

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superfícies Planas na esfera 3-dimensional

por

Wenison Trindade da Silva

Orientador: Dr. João Paulo dos Santos

Brasília

2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

TT833s Trindade da Silva, Wenison
Superfícies planas na esfera 3-dimensional /
Wenison Trindade da Silva; orientador João Paulo
dos Santos. -- Brasília, 2017.
102 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2017.

1. Construções de superfícies planas na esfera 3
dimensional. . I. dos Santos, João Paulo , orient.
II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superfícies Planas na esfera 3-dimensional

por

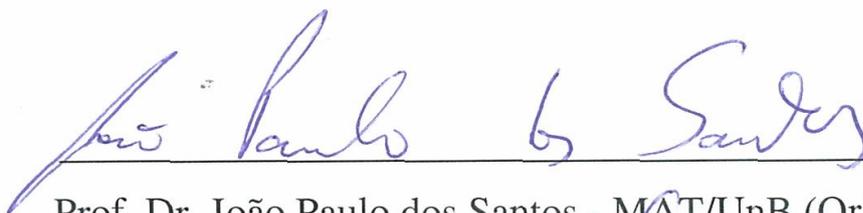
Wenison Trindade da Silva *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 30 de maio de 2017.

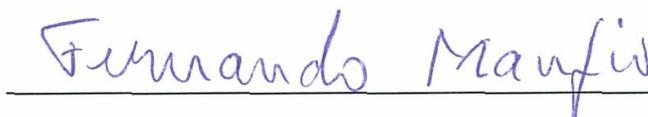
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. João Paulo dos Santos - MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. José Luis Teruel Carretero – MAT/UnB (membro)



Prof. Dr. Fernando Manfio - ICMC-USP (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

*Dedico este trabalho à Sandra Rabelo da Trindade,
pelos nove meses de gestação,
por me dá um nome, um lar, um rumo
e por sacrificar-se todos esses anos, todos os dias,
sem descanso, sem pausa, em prol da felicidade de seus filhos .*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por todas as bênçãos que concedeu-me até aqui. À minha família pelo apoio incondicional, por acreditar no impossível e fazê-lo tornar-se possível.

Agradeço também a todos meus amigos e colegas que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu estivesse aqui. Em especial, a Herlisvaldo Santos pelas “desorientações”, a Fabian Pomeo por as horas de mesas compartilhadas, Valter Borges por todos os conselhos, preocupações e ensinamentos que não foram poucos.

Ao Professor Luís Miranda, agradeço o primeiro curso na pós-graduação, o que me proporcionou um crescimento acadêmico que não sabia ser possível. Ao Professor Fábio Nunes, agradeço por ter sido meu coordenador, por “resgatar-me” a geometria, pelo incentivo a cursar a pós-graduação, pela carta de recomendação e por ser meu amigo.

Agradeço ao meu orientador, Professor João Paulo, pela paciência e dedicação a minha formação. Foram quase dois anos de convivência praticamente diárias, obrigado pelo curso de Geometria Diferencial, pelo curso de Geometria Riemanniana, por aceitar orientar-me, por entender minhas dificuldades e limitações, por ter sido paciente com meus problemas pessoais, que sabemos que não foram poucos. Devo ao senhor não somente tudo o que aprendi em Geometria Diferencial, como também ser um profissional e um ser humano melhor.

Agradeço por aceitarem participar da banca examinadora os professores Fernando Manfio e José Luís.

Por último e não menos importante, agradeço a Marta Lizeth, por compartilhar comigo não só os bons, como também os maus momentos, talvez existam palavras em espanhol, mas sei que na língua portuguesa não existem palavras que descrevam tudo o que fez por mim e nem como tão grato sou.

Resumo

No presente trabalho, estudamos as superfícies planas na esfera unitária 3-dimensional \mathbb{S}^3 . Considerando-se uma estrutura de grupo de Lie em \mathbb{S}^3 , apresentamos os métodos de Bianchi-Spivak e Kitagawa para a construção de superfícies planas em \mathbb{S}^3 através do produto de suas linhas assintóticas. Além disso, estudamos como os métodos de Bianchi-Spivak e Kitagawa podem ser adaptados para a construção de superfícies planas em \mathbb{S}^3 que admitem uma classe de singularidades.

Palavras chaves: Esfera 3-dimensional, superfícies planas, grupos de Lie, linhas assintóticas, singularidades.

Abstract

In the present work, we study the flat surfaces in the 3-dimensional unit sphere \mathbb{S}^3 . By considering a Lie group structure in \mathbb{S}^3 , we present the Bianchi-Spivak and Kitagawa methods to construct flat surfaces in \mathbb{S}^3 by means of the product of their asymptotic lines. Moreover, we study how the Bianchi-Spivak and Kitagawa methods can be adapted for the construction of flat surfaces in \mathbb{S}^3 that admits a class of singularities.

Key-words: 3-dimensional sphere, flat surfaces, Lie groups, asymptotic lines, singularities.

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	Variedades Riemannianas	1
1.2	Imersões Isométricas	9
1.3	Superfícies no espaço tridimensional	13
1.4	Parâmetros Assintóticos	17
1.5	Grupos de Lie	21
2	A geometria da esfera tridimensional \mathbb{S}^3	29
2.1	O grupo de Lie \mathbb{S}^3	29
2.2	A álgebra de Lie \mathfrak{s}^3	31
2.3	\mathbb{S}^3 como subgrupo de $O(4)$	31
2.4	\mathbb{S}^3 como o grupo $SU(2)$	35
2.5	Curvas em \mathbb{S}^3	37
3	Superfícies planas em \mathbb{S}^3	43
3.1	Fibração de Hopf	43
3.2	Representação de Bianchi-Spivak	47
3.3	Representação de Kitagawa	59
4	Aplicações planas em \mathbb{S}^3	70
4.1	Aplicação plana em \mathbb{S}^3	70
4.2	Representação de Bianchi-Spivak para aplicação plana	75
4.3	Representação de Kitagawa para aplicação plana	77

5	Considerações	80
5.1	Resumo dos resultados apresentados	80
5.2	Resultados globais fundamentais	82
5.3	Problemas em aberto	84
A	Apêndice	88

Introdução

No presente trabalho, estudamos superfícies planas em \mathbb{S}^3 . O estudo de superfícies imersas num espaço tridimensional desempenha um papel central na teoria das subvariedades. Dentre os ambientes tridimensionais mais simples, com uma geometria bem desenvolvida, estão as variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas, de curvatura seccional constante, a saber, o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , a esfera \mathbb{S}^3 e o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 .

Considerando-se superfícies de curvatura constante em \mathbb{S}^3 sabemos, pela equação de Gauss, que curvatura intrínseca constante implica curvatura extrínseca constante. As superfícies de curvatura extrínseca constante em \mathbb{S}^3 possuem uma classificação quase completa. De acordo com Spivak [4], não existe superfície completa com $K_{ext} < -1$, nem com $K_{int} > 0$ e $-1 < K_{ext} < 0$, imersa em \mathbb{S}^3 . Para $K_{ext} \geq 0$ só existe um único tipo de superfície, as 2-esferas. O caso $K_{ext} = -1$, que é equivalente às superfícies de curvatura intrínseca zero, também chamadas superfícies planas, é um caso especial que ainda está em desenvolvimento. Neste trabalho, apresentamos um estudo de superfícies com curvatura zero em \mathbb{S}^3 , baseado principalmente em [9], com resultados, demonstrações e considerações adicionais baseados em [4], [9], [10], [5] e [7].

No século 19, Bianchi [16], descreveu a estrutura extrínseca local para superfícies planas em \mathbb{S}^3 . Seus resultados foram descritos por Spivak [4], em uma linguagem atual, através do produto de curvas de torção 1 e -1. De acordo com Kitagawa [5], obter um método para construir superfície plana é interessante uma vez que o problema de classificação do toros planos em \mathbb{S}^3 , proposto por Yau [14], permanecia aberto até a publicação do trabalho deste autor. Neste caminho, Kitagawa [5] refina a construção anterior, uma vez que o autor apresenta um critério

que caracteriza as curvas para a construção de superfícies planas. Além disso, provou que as curvas assintóticas de toros planos em \mathbb{S}^3 são periódicas e que o método clássico de Bianchi constrói todos os toros planos. Em resumo, o método de Kitagawa, além de obter superfície planas apresenta um critério para quando estas superfícies são compactas, resolvendo assim o problema proposto por Yau [14].

Gálvez e Mira em [10], apresentam, além uma família de toros planos em \mathbb{R}^4 distinta da apresentada pelo clássico método de Bianchi, as aplicações planas, que generalizam as superfícies planas, uma vez que admitem uma classe de singularidades e os métodos de Bianchi-Spivak e Kitagawa que podem ser adaptados para construir estas aplicações.

Neste caminho, o presente trabalho apresenta um estudo das construções de Bianchi-Spivak e Kitagawa, bem como um estudo das superfícies com singularidades, e está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentamos alguns conceitos básicos para desenvolvimento do texto afim de fixar a notação a ser utilizada. Introduzimos resultados importantes, sobre variedades Riemannianas e grupos de Lie.

No Capítulo 2, estudamos a estrutura de grupo de Lie da esfera \mathbb{S}^3 . Identificamos a esfera tridimensional com um subgrupo das transformações ortogonais $O(4)$ e com o grupo $SU(2)$. Descrevemos a geometria das curvas em \mathbb{S}^3 através do método do referencial móvel.

O Capítulo 3 é reservado as superfícies planas. Neste capítulo, apresentamos a Fibrção de Hopf para obter os primeiros exemplos de superfícies planas. Vimos que uma superfície completa e simplesmente conexa é recuperada por um produto de curvas assintóticas. Em seguida, estudamos os métodos devido a Bianchi-Spivak e Kitagawa.

No Capítulo 4, tratamos das aplicações planas. Uma generalização das superfícies planas em \mathbb{S}^3 que admitem singularidades. Apresentamos como as construções estudadas no Capítulo 3 podem ser adaptadas para as aplicações planas mesmo com as tais singularidades admissíveis.

O capítulo 5 é dedicado a algumas considerações sobre a teoria estudada. Citaremos alguns resultados importantes, mesmo os que não foram estudados neste texto, que em geral,

são apresentados em Gálvez [9]. Além disto, apresentaremos um resumo dos problemas em aberto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo, iremos apresentar alguns conceitos básicos para o desenvolvimento do texto. Nosso objetivo aqui é introduzir algumas definições e enunciar alguns resultados importantes sobre **Grupos de Lie** e **Variedades Riemannianas**. Além de fixar a notação a ser utilizada. As referências para este capítulo são [3], [2], [12] e [1].

1.1 Variedades Riemannianas

Nesta seção apresentaremos alguns resultados básicos da **Geometria Riemanniana** e fixaremos a notação utilizada neste texto. Esta seção pode ser omitida por um leitor familiarizado com os conceitos básicos de Geometria Riemanniana.

Definição 1.1.1. (*[3]*) *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

- $\bigcup_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.
- Para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ são diferenciáveis.
- A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições anteriores.

Neste texto diferenciável significa ser C^∞ .

Definição 1.1.2. ([3]) *Seja M uma variedade diferenciável. A uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ chamaremos de curva diferenciável em M . Sejam α uma curva que passa por $p \in M$ e $C^\infty(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em p é a função $\alpha'(0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d}{du} f \circ \alpha \right|_{u=0}, \quad \alpha(0) = p \text{ e } f \in C^\infty(M).$$

O conjunto dos vetores tangentes a M em p chamaremos de espaço tangente, que será denotado por T_pM . Cada parametrização determina uma base associada $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right\}$ de T_pM , que será chamada base coordenada.

Definição 1.1.3. ([3]) *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa a um vetor $X(p) \in T_pM$. Ao campo vetorial dado por $[X, Y] = XY - YX$ chamaremos de Colchete de Lie.*

Se considerarmos uma parametrização x_α de M podemos escrever

$$X(p) = \sum_{m=1}^n a_m(p) \frac{\partial}{\partial x_m},$$

onde cada a_m é uma função real definida em U_α . Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis. O colchete de Lie satisfaz:

Proposição 1.1.4. ([3]) *Se $X, Y, e Z$ são campos diferenciáveis em M , a, b são números reais, e \bar{f}, \bar{g} são funções diferenciáveis, então:*

- $[X, Y] = -[Y, X];$
- $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z];$
- $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0;$
- $[\bar{f}X, \bar{g}Y] = \bar{f}\bar{g}[X, Y] + \bar{f}X(\bar{g}) - \bar{g}Y(\bar{f})X.$

A demonstração da proposição acima encontra-se em [3], assim como a interpretação do colchete como sendo a derivação ao longo das trajetórias de um dos campos. Uma vez definida a estrutura diferencial de uma variedade, vamos definir a sua estrutura Riemanniana.

Definição 1.1.5. ([3]) Uma métrica Riemanniana em uma variedade M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$, um produto interno \mathbb{I}_p (forma bilinear, simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM que varia diferenciavelmente da seguinte forma: se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais, com base coordenada $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ então

$$g_{ij} = \mathbb{I}_{\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

é diferenciável em $U \subset \mathbb{R}^n$. Usaremos \mathbb{I} , g ou \langle, \rangle para denotar a métrica, conforme indicado em cada situação.

Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana. A partir de agora usaremos a notação (M, \mathbb{I}) para denotar uma variedade Riemanniana, ou somente M , quando a métrica estiver implícita. Sendo M^m , N^n variedades diferenciáveis de dimensões m e n respectivamente, denotaremos por $d(\varphi)_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ a aplicação diferencial de φ em p . Se $d\varphi_p$ for injetiva para todo $p \in M$, diremos que φ é uma imersão. Se além disto esta aplicação for homeomorfismo, sobre $\varphi(M)$ diremos que φ é um mergulho. No mesmo contexto, se $M \subset N$ e a aplicação inclusão for um mergulho, diremos que M é uma subvariedade de N . Sendo $m \leq n$, a diferença $n - m$ é chamada de codimensão da imersão φ .

Definição 1.1.6. ([3]) Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado uma isometria se

$$\mathbb{I}_M(u, v)_p = \mathbb{I}_N(df_p(u), df_p(v))_{f(p)},$$

para todo $p \in M$, $u, v \in T_pM$.

O seguinte resultado fornece uma importante relação entre isometrias de variedades Riemannianas.

Lema 1.1.7. ([3]) Sejam $f_i : M \rightarrow N$, $i = 1, 2$, duas isometrias locais da variedade Riemanniana conexa M na variedade Riemanniana N . Suponhamos que existe um ponto $p \in M$ tal que $f_1(p) = f_2(p)$ e $d(f_1)_p = d(f_2)_p$. Então $f_1 = f_2$.

A demonstração deste resultado pode ser visto em [3], pg. 181. A estrutura Riemanniana permite estabelecer uma única derivação de campos de vetores, chamada conexão Riemanniana. Para introduzi-la vamos definir conexão afim.

Definição 1.1.8. ([3]) *Uma conexão afim em variedade diferenciável M é a aplicação $\nabla : (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ tal que:*

- $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z;$
- $\nabla_X Y + Z = \nabla_X Y + \nabla_X Z;$
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y;$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

E assim, pela conexão temos uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas em particular em M , o que nos leva ao seguinte resultado:

Proposição 1.1.9. ([3]) *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa cada campo vetorial V ao longo de uma curva parametrizada $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{du}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , que satisfaz:*

$$i) \frac{D}{du}(V + W) = \frac{D}{du}V + \frac{D}{du}W;$$

$$ii) \frac{D}{du}(fV) = \frac{df}{du}V + f\frac{D}{du}V;$$

iii) *Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(u) = Y(c(u))$, então $\frac{D}{du}V = \nabla_{\frac{dc}{du}}Y$.*

Onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .

A demonstração desta proposição encontra-se em [3], assim como a equação

$$\frac{D}{du}V = \sum_k \frac{dv_k}{du}X_k + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{du}v_j \nabla_{X_i}X_j, \quad (1.1)$$

para $X_i = \frac{\partial}{\partial u}$, $V = \sum_j v_j X_j$. A equação (1.1) define a derivada covariante de V ao longo de c .

Teorema 1.1.10. (*[3]*) *Dada uma variedade Riemanniana (M, \langle, \rangle) , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

- i) ∇ é simétrica, isto é, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$;
- ii) ∇ é compatível com a métrica, isto é, $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ para todo campo X, Y e Z em M .

O resultado acima é conhecido como Teorema de Levi-Civita, e sua demonstração baseia-se na seguinte equação:

$$2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle. \quad (1.2)$$

A equação (1.2) é denominada fórmula de Koszul. Por outro lado, para

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k,$$

obtemos os coeficientes da conexão de Levi-Civita em U , conhecidos como símbolos de Christoffel os quais ficam determinados por

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}, \quad (1.3)$$

onde (g^{km}) denota a matriz inversa da matriz (g_{km}) .

Afim de facilitar os cálculos, será útil a seguinte notação. Se $\varphi : M \rightarrow N$ for um difeomorfismo e X um campo em M então $\varphi_* X$ é definido por

$$\varphi_* X(p) = d(\varphi)_{\varphi^{-1}(p)}(X(\varphi^{-1}(p))).$$

E assim podemos enunciar um resultado que nos será muito útil.

