \frac{J_\infty\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta)w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta)w_2^{Ry}\right)}{r^2}\\
&\quad - \frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big[a(x)\nabla F\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta)w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta)w_2^{Ry}\right)\\
&\qquad\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta)w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta)w_2^{Ry}\right)\Big]\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Como

$$\nabla F(u,v)(u,v) = \frac{\left(u^2+v^2\right)^2}{1+s(u^2+v^2)} \le C\left(u^4+v^4\right),$$

e ainda, pelo Lema 2.12 e (a_2),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)|\left(w_i^{Ry_0}\right)^4 \mathrm{d}x \le C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|}e^{-4\sqrt{1-\lambda}|x-Ry_0|}\mathrm{d}x \le Ce^{-k|Ry_0|} = o_R(1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)|\left(w_i^{Ry}\right)^4 \mathrm{d}x \le C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|}e^{-4\sqrt{1-\lambda}|x-Ry|}\mathrm{d}x \le Ce^{-k|Ry|} = o_R(1),$$

substituindo em (2.62) resulta que

$$\begin{aligned}
&\frac{J\left(r\left(\beta w_1^{Ry_0} + (1-\beta)w_1^{Ry}\right), r\left(\beta w_2^{Ry_0} + (1-\beta)w_2^{Ry}\right)\right)}{r^2}\\
&\le \frac{J_\infty\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta)w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta)w_2^{Ry}\right)}{r^2} + o_R(1)\\
&< S_0 + o_R(1) < 0,
\end{aligned} \tag{2.63}$$

para R suficientemente grande e $r \geqslant T_0,\ 0 \le \beta \le 1$ e $y \in \partial B_2(y_0)$. Para concluirmos nosso resultado, basta combinarmos (2.63) com (2.3) para garantir que existe um único $r = T^R_{\beta,y} > 0$ tal que $T^R_{\beta,y}Z^R_{\beta,y} \in \mathcal{N}$. Consequentemente, $\mathcal{N}$ é não vazia. Argumentando como no Lema 1.10, demonstra-se a continuidade de $T^R_{\lambda,y}$ nas variáveis λ, y, R e o lema está provado.

□

Definimos a quantidade

$$\varepsilon_R := \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1(x-Ry_0), w_2(x-Ry_0))(w_1(x-Ry), w_2(x-Ry))\,\mathrm{d}x, \tag{2.64}$$

onde (w_1,w_2) é uma solução positiva radial de $(\mathbb{S}_\infty)$.

O próximo resultado é essencial para provarmos o comportamento assintótico da quantidade ε_R . O Lema já foi utilizado no caso escalar e vamos enunciá-lo novamente por comodidade.

Lema 2.14. *Sejam* $\varphi \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \psi \in C(\mathbb{R}^N)$ *satisfazendo para constantes* $a, b \geq 0$ *e* $c \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x)e^{a|x|}\,|x|^b \to c\,; \quad se \quad |x| \to +\infty \tag{2.65}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)|\, e^{a|x|}(1+|x|^b)\,\mathrm{d}x < +\infty. \tag{2.66}$$

Então

$$\lim_{|\overline{y}|\to+\infty} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x+\overline{y})\psi(x)\,\mathrm{d}x \right) e^{a|\overline{y}|}\,|\overline{y}|^b - c\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\dfrac{a\langle x,\overline{y}\rangle}{|\overline{y}|}}\psi(x)\,\mathrm{d}x \right] = 0. \tag{2.67}$$

Demonstração: Segue de [8] e está demonstrado no Capítulo 1, Lema 1.11.

□

Nos dois lemas a seguir, iremos estimar a quantidade ε_R, isto é, mostrar decaimento exato desta quantidade ε_R.

Lema 2.15. *Considere* $y \in \partial B_2(y_0)$ *com* $y_0 \in \mathbb{R}^N$ *fixado tal que* $\|y_0\| = 1$. *Então, existe uma constante* $C_0 > 0$ *tal que*

$$\lim_{R\to+\infty} \varepsilon_R(2R)^{\frac{N-1}{2}} e^{2\sqrt{1-\lambda}\,R} = C_0. \tag{2.68}$$

Demonstração: Pela definição de ε_R em (2.64) tem-se

$$\begin{aligned}
\varepsilon_R &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1(x-Ry_0), w_2(x-Ry_0))\,(w_1(x-Ry), w_2(x-Ry))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\left(w_1^{Ry_0}\right)^2 + \left(w_2^{Ry_0}\right)^2}{1+s\left(\left(w_1^{Ry_0}\right)^2 + \left(w_2^{Ry_0}\right)^2\right)} \left(w_1^{Ry_0}w_1^{Ry} + w_2^{Ry_0}w_2^{Ry}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_1^2+w_2^2}{1+s\,(w_1^2+w_2^2)} w_1 w_1^{R(y-y_0)}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_1^2+w_2^2}{1+s\,(w_1^2+w_2^2)} w_2 w_2^{R(y-y_0)}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Para estimar cada integral em (2.69), iremos utilizar o Lema 2.14 com

$$\psi = \frac{w_1^2+w_2^2}{1+s\,(w_1^2+w_2^2)}w_1,\ \varphi = w_1^{R(y-y_0)},\ \overline{y} = -R(y-y_0),\ a = \sqrt{1-\lambda}\ \text{ e }\ b = \frac{N-1}{2}.$$

Como (w_1, w_2) é solução do problema $(\mathbb{S}_\infty)$, pelo Teorema 2.1 existe um $R_0 > 0$ tal que para todo $|x| > R_0$ obtemos (2.65) para alguma constante positiva c. Agora vamos verificar (2.66) e, para isso note que para todo $|x| > R_1 \geq R_0$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)|\, e^{\alpha|x|}\left(1+|x|^{\beta}\right) \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_1^2+w_2^2}{1+s\left(w_1^2+w_2^2\right)} w_1 e^{\sqrt{1-\lambda}|x|}\left(1+|x|^{\frac{N-1}{2}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{B_{R_1}(0)} \frac{w_1^2+w_2^2}{1+s\left(w_1^2+w_2^2\right)} w_1 e^{\sqrt{1-\lambda}|x|}\left(1+|x|^{\frac{N-1}{2}}\right) \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}(0)} \frac{w_1^2+w_2^2}{1+s\left(w_1^2+w_2^2\right)} w_1 e^{\sqrt{1-\lambda}|x|}\left(1+|x|^{\frac{N-1}{2}}\right) \mathrm{d}x \\
&\leq C\mu(B_{R_1}(0)) + C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}(0)} |x|^{-3\frac{N-1}{2}} e^{-3\sqrt{1-\lambda}|x|} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|}\left(1+|x|^{\frac{N-1}{2}}\right) \mathrm{d}x \\
&\leq C\mu(B_{R_1}(0)) + C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}(0)} |x|^{-3\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{1-\lambda}|x|}\left(1+|x|^{\frac{N-1}{2}}\right) \mathrm{d}x < \infty,
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

onde $\mu(B_{R_1}(0))$ é a medida de Lebesgue da bola de raio R_1 centrada na origem. Assim, por (2.70), está verificado (2.66). Podemos então utilizar o Lema 2.14 e o limite (2.67), para provar que, para todo $|x| > R_2$ com $R_2 > \max\{R_0, R_1\}$,

$$
\lim_{R\to+\infty}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_1^2+w_2^2}{1+s\left(w_1^2+w_2^2\right)} w_1 w_1^{R(y-y_0)}\, \mathrm{d}x\right) e^{\sqrt{1-\lambda}|R(y-y_0)|}\, |R(y-y_0)|^{\frac{N-1}{2}}\right] = C > 0. \tag{2.71}
$$

De forma inteiramente análoga, obtemos

$$
\lim_{R\to+\infty}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_1^2+w_2^2}{1+s\left(w_1^2+w_2^2\right)} w_2 w_2^{R(y-y_0)}\, \mathrm{d}x\right) e^{\sqrt{1-\lambda}|R(y-y_0)|}\, |R(y-y_0)|^{\frac{N-1}{2}}\right] = C > 0. \tag{2.72}
$$

De (2.71), (2.72) e (2.69) segue (2.68), e o lema está provado .

□

Apresentaremos uma estimativa inferior para ε_R.