Proposição 1.1.11. (*[12]*) *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\varphi : M \rightarrow N$ um difeomorfismo então,*

- i) $\varphi_*(fX + gY) = (f \circ \varphi^{-1})\varphi_* X + (g \circ \varphi^{-1})\varphi_* Y$;

ii) $[(\varphi_*X)f] \circ \varphi = X(f \circ \varphi)$, equivalentemente $(\varphi_*X)f = X(f \circ \varphi) \circ \varphi$;

iii) $\varphi_*[X, Y] = [\varphi_*X, \varphi_*Y]$. Além disso, se $(M, g_M), (N, g_N)$ são variedades Riemannianas com conexões Riemannianas $\nabla, \tilde{\nabla}$ respectivamente e φ é uma isometria, temos

$$\varphi_*(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{\varphi_*X}(\varphi_*Y).$$

Em particular, se $c : I \rightarrow M$ é uma curva diferenciável e V é um campo vetorial ao longo de c , então

$$\varphi_*\left(\frac{DV}{ds}\right) = \frac{\tilde{D}}{ds}(\varphi_*V),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M) \cup C^\infty(N)$.

Demonstração. Para a prova de i) temos que

$$\begin{aligned} (\varphi_*(fX + gY))(f(p)) &= d(\varphi)_p(X(p) + Y(p)) \\ &= d(\varphi)_pX(p) + d(\varphi)_pY(p) \\ &= \varphi_*fX(f(p)) + \varphi_*gY(f(p)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\varphi_*(fX))(f(p)) &= d(\varphi)_p(fX(p)) \\ &= d(\varphi)_p(f(p)X(p)) = f(p)d(\varphi)_pX(p) \\ &= f \circ \varphi^{-1}(f(p))(\varphi_*X(f(p))). \end{aligned}$$

Portanto, temos i). Para a prova de ii) basta lembrar que $[d(\varphi)_pX(p)]f = X(p(f \circ \varphi))$. Para mostrar iii), primeiramente temos

$$\begin{aligned} XY(f \circ \varphi) &= X(Y(f \circ \varphi))f \\ &= X((\varphi_*Y)f \circ \varphi) \\ &= (\varphi_*X)(\varphi_*Y)f \circ \varphi \end{aligned}$$

e

$$YX(f \circ \varphi) = (\varphi_*Y)(\varphi_*X)f \circ \varphi.$$

Então

$$\begin{aligned} \varphi_*[X, Y]f &= [X, Y](f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \\ &= (XY - YX)(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \\ &= ((\varphi_*X)(\varphi_*Y) - (\varphi_*Y)(\varphi_*X))(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \\ &= ([\varphi_*X, \varphi_*Y])f. \end{aligned}$$

Além disso, se (M, g_M) , (N, g_N) são variedades Riemannianas com conexões Riemannianas ∇ , $\tilde{\nabla}$ respectivamente, e φ é uma isometria. Definamos $\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ por

$$\bar{\nabla}_X Y = \varphi_*^{-1}[\tilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y)].$$

Mostraremos que $\bar{\nabla}$ é uma conexão Riemanniana em M , assim pela unicidade da conexão Riemanniana, garantida pelo Teorema de Levi-Civita, teremos $\bar{\nabla} = \nabla$. De fato,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{fX+gY} Z &= \varphi_*^{-1}[\tilde{\nabla}_{\varphi_*(fX+gY)}\varphi_* Z] \\ &= \varphi_*^{-1}[\tilde{\nabla}_{(f\circ\varphi^{-1})\varphi_* X+(g\circ\varphi^{-1})\varphi_* Y}\varphi_* Z] \\ &= \varphi_*^{-1}[(f\circ\varphi^{-1})\tilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Z + (g\circ\varphi^{-1})\tilde{\nabla}_{\varphi_* Y}\varphi_* Z] \\ &= \varphi_*^{-1}[(f\circ\varphi^{-1})\tilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Z] + \varphi_*^{-1}[(g\circ\varphi^{-1})\tilde{\nabla}_{\varphi_* Y}\varphi_* Z] \\ &= f\varphi_*^{-1}[\tilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Z] + g\varphi_*^{-1}[\tilde{\nabla}_{\varphi_* Y}\varphi_* Z] \\ &= f\bar{\nabla}_X Z + g\bar{\nabla}_X Z \cdot \bar{\nabla}_X(Y + Z) = \varphi_*^{-1}[\tilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_*(Y + Z)] \\ &= \bar{\nabla}_X Y + \bar{\nabla}_X Z, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X(fY) &= \varphi_*^{-1}[\tilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_*(fY)] \\ &= \varphi_*^{-1}[\nabla_{\varphi_* X}f\varphi_* Y] \\ &= \varphi_*^{-1}[(f\circ\varphi^{-1})\nabla_{\varphi_* X}\varphi_* Y + (\varphi_* X)(f\circ\varphi^{-1})\varphi_* Y] \\ &= \varphi_*^{-1}[(f\circ\varphi^{-1})\nabla_{\varphi_* X}\varphi_* Y] + \varphi_*^{-1}[(\varphi_* X)(f\circ\varphi^{-1})\varphi_* Y] \\ &= \varphi_*^{-1}[(f\circ\varphi^{-1})\nabla_{\varphi_* X}\varphi_* Y] + [(\varphi_* X)(f\circ\varphi^{-1})\varphi_*^{-1}(\varphi_* Y)] \\ &= f\bar{\nabla}_X Y + (Xf)Y, \end{aligned}$$

o que mostra que $\bar{\nabla}$ é uma conexão afim. Agora vamos à simetria,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X &= \varphi_*^{-1}[\tilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y] - \varphi_*^{-1}[\tilde{\nabla}_{\varphi_* Y}\varphi_* X] \\ &= \varphi_*^{-1}[\tilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y - \tilde{\nabla}_{\varphi_* Y}\varphi_* X] \\ &= \varphi_*^{-1}[\varphi_* X, \varphi_* Y] \\ &= \varphi_*^{-1}\varphi[X, Y] \\ &= [X, Y]. \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de φ ser um difeomorfismo, portanto, $\bar{\nabla}$ é simétrica. Resta mostrar que a conexão é compatível. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $V = \varphi_* Y$ e $W = \varphi_* Z$ temos

$$X\langle Y, Z \rangle \circ \varphi^{-1} = X(\langle Y, Z \rangle \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi = \varphi_* X\langle \varphi_* Y, \varphi_* Z \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
X\langle Y, Z \rangle &= \varphi_* X \langle \varphi_* Y, \varphi_* Z \rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y, W \rangle + \langle V, \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Z \rangle \\
&= \langle \varphi_*^{-1} \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y, \varphi_*^{-1} W \rangle + \langle \varphi_*^{-1} V, \varphi_*^{-1} \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Z \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. \square

Definição 1.1.12. (*[4]*) *O tensor de curvatura R de uma variedade Riemanniana M é a correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação*

$$R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

para $Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Esta definição, nos permite introduzir a curvatura seccional de uma variedade Riemanniana M . Para isto usaremos também a seguinte notação:

$$\|x \wedge y\| := \sqrt{\mathbb{I}_M(x, x)\mathbb{I}_M(y, y) - \mathbb{I}_M(x, y)^2},$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional, determinado pelo par de vetores x, y pertencentes a um espaço vetorial.

Definição 1.1.13. (*[4]*) *Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e σ um subespaço vetorial do espaço tangente $T_p M$. Dado $x, y \in \sigma$ vetores linearmente independentes, definimos como curvatura seccional o número real dado por*

$$K(\sigma) = \frac{\mathbb{I}_M(R(x, y)y, x)}{\|x \wedge y\|^2}.$$

Não é difícil ver que a definição de K , não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$. Outro fato interessante, é que o tensor de curvatura R fica totalmente determinado, a partir do conhecimento da curvatura K para todo $\sigma \in T_p M$. Temos ainda o seguinte lema:

Lema 1.1.14. ([4]) *Sejam \overline{M} uma variedade Riemanniana e $p \in \overline{M}$. Definamos uma aplicação trilinear $R' : T_p\overline{M} \times T_p\overline{M} \times T_p\overline{M} \longrightarrow T_p\overline{M}$ por*

$$\mathbb{I}_{\overline{M}}(R'(X, Y)Z, W) = \mathbb{I}_{\overline{M}}(X, W)\mathbb{I}_{\overline{M}}(Y, Z) - \mathbb{I}_{\overline{M}}(X, Z)\mathbb{I}_{\overline{M}}(Y, W),$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_p\overline{M}$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se, $\overline{R} = K_0R'$, onde R é a curvatura de \overline{M} .

1.2 Imersões Isométricas

Sejam M^n e \overline{M}^{n+m} variedades Riemannianas. Uma imersão de M em \overline{M} é uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow \overline{M}$ tal que $d(f)_p$ é injetiva para todo $p \in M$. Nesta seção, estudaremos as relações entre as geometrias de M e \overline{M} , além de apresentar conceitos e equações importantes para o restante do trabalho. Destacaremos também um caso particular de imersões isométricas, as hipersuperfícies.

Sendo $f : M \longrightarrow \overline{M}$ uma imersão, a métrica de \overline{M} induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M dada por

$$\mathbb{I}_M(u, v)_p := \mathbb{I}_{\overline{M}}(d(f)_p(u), d(f)_p(v))_{f(p)},$$

onde $u, v \in T_pM$ e $p \in M$. Dessa forma, diremos que f é uma imersão isométrica. Dado $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p , tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de \overline{M} . Isto significa que para $\overline{U} \subset \overline{M}$ vizinhança de $f(p)$, existe um difeomorfismo tal que $f(U) \cap \overline{M}$ é aplicado difeomorficamente em $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Para cada $p \in M$, o “produto interno” em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Indicaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana em \overline{M} . Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vetores locais e $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ suas extensões locais a \overline{M} . Podemos definir

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$$

onde T indica a componente tangencial de $\bar{\nabla}_X \bar{Y}$ em M . Não é difícil ver que, a definição da conexão Riemanniana ∇ em M relativa à métrica induzida de \bar{M} por f não depende das extensões \bar{X} e \bar{Y} (ver [3]). E assim, podemos definir

$$B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$$

dada por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_X \bar{Y} - \nabla_X Y.$$

Em [3], podemos ver que a definição de B não depende das extensões \bar{X}, \bar{Y} e que esta aplicação é bilinear e simétrica. Além disso, pela bilinearidade temos ver que $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p), Y(p)$. Assim, conseguimos introduzir a segunda forma fundamental.

Definição 1.2.1. ([3]) *Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, definimos a aplicação*

$$\mathbb{I}_\eta(x, y) = \mathbb{I}_{\bar{M}}(B(x, y), \eta) \quad x, y \in T_p M$$

chamada a segunda forma fundamental f em p segundo o vetor normal η .

Associada à aplicação bilinear \mathbb{I}_η , a segunda forma fundamental, temos uma aplicação auto-adjunta $S_\eta : T_M \rightarrow T_p M$ dada por

$$\mathbb{I}_\eta(x, y) = \mathbb{I}_{\bar{M}}(S_\eta(x), y).$$

A proposição seguinte nos dá uma expressão da aplicação adjunta associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 1.2.2. ([3]) *Seja $p \in M, x \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Seja $y \in T_p M$ e X, Y extensões locais de x, y , respectivamente, e tangentes a M . Então $g_{\bar{M}}(N, Y) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\bar{M}}(S_\eta(x), y) &= \mathbb{I}_{\bar{M}}(B(X, Y)(p), N) \\ &= \mathbb{I}_{\bar{M}}(\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N)(p) \\ &= \mathbb{I}_{\bar{M}}(\bar{\nabla}_X Y, N)(p) \\ &= -\mathbb{I}_{\bar{M}}(Y, \bar{\nabla}_X N)(p) \\ &= \mathbb{I}_{\bar{M}}(-\bar{\nabla}_x N, y), \end{aligned}$$

para todo $y \in T_p M$. □

A segunda forma fundamental nos mostra uma relação entre as geometrias de M e \overline{M} , pelas clássicas equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

Proposição 1.2.3. (*[3]*) **(Equação de Gauss)** *Sejam $p \in M$ e $X, Y, Z, T \in T_p M$ vale que*

$$\mathbb{I}_{\overline{M}}(\overline{R}(X, Y)Z, T) = \mathbb{I}_{\overline{M}}(R(X, Y)Z, T) - \mathbb{I}_{\overline{M}}(B(X, T), B(Y, Z)) + \mathbb{I}_{\overline{M}}(B(X, Z), B(Y, T)).$$

A demonstração desta proposição encontra-se em [3]. E como consequência direta temos o seguinte corolário:

Corolário 1.2.4. (*[3]*) *Se $p \in M$ e $X, Y \in T_p M$ são vetores ortonormais, vale que*

$$\overline{K}(X, Y) = K(X, Y) - \mathbb{I}_{\overline{M}}(B(X, X), B(Y, Y)) + \mathbb{I}_{\overline{M}}(B(X, Y), B(Y, X)).$$

Demonstração. Basta ver que $K(X, Y) = \mathbb{I}_{\overline{M}}(R(X, Y)Y, X)$ para X, Y vetores ortonormais e aplicar a equação de Gauss. □

Para η pertencente ao conjunto dos campos diferenciáveis normais $\mathfrak{X}(M)^\perp$. A conexão normal da imersão, ∇^\perp , será dada pela componente normal $\overline{\nabla}_X \eta$.

Proposição 1.2.5. (*[3]*) *Para $X, Y, Z \in T_p M$ e $\zeta, \eta \in (T_p M)^\perp$ vale que:*

i) (Equação de Codazzi)

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\overline{M}}(\overline{R}(X, Y)Z, \eta) &= \mathbb{I}_{\overline{M}}(\nabla_Y B(X, Z), \eta) - \mathbb{I}_{\overline{M}}(B(\nabla_Y X, Z), \eta) - \mathbb{I}_{\overline{M}}(B(X, \nabla_Y Z), \eta) \\ &\quad - [\mathbb{I}_{\overline{M}}(\nabla_X B(Y, Z), \eta) - \mathbb{I}_{\overline{M}}(B(\nabla_X Y, Z), \eta) - \mathbb{I}_{\overline{M}}(B(Y, \nabla_X Z), \eta)]. \end{aligned}$$

ii) (Equação de Ricci)

$$\mathbb{I}_{\overline{M}}(\overline{R}(X, Y)\eta, \zeta) - \mathbb{I}_{\overline{M}}(R^\perp(X, Y)\eta, \zeta) = \mathbb{I}_{\overline{M}}([S_\eta, S_\zeta]X, Y),$$

onde $[S_\eta, S_\zeta]$ indica o operador $S_\eta \circ S_\zeta - S_\zeta \circ S_\eta$.

Agora estudaremos um caso particular de imersões isométricas, as imersões de codimensão 1.

Definição 1.2.6. *Uma imersão $f : M^n \mapsto M^{n+1}$ é chamada hipersuperfície.*

Observe que uma hipersuperfície pode ter auto-intersecções e que a escolha de um vetor normal só permite duas escolhas. Se M e \overline{M} forem orientáveis, ao fixarmos uma orientação para ambas as variedades então temos uma única escolha para o vetor normal.

Sejam $p \in M$, $\eta \in (T_p M)^\perp$, $|\eta| = 1$ e $f(M) \subset \overline{M}$ uma hipersuperfície. Como $S_\eta : T_p M \mapsto T_p M$ é auto-adjunta, existe uma base ortonormal de $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ formada por autovetores com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, isto é, $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$. Sendo M e \overline{M} orientáveis e orientadas, η fica determinado de forma que $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ é uma orientação para M , então $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ é uma base na orientação de \overline{M} . Assim, denominamos e_i por direção principal e λ_i curvatura principal. Definimos

$$\det(S_\eta) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

como sendo a curvatura de Gauss-Kronecker de f , e

$$H = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n),$$

a curvatura média de f . No caso de hipersuperfície, a equação de Gauss se escreve

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

Exemplo 1. *Uma interpretação geométrica interessante de S_η , acontece no caso $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$. Seja N uma extensão local de η , unitária e normal a M . Seja \mathbb{S}^n a esfera unitária de \mathbb{R}^{n+1} e definamos a aplicação normal de Gauss $g : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, trasladando a origem do campo N para a origem do \mathbb{R}^{n+1} e fazendo $g(q)$ o ponto final do trasladado de $N(q)$. Como $T_q M$ e $T_{g(q)} \mathbb{S}^n$ são paralelos, podemos identificá-los, e $d(g)_q : T_q M \rightarrow T_q M$ é dada por*

$$d(g)_q(v) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))_{t=0} = \overline{\nabla}_v N = (\overline{\nabla}_v N)^T = -S_\eta(v),$$

onde $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma curva com $c(0) = q$, $c'(0) = v$. Segue que $-S_\eta$ é a derivada da aplicação normal de Gauss.

Exemplo 2. (*[3], Curvatura de \mathbb{S}^n*) *A curvatura seccional da esfera unitária \mathbb{S}^n de \mathbb{R}^{n+1} é constante e igual a 1. De fato, primeiro orientemos \mathbb{S}^n pelo campo normal unitário*

$$N(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| = 1.$$

A aplicação de Gauss então é dada por $-id$, onde id é a identidade de \mathbb{S}^n . Segue que a aplicação adjunta S_η associada a $\mathbb{I}\mathbb{I}_N$, tem todos seus valores próprios iguais a 1, uma vez que

$$-S_\eta = d(-id).$$

Isto significa que para todo $p \in \mathbb{S}^n$, todo $v \in T_p\mathbb{S}^n$ é um vetor próprio de S_η . Pela equação de Gauss, concluímos que qualquer curvatura seccional de \mathbb{S}^n é igual a 1.

1.3 Superfícies no espaço tridimensional

Nesta seção, introduziremos algumas equações para espaços com curvatura seccional constante. No caso de uma superfície $(\Sigma, \langle, \rangle)$, denotamos por $E = g_{11}$, $F = g_{12} = g_{21}$ e $G = g_{22}$, então podemos escrever a métrica de Σ como

$$\mathbb{I}\mathbf{x}_{(u,v)} = \langle, \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

onde $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ é um sistema de coordenadas locais e $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$ uma base coordenada para $T_p\Sigma$. Ainda neste contexto, se ∇ é a conexão de Levi-Cevita de $\mathbb{I}\mathbf{x}_{(u,v)}$, pela equação (1.3) temos que

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} &= \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v}, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} &= \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v}, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v} &= \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial v}, \end{aligned}$$

são os símbolos de Christoffel associados a métrica $\mathbb{I}\mathbf{x}_{(u,v)}$. Para determinar os símbolos de Christoffel, tomamos o produto interno das três primeiras relações com $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$ e obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = \frac{1}{2} G_u \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = \frac{1}{2} G_v \end{cases}.$$

Por estes sistemas, temos que

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(GE_u - 2FF_u + FE_v), \quad (1.4)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2(EG - F^2)}(EE_v - 2EF_u + FE_u), \quad (1.5)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2(EG - F^2)}(GG_u - 2GF_v + FG_v), \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(EG_v - 2FF_v + FG_u), \quad (1.7)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(GE_v - FG_u), \quad (1.8)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(EG_u - FE_v). \quad (1.9)$$

Uma vez que, para uma superfície Σ , isto é, uma variedade Riemanniana bidimensional, o seu espaço tangente, $T_p\Sigma$, tem dimensão 2 para todo $p \in \Sigma$. Além disso, como dito anteriormente, a curvatura seccional não depende da escolha dos vetores normais e linearmente independentes pertencente ao espaço tangente. Nessas condições, temos que

$$K(p) = K(\sigma) = K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle,$$

ou seja, a curvatura é uma função em Σ . Neste caso diremos que K é a **curvatura intrínseca**

e denotaremos por K_{int} . Temos ainda que,

$$\begin{aligned}
K_{int} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) &= \frac{\left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v} \right\|^2} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \left\langle (\Gamma_{22}^1)_u \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{22}^1 \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{EG - F^2} \left\langle (\Gamma_{22}^2)_u \frac{\partial}{\partial v} + \Gamma_{22}^2 \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{EG - F^2} \left\langle (\Gamma_{12}^1)_v \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{EG - F^2} \left\langle (\Gamma_{12}^2)_v \frac{\partial}{\partial v} + \Gamma_{12}^2 \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\
&= \frac{1}{EG - F^2} [(\Gamma_{22}^1)_u E + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 F + (\Gamma_{22}^2)_u F + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^2 F] \\
&\quad - \frac{1}{EG - F^2} [(\Gamma_{12}^1)_v E + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 F + (\Gamma_{12}^2)_v F + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2 F] \\
&= \frac{E}{EG - F^2} [(\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^1)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1] \\
&\quad + \frac{F}{EG - F^2} [\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_v - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
K_{int} &= \frac{E}{EG - F^2} [(\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^1)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1] \quad (1.10) \\
&\quad + \frac{F}{EG - F^2} [\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_v - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2].
\end{aligned}$$

Equivalentemente, uma vez que, $K \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = K \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right)$, temos

$$\begin{aligned}
K_{int} &= \frac{F}{EG - F^2} [(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1] \quad (1.11) \\
&\quad + \frac{G}{EG - F^2} [\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2].
\end{aligned}$$

Consideremos agora que Σ é uma hipersuperfície, ou seja, uma superfície imersa em uma variedade Riemanniana tridimensional \bar{M}^3 . Como antes, se Σ e \bar{M} são orientáveis e orientadas, a aplicação auto adjunta é dada por $S_\eta(e_1) = \lambda_1 e_1$ e $S_\eta(e_2) = \lambda_2 e_2$. Logo, a curvatura de Gauss-Kronecker é dada por $\lambda_1 \lambda_2$. A este produto, chamaremos de curvatura extrínseca de Σ em \bar{M} e denotaremos por K_{ext} .

Assim, podemos escrever

$$K_{int} = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle, \quad (1.12)$$

para e_1, e_2 direções principais, e

$$K_{ext} = \lambda_1 \lambda_2. \quad (1.13)$$

Além disso, se \bar{M} tiver curvatura seccional constante K_0 , pela equação de Gauss (1.2.4) obtemos

$$K_{int} - K_0 = K_{ext}. \quad (1.14)$$

Agora, vamos calcular a equação de Codazzi para o caso de um hipersuperfície em que a variedade ambiente tem curvatura constante. Se a curvatura seccional de \bar{M} é constante, segue do Lema 1.1.14 que

$$\mathbb{I}_{\bar{M}}(\bar{R}(X, Y)Z, \eta) = 0. \quad (1.15)$$

No caso das hipersuperfícies, η será o único campo vetorial unitário normal, logo $\bar{\nabla}\eta$ é tangente a M imersa em \bar{M} , portanto $\bar{\nabla}^\perp\eta = 0$. Segue que

$$X\mathbb{I}_{\bar{M}}(B(X, Y), \eta) = \mathbb{I}_{\bar{M}}(\bar{\nabla}_X B(X, Y), \eta) + \mathbb{I}_{\bar{M}}(B(X, Y), \bar{\nabla}_X \eta) = \mathbb{I}_{\bar{M}}(\bar{\nabla}_X B(X, Y), \eta). \quad (1.16)$$

Substituindo (1.15) e (1.16) na equação de Codazzi (Proposição 1.2.5 *i*) temos

$$\begin{aligned} 0 &= Y\mathbb{I}_{\bar{M}}(B(X, Z), \eta) - \mathbb{I}_{\bar{M}}(B(\nabla_Y X, Z), \eta) - \mathbb{I}_{\bar{M}}(B(X, \nabla_Y Z), \eta) \\ &\quad - [X\mathbb{I}_{\bar{M}}(B(Y, Z), \eta) - \mathbb{I}_{\bar{M}}(B(\nabla_X Y, Z), \eta) - \mathbb{I}_{\bar{M}}(B(Y, \nabla_X Z), \eta)] \\ &= Y\mathbb{I}_{\bar{M}}(S_\eta(X), Z) - \mathbb{I}_{\bar{M}}(S_\eta(\nabla_Y X), Z) - \mathbb{I}_{\bar{M}}(S_\eta(X), \nabla_Y Z) \\ &\quad - [X\mathbb{I}_{\bar{M}}(S_\eta(Y), Z) - \mathbb{I}_{\bar{M}}(S_\eta(\nabla_X Y), Z) - \mathbb{I}_{\bar{M}}(S_\eta(Y), \nabla_X Z)] \\ &= \mathbb{I}_{\bar{M}}(\nabla_Y S_\eta(X), Z) - \mathbb{I}_{\bar{M}}(S_\eta(\nabla_Y X), Z) \\ &\quad - [\mathbb{I}_{\bar{M}}(\nabla_X S_\eta(Y), Z) - \mathbb{I}_{\bar{M}}(S_\eta(\nabla_X Y), Z)]. \end{aligned}$$

Uma vez S_η é auto adjunta, podemos escrever a equação de Codazzi para uma imersão de codimensão 1, em que a variedade ambiente tem curvatura seccional constante como

$$S_\eta([X, Y]) = \nabla_X S_\eta(Y) - \nabla_Y S_\eta(X). \quad (1.17)$$

Notemos que esta equação, é um caso mais geral das equações de compatibilidade clássicas da geometria de superfícies em \mathbb{R}^3 (ver [2]). De fato, definamos

$$\mathbb{I}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = e, \quad \mathbb{I}\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = f \quad \text{e} \quad \mathbb{I}\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = g.$$

Por (1.17) temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{I}_{\overline{M}} \left(S_\eta \left(\left[\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right] \right), \frac{\partial}{\partial u} \right) \\
&= \mathbb{I}_{\overline{M}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} S_\eta \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} S_\eta \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \frac{\partial}{\partial u} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \mathbb{I}_{\overline{M}} \left(S_\eta \left(\frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial u} \right) - \mathbb{I}_{\overline{M}} \left(S_\eta \left(\frac{\partial}{\partial v} \right), \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} \right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial v} \mathbb{I}_{\overline{M}} \left(S_\eta \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \frac{\partial}{\partial u} \right) + \mathbb{I}_{\overline{M}} \left(S_\eta \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} \right) \\
&= f_u - \mathbb{I}_{\overline{M}} \left(S_\eta \left(\frac{\partial}{\partial v} \right), \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right) \\
&\quad - e_v + \mathbb{I}_{\overline{M}} \left(S_\eta \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right) \\
&= f_u - e_v + e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{I}_{\overline{M}} \left(S_\eta \left(\left[\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right] \right), \frac{\partial}{\partial v} \right) \\
&= \mathbb{I}_{\overline{M}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} S_\eta \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} S_\eta \left(\frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial v} \right) \\
&= g_u - f_v + e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.
\end{aligned}$$

Que são exatamente as equações de Codazzi-Mainardi.

1.4 Parâmetros Assintóticos

De forma geral, iniciamos o estudo de uma variedade diferenciável determinando um conjunto de coordenadas, permitindo assim, identificar qualquer ponto sobre esta variedade. Como uma parametrização não é única, escolhemos sempre a que é mais conveniente para este estudo. Neste texto, estudaremos os **Parâmetros Assintóticos**.

Definição 1.4.1. ([4]) *Seja uma curva regular $c : [a, b] \rightarrow M$, onde M é uma hipersuperfície de uma variedade Riemanniana \overline{M} . Definimos a curvatura normal em u por*

$$k_n(u) = -\frac{\mathbb{I}_{\overline{M}}(c'(u), \nabla_{c'(u)} N)}{\mathbb{I}_{\overline{M}}(c'(u), c'(u))},$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de \overline{M} e N é o campo de vetorial normal de M em $c(u)$.

Definição 1.4.2. ([4]) *Uma direção assintótica numa variedade Riemanniana M é um vetor $X \in T_p M$ tal que $\mathbb{III}(X, X) = 0$.*

Definição 1.4.3. ([4]) Uma curva c em M é dita assintótica se todos seus vetores tangentes são direções assintóticas.

Pela definição acima, podemos notar que uma curva em M é assintótica se, e somente se, a curvatura normal é nula em todo ponto.

Definição 1.4.4. ([4]) As curvas coordenadas de uma parametrização constituem uma rede de Tschebyscheff se, os comprimentos dos lados opostos de qualquer quadrilátero formado por elas são iguais.

Proposição 1.4.5. ([4]) Uma condição necessária e suficiente para que as curvas coordenadas de uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ seja uma rede de Tschebyscheff é que

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Demonstração. Suponhamos que as curvas coordenadas de uma parametrização $x(u, v)$ constituam uma rede de Tschebyscheff, logo para $(u_0, v_0), (u, v) \in U$ temos

$$\int_{u_0}^u \left\| \frac{d}{dv} x(u, v) \right\| du = \int_{u_0}^u \left\| \frac{d}{dv} x(u, v_0) \right\| du.$$

Derivando com relação a u

$$\left\| \frac{d}{dv} x(u, v) \right\| = \left\| \frac{d}{dv} x(u, v_0) \right\|.$$

Logo, $\left\| \frac{d}{dv} x(u, v) \right\|$ não depende de v e

$$\frac{\partial}{\partial v} E = \frac{\partial}{\partial v} \left(\left\| \frac{d}{dv} x(u, v) \right\|^2 \right) = 0.$$

Analogamente, obtemos que $\frac{\partial}{\partial u} G = 0$. A recíproca segue do mesmo raciocínio. \square

Sabemos que dado dois campos vetoriais linearmente independente num aberto de uma superfície, é possível obter uma parametrização local tal que as curvas coordenadas são as curvas integrais determinadas por estes campos. Mais que isso, em [4] podemos encontrar o seguinte proposição:

Proposição 1.4.6. (*[4]*) *Seja $p \in \Sigma$ um ponto hiperbólico. Então é possível parametrizar uma vizinhança de p , de tal modo que as curvas coordenadas desta parametrização sejam as curvas assintóticas de Σ .*

Dado a existência dos parâmetros assintóticos, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.4.7. (*[9]*) *Seja \bar{M} uma variedade Riemanniana 3-dimensional de curvatura constante. Seja Σ uma superfície com curvatura extrínseca constante negativa imersa em \bar{M} . Então existem coordenadas locais (u, v) e uma função real $\omega(u, v) \in (0, \pi)$ tal que*

$$\text{II} = du^2 + 2 \cos \omega \, dudv + dv^2, \quad (1.18)$$

$$\text{III} = 2 \sqrt{-K_{ext}} \sin \omega \, dudv. \quad (1.19)$$

Mais ainda,

- Se Σ é simplesmente conexa existem funções $u, v : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$ globalmente definidas tais que (u, v) são coordenadas locais nas condições acima numa vizinhança de cada ponto.
- Se Σ é simplesmente conexo e II é completa então a aplicação anterior $(u, v) : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo global.

Demonstração. Pelo Proposição 1.4.6, consideremos coordenadas locais tais que

$$\text{II} = E \, du^2 + 2F \, dudv + G \, dv^2$$

$$\text{III} = 2f \, dudv, \quad f > 0.$$

Para $D = EG - F^2$, temos $K_{ext} = -\frac{f^2}{D}$ uma vez que K_{ext} é uma constante negativa. Segue que,

$$0 = -2 \frac{f f_u}{D} + \frac{f^2 D_u}{D^2}.$$

Ao multiplicarmos os membros da equação acima por $\frac{D}{2f^2}$, chegamos à

$$0 = -\frac{f_u}{f} + \frac{D_u}{2D}. \quad (1.20)$$

Das equações dos símbolos de Christoffel, (1.4)-(1.7), temos que

$$\frac{D_u}{2D} = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2, \quad (1.21)$$

onde $D = EG - F^2$. Além disso, pelas equações de Codazzi, (1.17), temos que

$$\frac{f_u}{f} = \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2. \quad (1.22)$$

Substituindo (1.21), (1.22) em (1.20) obtemos $2\Gamma_{12}^2 = 0$. Do mesmo modo, temos que

$$\frac{D_v}{2D} = \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1$$

e

$$\frac{f_v}{f} = \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2.$$

E assim,

$$0 = -\frac{f_v}{f} + \frac{D_v}{2D} = 2\Gamma_{12}^1.$$

Portanto, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} = 0$ e assim, $E_v = G_u = 0$. Pela mudança de coordenadas

$$\tilde{u} = \int \sqrt{E(u)} du, \quad \tilde{v} = \int \sqrt{G(v)} dv,$$

temos que

$$\begin{aligned} \text{II} &= d\tilde{u}^2 + 2F d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2, \\ \text{III} &= 2f d\tilde{u}d\tilde{v}. \end{aligned}$$

Como $K_{ext} = -\frac{f^2}{1 - F^2}$, podemos reescrevê-la como $F^2 + \left(\frac{f}{\sqrt{-K_{ext}}}\right)^2 = 1$. Logo, existe função ω tal que

$$\begin{aligned} \text{II} &= d\tilde{u}^2 + 2\cos\omega d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2, \\ \text{III} &= 2\sin\omega d\tilde{u}d\tilde{v}, \end{aligned}$$

com $0 < \omega < \pi$, desde que $1 - F^2 > 0$. Sendo Σ simplesmente conexa, então $(\tilde{u}, \tilde{v}) : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo local. Se considerarmos a métrica $\text{IIII} = d\tilde{u}^2 - 2\cos\omega d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2$ então $\text{II} + \text{IIII} = 2(d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2)$ que é completa desde que II é completa. Portanto $(\tilde{u}, \tilde{v}) : (\Sigma, du^2 + dv^2) \mapsto \mathbb{R}^2$ é uma isometria e deve ser um difeomorfismo global. \square

A métrica IIII , dada no Teorema 1.4.7 é conhecida como terceira forma fundamental, que é justamente a primeira forma fundamental de vetor normal unitário associado a imersão. Além disso, vimos que $E_v = G_u = 0$, o que pela Proposição 1.4.5, a parametrização forma uma rede de Tschebyscheff em que as curvas coordenadas estão parametrizadas por comprimento de arco.

Lema 1.4.8. ([4]) Seja Σ uma superfície e seja $\mathbf{x}(a, b) \times (c, d) \mapsto \Sigma$ uma rede de Tschebyscheff.