Lema 2.16. *Existe uma constante $\overline{C}_0 > 0$ tal que para todo $t, s \geqslant \dfrac{1}{2}, y \in \partial B_2(y_0)$ com $y_0 \in \mathbb{R}^N$ fixado e R suficientemente grande,*

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(tw_1(x-Ry_0), tw_2(x-Ry_0))(sw_1(x-Ry), sw_2(x-Ry))\, \mathrm{d}x \geq \overline{C}_0(R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{1-\lambda}\,R}.
$$

Demonstração: Segue do Teorema 2.1 que existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$
C_1(1+|x|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{1-\lambda}|x|} \leq w_i(x) \leq C_2(1+|x|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{1-\lambda}|x|}, \tag{2.73}
$$

para $i = 1, 2$ e para $x \in \mathbb{R}^N$. Para $|x| < 1$ e para todo y tal que $|y - y_0| = 2$ e considerando $R > 1$, note que

$$
1 + |x - R(y-y_0)| \leq 1 + |x| + R|y-y_0| \leq R + R + 2R = 4R.
$$

Segue por (2.73) que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
w(x - R(y-y_0)) &\geq C_1(1+|x-R(y-y_0)|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{1-\lambda}\,|x-R(y-y_0)|} \\
&\geq C_1(4R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{1-\lambda}|x|} e^{-2\sqrt{1-\lambda}\,R} \\
&\geq C(2R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{1-\lambda}} e^{-2\sqrt{1-\lambda}\,R} \\
&= C(2R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{1-\lambda}\,R}.
\end{aligned}
\tag{2.74}
$$

Usando (2.74) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(tw_1(x-Ry_0), tw_2(x-Ry_0))(sw_1(x-Ry), sw_2(x-Ry))\,\mathrm{d}x \\
= \; & s\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(tw_1(x-Ry_0), tw_2(x-Ry_0))(w_1(x-Ry), w_2(x-Ry))\,\mathrm{d}x \\
= \; & s\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\left(tw_1^{Ry_0}\right)^2 + \left(tw_2^{Ry_0}\right)^2}{1+s\left(\left(tw_1^{Ry_0}\right)^2 + \left(tw_2^{Ry_0}\right)^2\right)} \left(tw_1^{Ry_0}w_1^{Ry} + tw_2^{Ry_0}w_2^{Ry}\right)\mathrm{d}x \\
\geq \; & \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\left(tw_1^{Ry_0}\right)^2 + \left(tw_2^{Ry_0}\right)^2}{1+s\left(\left(tw_1^{Ry_0}\right)^2 + \left(tw_2^{Ry_0}\right)^2\right)} \left(w_1^{Ry_0}w_1^{Ry} + w_2^{Ry_0}w_2^{Ry}\right)\mathrm{d}x \\
\geq \; & \frac{1}{4}\int_{B_1(Ry_0)} \frac{\left(tw_1^{Ry_0}\right)^2 + \left(tw_2^{Ry_0}\right)^2}{1+s\left(\left(tw_1^{Ry_0}\right)^2 + \left(tw_2^{Ry_0}\right)^2\right)} \left(w_1^{Ry_0}w_1^{Ry} + w_2^{Ry_0}w_2^{Ry}\right)\mathrm{d}x \\
\geq \; & \frac{1}{4}\min_{B_1(0)}\left\{\frac{(tw_1(x))^2+(tw_2(x))^2}{1+s((tw_1(x))^2+(tw_2(x))^2)}\right\}\int_{B_1(0)}\left(w_1(x)w_1^{R(y-y_0)} + w_2(x)w_2^{R(y-y_0)}\right)\mathrm{d}x \\
\geq \; & \overline{C}_0(2R)^{-\frac{N-1}{2}}e^{-2\sqrt{1-\lambda}\,R}.
\end{aligned}
$$

□

Para nossas finas estimativas de energia precisaremos utilizar os dois próximos resultados técnicos.

Corolário 2.17. *Existe uma constante positiva C tal que*

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(tf\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\right) - f\left(tw_1^{Ry_0}, tw_2^{Ry_0}\right)\right)w_1^{Ry}\,\mathrm{d}x\right| \\
& + \left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(tg\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\right) - g\left(tw_1^{Ry_0}, tw_2^{Ry_0}\right)\right)w_2^{Ry}\,\mathrm{d}x\right| \leq C\,|t-1|\,O(\varepsilon_R),
\end{aligned}
$$

uniformemente em $y \in \partial B_2(y_0), t \in [0,a]$; $a > 1$ e R suficientemente grande.

Demonstração: Defina as funções reais $h_1(t) := tf(u,v) - f(tu,tv)$ e $h_2(t) := tg(u,v) - g(tu,tv)$. Observe que $h_1(1) = f(u,v) - f(u,v) = 0$ e $h_2(1) = g(u,v) - g(u,v) = 0$, para todo u e v. Além, do fato que $f(tu,tv) = \dfrac{t^3(u^2+v^2)u}{1+st^2(u^2+v^2)}$, fixados u e v e derivando $f(tu,tv)$ em relação a t obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(tu,tv) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{t^3(u^2+v^2)u}{1+st^2\left(u^2+v^2\right)}\right) \\
&= \frac{3t^2\left(u^2+v^2\right)u\left(1+st^2\left(u^2+v^2\right)\right) - t^3\left(u^2+v^2\right)(u2st)\left(u^2+v^2\right)}{\left(1+st^2\left(u^2+v^2\right)\right)^2} \\
&= \frac{3t^2\left(u^2+v^2\right)u + 3st^4(u^2+v^2)^2u - 2st^4(u^2+v^2)^2u}{\left(1+st^2\left(u^2+v^2\right)\right)^2} \\
&= \frac{3t^2\left(u^2+v^2\right)u + st^4\left(u^2+v^2\right)^2u}{\left(1+st^2\left(u^2+v^2\right)\right)^2}. \qquad (2.75)
\end{aligned}
$$

Usando (2.75) obtemos

$$
\begin{aligned}
|h_1'(t)| &\leq |f(u,v)| + \left|\frac{d}{dt} f(tu,tv)\right| \\
&\leq |f(u,v)| + 3t^2\left(u^2+v^2\right)|u| + st^4\left(u^2+v^2\right)^2|u| \\
&\leq |f(u,v)| + \max\left\{3t^2, st^4\right\}\left\{\left(u^2+v^2\right)|u| + \left(u^2+v^2\right)^2|u|\right\}.
\end{aligned}
$$

Suponha, sem perda de generalidade, $t>1$ e utilizando o Teorema do Valor Médio para h_1 , existe um τ entre t e 1 tal que

$$
|h_1(t)-h_1(1)| \leq |h_1'(\tau)||t-1| \leq |t-1|\left\{|f(u,v)| + C\left((u^2+v^2)u + (u^2+v^2)^2 u\right)\right\}. \tag{2.76}
$$

Similarmente obtemos

$$
\frac{d}{dt} g(tu,tv) = \frac{3t^2(u^2+v^2)v + st^4(u^2+v^2)^2 v}{(1+st^2(u^2+v^2))^2}
$$

e

$$
|h_2(t)-h_2(1)| \leq |t-1|\left\{|g(u,v)| + C\left((u^2+v^2)|v| + (u^2+v^2)^2|v|\right)\right\}. \tag{2.77}
$$

Tomando $u = w_1^{Ry_0}$ e $v = w_2^{Ry_0}$ em (2.76) e (2.77), respectivamente, implica que

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(tf\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\right) - f\left(tw_1^{Ry_0}, tw_2^{Ry_0}\right)\right) w_1^{Ry}\,\mathrm{d}x\right| \\
+ & \left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(tg\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\right) - g\left(tw_1^{Ry_0}, tw_2^{Ry_0}\right)\right) w_2^{Ry}\,\mathrm{d}x\right| \\
= & \left|\int_{\mathbb{R}^N} h_1(t) w_1^{Ry}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^N} h_2(t) w_2^{Ry}\,\mathrm{d}x\right| \\
\leq & |t-1|\int_{\mathbb{R}^N}\left\{\left|f\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\right)\right| + C\left(((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)w_1^{Ry_0} + ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)^2 w_1^{Ry_0}\right)\right\} w_1^{Ry}\,\mathrm{d}x \\
+ & |t-1|\int_{\mathbb{R}^N}\left\{|g(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})| + C\Big(((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)w_1^{Ry_0} + ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)^2 w_1^{Ry_0}\Big)\right\} w_2^{Ry}\,\mathrm{d}x \\
= & |t-1|\int_{\mathbb{R}^N}\left\{f(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})w_1^{Ry} + g(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})w_2^{Ry}\right\}\mathrm{d}x \\
+ & |t-1|\int_{\mathbb{R}^N}\left\{C\Big(((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)w_1^{Ry_0} + ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)^2 w_1^{Ry_0}\Big)\right\} w_1^{Ry}\,\mathrm{d}x \\
+ & |t-1|\int_{\mathbb{R}^N}\left\{C\Big(((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)w_1^{Ry_0} + ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)^2 w_1^{Ry_0}\Big)\right\} w_2^{Ry}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.78}
$$

Vamos estimar as integrais em (2.78). Como $\nabla F(u,v) := (f(u,v), g(u,v))$ tem-se

$$
\int_{\mathbb{R}^N}\left\{f(w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry_0})w_1^{Ry} + g(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})w_2^{Ry}\right\}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}\nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x = \varepsilon_R. \tag{2.79}
$$

Usando os Lemas 2.12 e 2.14 obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left(w_1^{Ry_0}\right)^2+\left(w_2^{Ry_0}\right)^2\right)w_1^{Ry_0}w_1^{Ry}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\left(w_1^{Ry_0}\right)^3w_1^{Ry}\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\left(w_2^{Ry_0}\right)^2w_1^{Ry_0}w_1^{Ry}\,\mathrm{d}x=O(\varepsilon_R).\tag{2.80}$$

Similarmente, as demais integrais em (2.78) têm a mesma estimativa, isto é,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left(w_1^{Ry_0}\right)^2+\left(w_2^{Ry_0}\right)^2\right)^2w_1^{Ry_0}w_1^{Ry}\,\mathrm{d}x=O(\varepsilon_R);\\&\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left(w_1^{Ry_0}\right)^2+\left(w_2^{Ry_0}\right)^2\right)w_2^{Ry_0}w_2^{Ry}\,\mathrm{d}x=O(\varepsilon_R);\\&\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left(w_1^{Ry_0}\right)^2+\left(w_2^{Ry_0}\right)^2\right)^2w_2^{Ry_0}w_2^{Ry}\,\mathrm{d}x=O(\varepsilon_R).\end{aligned}\tag{2.81}$$

Reunindo as estimativas em (2.78), (2.79), (2.80) e (2.81), temos a conclusão do corolário.