Defina $\omega : (a, b) \times (c, d) \mapsto \mathbb{R}$ da seguinte forma: $\omega(u_0, v_0)$ é o único número com

$0 < \omega(u_0, v_0) < \pi$ tal que $\omega(u_0, v_0)$ é o ângulo entre

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v_0) \right|_{u=u_0} \text{ e } \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v) \right|_{v=v_0}.$$

Então ω satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = (-K_{int} \operatorname{sen} \omega). \quad (1.23)$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.4.7 temos, $E = G = 1$ e $F = \cos \omega$. Logo,

$$D = \sqrt{EG - F^2} = \operatorname{sen} \omega.$$

Substituindo nas equações de (1.4) a (1.9), temos que

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\omega_u \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}; \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{\omega_u}{\operatorname{sen} \omega}; \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0; \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{\omega_v}{\operatorname{sen} \omega}; \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\omega_v \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}.$$

Da equação (1.10), temos

$$\begin{aligned} K_{int} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \omega} \left[\left(-\frac{\omega_v}{\operatorname{sen} \omega} \right)_u + \left(-\frac{\omega_v}{\operatorname{sen} \omega} \right) \left(\frac{\omega_u \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} \right) \right] \\ &+ \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen}^2 \omega} \left[\left(\frac{\omega_v \cos \omega}{\operatorname{sen}^2 \omega} \right)_u + \left(-\frac{\omega_v}{\operatorname{sen} \omega} \right) \left(-\frac{\omega_u}{\operatorname{sen} \omega} \right) \right] \\ &= \frac{-1 + \cos^2 \omega}{\operatorname{sen}^2 \omega} \left[\frac{\omega_{uv}}{\operatorname{sen} \omega} \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = (-K_{int} \operatorname{sen} \omega)$$

como queríamos. □

1.5 Grupos de Lie

Nesta seção, abordaremos as definições e resultados básicos sobre Grupos de Lie. Veremos como a esfera 3-dimensional \mathbb{S}^3 pode ser estudada com uma estrutura de grupo. Esta seção tem como referência [1], [3] e [4].

Definição 1.5.1. ([3]) Um grupo G é dito um **grupo de Lie** se tem uma estrutura de variedade diferenciável tal que a aplicação produto $p : (g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ é diferenciável. Denotaremos por \langle, \rangle a métrica Riemanniana de G .

Definição 1.5.2. A aplicação definida por $L_g : h \in G \mapsto gh \in G$ é chamada **translação à esquerda**. Do mesmo modo define-se a **translação à direita** por $R_g : h \in G \mapsto hg \in G$.

Exemplo 3. \mathbb{R}^n com a operação de adição é um grupo de Lie.

Exemplo 4. O conjunto $S^1 = \{x \in \mathbb{C}; \|x\| = 1\}$ com o produto dos complexos é um grupo de Lie.

Dado um grupo de Lie G , vale ressaltar que a aplicação **inversa** $i_G : g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ é diferenciável. De fato,

Proposição 1.5.3. ([1]) Seja G um grupo de Lie e $i_G : g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ a aplicação inversa definida em G . As aplicações L_g , R_g e i_G são difeomorfismos. E a diferencial de i_G é dada por

$$d(i_G)_g = -d(L_{g^{-1}})_1 \circ d(R_{g^{-1}})_g.$$

Em particular, $d(i_G)_1 = -id$.

Demonstração. Uma vez que $L_g \circ L_{g^{-1}} = R_g \circ R_{g^{-1}} = i_G \circ i_G = id$, é suficiente mostrar que as translações são diferenciáveis. De fato, pela estrutura diferenciável de G temos que a aplicação $f : h \in G \mapsto (g, h) \in G \times G$ é diferenciável e assim, composição $p \circ f = L_g$ é diferenciável, do mesmo modo, concluímos que R_g é diferenciável. Para concluir a demonstração, basta ver que $p(g, i_G(g)) = 1$ e $d(L_g)_h$ é sobrejetora. Pelo teorema da função implícita i_G é difeomorfismo e segue que

$$d(i_G)_g = -d(L_{g^{-1}})_1 \circ d(R_{g^{-1}})_g.$$

□

Estudaremos agora a álgebra de um grupo de Lie. Para isto, começaremos pela seguinte definição:

Definição 1.5.4. ([1]) Um espaço vetorial \mathfrak{g} sobre um corpo com uma operação binária $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ (colchete de Lie) é dito uma **álgebra de Lie** se satisfaz os seguintes axiomas:

i) *Bilinearidade:*

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z], \quad [z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y],$$

para todos escalares a, b pertencentes ao corpo e todos elementos x, y, z em \mathfrak{g} .

ii) *Anticomutatividade:*

$$[x, y] = -[y, x]$$

para todos elementos x, y em \mathfrak{g} .

iii) *A identidade de Jacobi:*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$$

para todos x, y, z em \mathfrak{g} .

Seja \mathfrak{h} subespaço fechado para o colchete de \mathfrak{g} , a este subespaço diremos **subálgebra de Lie**.

Exemplo 5. O conjunto dos campos de vetores associados a uma variedade diferenciável M , $\mathfrak{X}(M)$, é uma álgebra de Lie.

Exemplo 6. O espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$ com o colchete $[A, B] = AB - BA$ é uma álgebra de Lie.

Uma vez definida álgebra de Lie, definiremos os campos invariantes à esquerda e à direita, veremos que a álgebra de um grupo de Lie é justamente o conjunto destes campos.

Definição 1.5.5. ([3]) Dizemos que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(G)$, onde G é um grupo de Lie, é um **campo invariante à esquerda** se $d(L_g)_h X(h) = X(L_g(h))$, para todo $g \in G$. Analogamente, diremos que $Y \in \mathfrak{X}(G)$ é um **campo invariante à direita** se $d(R_g)_h Y(h) = Y(R_g(h))$, para todo $g \in G$.

Definição 1.5.6. ([3]) Dizemos que uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no grupo G é **invariante à direita**, se para todo $u, v \in T_g G$

$$\langle u, v \rangle_h = \langle d(R_g)_h(u), d(R_g)_h(v) \rangle_{R_g(h)},$$

para todo $g, h \in G$. Analogamente, a métrica será **invariante à esquerda** se

$$\langle u, v \rangle_h = \langle d(L_g)_h(u), d(L_g)_h(v) \rangle_{L_g(h)}.$$

E se for invariante à esquerda e à direita diremos que a métrica é **bi-invariante**.

Proposição 1.5.7. ([3]) *Seja G um grupo de Lie. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ campos invariantes à esquerda. Então o colchete $[X, Y]$ é um campo invariante à esquerda.*

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ campos vetoriais invariantes à esquerda e \bar{f} uma função diferenciável em M temos que:

$$\begin{aligned} d(L_g)_1[X, Y]\bar{f} &= [X, Y](\bar{f} \circ L_g) \\ &= (XY - YX)(\bar{f} \circ L_g) \\ &= (XY)(\bar{f} \circ L_g) - (YX)(\bar{f} \circ L_g) \\ &= Xd(L_g)Y\bar{f} - Yd(L_g)X\bar{f} \\ &= (XY - YX)\bar{f} \\ &= [X, Y]\bar{f}, \end{aligned}$$

uma vez que $d(L_g)Xf = X(f \circ L_g)$ e X, Y são campos vetoriais invariantes à esquerda. \square

Proposição 1.5.8. ([3]) *Seja G um grupo de Lie. Sejam $U, V, X \in \mathfrak{X}(G)$ campos vetoriais invariantes à esquerda. Se a métrica \langle, \rangle no grupo G é bi-invariante então*

$$\langle [U, X], V \rangle = -\langle U, [V, X] \rangle. \quad (1.24)$$

A demonstração da Proposição 1.5.8 encontra-se em [3], pg. 45. O seguinte resultado, relaciona o colchete de Lie com a conexão Riemanniana da métrica.

Teorema 1.5.9. ([4]) *Seja G um grupo de Lie com a métrica bi-invariante \langle, \rangle . Se X, Y , são campos de vetores em G então*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

Demonstração. Para X, Y, Z campos vetoriais a equação de Koszul (1.2) é dada por

$$2\langle Z, \nabla_Y X \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle.$$

Como a métrica é bi-invariante, temos que

$$\langle X(g), Y(g) \rangle = \langle d(L_g)_1 X(1), d(L_g)_1 Y(1) \rangle_1 = \langle X(1), Y(1) \rangle_1,$$

para todo $g \in G$. Logo,

$$X \langle Y, Z \rangle = Y \langle Z, X \rangle = Z \langle X, Y \rangle = 0.$$

Da equação de Koszul temos,

$$2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle = - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle.$$

Se mudarmos Z por Y e Y por X , obtemos

$$2 \langle Y, \nabla_X X \rangle = - \langle [X, Y], Y \rangle - \langle [X, Y], X \rangle - \langle [X, X], Y \rangle.$$

Temos,

$$[X, X] = 0, \quad [X, Y] = -[Y, X],$$

e da Proposição 1.5.8 segue que

$$\langle X, [Y, Y] \rangle = - \langle [X, Y], Y \rangle.$$

Então

$$2 \langle Y, \nabla_X X \rangle = 0,$$

portanto $\nabla_X X = 0$. Logo,

$$0 = \nabla_{X+Y} X + Y = \nabla_X X + \nabla_X Y + \nabla_Y Y + \nabla_Y X = \nabla_X Y + \nabla_Y X.$$

Uma vez que $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, temos

$$0 = \nabla_X Y + \nabla_Y X = \nabla_X Y + \nabla_X Y - [X, Y].$$

De onde, concluímos que

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

□

Sendo 1 o elemento neutro em G , notemos que os campos invariantes à esquerda ficam determinados pelos seus valores em 1. De fato, basta notar que se X é um campo

invariante à esquerda, $X(g) = d(L_g)_1 X(1)$, para todo $g \in G$. Analogamente, vemos que cada elemento de $T_1 G$ determina um campo invariante à direita pois $Y(g) = d(R_g)_1 Y(1)$. Desta observação, podemos notar que $T_1 G$ é isomorfo ao conjunto dos campos invariantes à esquerda, denotado por INV^e . De maneira análoga, $T_1 G$ é isomorfo ao conjunto dos campos invariantes à direita, denotado por INV^d . Neste contexto, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.5.10. *Seja G um grupo de Lie, o conjunto dos campos invariantes à esquerda, INV^e , formam uma álgebra de Lie.*

Demonstração. Como o conjunto dos campos vetoriais $\mathfrak{X}(G)$ é uma álgebra de Lie sobre \mathbb{R} , é suficiente checar que, para todo X, Y campos invariantes à esquerda e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha X + Y$ é um campo vetorial invariante à esquerda, pois

$$(\alpha X + Y)(g) = \alpha X(g) + Y(g) = \alpha d(L_g)_1 X(1) + d(L_g)_1 Y(1) = d(L_g)_1 (\alpha X + Y)(1),$$

para todo $g \in G$, o que mostra que INV^e é um subespaço vetorial. Agora pela Proposição 1.5.7, temos

$$d(L_g)_1 [X, Y] \bar{f} = [X, Y] \bar{f},$$

o que mostra que o colchete é fechado para os campos invariantes à esquerda. Logo INV^e é uma álgebra de Lie. \square

Assim, esta proposição motiva a seguinte definição:

Definição 1.5.11. (*[1]*) *Dizemos que a **álgebra de Lie de G** , denotada por \mathfrak{g} , é uma álgebra isomorfa a $T_1 G$ (ou INV^e).*

Proposição 1.5.12. *Sejam G um grupo de Lie, \mathfrak{g} sua álgebra de Lie e $X \in \mathfrak{g}$. Seja a aplicação $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$ com $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(u) = X(\varphi(u))$, determinada pelas trajetórias de X . Então:*

- i) φ está definida para todo $u \in \mathbb{R}$ e $\varphi(u + v) = \varphi(u) \cdot \varphi(v)$;*
- ii) Se G tem uma métrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então as geodésicas de G que partem de 1 satisfazem o item anterior.*

Demonstração. Para o primeiro item, consideremos $u_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$, $y = \varphi(u_0)$ e $\bar{\varphi} : u \in (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow L_{y^{-1}}\varphi(u) \in G$. Sendo assim, temos que $\bar{\varphi}(u_0) = L_{y^{-1}}\varphi(u_0) = y^{-1}\varphi(u_0) = y^{-1}y = 1$. Afirmamos que $\bar{\varphi}$ é solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{du}g = X(g) \\ X(u_0) = 1 \end{cases}. \quad (1.25)$$

De fato, como X é um campo vetorial invariante à esquerda, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\bar{\varphi}(u) &= \frac{d}{du}(L_{y^{-1}}\varphi(u)) \\ &= d(L_{y^{-1}})_{\varphi(u)} \frac{d}{du}\varphi(u) \\ &= d(L_{y^{-1}})_{\varphi(u)} X(\varphi(u)) \\ &= X(L_{y^{-1}}\varphi(u)) \\ &= X(y^{-1}\varphi(u)) \\ &= X(\bar{\varphi}(u)). \end{aligned}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade que $u_0 > 0$. E definamos

$\psi : u \in (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon) \longmapsto \varphi(u - u_0) \in G$, a aplicação ψ é solução do problema (1.25). Com efeito,

$$\frac{d}{du}\psi = \frac{d}{du}\varphi(u - u_0) = X(\varphi(u - u_0)) = X(\psi(u))$$

e

$$\psi(u_0) = \varphi(u_0 - u_0) = \varphi(0) = 1.$$

Segue da unicidade da solução que $\varphi = \bar{\varphi}$ em $(u_0 - \epsilon, \epsilon)$. O que mostra que $\bar{\varphi}$ pode ser estendida em $(\epsilon, u_0 + \epsilon)$, e assim $y_{-1}\varphi(u) = \varphi(u - u_0)$ em $(u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$. Portanto,

$$\varphi(u) = \varphi(u_0)\varphi(u - u_0),$$

pode ser estendida e pela arbitrariedade de u_0 está definida para todo número real. Além disso, para $u = 0$, temos $\varphi(0) = \varphi(u_0)\varphi(0 - u_0)$, isto é, $\varphi(u_0)^{-1} = \varphi(-u_0)$. Logo, para todo $u, v \in \mathbb{R}$ temos

$$\varphi(s + u) = \varphi(u + s) = \varphi(u - (-s)) = \varphi(-s)^{-1}\varphi(u) = \varphi(s)\varphi(u),$$

como queríamos. Para o item *ii*), basta ver que pela demonstração do Teorema 1.5.9

$$\frac{D}{du} \frac{d}{du}\varphi(u) = \nabla_{\frac{d}{du}\varphi(u)} \frac{d}{du}\varphi(u) = 0.$$

Ou seja, φ é geodésica, e pela unicidade, temos que as geodésicas satisfazem o primeiro item. \square

Definição 1.5.13. (*[3]*) A aplicação $\varphi : \mathbb{R} \mapsto G$ definida é chamada **subgrupo 1-parâmetro** de G

Notemos que a aplicação φ definida acima é um homomorfismo de grupos. Para além disto, os demais resultados sobre grupos de Lie que forem necessários neste texto, serão inseridos e discutidos nas seções posteriores.

Capítulo 2

A geometria da esfera tridimensional \mathbb{S}^3

Neste segundo capítulo veremos como a esfera \mathbb{S}^3 , com o produto dos quatérnios \mathbb{H}^* , é um grupo de Lie. Identificaremos este grupo com um subgrupo do grupo das transformações ortogonais do \mathbb{R}^4 , $O(4)$, como também faremos uma identificação de \mathbb{S}^3 com $SU(2)$, o grupo das matrizes unitárias com determinante igual a 1. Apresentaremos como podemos usar um referencial móvel para curvas em \mathbb{S}^3 , o **Triedro de Frenet**. As referências para este capítulo são [1], [4] e [5].

2.1 O grupo de Lie \mathbb{S}^3

Nesta seção estudaremos a álgebra dos quatérnios e veremos como a esfera 3-dimensional pode ser identificada como um subgrupo do grupo multiplicativo associado aos quatérnios.

Seja

$$\mathbb{H} = \{x_1 + x_2i + x_3j + x_4k \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Defina em \mathbb{H} uma operação produto, que distribui com a operação soma, dada por

$$i.j = -j.i = k, j.k = -k.j = i, k.i = -i.k = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Em particular $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ é grupo para a operação produto “.”. Ao considerarmos a aplicação

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto x_1 + x_2i + x_3j + x_4k \in \mathbb{H},$$

podemos identificar o \mathbb{R}^4 como \mathbb{H} e desta forma definir em \mathbb{R}^4 a função produto

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\longmapsto \mathbb{R}^4 \\ (x, y) &\longmapsto z = x.y \end{aligned}$$

onde para $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ temos

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 \\ z_2 &= x_2y_1 + x_1y_2 - x_4y_3 + x_3y_4 \\ z_3 &= x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2 \\ z_4 &= x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1. \end{aligned}$$

Note que p é diferenciável e pela identificação feita com \mathbb{H} , temos que $(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, p)$ é um grupo de Lie. Notemos também, que nos quatérnios, \mathbb{H} , para $x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k \in \mathbb{H}$ o **conjugado** de x , \bar{x} é definido por

$$\bar{x} := x_1 - x_2i - x_3j - x_4k \in \mathbb{H}.$$

A conjugação possui as seguintes propriedades, considerando-se a operação produto e o produto interno em \mathbb{R}^4 :

- $\langle x, x \rangle = x\bar{x}$;
- $\overline{y\bar{x}} = \bar{x}y$.