□

Lema 2.18. *Considere* $\beta=\dfrac{1}{2}$ *. Se* $R\to+\infty$*, então tem-se que*

$$T^R_{\frac{1}{2},y}\to 2,$$

uniformemente em $y\in\partial B_2(y_0)$ *onde* $y_0\in\mathbb{R}^N$ *é fixado com* $\|y_0\|=1$.

Demonstração: Como (w_1,w_2) é solução do problema $(\mathbb{S}_\infty)$, então $I'_\infty(w_1,w_2)(w_1,w_2)=0$ implicando em

$$\left\|\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)\right\|^2-2\lambda\int_{\mathbb{R}^N}w_2^{Ry_0}w_1^{Ry_0}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla F\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)\,\mathrm{d}x.\tag{2.82}$$

Procedendo de forma análoga obtemos

$$\left\|\left(w_1^{Ry},w_2^{Ry}\right)\right\|^2-2\lambda\int_{\mathbb{R}^N}w_2^{Ry}w_1^{Ry}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla F\left(w_1^{Ry},w_2^{Ry}\right)(w_1^{Ry},w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x.\tag{2.83}$$

Consideramos a combinação linear

$$Z^R_{\beta,y}=\left(\beta w_1^{Ry_0}+(1-\beta)w_1^{Ry},\beta w_2^{Ry_0}+(1-\beta)w_2^{Ry}\right)$$

e tomando $\beta=\dfrac{1}{2}$ temos $Z^R_{\frac{1}{2},y}=\left(\dfrac{1}{2}w_1^{Ry_0}+\dfrac{1}{2}w_1^{Ry},\dfrac{1}{2}w_2^{Ry_0}+\dfrac{1}{2}w_2^{Ry}\right)$.

Calculando J em $2Z^R_{\frac{1}{2},y}$ e utilizando (2.82) e (2.83) obtemos

$$
\begin{aligned}
J(2Z^R_{\frac{1}{2},y}) &= J\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\\
&= \left\|\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\right\|^2 - 2\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}\right)\left(w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\,\mathrm{d}x\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\,\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\,\mathrm{d}x.\\
&= \left\|w_1^{Ry_0}\right\|^2+\left\|w_1^{Ry_0}\right\|^2+\left\|w_2^{Ry_0}\right\|^2+\left\|w_2^{Ry}\right\|^2+2\left\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry}\right\rangle+2\left\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry}\right\rangle\\
&\quad -2\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left(w_1^{Ry_0}w_2^{Ry_0}+w_1^{Ry_0}w_2^{Ry_0}+w_1^{Ry}w_2^{Ry_0}+w_1^{Ry}w_2^{Ry}\right)\,\mathrm{d}x\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\,\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x\\
&\quad +2\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry}\rangle+2\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry}\rangle-2\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left(w_1^{Ry_0}w_2^{Ry}+w_1^{Ry}w_2^{Ry_0}\right)\,\mathrm{d}x\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\,\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\,\mathrm{d}x\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}\nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x\\
&\quad +2\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry}\rangle+2\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry}\rangle\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}(1+a(x))\,\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x\\
&\quad +2\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry}\rangle+2\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry}\rangle\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\,\mathrm{d}x\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}a(x)\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x\\
&\quad +2\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry}\rangle+2\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry}\rangle\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\right)+\left(w_1^{Ry}+w_2^{Ry}\right)\right)\,\mathrm{d}x\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}a(x)\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x\\
&\quad +2\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry}\rangle_{H^1}+2\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry}\rangle\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\right)\,\mathrm{d}x\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}\right)\,\mathrm{d}x\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}a(x)\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\,\mathrm{d}x. \qquad (2.84)
\end{aligned}
$$

Ademais,

$$\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry},w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)\geq \nabla F\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right), \tag{2.85}$$

pois como a função $h(x)=\dfrac{x}{1+sx}$ é crescente para $x>0$ e visto que $w_i>0$ para $i=1,2$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry},w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)\\
&=f\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry},w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)w_1^{Ry_0}+g\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry},w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)w_2^{Ry_0}\\
&=\frac{\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}\right)^2+\left(w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)^2}{1+s\left(\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}\right)^2+\left(w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)^2\right)}\left\{\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}\right)w_1^{Ry_0}+\left(w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)w_2^{Ry_0}\right\}\\
&\geq\frac{\left(w_1^{Ry_0}\right)^2+\left(w_2^{Ry_0}\right)^2}{1+s\left(\left(w_1^{Ry_0}\right)^2+\left(w_2^{Ry_0}\right)^2\right)}\left\{\left(w_1^{Ry_0}\right)^2+\left(w_2^{Ry_0}\right)^2\right\}\\
&=\nabla F\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right).
\end{aligned}$$

Decorre de (2.84) e (2.85) que

$$\begin{aligned}
J(2Z^R_{\frac12,y})&\leq 2\langle w_1^{Ry_0},w_1^{Ry}\rangle+2\langle w_2^{Ry_0},w_2^{Ry}\rangle\\
&\quad-\int_{\mathbb{R}^N}a(x)\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry},w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry},w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{2.86}$$

Resta estimar o termo integral em (2.86), visto que já sabemos que

$$\langle w_1^{Ry_0},w_1^{Ry}\rangle=o_R(1)=\langle w_2^{Ry_0},w_2^{Ry}\rangle. \tag{2.87}$$

Utilizando (a_2) e o Lema 2.12,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}|a(x)|\nabla F\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry},w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry},w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}|a(x)|\frac{\left(\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}\right)^2+\left(w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)^2\right)^2}{1+s\left(\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}\right)^2+\left(w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)^2\right)}\mathrm{d}x\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^N}|a(x)|\left\{\left(w_1^{Ry_0}+w_1^{Ry}\right)^4+\left(w_2^{Ry_0}+w_2^{Ry}\right)^4\right\}\mathrm{d}x=o(\varepsilon_R).
\end{aligned}\tag{2.88}$$

Logo, segue de (2.86), (2.87) e (2.88) que $J(2Z^R_{\frac12,y})\to 0$, se $R\to+\infty$, uniformemente em $y\in\partial B_2(y_0)$.

Resta mostrar que

$$T^R_{\frac12,y}\to 2,\ \text{quando}\ R\to\infty.$$

De fato, argumentando por contradição, suponha que existem $\delta>0$ e subsequências $R_n\to\infty$ e $y_n\in\partial B_2(y_0)$ tais que a sequência

$$T_n:=T^{R_n}_{\frac12,y_n}\quad\text{satisfaz}\quad |T_n-2|\geq\delta.$$

Como $\{T_n\} \subset \mathbb{R}$ é limitada pelo Lema 2.13, existe uma constante T tal que

$$T_n \to T \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Por (2.4), se $(tu, tv) \in \mathcal{N}$, $\ t \in \mathbb{R}^+$, então

$$\|(u,v)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{\nabla F(tu,tv)(u,v)}{t}\, \mathrm{d}x. \tag{2.89}$$

Visto que $T^{R_n}_{\frac{1}{2},y_n} Z^{R_n}_{\frac{1}{2},y_n} \in \mathcal{N}$, segue de (2.89) que

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n}, \frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right) \left(\frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{\nabla F \left(T_n \left(\frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right), T_n \left(\frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right) \left(w_1^{R_n y_0} + w_1^{R_n y_n}, w_2^{R_n y_0} + w_2^{R_n y_n} \right)}{\frac{T_n}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Por um lado, como (w_1, w_2) é solução de $(\mathbb{S}_\infty)$ e pela invariância por translação tem-se