Segue destas propriedades que

$$\langle xy, xy \rangle = xy.\overline{xy} = x(y\bar{y})\bar{x} = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

para $x, y \in \mathbb{H}$. Em particular, para $x, y \in \mathbb{S}^3$ temos que $\langle xy, xy \rangle = 1$, isto é, o produto p é fechado em \mathbb{S}^3 . Além disso, para $x \in \mathbb{S}^3$, $1 = x\bar{x}$, ou seja, $x^{-1} = \bar{x}$. Portanto \mathbb{S}^3 um grupo de Lie.

Lema 2.1.1. *A conjugação reverte a orientação em \mathbb{S}^3 .*

Demonstração. Temos que $x^{-1} = \bar{x}$ para todo $x \in \mathbb{S}^3$. Assim, a aplicação inversa na esfera 3-dimensional i_G coincide com a conjugação, e pela Proposição 1.5.3 vimos i_G é um difeomorfismo tal que $d(i_G)_1 = -id$. Notemos também que para $X \in \mathfrak{s}^3$ obtemos $\langle -X, -X \rangle = \langle X, X \rangle$, logo a conjugação é uma isometria que reverte a orientação em 1, pois $\det[d(i_G)_1] = \det[-id] = (-1)^3 < 0$. Como \mathbb{S}^3 é conexa segue que a conjugação reverte a orientação em toda parte. \square

2.2 A álgebra de Lie \mathfrak{s}^3

Nesta seção, estudaremos a álgebra de Lie da esfera 3-dimensional e como ela pode ser identificada em \mathbb{R}^4 .

Sendo grupo de Lie, a álgebra de Lie do grupo \mathbb{S}^3 , denotada por \mathfrak{s}^3 , deve ser o espaço tangente no elemento neutro. Pela nossa identificação, temos diretamente que

$$1 \mapsto (1, 0, 0, 0), i \mapsto (0, 1, 0, 0), j \mapsto (0, 0, 1, 0), k \mapsto (0, 0, 0, 1),$$

o que implica naturalmente que $(1, 0, 0, 0)$ é o elemento neutro em \mathbb{S}^3 . Seja c uma curva diferenciável em \mathbb{S}^3 tal que $c(0) = (1, 0, 0, 0)$. Temos

$$\langle c(t), c(t) \rangle = 1,$$

o que implica que

$$\langle c(t), c'(t) \rangle = 0,$$

e para $t = 0$, concluímos que $c'(0)$ pertence ao complemento ortogonal de $c(0)$ gerado por

$$X_1 = (0, 1, 0, 0), X_2 = (0, 0, 1, 0), X_3 = (0, 0, 0, 1),$$

ou seja,

$$\mathfrak{s}^3 = \text{span}\{X_1, X_2, X_3\}.$$

2.3 \mathbb{S}^3 como subgrupo de $O(4)$

Vimos pela identificação feita anteriormente, que a esfera tridimensional é um grupo. No que segue, será conveniente identificar a esfera \mathbb{S}^3 como subconjunto do conjunto das transformações de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^4 que preservam produto interno, denotado por $O(4)$.

Primeiramente, temos que $O(4)$ com a operação definida pela composição de funções é um grupo. De fato, $O(4)$ é não-vazio pois a aplicação identidade está no conjunto. Para $T \in O(4)$ temos que o $\det(T) \neq 0$, logo T possui inversa. Dado que a transformação inversa

existe e a operação composição “ \circ ” é associativa, resta mostrar que esta operação é fechada para as transformações ortogonais. De fato, dados $T_1, T_2 \in O(4)$, temos:

$$\langle T_1 \circ T_2(x), T_1 \circ T_2(y) \rangle = \langle T_2(x), T_2(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^4$, portanto o conjunto das transformações ortogonais com a operação composição é um grupo.

Proposição 2.3.1. *O conjunto das transformações que preservam produto interno de \mathbb{R}^4 , restritas à esfera \mathbb{S}^3 , formam o grupo de isometrias de \mathbb{S}^3 com respeito a métrica induzida \langle, \rangle .*

Demonstração. Pela afirmação acima, temos que $O(4)$ é grupo. Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma transformação que preserva o produto interno. Uma vez que $\langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, x \rangle$ para todo $x \in \mathbb{S}^3$, temos que $T(\mathbb{S}^3) = \mathbb{S}^3$. Como a diferencial de uma transformação linear é a própria transformação, T é uma isometria de \mathbb{S}^3 . Resta mostrar que se f é uma isometria de \mathbb{S}^3 então existe uma transformação ortogonal T tal que $T|_{\mathbb{S}^3} = f$. De fato, sejam $p \in \mathbb{S}^3$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base ortonormal de $T_p\mathbb{S}^3$. Assim, $\{p, v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^4 . Como f é uma isometria, temos que

$$\{f(p), d(f)_p(v_1), d(f)_p(v_2), d(f)_p(v_3)\}$$

também é uma base ortogonal de \mathbb{R}^4 , portanto existe uma única transformação ortogonal tal que $T(p) = f(p), T(v_i) = d(f)_p(v_i), i = 1, 2, 3$. Como $dT = T$, segue do Lema 1.1.7 que $T|_{\mathbb{S}^3} = f$. \square

As translações em \mathbb{R}^3 são as aplicações que têm a propriedade de que a distância do ponto e sua imagem é uma constante. Em outras palavras, se T é uma translação então $d(x, T(x))$ é constante para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Mais que isto, em \mathbb{R}^3 podemos escolher uma translação de modo que a distância entre x e $T(x)$ seja igual uma constante determinada a priori. A existência de uma isometria que satisfaça essa propriedade para qualquer variedade, em geral não é verificada. Por exemplo, a esfera \mathbb{S}^2 não tem isometria com essa propriedade. De fato, sejam $x, y \in \mathbb{S}^2$ a distância entre x e y $d(x, y)$ é dada pelo menor comprimento do arco de círculo máximo que passa por x e y . A distância $d(x, y)$ é igual a medida em radianos do ângulo entre x e y , ou seja,

$$\cos \angle(x, y) = \cos d(x, y) = \langle x, y \rangle. \quad (2.1)$$

Além disso, um operador linear de \mathbb{R}^3 sempre tem um auto valor real, uma vez que seu polinômio característico é de grau ímpar. Segue que se λ for este autovalor e A a matriz associada ao operador T , então se $x \in \mathbb{S}^2$ é autovetor associado a λ , temos que

$$1 = \langle x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle,$$

logo $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Segue que $Ax = x$ ou $Ax = -x$. Portanto, por (2.1) temos $d(x, T(x)) = 0$ ou $d(x, T(x)) = \pi$, o que nos leva às aplicações identidade e antípoda, $T(x) = x$ e $T(x) = -x$, respectivamente. Porém não nos permite a liberdade de escolher uma constante entre $(0, \pi)$ para a distância como em \mathbb{R}^3 , o que mostra que tal propriedade não é verificada em \mathbb{S}^2 , como afirmamos. Porém em \mathbb{S}^3 veremos que sim, é possível obter isometrias com tal propriedade. Mais ainda, essas isometrias são justamente as translações no grupo.

Consideremos a distância em \mathbb{S}^3 dada como em (2.1). Pela Proposição 2.3.1, temos que as isometrias de \mathbb{S}^3 são as transformações ortogonais. Se existe uma isometria $A \in O(4)$ com tal propriedade, temos que

$$\langle x, Ax \rangle = \sum_{n,m=1}^4 a_{mn} x_m x_n$$

em que (a_{nm}) é a matriz associada a A . Como queremos A de modo que o primeiro membro da equação seja uma constante real C temos então que

$$\sum_{n,m=1}^4 a_{mn} x_m x_n = C, \text{ para todo } x \in \mathbb{S}^3.$$

E assim sendo, notemos que para $y \in \mathbb{R}^4$

$$\langle y, Ay \rangle = \|y\|^2 \left\langle \frac{y}{\|y\|}, A \frac{y}{\|y\|} \right\rangle,$$

que pode ser rescrita como

$$\sum_{n,m=1}^4 a_{mn} y_m y_n = C \sum_{n=1}^4 y_n^2,$$

ou ainda

$$a_{11}y_1y_1 + a_{12}y_1y_2 + a_{13}y_1y_3 + a_{14}y_1y_4$$

$$a_{21}y_2y_1 + a_{22}y_2y_2 + a_{23}y_2y_3 + a_{24}y_2y_4$$

$$a_{31}y_3y_1 + a_{32}y_3y_2 + a_{33}y_3y_3 + a_{34}y_3y_4$$

$$\begin{aligned} & a_{41}y_4y_1 + a_{42}y_4y_2 + a_{43}y_4x_3 + a_{44}y_4y_4 \\ &= C \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2). \end{aligned}$$

Disso decorre que

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = C, \text{ e } a_{nm} + a_{mn} = 0.$$

Uma vez que A é ortogonal, suas colunas formam um conjunto ortonormal e

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} + a_{41}a_{42} = 0 \quad (2.2)$$

assim como

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 + a_{42}^2. \quad (2.3)$$

Desde que $a_{12} + a_{21} = 0$ temos que

$$a_{12}^2 - a_{21}^2 = 0 \quad (2.4)$$

e

$$a_{31}^2 + a_{41}^2 = a_{32}^2 + a_{42}^2. \quad (2.5)$$

Para os vetores $(a_{31}, a_{41}), (a_{32}, a_{42}) \in \mathbf{S}^2$, de (2.4) e (2.5) temos que estes vetores são perpendiculares e têm o mesmo comprimento. Logo

$$\text{ou } a_{32} = a_{41}, a_{42} = -a_{31} \quad \text{ou } a_{32} = -a_{41}, a_{42} = a_{31}.$$

Portanto, para $(a, b, c, d) \in \mathbb{S}^3$ podemos assumir $a_{11} = a, a_{21} = -b, a_{31} = c, a_{41} = d$, e assim encontramos dois tipos possíveis para A desejada

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}.$$

Note que $a = C$, implica que o intervalo em que podemos escolher a constante C deve ser $[-1, 1]$, pois $|a| \leq 1$. Além disso, temos que a aplicação

$$a + bi + cj + dk \mapsto \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

identifica \mathbb{S}^3 como subgrupo de $O(4)$ e para todo $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3$ tem-se

$$L_{(a,b,c,d)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = p((a, b, c, d), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

como queríamos.

2.4 \mathbb{S}^3 como o grupo $SU(2)$

Do que vimos nas seções 2.1 e 2.3, a esfera \mathbb{S}^3 é grupo de Lie com o produto p pela identificação com um subgrupo dos quatérnios, e a identificamos como um subgrupo de $O(4)$ pela translação à esquerda (ou à direita). Ainda discutimos uma propriedade destas translações, onde a distância na esfera de um ponto e sua imagem por esta translação é constante para todo ponto da esfera \mathbb{S}^3 . Nesta seção veremos como identificar a esfera tridimensional com o grupo das matrizes unitárias.

Seja $SU(2)$ o grupo das matrizes unitárias 2×2 com determinante 1, isto é,

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}; z, w \in \mathbb{C}, \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1 \right\}.$$

Observemos que $SU(2)$ é uma variedade diferenciável e que o produto de matrizes é fechado neste grupo e diferenciável. Assim $SU(2)$ é um grupo de Lie e sua álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ é o conjunto das matrizes anti-hermitianas 2×2 de traço 0, isto é,

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} it & -\bar{w} \\ w & -it \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Com efeito, seja A uma curva diferenciável em $SU(2)$, tal que $A(0) = Id$ (onde Id representa a matriz identidade). Como A é unitária, tem-se

$$A(t)A(t)^* = 1.$$

Como a regra do produto é válida para o produto de matrizes, segue que

$$A'(t)A(t)^* + A(t)A'(t)^* = 0,$$

e para $t = 0$, temos

$$A'(0) = -A(0)^*,$$

o que mostra que estas matrizes são anti-hermitianas. Como o determinante de A é igual a 1, temos que

$$z(t)\bar{z}(t) + w(t)\bar{w}(t) = 1,$$

o que implica

$$z'(t)\bar{z}(t) + z(t)\bar{z}'(t) + w'(t)\bar{w}(t) + w(t)\bar{w}'(t) = 0.$$

Em $t = 0$, temos

$$z'(0) + \bar{z}'(0) = 0,$$

onde vemos que a parte real de $z'(0)$ é nula e que o traço de $A'(0)$ é igual a zero, como queríamos. Além da identificação feita anteriormente com o grupo $O(4)$, notemos que poderíamos ter considerado também a aplicação que identifica $SU(2)$ com \mathbb{S}^3 . De fato, seja

$$\begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix} \in SU(2), \text{ onde } z, w \in \mathbb{C}, \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1.$$

Para $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, escrevemos

$$z = x_0 + x_1i, \quad w = x_2 + x_3i.$$

Assim,

$$\|z\|^2 + \|w\|^2 = 1 \text{ é equivalente à } x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

o que implica que $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^3$, como afirmamos. De agora estaremos identificando \mathbb{S}^3 com o grupo que em questão seja mais conveniente.

2.5 Curvas em \mathbb{S}^3

Nesta seção, descreveremos a geometria das curvas em \mathbb{S}^3 através do método do referencial móvel. Introduziremos a curvatura e a torção, o que possibilitará estabelecer versões do teorema fundamental das curvas e do teorema de Beltrami-Enneper.

Vimos que a álgebra de Lie de \mathbb{S}^3 , \mathfrak{s}^3 , é o espaço gerado por

$$X_1 = (0, 1, 0, 0), X_2 = (0, 0, 1, 0), X_3 = (0, 0, 0, 1).$$

Do mesmo modo, pela identificação com o subgrupo de $O(4)$, temos

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pela identificação com $\mathfrak{su}(2)$, temos

$$X_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; X_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Para o colchete de Lie, $[\cdot, \cdot]$, em qualquer um dos três casos temos que

$$[X_1, X_2] = 2X_3; [X_2, X_3] = 2X_1; [X_3, X_1] = 2X_2. \quad (2.6)$$

Deste modo, se $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$ forem os campos invariantes à esquerda que estendem X_1, X_2, X_3 , respectivamente, temos

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = 2\tilde{X}_3; [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] = 2\tilde{X}_1; [\tilde{X}_3, \tilde{X}_1] = 2\tilde{X}_2. \quad (2.7)$$

De fato, pela Proposição 1.5.10, temos que o colchete de Lie é fechado para campos invariantes à esquerda e

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2](1) = [X_1, X_2] = 2X_3 = 2\tilde{X}_3(1),$$

assim o resultado segue da unicidade dos campos. Os demais casos são análogos. Se desconsiderarmos as primeiras coordenadas dos vetores X_1, X_2, X_3 , notamos que estes vetores formam a base canônica do \mathbb{R}^3 . Deste modo, podemos definir um produto vetorial similar ao \mathbb{R}^3 , isto é,

$$X_1 \times X_2 = X_3 ; X_2 \times X_3 = X_1 ; X_3 \times X_1 = X_2. \quad (2.8)$$

De fato, definimos \times por

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & j & k \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix},$$

para todo $u = (0, u_1, u_2, u_3), v = (0, v_1, v_2, v_3) \in T_{(1,0,0,0)}\mathbb{S}^3$. Note que (2.8) se verifica. Uma vez que o conjunto dos campos invariantes à esquerda INV^e e $T_{(1,0,0,0)}\mathbb{S}^3$ são isomorfos este produto vetorial está bem definido em INV^e . De fato, para

$$(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2)(1) = X_1 \times X_2 = X_3 = \tilde{X}_3(1)$$

temos

$$\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 = \tilde{X}_3 ; \tilde{X}_2 \times \tilde{X}_3 = \tilde{X}_1 ; \tilde{X}_3 \times \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2. \quad (2.9)$$

Note que poderíamos ter definido “ \times ” em termo da métrica \langle , \rangle e a orientação usais para \mathbb{S}^3 .

Agora podemos expressar todos os vetores tangentes em termos dos campos vetoriais $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$. A teoria das curvas descritas aqui e a notação da conexão afim na variedade ambiente \mathbb{S}^3, ∇' , seguem o que foi desenvolvido em [4]. Seja “ c ” uma curva regular em \mathbb{S}^3 parametrizada por comprimento de arco. O vetor tangente unitário é dado por

$$\mathbf{t}(s) = \sum_{n=1}^3 f_n(s) \tilde{X}_n(c(s)), \quad (2.10)$$

onde $\sum_{n=1}^3 f_i^2 = 1$, o que implica $\sum_{n=1}^3 f_i f_i' = 0$.