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n}, \frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right) \left(\frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4} \left\| w_1^{R_n y_0} \right\|^2 + \frac{1}{4} \left\| w_1^{R_n y_n} \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\langle w_1^{R_n y_0}, w_1^{R_n y_n} \right\rangle + \frac{1}{4} \left\| w_2^{R_n y_0} \right\|^2 + \frac{1}{4} \left\| w_2^{R_n y_n} \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\langle w_2^{R_n y_0}, w_2^{R_n y_n} \right\rangle \\
&\quad - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right) \left(\frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4} \|w_1\|^2 + \frac{1}{4} \|w_1\|^2 + o_{R_n}(1) + \frac{1}{4} \|w_2\|^2 + \frac{1}{4} \|w_2\|^2 + o_{R_n}(1) \\
&\quad - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{4} w_1^{R_n y_0} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{4} w_1^{R_n y_0} w_2^{R_n y_n} + \frac{1}{4} w_1^{R_n y_n} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{4} w_1^{R_n y_n} w_2^{R_n y_n} \right) \mathrm{d}x \\
&\xrightarrow{n \to \infty} \ \frac{1}{2} \|w_1\|^2 + \frac{1}{2} \|w_2\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2}{4} w_1 w_2\, \mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{1}{2} \|(w_1, w_2)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2}{4} w_1 w_2\, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1, w_2)(w_1, w_2)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Por outro lado, por (a_1), (F_1), $\ \nabla F(w_1, w_2)(w_1, w_2) \leq \dfrac{w_1^2(0) + w_2^2(0)}{s}$ e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{\nabla F \left(T_n \left(\frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right), T_n \left(\frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right) \left(w_1^{R_n y_0} + w_1^{R_n y_n}, w_2^{R_n y_0} + w_2^{R_n y_n} \right)}{\frac{T_n}{2}} \\
&= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F \left(T_n \left(\frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right), T_n \left(\frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right) \left[\left(w_1^{R_n y_0}, w_2^{R_n y_0} \right) + \left(w_1^{R_n y_n}, w_2^{R_n y_n} \right) \right]}{\frac{T_n}{2}} \\
&+ \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \frac{\nabla F \left(T_n \left(\frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right), T_n \left(\frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right) \left[\left(w_1^{R_n y_0}, w_2^{R_n y_0} \right) + \left(w_1^{R_n y_n}, w_2^{R_n y_n} \right) \right]}{\frac{T_n}{2}} \\
&\xrightarrow{n \to \infty} \ \frac{2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F \left(\frac{T}{2} (w_1, w_2)(w_1, w_2) \right)}{\frac{T}{2}}\, \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

De (2.90), (2.91) e (2.92) temos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1, w_2)(w_1, w_2)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(\frac{T}{2}(w_1, w_2)(w_1, w_2)\right)}{\frac{T}{2}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Por (F_1) segue que $T = 2$. Contradição. Logo,

$$T^R_{\frac{1}{2},y} \to 2, \text{ quando } R \to \infty$$

e finalizamos a prova do lema.

□

No próximo resultado demonstraremos uma versão para sistemas como já vimos no Lema 1.14 para o caso escalar.

Lema 2.19. *Considere a, b, c, d números reais positivos. Então existe uma constante $C > 0$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} & F(a+b, c+d) - F(a,c) - F(b,d) - \nabla F(a,c)(b,d) - \nabla F(b,d)(a,c) \\ \geq\ & -C\left\{(cd)^2 + (ab)^2 + (ad)^2 + (bc)^2\right\}. \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $t \geq 0$ e a função real $j(t) := F(a+tb, c+td)$. Observe que j é crescente. Defina $G(t) = j'(t) = \nabla F(a+tb, c+td)(b,d)$. Note que

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{(a+tb)^2 + (c+td)^2}{[1 + s((a+tb)^2 + (c+td)^2)]}(a+tb)b + (c+td)d \\ &:= \frac{Z^2(t)}{1+sZ^2(t)}[(a+tb)b + (c+td)d]. \end{aligned}$$

Derivando $G(t)$ temos para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{2ZZ'(1+sZ^2) - Z^2.2sZZ'}{(1+sZ^2)^2}[(a+tb)b + (c+td)d] \\ &\quad + \frac{Z^2(t)}{1+sZ^2(t)}(b^2+d^2) \\ &= \frac{2ZZ'}{(1+sZ^2)^2}[(a+tb)b + (c+td)d] \\ &\quad + \frac{Z^2(t)}{1+sZ^2(t)}(b^2+d^2) > 0, \end{aligned}$$

logo j' é crescente. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e o crescimento de j' já verificado tem-se

$$\begin{aligned} & F(a+b, c+d) - F(a,c) - \nabla F(a,c)(b,d) \\ =\ & j(1) - j(0) - j'(0) \\ =\ & \int_0^1 j'(t)\,\mathrm{d}t - j'(0) \\ \geq\ & \int_0^1 j'(0)\,\mathrm{d}t - j'(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Agora vamos estimar $-F(b,d)-\nabla F(b,d)(a,c)$. Defina $\psi(t)=F(tb,td)$. Então $\psi'(t)=\nabla F(tb,td)(b,d)$, $\psi(0)=F(0,0)=0$ e $\psi(1)=F(b,d)$. Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo segue que

$$\begin{aligned}
& -F(b,d)-\nabla F(b,d)(a,c) \\
= & -\int_0^1 \psi'(t)\,\mathrm{d}t-\nabla F(b,d)(a,c) \\
\geq & -\int_0^1 \frac{(tb)^2+(td)^2}{1+s((tb)^2+(td)^2)}(tb^2+td^2)\,\mathrm{d}t-\frac{b^2+d^2}{1+s(b^2+d^2)}(ba+dc) \\
\geq & -\int_0^1 t^3(b^2+d^2)^2\,\mathrm{d}t-(b^2+d^2)(ba+dc) \\
= & -\frac{(b^2+d^2)^2}{4}-(b^2+d^2)(ba+dc) \\
= & -\frac{1}{4}\Bigg\{b^4+d^4+2b^2d^2+4ab^3+4b^2cd+4abd^2+4cd^3\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Considere $0<b\leq a$ e $0<d\leq c$. Note que

i) $b^4+4ab^3=(ab)^2\left\{\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{4b}{a}\right\}\leq(ab)^2\left\{\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{4a}{a}\right\}\leq 5(ab)^2$;

ii) $d^4+4cd^3\leq 5(cd)^2$, analogamente;

iii) $5(ab)^2+4abd^2=(ad)^2\left\{\dfrac{5b^2}{d^2}+\dfrac{4b}{a}\right\}\leq(ad)^2\left\{\dfrac{5b^2}{d^2}+4\right\}\leq 5(ab)^2+4(ad)^2$;

iv) $2(bd)^2+4b^2cd=2(bc)^2\left\{\dfrac{d^2}{c^2}+2\dfrac{d}{c}\right\}\leq 2(bc)^2\Bigg\{1+2\Bigg\}\leq 6(bc)^2$.

De $(i)-(iv)$ segue que (2.94) resulta em

$$-F(b,d)-\nabla F(b,d)(a,c)\geq-\frac{1}{4}\Bigg\{5(cd)^2+5(ab)^2+4(ad)^2+6(bc)^2\Bigg\}. \tag{2.95}$$

O caso em que $0<a\leq b$ e $0<c\leq d$ é análogo (simétrico). Portanto, segue de (2.93) e (2.95) o resultado.

$\square$

Lema 2.20. *Existem números $R_3>0$, $\eta_1>0$ tais que*

$$I(T^R_{\beta,y}Z^R_{\beta,y})\leq 2m_\infty-\eta_1$$

para cada $R>R_3$ e para todo $y\in\partial B_2(y_0)$ e $\beta\in[0,1]$.

Demonstração: Inicialmente vamos escrever a combinação linear na forma simplificada

$$T^R_{\beta,y}Z^R_{\beta,y}=\Big(\beta T^R_{\beta,y}w_1^{Ry_0}+(1-\beta)T^R_{\beta,y}w_1^{Ry},\beta T^R_{\beta,y}w_2^{Ry_0}+(1-\beta)T^R_{\beta,y}w_2^{Ry}\Big)=\Big(t_1w_1^{Ry_0}+t_2w_1^{Ry},t_1w_2^{Ry_0}+t_2w_2^{Ry}\Big).$$

Além disso, tomando $u = t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}$ e $v = t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}$ em (2.1) segue que

$$
\begin{array}{rcl}
& & I(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}) \\
& = & \frac{1}{2}\left\|(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry})\right\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry})(t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x \\
& & - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) F(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x \\
& = & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[t_1^2 |\nabla w_1^{Ry_0}|^2 + t_2^2 |\nabla w_1^{Ry}|^2 + 2t_1 t_2 \nabla w_1^{Ry_0} \nabla w_1^{Ry} + (t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry})^2\right]\mathrm{d}x \\
& & + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[t_1^2 |\nabla w_2^{Ry_0}|^2 + t_2^2 |\nabla w_2^{Ry}|^2 + 2t_1 t_2 \nabla w_2^{Ry_0} \nabla w_2^{Ry} + (t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry})^2\right]\mathrm{d}x \\
& & -\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[t_1^2 w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + t_1 t_2 w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + t_1 t_2 w_1^{Ry} w_2^{Ry_0} + t_2^2 w_1^{Ry} w_2^{Ry}\right]\mathrm{d}x \\
& & - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) F(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x \\
(A) & = & \frac{t_1^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w_1^{Ry_0}|^2 + (w_1^{Ry_0})^2 + |\nabla w_2^{Ry_0}|^2 + (w_2^{Ry_0})^2\right] - \lambda t_1^2 \int_{\mathbb{R}^N} w_1^{Ry_0} w_2^{Ry_0}\,\mathrm{d}x \\
(B) & & - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0})\,\mathrm{d}x \\
(C) & & + \frac{t_2^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w_1^{Ry}|^2 + (w_1^{Ry})^2 + |\nabla w_2^{Ry}|^2 + (w_2^{Ry})^2\right] - \lambda t_2^2 \int_{\mathbb{R}^N} w_1^{Ry} w_2^{Ry}\,\mathrm{d}x \\
(D) & & - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x \\
(E) & & + t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla w_1^{Ry_0} \nabla w_1^{Ry} + w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + \nabla w_2^{Ry_0} \nabla w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_2^{Ry}\right]\mathrm{d}x \\
(F) & & -\lambda t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} (w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_1^{Ry})\,\mathrm{d}x \\
(G) & & - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla F(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0})(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}) + \nabla F(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry})(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0})\right]\mathrm{d}x \\
(H) & & + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla F(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0})(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}) + \nabla F(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry})(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0})\right]\mathrm{d}x \\
(I) & & - \int_{\mathbb{R}^N} \left[F(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}) - F(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}) - F(t_1 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry})\right]\mathrm{d}x \\
(J) & & - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry})\,\mathrm{d}x.
\end{array}
\tag{2.96}
$$

Vamos estimar cada uma das linha de (A) a (J). Para as linhas (A) e (B), desde que (w_1, w_2) são soluções de energia mínima e pela invariância por translação nas integrais do funcional I_∞ temos que

$$(A) + (B) = I_\infty(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}) \leq m_\infty. \tag{2.97}$$

Analogamente para as linhas (C) e (D) temos

$$(C) + (D) = I_\infty(t_2 w_1^{Ry_0}, t_2 w_2^{Ry_0}) \leq m_\infty. \tag{2.98}$$

A linha (I) pode ser estimada pelo Lema 2.19

$$\begin{aligned}
& F\left(t_1 w_1^{Ry_0}+t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0}+t_2 w_2^{Ry}\right)-F\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)-F\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right) \\
- & \nabla F\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right)-\nabla F\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right)\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right) \\
\geq & -C\left\{\left(t_1 w_2^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2+\left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_1^{Ry}\right)^2+\left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2+\left(t_2 w_1^{Ry} t_1 w_2^{Ry_0}\right)^2\right\}.
\end{aligned}$$

Integrando e invertendo os sinais temos

$$\begin{aligned}
- & \int_{\mathbb{R}^N}\left[F\left(t_1 w_1^{Ry_0}+t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0}+t_2 w_2^{Ry}\right)-F\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)-F\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right)\right] \mathrm{d}x \\
\leq & -\int_{\mathbb{R}^N}\left[\nabla F\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right)+\nabla F\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right)\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)\right] \mathrm{d}x \\
& +C \int_{\mathbb{R}^N}\left\{\left(t_1 w_2^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2+\left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_1^{Ry}\right)^2+\left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2+\left(t_2 w_1^{Ry} t_1 w_2^{Ry_0}\right)^2\right\} \mathrm{d}x .
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Utilizando os Lemas 2.12 e 2.13, equação (2.73), (a_2) e tomando μ_0 tal que $\sqrt{1-\lambda}<\mu_0<2\sqrt{1-\lambda}$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\left(t_1 w_2^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2 dx & \leq C(t_1 t_2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\sqrt{1-\lambda}|x-Ry_0|} e^{-2\sqrt{1-\lambda}|x-Ry|} \mathrm{d}x \\
& \leq C(t_1 t_2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_0|x-Ry_0|} e^{-2\sqrt{1-\lambda}|x-Ry|} \mathrm{d}x \\
& \leq C(t_1 t_2)^2 e^{-\mu_0|Ry_0-Ry|} \leq C(t_1 t_2)^2 e^{-2\mu_0 R}=o(\varepsilon_R)
\end{aligned} \tag{2.100}$$

e analogamente

$$C \int_{\mathbb{R}^N}\left\{\left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_1^{Ry}\right)^2+\left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2+\left(t_2 w_1^{Ry} t_1 w_2^{Ry_0}\right)^2\right\} \mathrm{d}x=o(\varepsilon_R). \tag{2.101}$$

Logo, de (2.99), (2.100) e (2.101) segue que

$$(H)+(I) \leq o(\varepsilon_R). \tag{2.102}$$

Vamos estimar a linha (J). Utilizando os Lemas 2.12 e 2.13, equação (2.73), (a_2) e para $i,j=1,2$

$$\int_{\mathbb{R}^N}|a(x)|(t_i w_i^{Ry_0})^4\, dx \leq o(\varepsilon_R), \tag{2.103}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}|a(x)|(t_j w_i^{Ry})^4\, \mathrm{d}x \leq o(\varepsilon_R). \tag{2.104}$$

Observando que $a(x)$ pode mudar de sinal, segue de $(2.103), (2.104)$ e (F_2) que

$$
\begin{aligned}
(J) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| F\left(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}\right) \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \nabla F\left(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}\right)\left(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \frac{\left(\left(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}\right)^2 + \left(t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}\right)^2\right)^2}{1 + s\left(\left(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}\right)^2 + \left(t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}\right)^2\right)} \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left(\left(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}\right)^2 + \left(t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}\right)^2\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left(\left(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}\right)^4 + \left(t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}\right)^4\right) \mathrm{d}x \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left(\left(t_1 w_1^{Ry_0}\right)^4 + \left(t_2 w_1^{Ry}\right)^4 + \left(t_1 w_2^{Ry_0}\right)^4 + \left(t_2 w_2^{Ry}\right)^4\right) \mathrm{d}x \leq o(\varepsilon_R).
\end{aligned}
\tag{2.105}
$$

Resta estimar $(E), (F), (G)$. Temos dois casos a analisar: β em um pequeno intervalo contendo $1/2$ e β nos intervalos complementares em $[0, 1]$. Quando $\beta = 1/2$, utilizando que (w_1, w_2) é solução de $(\mathbb{S}_\infty)$, o Corolário 2.17 e o Lema 2.16 com $t_1, t_2 \geq 1/2$, $\overline{C}_0 > 0$ e $C > 0$ temos que

$$
\begin{aligned}
& (E) + (F) + (G) \\
= \;& t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla w_1^{Ry_0} \nabla w_1^{Ry} + w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + \nabla w_2^{Ry_0} \nabla w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_2^{Ry}\right] \mathrm{d}x \\
& \lambda t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_1^{Ry}\right) \mathrm{d}x \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla F\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right) + \nabla F\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right)\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)\right] \mathrm{d}x \\
= \;& \frac{t_1 t_2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla w_1^{Ry_0} \nabla w_1^{Ry} + w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + \nabla w_2^{Ry_0} \nabla w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_2^{Ry}\right] \mathrm{d}x \\
& + \frac{t_1 t_2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla w_1^{Ry_0} \nabla w_1^{Ry} + w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + \nabla w_2^{Ry_0} \nabla w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_2^{Ry}\right] \mathrm{d}x \\
& - \frac{\lambda}{2} t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_1^{Ry}\right) \mathrm{d}x \\
& - \frac{\lambda}{2} t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_1^{Ry}\right) \mathrm{d}x \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla F\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right) + \nabla F\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right)\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)\right] \mathrm{d}x \\
=& \frac{t_2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} t_1 \nabla F\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\right)\left(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}\right) \mathrm{d}x + \frac{t_1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} t_2 \nabla F\left(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\right) \mathrm{d}x \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla F\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right) + \nabla F\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right)\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)\right] \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{t_2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left\{t_1\nabla F\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)\left(w_1^{Ry},w_2^{Ry}\right)-\nabla F\left(t_1w_1^{Ry_0},t_1w_2^{Ry_0}\right)\left(w_1^{Ry},w_2^{Ry}\right)\right\}\mathrm{d}x\\
&+\frac{t_1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left\{t_2\nabla F\left(w_1^{Ry},w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)-\nabla F\left(t_2w_1^{Ry},t_2w_2^{Ry}\right)\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)\right\}\mathrm{d}x\\
&-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\nabla F\left(t_1w_1^{Ry_0},t_1w_2^{Ry_0}\right)\left(t_2w_1^{Ry},t_2w_2^{Ry}\right)+\nabla F\left(t_2w_1^{Ry},t_2w_2^{Ry}\right)\left(t_1w_1^{Ry_0},t_1w_2^{Ry_0}\right)\right]\mathrm{d}x\\
=&\frac{t_2}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(t_1f\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)-f\left(t_1w_1^{Ry_0},t_1w_2^{Ry_0}\right)\right)w_1^{Ry}\,\mathrm{d}x\right|\\
&+\frac{t_2}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(t_1g\left(w_1^{Ry_0},w_2^{Ry_0}\right)-g\left(t_1w_1^{Ry_0},t_1w_2^{Ry_0}\right)\right)w_2^{Ry}\,\mathrm{d}x\right|\\
&+\frac{t_1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(t_2f\left(w_1^{Ry},w_2^{Ry}\right)-f\left(t_2w_1^{Ry},t_2w_2^{Ry}\right)\right)w_1^{Ry_0}\,\mathrm{d}x\right|\\
&+\frac{t_1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(t_2g\left(w_1^{Ry},w_2^{Ry}\right)-g\left(t_2w_1^{Ry},t_2w_2^{Ry}\right)\right)w_2^{Ry_0}\,\mathrm{d}x\right|\\
&-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\nabla F\left(t_1w_1^{Ry_0},t_1w_2^{Ry_0}\right)\left(t_2w_1^{Ry},t_2w_2^{Ry}\right)+\nabla F\left(t_2w_1^{Ry},t_2w_2^{Ry}\right)\left(t_1w_1^{Ry_0},t_1w_2^{Ry_0}\right)\right]\mathrm{d}x\\
\leq&\frac{t_2}{2}C|t_1-1|O(\varepsilon_R)+\frac{t_1}{2}C|t_2-1|O(\varepsilon_R)\\
&-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\nabla F\left(t_1w_1^{Ry_0},t_1w_2^{Ry_0}\right)\left(t_2w_1^{Ry},t_2w_2^{Ry}\right)+\nabla F\left(t_2w_1^{Ry},t_2w_2^{Ry}\right)\left(t_1w_1^{Ry_0},t_1w_2^{Ry_0}\right)\right]\mathrm{d}x\\
\leq&\frac{t_2}{2}C|t_1-1|O\left(\varepsilon_R\right)+\frac{t_1}{2}C|t_2-1|O\left(\varepsilon_R\right)-\overline{C}_0\varepsilon_R.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$(E)+(F)+(G)\leq\frac{t_2}{2}C|t_1-1|O(\varepsilon_R)+\frac{t_1}{2}C|t_2-1|O\left(\varepsilon_R\right)-\overline{C}_0\varepsilon_R. \tag{2.106}$$