Seja $X = \sum_{m=1}^3 h_m(s) \tilde{X}_m(c(s))$ um vetor ao longo da curva c a derivada covariante de X é dada por

$$\frac{D'}{ds} \left[\sum_{m=1}^3 h_m(s) \tilde{X}_m(c(s)) \right] = \sum_{m=1}^3 h_m'(s) \tilde{X}_m(c(s)) + \sum_{m=1}^3 h_m(s) \frac{D'}{ds} \tilde{X}_m(c(s)).$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{D'}{ds} \tilde{X}_m(c(s)) &= \nabla'_{c'(s)} \tilde{X}_m \\ &= \nabla'_{t(s)} \tilde{X}_m \\ &= \nabla'_{\sum_{n=1}^3 f_i(s) \tilde{X}_n(c(s))} \tilde{X}_m \\ &= \nabla'_{t(s)} \tilde{X}_m \\ &= \sum_{n=1}^3 f_i(s) \nabla'_{\tilde{X}_n(c(s))} \tilde{X}_m \end{aligned}$$

temos que

$$\frac{D'}{ds} \left[\sum_{m=1}^3 h_m(s) \tilde{X}_m(c(s)) \right] = \sum_{m=1}^3 h'_m(s) \tilde{X}_m(c(s)) + \sum_{m=1}^3 h_m(s) \sum_{n=1}^3 f_i(s) \nabla'_{\tilde{X}_n(c(s))} \tilde{X}_m.$$

Como \mathbb{S}^3 é grupo de Lie com uma métrica bi-invariante, pelo Teorema 1.5.9 temos que

$$\nabla'_{\tilde{X}_n} \tilde{X}_m = \frac{1}{2} [\tilde{X}_n, \tilde{X}_m].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 h_m \sum_{n=1}^3 f_i \nabla'_{\tilde{X}_n} \tilde{X}_m &= h_1 f_1 \nabla'_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_1 + h_1 f_2 \nabla'_{\tilde{X}_2} \tilde{X}_1 + h_1 f_3 \nabla'_{\tilde{X}_3} \tilde{X}_1 \\ &\quad + h_2 f_1 \nabla'_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_2 + h_2 f_2 \nabla'_{\tilde{X}_2} \tilde{X}_2 + h_2 f_3 \nabla'_{\tilde{X}_3} \tilde{X}_2 \\ &\quad + h_3 f_1 \nabla'_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_3 + h_3 f_2 \nabla'_{\tilde{X}_2} \tilde{X}_3 + h_3 f_3 \nabla'_{\tilde{X}_3} \tilde{X}_3 \\ &= h_1 f_1 \frac{1}{2} [\tilde{X}_1, \tilde{X}_1] + h_1 f_2 \frac{1}{2} [\tilde{X}_2, \tilde{X}_1] + h_1 f_3 \frac{1}{2} [\tilde{X}_3, \tilde{X}_1] \\ &\quad + h_2 f_1 \frac{1}{2} [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] + h_2 f_2 \frac{1}{2} [\tilde{X}_2, \tilde{X}_2] + h_2 f_3 \frac{1}{2} [\tilde{X}_3, \tilde{X}_2] \\ &\quad + h_3 f_1 \frac{1}{2} [\tilde{X}_1, \tilde{X}_3] + h_3 f_2 \frac{1}{2} [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] + h_3 f_3 \frac{1}{2} [\tilde{X}_3, \tilde{X}_3], \text{ por (2.7)} \\ &= -h_1 f_2 \tilde{X}_3 + h_1 f_3 \tilde{X}_2 + h_2 f_1 \tilde{X}_3 - h_2 f_3 \tilde{X}_1 - h_3 f_1 \tilde{X}_2 + h_3 f_2 \tilde{X}_1. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{D'}{ds} \left[\sum_{m=1}^3 h_m(s) \tilde{X}_m(c(s)) \right] &= \sum_{m=1}^3 h'_m(s) \tilde{X}_m(c(s)) \\ &\quad + [(f_2(s)h_3(s) - f_3(s)h_2(s)) \tilde{X}_1(c(s)) \\ &\quad + (f_3(s)h_1(s) - f_1(s)h_3(s)) \tilde{X}_2(c(s)) \\ &\quad + (f_1(s)h_2(s) - f_2(s)h_1(s)) \tilde{X}_3(c(s))]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Em particular temos que

$$\frac{D'}{ds} \mathbf{t}(s) = \frac{D'}{ds} \left[\sum_{m=1}^3 f_m(s) \tilde{X}_m(c(s)) \right] = \sum_{m=1}^3 f'_m(s) \tilde{X}_m(c(s)) \quad (2.12)$$

e, assim, o vetor **normal** unitário é dado por

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\mathbf{k}} \sum_{m=1}^3 f'_m(s) \tilde{X}_m(c(s)), \quad (2.13)$$

onde

$$\mathbf{k}(s) = \sqrt{\sum_{m=1}^3 (f'_m(s))^2}. \quad (2.14)$$

Diremos que \mathbf{k} é a **curvatura** de c em s .

Ao vetor $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ diremos **binormal** de c em s . Como \mathbf{b} é unitário (ver no apêndice, afirmação 2) temos que

$$\left\langle \frac{D'}{ds} \mathbf{b}, \mathbf{b} \right\rangle = 0.$$

Uma vez que \mathbf{b} é ortogonal a \mathbf{t} e a \mathbf{n} , temos que

$$\left\langle \frac{D'}{ds} \mathbf{b}, \mathbf{t} \right\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{k} \mathbf{n} \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\left\langle \frac{D'}{ds} \mathbf{b}, \mathbf{t} \right\rangle = 0.$$

Portanto $\frac{D'}{ds} \mathbf{b}$ é paralelo à \mathbf{n} . Assim sendo, definimos a **torção** de c em s por

$$\frac{D'}{ds} \mathbf{b}(s) = -\tau(s) \mathbf{n}(s). \quad (2.15)$$

Além disso, por um raciocínio totalmente análogo, temos que

$$\left\langle \frac{D'}{ds} \mathbf{n}, \mathbf{n} \right\rangle = 0.$$

Logo $\frac{D'}{ds} \mathbf{n}$ pertence ao plano determinado por \mathbf{t} e \mathbf{b} . Procedendo de maneira análoga aos casos anteriores, temos

$$\left\langle \frac{D'}{ds} \mathbf{n}, \mathbf{t} \right\rangle + \left\langle \mathbf{n}, \frac{D'}{ds} \mathbf{t} \right\rangle = 0,$$

ou seja

$$\left\langle \frac{D'}{ds} \mathbf{n}, \mathbf{t} \right\rangle + \mathbf{k} = 0.$$

Do mesmo modo, segue de

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

que

$$\left\langle \frac{D'}{ds} \mathbf{n}, \mathbf{t} \right\rangle - \tau = 0.$$

Denotando $\frac{D'}{ds} \mathbf{t} := \mathbf{t}'$, $\frac{D'}{ds} \mathbf{n} := \mathbf{n}'$, $\frac{D'}{ds} \mathbf{b} := \mathbf{b}'$, assim podemos escrever

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \mathbf{k}\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -\mathbf{k}\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n} \end{cases}, \quad (2.16)$$

que são as **fórmulas de Frenet** e assim faz sentido chamarmos o triedro dado por $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ de **triedro de Frenet**. Do **Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas** (ver [4]), enunciaremos sem demonstração o seguinte resultado:

Teorema 2.5.1. *Sejam $\mathbf{k}, \tau : I \rightarrow \mathbb{S}^3$ funções definidas num intervalo I , com $\mathbf{k}(s)$ positiva para todo $s \in I$. Então existe uma curva parametrizada por comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^3$ tal que \mathbf{k} é sua curvatura e τ é sua torção. Além disso sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{S}^3$ com funções curvaturas $\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\beta$ e torções τ_α, τ_β respectivamente. Se $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{k}_\beta, \tau_\alpha = \tau_\beta$ então existe uma única isometria A de \mathbb{S}^3 tal que $\beta = A \circ \alpha$.*

O resultado a seguir será muito útil nas construções de superfícies planas.

Teorema 2.5.2 (Beltrami-Enneper). (*[9]*) *Sejam Σ uma superfície e $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ uma imersão com curvatura extrínseca constante negativa K_{ext} . Então as curvas assintóticas de φ tem torção constante τ , com $\tau^2 = -K_{ext}$ nos pontos onde a curvatura da curva é não nula. Além disso, duas curvas assintóticas distintas que se intersectam em um ponto p , tal que em p as curvaturas não se anulam, têm suas respectivas torções com sinais opostos.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.4.7, existem coordenadas locais (u, v) com primeira e segunda forma fundamental dada com em (1.18). Portanto, com esta parametrização, as curvas coordenadas são curvas assintóticas da imersão.

Sejam N o vetor normal da imersão e ∇ sua conexão determinada pela métrica. Para $\alpha(u) = \varphi(u, v_0)$, temos que α está parametrizada por comprimento de arco e

$$\langle \nabla_{\alpha'(u)} \alpha'(u), N(u, v_0) \rangle = 0,$$

segue que nos pontos $u = u_0$, onde a curvatura não se anula, o vetor $N(u_0, v_0)$ é o vetor binormal em $u = u_0$. Portanto o vetor normal de $\alpha(u)$ é dado por $N(u, v_0) \times \alpha'(u)$. Para a, b funções escolhidas adequadamente tais que

$$N(u, v_0) \times \alpha'(u) = \alpha(u) \frac{\partial}{\partial u} + b(u) \frac{\partial}{\partial v},$$

temos que

$$\begin{aligned} \tau(u) &= -\langle \nabla_{\alpha'(u)} N(u, v_0), N(u, v_0) \times \alpha'(u) \rangle \\ &= -\langle \nabla_{\alpha'(u)} N(u, v_0), \alpha(u) \frac{\partial}{\partial u} + b(u) \frac{\partial}{\partial v} \rangle \\ &= -\alpha(u) \langle \nabla_{\alpha'(u)} N(u, v_0), \frac{\partial}{\partial u} \rangle - b(u) \langle \nabla_{\alpha'(u)} N(u, v_0), \frac{\partial}{\partial v} \rangle \\ &= \alpha(u) \langle N(u, v_0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} \rangle + b(u) \langle N(u, v_0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} \rangle \\ &= b(u) \langle N(u, v_0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} \rangle \\ &= b(u) \sqrt{-K_{ext}} \operatorname{sen} \omega(u, v_0) \end{aligned}$$

pela segunda forma fundamental. Para o cálculo de b , consideremos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle N(u, v_0) \times \alpha'(u), \frac{\partial}{\partial u} \rangle = a(u) + b(u) \cos \omega \\ \operatorname{sen} \omega &= \langle N(u, v_0) \times \alpha'(u), \frac{\partial}{\partial v} \rangle = a(u) \cos \omega + b(u). \end{aligned}$$

Segue destas equações que $b = \operatorname{sen} \omega$ e assim $\tau = \sqrt{-K_{ext}}$ como queríamos mostrar. Analogamente, obtemos que a torção da curva $\beta(v) = \varphi(u_0, v)$ é $-\sqrt{-K_{ext}}$, onde $N(u_0, v)$ é o vetor binormal da curva. \square

Observamos que tanto o triedro de Frenet, quanto o teorema de Beltrami-Enneper podem ser considerados em um contexto mais geral do que o apresentado neste texto. Para referenciais móveis em variedades Riemannianas, uma boa exposição do assunto encontra-se em [4], volume IV páginas 21-27. O Teorema de Beltrami-Enneper (Teorema 2.5.2), pode ser enunciado para uma variedade tridimensional com curvatura constante, uma vez que dado um espaço vetorial de dimensão 3 com produto interno sempre podemos definir um produto vetorial “ \times ”, para mais detalhes ver o Teorema 8 em [9].

Capítulo 3

Superfícies planas em \mathbb{S}^3

Neste capítulo, estudaremos a construção de superfícies planas em \mathbb{S}^3 . Seguindo a abordagem de [9]. Usaremos a estrutura de grupo de \mathbb{S}^3 com relação aos quatérnions para definir a Fibrção de Hopf e através desta aplicação obteremos os primeiros exemplos de superfícies planas. Em seguida, abordaremos o método de construção destas superfícies devido a Bianchi-Spivak, o qual baseia-se no produto de curvas de torções 1 e -1. Por último explicaremos o método devido a Kitagwa dando ênfase a vantagem de utilizar este outro método. Ressaltamos que \mathbb{S}^3 foi identificado com $SU(2)$ e $O(4)$ e, como dito anteriormente, usaremos essas identificações sem mais detalhes.

3.1 Fibrção de Hopf

Nesta seção, veremos como aparecem os primeiros exemplos de superfícies planas na esfera \mathbb{S}^3 . Usaremos a **Fibrção Hopf** e suas propriedades para obter tais superfícies.

Ao identificarmos $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{S}^3 | x_1 = 0\}$ definimos a **Fibrção de Hopf**, h , como

$$h : x \in \mathbb{S}^3 \mapsto xi\bar{x} \in \mathbb{S}^2.$$

Primeiro observe que h está bem definida uma vez que para $x, a \in \mathbb{S}^3$, se $x = a$ então $xi\bar{x} = ai\bar{a}$

logo $h(x) = h(a)$ e

$$xi\bar{x} = (x_2^2 + x_1^2 - x_3^2 - x_4^2)i + 2(x_2x_3 + x_1x_4)j + 2(x_2x_4 - x_3x_1),$$

ou seja, $h(x) \in \mathbb{S}^2$. Agora notemos que para $p = p_2i + p_3j + p_4k \in \mathbb{S}^2$ e $h(x) = p$, temos que

$$\begin{cases} x_2^2 + x_1^2 - x_3^2 - x_4^2 = p_2 \\ 2(x_2x_3 + x_1x_4) = p_3 \\ 2(x_2x_4 - x_3x_1) = p_4 \end{cases} .$$

Como $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, substituindo $x_3^2 + x_4^2$ por $1 - x_2^2 - x_1^2$ na primeira equaco, temos

$$\begin{cases} x_2^2 + x_1^2 = (1 + p_2)/2 \\ x_2x_3 + x_1x_4 = p_3/2 \\ x_2x_4 - x_3x_1 = p_4/2 \end{cases} .$$

Assim:

- Se $p_2 \neq -1$ temos

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ -x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3/2 \\ p_4/2 \end{bmatrix},$$

ou seja, a fibra $h^{-1}(p)$ é dada por

$$h^{-1}(p) = \{x \in \mathbb{S}^3 \mid -x_1p_4 + x_2p_3 - x_3(1 + p_2) = 0, x_2p_4 + x_1p_3 - x_4(1 + p_2) = 0\}; \quad (3.1)$$

- Se $p_2 = -1$, temos $x_1 = x_2 = 0$ e assim

$$h^{-1}(i) = \{x_3j + x_4k \in \mathbb{S}^3\}. \quad (3.2)$$

Das expressões (3.1) e (3.2), é possível notarmos que para cada $p \in \mathbb{S}^2$, $h^{-1}(p)$ é um grande círculo. De fato, por (3.1), $h^{-1}(p)$ pertence ao plano que passa pela origem em \mathbb{S}^3 , que é gerado pelos vetores

$$(1, 0, -p_4/(1 + p_2), p_3/(1 + p_2)), (0, 1, p_3/(1 + p_2), p_4/(1 + p_2))$$

(para mais detalhes veja a Observaco A.0.1). O caso (3.2) é direto.

Seja $c : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular. Escrevendo $c(s) = (0, c_2(s), c_3(s), c_4(s))$ temos que $c_2(s)^2 + c_3(s)^2 + c_4(s)^2 = 1$. Suponhamos que c_2 é constante. Uma vez que $\|c_2\| \leq 1$ temos que:

- Se $\|c_2\| = 1$ a curva se degenera no ponto $(0, 1, 0, 0)$ ou $(0, -1, 0, 0)$ de modo que $h^{-1}(p)$ é um grande círculo, como vimos anteriormente;
- Se $\|c_2\| = C < 1$, então $h^{-1}(c)$ é um toro plano. De fato, por (3.1) temos que

$$\begin{aligned} h^{-1}(c) &= \left\{ x \in \mathbb{S}^3 \mid \frac{-x_1c_4 + x_2c_3}{1 + c_2} = x_3, \frac{x_2c_4 + x_1c_3}{1 + c_2} = x_4 \right\}, \\ &= \left\{ \left(x_1, x_2, \frac{-x_1c_4 + x_2c_3}{1 + c_2}, \frac{x_2c_4 + x_1c_3}{1 + c_2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Note que

$$\begin{aligned} 1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \left(\frac{-x_1c_4 + x_2c_3}{1 + c_2} \right)^2 + \left(\frac{x_2c_4 + x_1c_3}{1 + c_2} \right)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \frac{(x_1^2 + x_2^2)(c_3^2 + c_4^2)}{(1 + c_2)^2} \\ &= (x_1^2 + x_2^2) \left(\frac{1 - c_2^2}{(1 + c_2)^2} + 1 \right), \end{aligned}$$

assim

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{(1 + c_2)^2}{1 - c_2^2 + (1 + c_2)^2} = \frac{1 + c_2}{2}$$

consequentemente

$$x_3^2 + x_4^2 = \frac{1 - c_2}{2}.$$

Portanto para $c_2 = C$ temos que

$$h^{-1}(c) = \mathbb{S}^1 \left(\sqrt{\frac{1 - C}{2}} \right) \times \mathbb{S}^1 \left(\sqrt{\frac{1 + C}{2}} \right),$$

que é uma superfície plana, conhecida como toro de Clifford.