Como $0<t_1,t_2\leq T_0$ e $t_1(R)\to 1$, $t_2(R)\to 1$, se $R\to\infty$, pelo Lema 2.18, então tomando $R_0>0$ suficientemente grande e $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ suficientemente pequeno, temos que

$$(E)+(F)+(G)\leq-\frac{\overline{C}_0}{2}\varepsilon_R, \tag{2.107}$$

para todo $\beta\in\left[\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}+\delta\right]$, $y\in B_2(y_0)$ e $R\geq R_0$. Assim, por (2.97), (2.98), (2.102), (2.105) e (2.107), para todo $\beta\in\left[\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}+\delta\right]$, $y\in B_2(y_0)$ e $R\geq R_0$, provamos que

$$I(t_1w_1^{Ry_0}+t_2w_1^{Ry},t_1w_2^{Ry_0}+t_2w_2^{Ry})\leq 2m_\infty-\frac{\overline{C}_0}{2}\varepsilon_R+o(\varepsilon_R). \tag{2.108}$$

Observe que neste argumento utilizamos a continuidade de $T^R_{\beta,y}$ nas variáveis β,y e R.

Finalmente, estudamos o segundo caso $\beta\in\left[0,\frac{1}{2}-\delta\right)\cup\left(\frac{1}{2}+\delta,1\right]$. Para isto, sem perda de generalidade, fixemos β tal que $0\leq\beta<\frac{1}{2}-\delta$. Então $1\geq 1-\beta>\frac{1}{2}+\delta$. Note que, se $T^R_{\beta,y}\leq 2$, então $t_1=T^R_{\beta,y}\beta\in[0,1-2\delta]$ e $t_2=T^R_{\beta,y}(1-\beta)\in[1+2\delta,2]$, ou seja, temos $t_1<1$ e $t_2>1$. Por outro lado, se $T^R_{\beta,y}\geq 2$, então $t_1=T^R_{\beta,y}\beta\in[1-2\delta,+\infty]$ e $t_2=T^R_{\beta,y}(1-\beta)\in[1+2\delta,+\infty]$. Juntando isto e as estimativas anteriores de (2.97) a (2.105) e o Lema 2.4-(c) mostramos que

$$I(t_1w_1^{Ry_0}+t_2w_1^{Ry},t_1w_2^{Ry_0}+t_2w_2^{Ry})\leq m_\infty-\gamma+m_\infty-\gamma+O(\varepsilon_R). \tag{2.109}$$

$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2} - \delta\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \delta, 1\right], y \in B_2(y_0)$ e $R \geq R_1$.

Portanto, concluímos o lema juntando os resultados em (2.108) e (2.109) para todo $\beta \in [0,1], y \in \partial B_2(y_0), R > \max\{R_0, R_1\}$.

□

Lema 2.21. *Dado número real $\eta_2 > 0$, existe um número real $R_4 > 0$ tal que*

$$I\left(T_{0,y}^R Z_{0,y}^R\right) < m_\infty + \eta_2,$$

para todo $y \in \partial B_2(y_0)$ e $R > R_4$. Em particular, $m \leq m_\infty$

Demonstração: Começamos observando que, pelo Lema 2.12 e a equação (2.73), para $i = 1, 2$ já vimos em (2.105) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| F(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry})\, \mathrm{d}x \leq o(\varepsilon_R). \tag{2.110}$$

Escolhendo $(u,v) = \left(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}\right) = Z_{0,y}^R$ em (2.6) e utilizando o Lema 2.4 e a desigualdade (2.110) temos

$$\begin{aligned}
I\left(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}\right) &= I_\infty\left(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}\right) - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F\left(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}\right) \mathrm{d}x \\
&\leq \max_{t>0} I_\infty\left(t w_1^{Ry}, t w_2^{Ry}\right) + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| F\left(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}\right) \mathrm{d}x \\
&= I_\infty\left(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}\right) + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| F\left(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}\right) \mathrm{d}x \\
&= m_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| F\left(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}\right) \mathrm{d}x \leq m_\infty + o(\varepsilon_R).
\end{aligned}$$

Assim, o resultado segue e o lema está demonstrado.

□

2.6 Demonstração do resultado principal do sistema

Para a demonstração do Teorema 0.2 serão utilizadas ferramentas do tipo *min-max*. Precisamos introduzir a função baricentro em $H^1(\mathbb{R}^N)$ dada em [16]. Sejam $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}$,

$$\mu(u)(x) := \frac{1}{\mu(B_1(0))} \int_{B_1(x)} |u(y)|\, \mathrm{d}y, \quad \mu(u) \in L^\infty \text{ e contínua}$$

e

$$\overline{u}(x) := \left(\mu(u)(x) - \frac{1}{2} \max_{x \in \mathbb{R}^N} \mu(u)(x)\right)^+, \overline{u} \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

onde $\mu(B_1(0))$ é a medida de Lebesgue da bola unitária. A função baricentro de u é a aplicação definida por

$$\overline{\mathcal{B}}(u) := \frac{1}{|\overline{u}|_1} \int_{\mathbb{R}^N} x \overline{u}(x)\, \mathrm{d}x.$$

A função baricentro possui as seguintes propriedades:

i) $\overline{\mathcal{B}}$ é contínua em $H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$;

ii) Se $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\backslash\{0\}$ é radialmente simétrica, então $\overline{\mathcal{B}}(u)=0$;

iii) Para todo $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e todo $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\backslash\{0\}$ tem-se $\overline{\mathcal{B}}(u)=\overline{\mathcal{B}}(tu)$;

iv) Dado $z \in \mathbb{R}^N$ tem-se $\overline{\mathcal{B}}(u(x-z))=\overline{\mathcal{B}}(u)+z$.

Agora consideramos a definição da função baricentro do par $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$ dada em [5]:

$$\mathcal{B}(u,v) := \frac{1}{|\overline{u}|_1+|\overline{v}|_1}\int_{\mathbb{R}^N} x\left(\overline{u}(x)+\overline{v}(x)\right)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}^N.$$

Convém salientar que, se $u,v \neq 0$, então

$$\mathcal{B}(u,v) := \frac{|\overline{u}|_1}{|\overline{u}|_1+|\overline{v}|_1}\overline{\mathcal{B}}(u)+\frac{|\overline{v}|_1}{|\overline{u}|_1+|\overline{v}|_1}\overline{\mathcal{B}}(v).$$

Assim, $\mathcal{B}$ está bem definida e verifica propriedades análogas as (i)-(iv).

Definida a função baricentro, podemos demonstrar o seguinte resultado:

Lema 2.22. *Suponha que m não seja atingido. Então $m=m_\infty$ e existe um $\eta>0$ tal que*

$$\mathcal{B}(u,v)\neq 0,\ \textit{para toda}\ (u,v)\in\mathcal{N}\cap I^{m_\infty+\eta};$$

onde denotamos

$$I^{m_\infty+\eta} := \left\{(u,v)\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\times H^1\left(\mathbb{R}^N\right);\quad I(u,v)\leq m_\infty+\eta\right\}.$$

Demonstração: Suponha que m não é atingido. Pelo Lema 2.11, $m \geq m_\infty$ e do Lema 2.21, a desigualdade invertida. Logo temos a igualdade $m=m_\infty$.

Argumentando por contradição, suponha que para cada $n\in\mathbb{N}$ exista $\{(\varphi_n,\psi_n)\}\subset\mathcal{N}$ satisfazendo $I(\varphi_n,\psi_n) < m+o_n(1)$ e, ainda, $\mathcal{B}(\varphi_n,\psi_n)=0$. Segue disto que $\{(\varphi_n,\psi_n)\}\subset\mathcal{N}$ é uma sequência minimizante para I. O Princípio Variacional de Ekeland, por instante vide [46], nos fornece uma sequência $\{(u_n,v_n)\}$ para I restrito a $\mathcal{N}$ no nível m_∞ onde tal sequência é (PS) e satisfaz

$$\|(\varphi_n,\psi_n)-(u_n,v_n)\|\to 0,\ \text{quando}\ n\to\infty.$$

Já vimos pelos Lemas 2.5 e 2.7 que toda sequência (PS) em $\mathcal{N}$ é limitada e como m não é atingido, podemos usar o Lema 2.10 para garantir a existência de uma sequência

$$\{z_n\}\subset\mathbb{R}^N;\|z_n\|\to\infty\ \ \text{e}\ \ \|(u_n,v_n)-\left(w_1\left(\cdot-z_n\right),w_2\left(\cdot-z_n\right)\right)\|\to 0,\ \text{quando}\ n\to\infty$$

onde (w_1,w_2) é a solução positiva, radial de energia mínima do problema limite.

Por translação temos

$$u_n(x+z_n)=w_1(x)+o_n(1)\ \ \text{e}\ \ v_n(x+z_n)=w_2(x)+o_n(1).$$

Usando as propriedades da função baricentro e que $\mathcal{B}(\varphi_n,\psi_n)=0$ temos

$$\mathcal{B}(\varphi_n(x+z_n),\psi_n(x+z_n))=\mathcal{B}(\varphi_n,\psi_n)+z_n=z_n,$$

e ainda pela continuidade da função baricentro $\mathcal{B}$ na norma em H

$$\mathcal{B}(\varphi_n(x+z_n), \psi_n(x+z_n)) \to \mathcal{B}(w_1(x), w_2(x)) = 0.$$

que configura uma contradição, pois $\|z_n\| \to \infty$.

$\square$

Por fim iremos demonstrar o resultado principal onde utilizaremos os resultados que obtivemos anteriormente.

Prova do Teorema 0.2 :

Inicialmente, suponha que m é atingido para algum (u,v) em $\mathcal{N}$. Consequentemente, pelos Lemas 2.4(b) e 2.6 temos que (u,v) é uma solução não trivial para o problema $(\mathbb{S})$. Suponha então que m não seja atingido. Segue do Lema 2.22 que $m = m_\infty$ e podemos fixar $\eta_2 \in \left(0, \frac{m_\infty}{8}\right)$ tal que $I(u,v) \leq m_\infty + \eta_2, \ \ \forall (u,v) \in \mathcal{N}$ e $\mathcal{B}(u,v) \neq 0$ e ainda, pelo Lema 2.21, para todo $R > R_4$

$$I(T^R_{0,y} Z^R_{0,y}) \leq m_\infty + \eta_2, \ \ \forall\, y \in \partial B_2(y_0). \tag{2.111}$$

Segue do Lema 2.20 que podemos escolher η_1 entre $\left(0, \frac{m_\infty}{8}\right)$ e para todo $R > R_3$

$$I(T^R_{\beta,y} Z^R_{\beta,y}) \leq 2m_\infty - \eta_1, \ \ \forall\, y \in \partial B_2(y_0), \ \ \beta \in [0,1]. \tag{2.112}$$

Fixe $R > \max\{R_3, R_4\}$ e defina a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} : B_2(y_0) & \longrightarrow & \mathcal{N} \cap I^{2m_\infty - \eta_1} \\ \beta y_0 + (1-\beta) y & \longrightarrow & T^R_{\beta,y} Z^R_{\beta,y}, \ \ \forall\, y \in \partial B_2(y_0), \ \ \beta \in [0,1]. \end{array} \tag{2.113}$$

O objetivo agora é mostrar que o funcional I tem um valor crítico no intervalo $(m_\infty, 2m_\infty)$. Argumentando por contradição, suponha que tal valor crítico não exista. Como m não é atingido, podemos utilizar o Lema 2.11 para garantir que o funcional I restrito a $\mathcal{N}$ satisfaz a condição de Palais- Smale no intervalo $(m_\infty, 2m_\infty)$. Logo, existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|(I\mid_{\mathcal{N}})'(u,v)\| \geq \varepsilon \ \text{ para todo } \ \ (u,v) \in \mathcal{N} \cap I^{-1}[m_\infty + \eta_2, 2m_\infty - \eta_1].$$

Isso implica que, pelo Lema 5.15 [46], existe uma aplicação (deformação) contínua

$$\mathcal{D} : \mathcal{N} \cap I^{2m_\infty - \eta_1} \longrightarrow \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta_2} \tag{2.114}$$

tal que $\mathcal{D} = id$ (aplicação identidade) para todo $(u,v) \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta_2}$.

Por (2.111), (2.112), (2.113) e (2.114) podemos definir a seguinte aplicação contínua

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : B_2(0) & \longrightarrow & \partial B_2(0) \\ x & \longrightarrow & A_2\left(2\dfrac{\mathcal{B}o\mathcal{D}o\mathcal{H}oA_1(x)}{|\mathcal{B}o\mathcal{D}o\mathcal{H}oA_1(x)|}\right), \end{array} \tag{2.115}$$

onde $\mathcal{B}$ é a aplicação baricentro e as aplicações contínuas A_1 e A_2 são definidas como segue

$$\begin{array}{rcl} A_1 : B_2(0) & \longrightarrow & B_2(y_0) \\ x & \longrightarrow & x + y_0 \end{array} \tag{2.116}$$

e

$$\begin{array}{rcl} A_2 : \partial B_2(0) & \longrightarrow & \partial B_2(0) \\ \dfrac{2y}{|y|} & \longrightarrow & y - y_0 \end{array} \tag{2.117}$$

onde $y \in \partial B_2(y_0)$. Além disso, se $\beta = 0$ segue que

$$\mathcal{H}(y) = T^R_{0,y} Z^R_{0,y}. \tag{2.118}$$

Por outro lado, usando as propriedades da função baricentro note que

$$\mathcal{B}(T^R_{0,y} Z^R_{0,y}) = \mathcal{B}(T^R_{0,y}\left(\omega_1^{Ry}, \omega_2^{Ry}\right)) = \mathcal{B}\left(\omega_1^{Ry}, \omega_2^{Ry}\right) = \mathcal{B}\left(\omega_1(x), \omega_2(x)\right) + Ry = Ry. \tag{2.119}$$

Como $\mathcal{D} = id$ para todo $(u, v) \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta_2}$ tem-se por (2.115), (2.116), (2.117) , (2.118) e (2.119) que

$$\Gamma(y - y_0) = A_2\left(2\frac{\mathcal{B}o\mathcal{D}o\mathcal{H}oA_1(y - y_0)}{|\mathcal{B}o\mathcal{D}o\mathcal{H}oA_1(y - y_0)|}\right) = A_2\left(2\frac{\mathcal{B}(T^R_{0,y} z^R_{0,y})}{|\mathcal{B}(T^R_{0,y} z^R_{0,y})|}\right) = A_2\left(2\frac{Ry}{|Ry|}\right) = y - y_0.$$

Temos uma contradição, pois a aplicação contínua Γ não pode existir pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, veja Teorema 3.5 em [7]. Portanto, a contradição neste caso veio de supor que I não tem um valor crítico no intervalo $(m_\infty, 2m_\infty)$.

Para discutir a existência de uma solução positiva $u > 0, v > 0$, consideremos o funcional

$$I_+(u, v) = \frac{1}{2}\|(u, v)\|^2_H - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(u^+, v^+) \,\mathrm{d}x.$$

Para maiores detalhes sobre este funcional I_+, veja a Proposição 1.12 em [46].

Aplicando os mesmos argumentos anteriores do funcional I, pelo Teorema 0.2 podemos obter uma solução do problema

$$(\mathbb{S}_+) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))\dfrac{u^+\left((u^+)^2 + (v^+)^2\right)}{1 + s((u^+)^2 + (v^+)^2)} + \lambda v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1 + a(x))\dfrac{v^+\left((u^+)^2 + (v^+)^2\right)}{1 + s((u^+)^2 + (v^+)^2)} + \lambda u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Somando as duas equações do sistema $(\mathbb{S}_+)$ temos

$$-\Delta(u + v) + (1 - \lambda)(u + v) = (1 + a(x))\frac{u^+\left((u^+)^2 + (v^+)^2\right)}{1 + s((u^+)^2 + (v^+)^2)} + (1 + a(x))\frac{v^+\left((u^+)^2 + (v^+)^2\right)}{1 + s((u^+)^2 + (v^+)^2)}.$$

Desde que $0 < \lambda < 1$, por (a_1) e pelo Princípio do Máximo temos que $u + v > 0$.