Observação 3.1.1. *Uma construção interessante do toro plano pode ser encontrada em [2], pag. 522.*

Dado um subconjunto $U \subset \mathbb{S}^2$, para todo subconjunto $V \subset \mathbb{S}^2$ isométrico a U , temos que $h^{-1}(V) \subset \mathbb{S}^3$ é isométrico a $h^{-1}(U)$. De fato, se a é uma isometria de \mathbb{S}^3 , então $h(ax) = ax \cdot i \cdot \bar{a}\bar{x} = ah(x)\bar{a}$. Observe que, se $y \in \mathbb{S}^2$, então a aplicação $y \mapsto ay\bar{a}$ é uma isometria de \mathbb{S}^2 . Assim, dado a , isometria de \mathbb{S}^3 , existe uma relação entre a e uma transformação ortogonal A de \mathbb{R}^3 tal que $Ay = ay\bar{a}$. De fato, considere a transformação ortogonal de \mathbb{R}^4 dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Seja $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Então a relação entre a com a transformação ortogonal A , tal que $Ay = ay\bar{a}$, para todo $y \in \mathbb{S}^2$, é dada por

$$\begin{cases} |a|^2 = 1, \\ ai\bar{a} = (0, [\alpha_1]), \\ aj\bar{a} = (0, [\alpha_2]), \\ ak\bar{a} = (0, [\alpha_3]), \end{cases}$$

em que $[\alpha_i]$ é a i -ésima coluna de A . Temos que para cada isometria de \mathbb{S}^2 temos uma isometria de \mathbb{S}^3 relacionada e vice-versa, o que conclui a afirmação.

Em particular, para cada círculo \mathcal{C} em \mathbb{S}^2 existe uma isometria que aplica \mathcal{C} no círculo $c_2 = \text{constante}$. Sendo assim, existe uma isometria que aplica a imagem inversa $h^{-1}(\mathcal{C})$ em um toro de Clifford. Após está discussão podemos finalmente enunciar o principal resultado desta seção.

Proposição 3.1.2. *Se c é uma curva regular em \mathbb{S}^2 , então $h^{-1}(c)$ é uma superfície plana em \mathbb{S}^3 .*

Demonstração. Da afirmação anterior, segue que a imagem inversa de qualquer círculo pela fibrção de Hopf é isométrica ao toro plano. Considere \mathcal{C} em \mathbb{S}^2 o círculo osculador de uma curva regular c em \mathbb{S}^2 , em um ponto p do círculo. Sabe-se que o círculo \mathcal{C} e a curva c possuem contato de ordem 2. Como a fibrção de Hopf é diferenciável, $h^{-1}(c)$ será uma superfície que possui contato de ordem 2 com o toro $h^{-1}(\mathcal{C})$, isto é, existem parametrizações X e Y da superfície e do toro que coincidem nas primeiras e segundas derivadas. Como a curvatura intrínseca depende dos símbolos de Christoffel e de suas derivadas (símbolos estes que dependem apenas da primeira forma fundamental, ou seja, que dependem apenas da métrica induzida e das primeiras derivadas das parametrizações) segue que, na imagem inversa de p as curvaturas intrínsecas do toro e da superfície coincidem. \square

A imersão definida na demonstração da proposição acima é conhecida como cilindro de Hopf. Se a curva for fechada, como antes, são os toros de Hopf.

3.2 Representação de Bianchi-Spivak

Nesta seção estudaremos o método de construção de superfícies planas devido a Bianchi, reformulado por Spivak em uma linguagem mais atual. Este método o qual chamaremos de Bianchi-Spivak, consiste em construir superfícies planas em \mathbb{S}^3 através da multiplicação nos quatérnions de duas curvas de torção 1 e -1.

Começaremos nossa abordagem utilizando o triedro de Frenet introduzido no capítulo 2. Da seção 2.5, temos o triedro (2.16) bem definido. Além disso, pela Afirmação 2, para $g_1 = f_2 f'_3 - f_3 f'_2$, $g_2 = f_3 f'_1 - f_1 f'_3$, $g_3 = f_1 f'_2 - f_2 f'_1$ podemos escrever o vetor binormal \mathbf{b} como

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\mathbf{k}} \sum_{n=1}^3 g_n \tilde{X}_n.$$

Deste modo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' &= \frac{D'}{ds} \mathbf{b} = \frac{D'}{ds} \left(\frac{1}{\mathbf{k}} \sum_{n=1}^3 g_n \tilde{X}_n \right) \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}} \frac{D'}{ds} \left(\sum_{n=1}^3 g_n \tilde{X}_n \right) - \frac{\mathbf{k}'}{\mathbf{k}^2} \frac{D'}{ds} \left(\sum_{n=1}^3 g_n \tilde{X}_n \right) \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}} \left[(f_2 g_3 - f_3 g_2) \tilde{X}_1 + (f_3 g_1 - f_1 g_3) \tilde{X}_2 + (f_1 g_2 - f_2 g_1) \tilde{X}_3 + \sum_{n=1}^3 g'_n \tilde{X}_n \right] - \frac{\mathbf{k}'}{\mathbf{k}^2} \frac{D'}{ds} \left(\sum_{n=1}^3 g_n \tilde{X}_n \right), \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos (2.11). Como

$$\begin{aligned} f_2 g_3 - f_3 g_2 &= f_2 (f_1 f'_2 - f_2 f'_1) - f_3 (f_3 f'_1 - f_1 f'_3) \\ &= f_1 (f_2 f'_2 + f_3 f'_3) - f'_1 (f_2^2 + f_3^2) \\ &= f_1 (-f_1 f'_1) - f'_1 (1 - f_1^2) \\ &= -f'_1. \end{aligned}$$

por (2.10). Para os demais termos o cálculo é análogo. Desta forma obtemos

$$\mathbf{b}' = \frac{-1}{\mathbf{k}} \sum_{n=1}^3 f'_n \tilde{X}_n + \sum_{n=1}^3 \left(\frac{g_n}{\mathbf{k}} \right)' \tilde{X}_n = -\mathbf{n} + \sum_{n=1}^3 \left(\frac{g_n}{\mathbf{k}} \right)' \tilde{X}_n \quad (3.4)$$

Lema 3.2.1. *Seja $\tilde{\mathbf{c}} = i_G \circ \mathbf{c}$. Então \mathbf{c} tem torção $\tau = 1$, se somente se, $\tilde{\mathbf{c}}$ tem torção $\tau = -1$.*

Demonstração. Sejam \mathbf{t}_c , $\mathbf{t}_{\tilde{c}}$ os vetores tangentes de c , \tilde{c} , respectivamente. Temos que

$$\mathbf{t}_{\tilde{c}} = d(i_G)_c \mathbf{t}_c,$$

como i_G é isometria. Pela Proposição 1.1.11 obtemos que

$$\frac{D'}{du} \mathbf{t}_{\tilde{c}} = \frac{D'}{du} d(i_G)_c \mathbf{t}_c = d(i_G)_c \frac{D'}{du} \mathbf{t}_c,$$

logo

$$\mathbf{n}_{\tilde{c}} = d(i_G)_c \mathbf{n}_c.$$

Vimos na demonstração de Lema 2.1.1 que a aplicação $i_G : x \in \mathbb{S}^3 \mapsto x^{-1} \in \mathbb{S}^3$ reverte a orientação em \mathbb{S}^3 . Logo como $\{\mathbf{t}_c, \mathbf{n}_c, \mathbf{b}_c\}$ tem orientação positiva então $\{\mathbf{t}_{\tilde{c}}, \mathbf{n}_{\tilde{c}}, d(i_G)_c \mathbf{b}_c\}$ tem orientação negativa, $d(i_G)_c \mathbf{b}_c = -\mathbf{b}_{\tilde{c}}$, e a torção da curva \tilde{c} dada por

$$\begin{aligned} \tau_{\tilde{c}} &= - \left\langle \frac{D'}{du} \mathbf{b}_{\tilde{c}}, \mathbf{n}_{\tilde{c}} \right\rangle_{\tilde{c}} \\ &= \left\langle \frac{D'}{du} d(i_G)_c \mathbf{b}_c, d(i_G)_c \mathbf{n}_c \right\rangle_{\tilde{c}} \\ &= \left\langle d(i_G)_c \frac{D'}{du} \mathbf{b}_c, d(i_G)_c \mathbf{n}_c \right\rangle_{\tilde{c}} \\ &= \left\langle \frac{D'}{du} \mathbf{b}_c, \mathbf{n}_c \right\rangle_c \\ &= -\tau_c \end{aligned}$$

onde τ_c é a torção da curva c , o que conclui o resultado. \square

Deste resultado temos o seguinte teorema:

Teorema 3.2.2. *Se c é uma curva em \mathbb{S}^3 com torção $\tau = 1$, então \mathbf{b} é invariante à esquerda ao longo de c . Se c tem torção $\tau = -1$, então \mathbf{b} é invariante à direita ao longo de c .*

Demonstração. Primeiramente, ao compararmos as expressões (2.16) e (3.4) temos que se $\tau = 1$ então $\left(\frac{g_n}{\mathbf{k}}\right)' = 0$, logo cada $\left(\frac{g_n}{\mathbf{k}}\right)$ é constante. Como essas constantes são as componentes de \mathbf{b} com respeito aos campos invariantes à esquerda $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$, portanto \mathbf{b} é invariante à esquerda.

Para a segunda parte, suponhamos que c tenha torção $\tau = -1$. Uma vez que

$$(i_G \circ L_g \circ i_G)(h) = (gh^{-1})^{-1} = R_g(h),$$

para $\tilde{c} = i_G \circ c$ e pelo Lema 3.2.1, temos que \tilde{c} tem torção 1, e o binormal de \tilde{c} é dado por

$\mathbf{b}_{\tilde{c}} = -d(i_G)\mathbf{b}_c$. Pela primeira parte desta demonstração $\mathbf{b}_{\tilde{c}}$ é invariante à esquerda, e assim

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\tilde{c}}(s) = d(L_{\tilde{c}(s)\tilde{c}(0)^{-1}})_{\tilde{c}(0)}\mathbf{b}_{\tilde{c}}(0) &\Leftrightarrow -d(i_G)_{c(0)}\mathbf{b}_c(s) = -d(L_{c(s)c(0)^{-1}})_{i_G \circ c(0)}d(i_G)_{c(0)}\mathbf{b}_c(0) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{b}_c(s) = d(i_G \circ L_{c(s)c(0)^{-1}} \circ i_G)_{c(0)}\mathbf{b}_c(0) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{b}_c(s) = d(R_{c(0)c(s)^{-1}})_{c(0)}\mathbf{b}_c(0) \end{aligned}$$

□

Como a curvatura $K_{ext} = -1$, temos que para cada ponto existem duas direções assintóticas distintas. Seja $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ uma superfície plana. Do Teorema 1.4.7 temos que existe uma rede de **Tschebyscheff** $F : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \Sigma \subset \mathbb{S}^3$ sobrejetiva, com a primeira e a segunda forma fundamental em \mathbb{R}^2 , \mathbb{I}_F e \mathbb{III}_F , dadas por

$$\mathbb{I}_F = du^2 + 2\cos\omega \, dudv + dv^2, \quad (3.5)$$

$$\mathbb{III}_F = 2\sin\omega \, dudv, \quad (3.6)$$

onde $0 < \omega < \pi$ é o ângulo orientado entre a primeira a segunda curva coordenada. Para cada v , consideremos $c(u) = (u, v)$ em \mathbb{R}^2 uma curva parametrizada por comprimento de arco com relação a métrica \mathbb{I}_F . Se denotarmos $\frac{D}{du}$ a derivada covariante determinada por \mathbb{I}_F , das expressões dos símbolos de Christoffel e da derivada covariante, (1.1) e (1.3) temos que

$$\frac{D}{du}c' = \frac{\partial\omega}{\partial u} \left[\cos\omega \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right],$$

uma vez que inversa da matriz associada a métrica é dada por

$$[g^{nm}] = \frac{1}{\sin^2\omega} \begin{bmatrix} 1 & -\cos\omega \\ -\cos\omega & 1 \end{bmatrix},$$

e os símbolos são dados por

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\cos\omega}{\sin\omega} \frac{\partial\omega}{\partial u}, \text{ e } \Gamma_{11}^2 = \frac{-1}{\sin\omega} \frac{\partial\omega}{\partial u}.$$

Denotamos por $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\perp$ o único campo vetorial unitário normal à $\frac{\partial}{\partial u}$ com relação à métrica \mathbb{I}_F tal que $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\perp \right\}$ formam uma base orientada positivamente. Então podemos tomar

$$\frac{\partial}{\partial v} = \cos\omega \frac{\partial}{\partial u} + \sin\omega \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\perp.$$

Portanto,

$$\frac{D}{du}c' = -\frac{\partial\omega}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\perp.$$

Analogamente, se denotamos por \mathbf{t} o vetor tangente à curva parametrizada $u \mapsto F(u, v)$ em Σ , por $\frac{D}{du}$ a derivada covariante em Σ e por $\left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\perp$ tal que $\left\{ \mathbf{t}, \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\perp \right\}$ formem uma base orientada positivamente, temos que

$$\frac{D}{du}\mathbf{t} = -\frac{\partial\omega}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\perp.$$

Sendo $u \mapsto F(u, v)$ uma curva assintótica, temos que a derivada covariante em Σ é a mesma derivada covariante em \mathbb{S}^3 , logo

$$\frac{D'}{du}\mathbf{t} = -\frac{\partial\omega}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\perp, \quad (3.7)$$

o que implica que $\left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\perp$ é o vetor normal \mathbf{n} com respeito a curva $u \mapsto F(u, v)$ e

$$\mathbf{k}(s) = \left| \frac{\partial}{\partial u}\omega(u, v) \right|$$

é a curvatura da mesma curva em u . Desta discussão temos o seguinte resultado:

Proposição 3.2.3. *Todas as curvas assintóticas $u \mapsto F(u, v)$ são congruentes entre si. Similarmente todas as curvas assintóticas $v \mapsto F(u, v)$ são congruentes entre si.*

Demonstração. De fato, pelo Lema 1.4.8, temos que $\omega_{uv} = 0$, o que implica que $\omega(u, v) = \omega_1(u) + \omega_2(v)$, assim

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}(u, v) = \omega'_1(u), \quad \frac{\partial\omega}{\partial v}(u, v) = \omega'_2(v).$$

Portanto, todas as curvas parametrizadas por comprimento de arco $u \mapsto F(u, v)$ e $v \mapsto F(u, v)$ têm as mesmas funções curvatura $|\omega'_1(u)|$ e $|\omega'_2(v)|$ respectivamente. Mais ainda, se escrevemos para a curva $u \mapsto F(u, v)$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} = a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v}$$

para funções a, b apropriadas. Temos pelo Triedro de Frenet que

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}, \mathbf{n} \right\rangle = b \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \mathbf{b} \times \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\ &= b \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, N \times \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = b \cos(\pi/2 - \omega) = b \operatorname{sen}\omega. \end{aligned}$$

Assim,

$$0 = \frac{\partial}{\partial u} 1 = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = 2 \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = 2(a + b \operatorname{sen} \omega), \quad (3.8)$$

$$-\omega'_1 \operatorname{sen} \omega = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = a \operatorname{cos} \omega + b, \quad (3.9)$$

de onde segue que $b = 1/\operatorname{sen} \omega$. Portanto $\mathbf{k}(u) = -\omega'_1(u)$. Analogamente a curvatura de $v \mapsto F(u, v)$ é dada por $\omega'_2(v)$. Do Teorema de Beltrami-Enneper (Teorema 2.5.2) temos que as torções das curvas $u \mapsto F(u, v)$ são iguais 1 e o das curvas $v \mapsto F(u, v)$ são iguais -1, o resultado segue do Teorema 2.5.1 \square

Consideremos $B_u = L_{F(u,0)F(0,0)^{-1}}$ uma família de translações à esquerda as quais levam $F(0, 0)$ em $F(u, 0)$. Sendo o plano osculador o plano gerado por \mathbf{n}, \mathbf{t} , temos que $(B_u)_*$ leva o plano osculador em 0, no plano osculador em u . De fato, a torção τ de $u \mapsto F(u, 0)$ é igual a 1 e pelo Teorema 3.2.2 o campo vetorial binormal \mathbf{b} é invariante à esquerda. Isto é, $(B_u)_*$ leva o binormal $\mathbf{b}(0)$ de $u \mapsto F(u, 0)$ em 0 no binormal $\mathbf{b}(u)$ em u . Isso permite escrever

$$\mathbf{t}(u) = \operatorname{cos} \theta(u) \cdot B_{u*} \mathbf{t}(0) - \operatorname{sen} \theta(u) \cdot B_{u*} \mathbf{n}(0),$$

e

$$\mathbf{n}(u) = \operatorname{sen} \theta(u) \cdot B_{u*} \mathbf{t}(0) + \operatorname{cos} \theta(u) \cdot B_{u*} \mathbf{n}(0),$$

onde θ é o ângulo de $\mathbf{t}(u)$ para $B_{u*} \mathbf{t}(0)$.