Adicionando λu a ambos os lados da primeira equação em $(\mathbb{S}_+)$ temos

$$-\Delta u + (1+\lambda)u = (1+a(x))\frac{u^+\left((u^+)^2+(v^+)^2\right)}{1+s((u^+)^2+(v^+)^2)} + \lambda(u+v) > 0.$$

Novamente por (a_1) e pelo Princípio do Máximo temos $u > 0$. De maneira análoga, $v > 0$. Assim, (u, v) é uma solução positiva de $(\mathbb{S}_+)$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Ackermann, N.; Clapp, M. and Pacella, F., *Alternating sign multibump solutions of nonlinear elliptic equations in expanding tubular domains,* Comm. Partial Differential Equations. **38** (2013), 751-779.

[2] Akhmediev, N.; Królinowski, W. and Snyder, A., *Partially coherent solitons of variable shape,* Physical Review Letters **81**, no. 21,(1998), 4632-4635.

[3] Akhmediev, N. and Ankiewicz, A., *Novel soliton states and bifurcation phenomena in nonlinear fiber couplers,* Phys. Rev. Lett. **70**, 2395-2398.

[4] Ambrosetti, A., *Remarks on some systems of nonlinear Schrödinger equations,* Journal of Fixed Point Theory and Applications **4** (2008), 35-46.

[5] Ambrosetti , A.; Cerami, G. and Ruiz, D., *Solitions of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on* $\mathbb{R}^N$, Journal of Functional Analysis. **254** (2008), 2816-2845.

[6] Ambrosetti , A.; Colorado, E. and Ruiz, D., *Multi-bump solitons to linearly coupled systems of nonlinear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial Diff. Equations, **2007** , 85-112.

[7] Ambrosetti , A. and Malchiodi, A., *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge University Press, 2007.

[8] Bahri, A. and Lions, P.L, *On the existence of a positive solution of semilinear elliptic equations in unbound domain,* Ann. Inst. Henri Poincaré. **14** (1997), 365-413.

[9] Bahri, A. and Li, Y. Y, *On a minimax procedure for the existence of a positive solution for certain scalar field,* Revista Mat. Iberoamericana. **6** (1997), 1-2.

[10] Bartolo, P.; Benci, V. and Fortunato, D., *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications. **7** (1983), 981-1012.

[11] Beitia, J. B.; García, V. M. P. and Torres, P. J.; *Solitary waves for linearly coupled nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous coefficientes*, Nonlinear Science **19** (2009), 437-451.

[12] Berestycki, H.; Gallouet, T. and Kavian, O., *Equations de champs scalaires euclidiens non lineaires das le plan*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **297** (1983), 305-310.

[13] Berestycki, H. and Lions, P. L., *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 313-345.

[14] Busca, J. and Sirakov, B., *Symmetry results for semilinear elliptic systems in the whole space,* Journal of Diff. Equations. **163** (2000), 41-56.

[15] Cerami, G. and Passaseo, D., *Existence and multiplicity results for semilinear elliptic Dirichlet problems in exterior domains,* Nonlinear Analysis, Theory, Methods Applications, **24**, (1995), 1533-1547.

[16] Cerami, G. and Passasseo, D., *The effect of concentrating potentials in some singularly perturbed problems,* Calc. Var. Partial Differential Equations. **3** (2003), 257-281.

[17] Chen, Z. and Zou, W., *Standing waves for a coupled system of nonlinear Schrödinger equations* , Annali di Matematica **194** (2015) 183-220.

[18] Clapp, M. and Maia, L. A., *A positive bound state for an asymptotically linear or superlinear Schrödinger equations,* J. Differential Equation. **260** (2016), 3173-3192.

[19] Coddington, E. A. and Levinson, N.;, *Theory of ordinary differential equations* , New York: McGraw-Hill. (1955).

[20] Coti-Zelati, V. and Rabinowitz,P.; *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Pure Appl. Math, 46 (1992), 1217-1269.

[21] De Figueiredo, D. G. and Yang, J., *Decay, symmetry and existence of solutions of semilinear elliptic systems*, Nonlinear Anal. **33** (1998), no. 3, 211-234.

[22] De Figueiredo, D. G. and Mitidieri, E., *Maximum principles for linear elliptic systems,* Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 22 (1990), no. 1-2, 36-66 (1992).

[23] Ding, W. Y. and Ni, W. M., *On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation,* Arch. Rational Mech. Anal. **91**, no. 4,(1986), 283-308.

[24] Évéquoz, G. and Weth, T., *Entire solutions to nonlinear scalar field equations with indefinite linear part* , Adv. Nonlinear Studies. **12** (2016), 281-314.

[25] Gidas, B., Ni, W. and Niremberg, L., *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Math. Analysis and Applications, Part A . Advances in Math. Supplementary Studies, vol 7A., 1981.

[26] Kwong, M. K., *Uniquess of positive solutions of* $\Delta u - u + u^p = 0$ *in* $\mathbb{R}^N$, Arch. Rational Mech. Anal **105**, (1989), 243-266 .

[27] Lions, P. L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case*, Ann. I. H. Poincaré AN **1**, (1984) , 109 - 145 and 223-283 .

[28] Lehrer, R., *Existence of solution for asymptotically linear systems in* $\mathbb{R}^N$, Electronic Journal of Diferential Equations, **236** (2013), 1-20.

[29] Lehrer, R. and Maia, L. A., *Positive solutions of asymptotically linear equations via Pohozaev manifold*, Journal Functional Analysis . **266** (2014), 213-246.

[30] Litchinister, N. M.; Królikowski, W.; Akhmediev, N. N. and Agrawal, G. P., *Asymmetric partially coherent solitions in saturable nonlinear media*, Phys. Rev. E **60** (1999), 2377-2380.

[31] Maia, L. A. and Pellacci, B. , *Positive solutions for asymptotically linear problems in exterior domains*, Annali di Matematica Pura ed Applicata . (2016), 1-32.

[32] Maia, L. A., Montefusco, E. and Pellacci, B., *Weakly coupled nonlinear Schrödinger systems:the saturation effect*, Calc. Var. (2013), 25-351.

[33] Maia, L. A. and Ruviaro, R., *Positive and nodal solutions of nonlinear Schrondinger equations in a saturable medium,* Adv. Nonlinear Stud. . **15** (2015), 191-219.

[34] Matthews, M.R.; Anderson, B.P.; Haljan, P.C.; Hall, D.S.; Wieman, C.E. and Cornell, E.A., *Vortices in a Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498-2501 (1999a).

[35] Matthews, M.R.; Anderson, B.P. Haljan, P.C.; Hall, D.S.; Holland, M.J.; Williams, J.E.; Wieman, C.E. and Cornell, E.A., *Watching a superfluid untwist itself: Recurrence of Rabi oscillations in a Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3358 (1999b).

[36] McLeod, K., *Uniqueness of positive radial solutions of* $\Delta u + f(u) = 0$ *in* $\mathbb{R}^N$ II, Trans. Amer. Math. Soc. . **339** (1993), 495-505.

[37] Moroz,V. and Schaftingen, J. V., *Nonexistence and optimal decay of supersolutions to Choquard equations in exterior domains,* Journal of Differential Equations. **254** (2013), 3089-3145.

[38] Moroz,V. and Schaftingen, J. V., *Goundstates of nonlinear Choquard equations : Existence, qualitative properties and decay asymptotics,* Journal of Funct. Anal. **265** (2013), 153-184.

[39] Rabinowitz, P. H. *On a class of nonlinear Schrödinger equations,* Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), no. 2, 270-291.

[40] Serrin, J. and Tang, M. *Uniquess of ground states for quasilinear elliptic equations,* Indiana Univ. Math. **49** (2000), 897-923.

[41] Steman, G. I. and Segev, M., *Optical spatial solutions and their interactions:universality and diversity*, Science **286** (1999), 1518-1523.

[42] Strauss, W. A. *Existence of solitary waves in higher dimensions,* Commun. Math. Phys. . **55** (1977), 149-162.

[43] Stuart, C. A., *Bifurcation in* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *for a semilinear elliptic equation*, London. Math. Soc., **57** (1987), 511-541.

[44] Stuart, C. A. *Guidance properties of nonlinear planar waveguides*, Arch. Rational Mech. Anal. **125** (1993), no. 2, 145-200.

[45] Weilnau, C.; Ahles, M.; Petter, J.; Träger, D.; Schröder, J. and Denz, C., *Spatial optical (2+1)-dimensional scalar-and vector-solitons in saturable nonlinear media*, Ann. Phys. (Leipzig) **11** (2002), 573-629.

[46] Willem, M., *Minimax Theorems*, Volume 24 , Birkhauser, Boston, 1996.

[47] Zafrany, A.; Malomed, B.A. and Merhasin, I.M., *Solitons in a linearly coupled system with separated dispersion and nonlinearity*, Chaos **15**, 037108 (2005).

[48] Zhang, H.; Xu, J. and Zhang, F. , *Existence of positive ground states for some nonlinear Schrödinger systems* , Boundary Value Problems. **13** (2013).