A menos de isometrias, podemos supor que $F(0, 0) = 1 \in \mathbb{S}^3$, $\mathbf{t}(0) = X_1 = \tilde{X}_1(F(0, 0))$, e que $\mathbf{n}(0) = X_2 = \tilde{X}_2(F(0, 0))$ tais que $X_1, X_2 \in \mathfrak{s}^3$. Calculemos t' em termos de θ . Por (2.10) temos que:

$$f_1 = \operatorname{cos} \theta, \quad f_2 = -\operatorname{sen} \theta, \quad f_3 = 0,$$

e

$$t'(u) = \operatorname{cos} \theta(u) B_{u*} \mathbf{t}(0) - \operatorname{sen} \theta(u) B_{u*} \mathbf{n}(0).$$

Pela equação (2.12) temos

$$\mathbf{t}' = -\theta'(u) [\operatorname{sen} \theta(u) \cdot B_{u*} \mathbf{t}(0) + \operatorname{cos} \theta(u) \cdot B_{u*} \mathbf{n}(0)] = -\theta'(u) \cdot \mathbf{n}(u).$$

Comparando com a equação (3.7), podemos ver que $\theta' = \omega'_1$, uma vez que $\theta(0) = 0$, encontramos que

$$\omega_1(u) = \theta(u) + \omega_1(0). \quad (3.10)$$

Isto implica que B_{u*} leva o vetor tangente a curva $v \mapsto F(0, v)$ em $v = 0$ no vetor tangente a curva $v \mapsto F(u, v)$ em $v = 0$. De fato, temos que

$$\frac{\partial}{\partial v} = \cos\omega \frac{\partial}{\partial u} + \operatorname{sen}\omega \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\perp$$

e assim segue

$$\frac{\partial}{\partial v}(u, 0) = \cos\omega(u, 0)\mathbf{t}(u) + \operatorname{sen}\omega(u, 0)\mathbf{n}(u).$$

Por (3.10), temos que

$$\omega(u, 0) = \omega_1(u) + \omega_2(0) = \omega_1(0) + \omega_2(0) + \theta(u) = \omega(0, 0) + \theta(u).$$

Assim,

$$\begin{aligned} (B_u)_* \left(\frac{\partial}{\partial v}(0, 0) \right) &= B_{u*}(\cos\omega(0, 0)\mathbf{t}(0) + \operatorname{sen}\omega(0, 0)\mathbf{n}(0)) \\ &= \cos(\omega(u, 0) - \theta(u))B_{u*}\mathbf{t}(0) + \operatorname{sen}(\omega(u, 0) - \theta(u))B_{u*}\mathbf{n}(0) \\ &= [\cos\omega(u, 0)\cos\theta(u) + \operatorname{sen}\omega(u, 0)\operatorname{sen}\theta(u)]B_{u*}\mathbf{t}(0) \\ &\quad - [\cos\omega(u, 0)\operatorname{sen}\theta(u) + \operatorname{sen}\omega(u, 0)\cos\theta(u)]B_{u*}\mathbf{n}(0) \\ &= \cos\omega(u, 0)[\cos\theta(u)B_{u*}\mathbf{t}(0) - \operatorname{sen}\theta(u)B_{u*}\mathbf{n}(0)] \\ &\quad + \operatorname{sen}\omega(u, 0)[\operatorname{sen}\theta(u)B_{u*}\mathbf{t}(0) + \cos\theta(u)B_{u*}\mathbf{n}(0)] \\ &= \cos\omega(u, 0)\mathbf{t}(u) + \operatorname{sen}\omega(u, 0)\mathbf{n}(u) \\ &= \frac{\partial}{\partial v}(u, 0), \end{aligned}$$

o que conclui a afirmação.

Teorema 3.2.4. *A superfície plana $\Sigma = F(u, v)$ pode ser escrita como uma coleção de translações a esquerda de $v \mapsto F(0, v)$. Isto é, para $F(0, 0) = 1$ temos*

$$\Sigma = \alpha(u)\beta(v)$$

tal que $\alpha(u) = F(u, 0)$ e $\beta(v) = F(0, v)$, para todo $u, v \in U$.

Demonstração. De fato, temos que as curvas coordenadas são assintóticas, assim seus respectivos vetores binormais são paralelos aos vetores normais à superfície, o que torna possível afirmar ainda que os planos osculadores destas curvas em $v = 0$ coincidem com os planos osculadores da curva assintótica $u \mapsto F(u, 0)$ em 0 e u . Logo seus vetores binormais são $\mathbf{b}(0)$ e $\mathbf{b}(u)$ da curva

$u \mapsto F(u, 0)$ em 0 e u . Como afirmado acima, $(B_u)_*$ leva o binormal a curva $v \mapsto F(0, v)$ em $v = 0$ no vetor vetor binormal a curva $v \mapsto F(u, v)$ em $v = 0$. Destas afirmações segue do Lema 1.1.7 que B_u são as únicas isometrias de \mathbb{S}^3 em si mesma tais que $B_u(F(0, v)) = F(u, v)$ para todo $v = 0$, o que conclui o resultado. \square

Observe que ao considerar as translações à direita de $u \mapsto F(u, 0)$, pela segunda parte do Teorema 3.2.1 obtemos que Σ pode ser escrita como coleção destas translações. Mais ainda, no teorema acima, usamos fortemente o fato das curvas assintóticas terem torções 1 e -1 nos pontos de curvatura não nula onde aplicamos o Teorema 3.2.1. Poderíamos então questionar se uma superfície plana pode ser descrita como o produto de duas curvas de torções 1 e -1. O que nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 3.2.5. *Sejam α e β curvas regulares parametrizadas por comprimento de arco em \mathbb{S}^3 com torções 1 e -1 respectivamente tais que $\alpha(0) = \beta(0) = 1$. Se α e β não são tangentes em 0 e seus planos osculadores coincidem em 0 então $\Sigma = \alpha(u)\beta(v)$ é uma superfície plana.*

Demonstração. Primeiramente observe que o plano osculador de α em u coincide com o plano osculador da curva $v \mapsto \alpha(u)\beta(v)$. De fato, suponhamos que $\alpha(0) = \beta(0) = 1$. Como os planos osculadores das curvas α e β coincidem temos que o binormal de ambas as curvas em $u = v = 0$ é dado por $\mathbf{b}(0)$. Uma vez que a curva α tem torção 1, pelo Teorema 3.2.2, o binormal $\mathbf{b}(0)$ é levado no binormal $\mathbf{b}(u)$ da curva α em u . Lembremos agora que as translações são transformações e assim

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dv}(\alpha(u)\beta(v)) \right|_{v=0} &= \left. \frac{d}{dv}(L_{\alpha(u)}\beta(v)) \right|_{v=0} \\ &= d(L_{\alpha(u)})_{\beta(0)} \left. \frac{d}{dv}(\beta(v)) \right|_{v=0} \\ &= d(L_{\alpha(u)})_{\beta(0)} \beta'(0) \\ &= \alpha(u)\beta'(0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}(u), \alpha(u)\beta'(0) \rangle_{\alpha(u)} &= \langle L_{\alpha(u)*}\mathbf{b}(0), L_{\alpha(u)*}\beta'(0) \rangle_{\alpha(u)} \\ &= \langle \mathbf{b}(0), \beta'(0) \rangle_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que mostra que $\mathbf{b}(u)$ e o tangente da curva $v \mapsto \alpha(u)\beta(v)$ são normais. Por um cálculo análogo mostramos que $\mathbf{b}(u)$ é ortogonal ao vetor normal da curva $v \mapsto \alpha(u)\beta(v)$ o que conclui a afirmação.

Note que todas as curvas $v \mapsto \alpha(u)\beta(v)$ têm torção -1 uma vez que β tem torção -1 e a torção é invariante por isometria (apêndice, afirmação 3). Aplicando agora a segunda parte do Teorema 3.2.2 à estas curvas e realizando uma análise como anteriormente temos que o plano osculador da curva

$$u \mapsto \alpha(u)\beta(v_0)$$

em $u = u_0$ coincide com o plano osculador da curva $v \mapsto \alpha(u_0)\beta(v)$ em $v = v_0$. Consequentemente coincidem com o espaço tangente de Σ por ter dimensão 2. Logo estas curvas são assintóticas e pelo Teorema 2.5.2 temos que $K_{ext} = -1$. \square

Essencialmente, vimos que para uma imersão plana em \mathbb{S}^3 é possível descrevê-la como produto de suas curvas assintóticas. Reciprocamente, se tivermos curvas com torções 1 e -1, essas curvas serão assintóticas e conseqüentemente o produto entre elas caracteriza uma superfície plana imersa em \mathbb{S}^3 .

Seja ζ_0 o normal da imersão em $u = v = 0$. Aplicando o Teorema 3.2.2 temos que, para $F(u, v) = \alpha(u)\beta(v)$, como anteriormente, o vetor normal da imersão é dado por

$$N(u, v) = \alpha(u)\zeta_0\beta(v),$$

onde $\zeta_0 \in \mathbb{S}^2 \equiv \mathbb{S}^3 \cap \{x_1 = 0\}$. Uma vez que $\langle 1, \zeta_0 \rangle = 0$ temos

$$\langle \alpha', \alpha\zeta_0 \rangle = \langle \alpha'\beta, \alpha\zeta_0\beta \rangle = 0$$

$$\langle \beta', \zeta_0\beta \rangle = \langle \alpha\beta', \alpha\zeta_0\beta \rangle = 0.$$

Veremos que estas condições caracterizam curvas de torções 1 e -1 em \mathbb{S}^3 .

Proposição 3.2.6. *Sejam $\zeta_0 \in \mathbb{S}^2$ e γ uma curva parametrizada por comprimento de arco em \mathbb{S}^3 tal que:*

- Se $\langle \gamma', \gamma\zeta_0 \rangle = 0$ então γ tem torção 1 nos pontos de curvatura não nula.

- Se $\langle \gamma', \zeta_0 \gamma \rangle = 0$ então γ tem torção -1 nos pontos de curvatura não nula.

Demonstração. Primeiro temos que $\langle 1, \zeta_0 \rangle = 0$, logo $\langle \gamma', \gamma' \zeta_0 \rangle = 0$ pois as translações são isometrias. Suponha que $\langle \gamma', \gamma \zeta_0 \rangle = 0$. Assim, obtemos

$$0 = \langle \nabla_{\gamma'} \gamma', \gamma \zeta_0 \rangle + \langle \gamma', \nabla_{\gamma'} \gamma \zeta_0 \rangle.$$

Como a conexão na esfera é tal que $\nabla_{\gamma'} \gamma \zeta_0 = \gamma' \zeta_0 - \langle \gamma' \zeta_0, \gamma \rangle \gamma$, segue que

$$\langle \gamma', \nabla_{\gamma'} \gamma \zeta_0 \rangle = \langle \gamma' \zeta_0, \gamma' \rangle = 0.$$

Portanto

$$0 = \langle \nabla_{\gamma'} \gamma', \gamma \zeta_0 \rangle.$$

Temos que $\langle \gamma, \gamma \zeta_0 \rangle = 0$. Logo $\gamma \zeta_0$ é ortogonal a $\{\gamma, \gamma', \nabla_{\gamma'} \gamma'\}$. Uma vez que a curvatura é não nula, temos que $\nabla_{\gamma'} \gamma' \neq 0$, logo $\gamma \zeta_0$ é o vetor binormal de γ . Portanto o vetor normal de γ é $-\gamma' \zeta_0$. De fato, consideremos

$$\zeta_0 = a_1 i + b_1 j + c_1 k$$

tal que $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$. Sem perda de generalidade, podemos supor $\gamma(0) = 1$. Já sabemos que $\{\gamma, \gamma', \pm \gamma' \zeta_0, \gamma \zeta_0\}$ é uma base ortonormal. Queremos mostrar que

$$\text{Det}(\gamma, \gamma', -\gamma' \zeta_0, \gamma \zeta_0) = 1.$$

Primeiramente calculemos em 0. Escrevemos

$$\gamma(t) = a(t)1 + b(t)i + c(t)j + d(t)k.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= 1, \\ \gamma'(0) &= 0.1 + b'(0)i + c'(0)j + d'(0)k, \\ -\gamma'(0)\zeta_0 &= (b'(0)a_1 + c'(0)b_1 + d'(0)c_1)1 - (c'(0)c_1 - d'(0)b_1)i - (-b'(0)c_1 + d'(0)a_1)j \\ &\quad - (b'(0)b_1 - c'(0)a_1)k, \\ \gamma(0)\zeta_0 &= a_1 i + b_1 j + c_1 k. \end{aligned}$$

Como $\langle \gamma, \gamma' \zeta_0 \rangle = \langle \gamma', \gamma \zeta_0 \rangle = 0$ temos que $b'(0)a_1 + c'(0)b_1 + d'(0)c_1 = 0$. Omitindo $t = 0$, o determinante é dado por

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b' & -(c'c_1 - d'b_1) & a_1 \\ 0 & c' & -(-b'c_1 + d'a_1) & b_1 \\ 0 & d' & -(b'b_1 - c'a_1) & c_1 \end{vmatrix} \\ &= b'(-(-b'c_1 + d'a_1))c_1 + (-(c'c_1 - d'b_1)b_1d' \\ &+ a_1c'(- (b'b_1 - c'a_1)) \\ &- [a_1(-(-b'c_1 + d'a_1))d' + b'b_1(- (b'b_1 - c'a_1)) \\ &+ (-(c'c_1 - d'b_1)c_1] \\ &= b'^2 + c'^2 + d'^2 + (b'a_1 + c'b_1 + d'c_1)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sendo determinante uma função contínua, temos que para todo t pertencente a uma vizinhança aberta conexa temos que o determinante é positivo, o que conclui a afirmação. E assim a torção τ é dada por

$$\tau = -\langle \nabla_{\gamma'} \gamma \zeta_0, -\gamma' \zeta_0 \rangle = \langle \gamma' \zeta_0, \gamma' \zeta_0 \rangle = 1.$$

O segundo item segue analogamente. □

Observemos o seguinte resultado.

Lema 3.2.7. *Seja v um campo vetorial ao longo de uma curva parametrizada por comprimento de arco γ em \mathbb{S}^3 . Então:*

- v é um campo invariante à esquerda ao longo de γ se e somente se $\nabla_{\gamma'} v = \gamma' \times v$,
- v é um campo invariante à direita ao longo de γ se e somente se $\nabla_{\gamma'} v = v \times \gamma'$.

Demonstração. Consideremos $v(u) = \sum_{n=1}^3 f_n(u) \tilde{X}_n(\gamma(u))$. Assim

$$\nabla_{\gamma'} v = \sum_{n=1}^3 f'_n \tilde{X}_n + \gamma' \times v,$$

uma vez que $\nabla_{\tilde{X}_n} \tilde{X}_m = \frac{1}{2}[\tilde{X}_n, \tilde{X}_m] = 2 \tilde{X}_n \times \tilde{X}_m$. Pelo Teorema 1.5.9 e equações (2.7). Portanto o resultado segue. Para provar o segundo caso basta lembrar que a aplicação i_G é uma isometria

que reverte a orientação, assim

$$\nabla_{i_{G_*}\gamma'}i_{G_*}v = i_{G_*}\nabla_{\gamma'}v, \quad i_{G_*}\gamma' \times i_{G_*}v = i_{G_*}(v \times \gamma')$$

assim temos que $i_{G_*}v$ é invariante à esquerda pela primeira parte se e somente se $\nabla_{\gamma'}v = v \times \gamma'$ é já vimos que $i_{G_*}v$ é invariante a esquerda se e somente se v é invariante a direita ao longo de γ . \square

Na Proposição 3.2.6 vimos que o binormal de γ é dado por $\gamma\zeta_0$. Uma vez que a torção é igual a 1 o Teorema 3.2.2 garante que o binormal é invariante a esquerda. Pelo lema acima temos,

$$\gamma\zeta_0 \times \gamma' = -\gamma' \times \gamma\zeta_0 = -\nabla\gamma'\gamma\zeta_0 = -\gamma'\zeta_0,$$

o que mostra também que sendo o campo vetorial $\gamma\zeta_0$ o vetor binormal de γ devemos ter $-\nabla\gamma'\gamma\zeta_0 = -\gamma'\zeta_0$ como vetor normal a curva γ .

Além disso, se γ satisfaz a primeira parte da Proposição 3.2.6 temos que $\bar{\gamma}$ satisfaz a segunda parte dessa proposição uma vez que $\bar{\zeta}_0 = -\zeta_0$ e

$$\langle \bar{\gamma}', \zeta_0 \bar{\gamma} \rangle = -\langle \bar{\gamma}', \bar{\zeta}_0 \bar{\gamma} \rangle = -\langle \bar{\gamma}', \bar{\gamma} \bar{\zeta}_0 \rangle = -\langle \gamma', \gamma \zeta_0 \rangle = 0.$$

Dito isto podemos então enunciar uma versão mais interessante do Teorema 3.2.5

Teorema 3.2.8. (*[9]*) *Seja $\zeta_0 \in \mathbb{S}^2$. Consideremos as curvas α e β em \mathbb{S}^3 parametrizadas por comprimento de arco satisfazendo*

$$\langle \alpha', \alpha\zeta_0 \rangle = 0, \quad \langle \beta', \beta\zeta_0 \rangle = 0,$$

com $\alpha(0) = \beta(0) = 1$ e

$$\bar{\alpha}(u)\alpha'(u) \neq \pm\bar{\beta}(v)\beta'(v)$$

para todo u, v . Então

$$F(u, v) = \alpha(u)\bar{\beta}(v)$$

é uma imersão plana com vetor normal unitário $N(u, v) = \alpha(u)\zeta_0\bar{\beta}(v)$.

Demonstração. Basta notar que as curvas α e β nessas condições satisfazem o Teorema 3.2.5. De fato, para $\bar{\alpha}(u)\alpha'(u) \neq \pm\bar{\beta}(v)\beta'(v)$ temos que $\alpha'(u)\bar{\beta}(v) \neq \pm\alpha(u)\bar{\beta}'(v)$ o que é equivalente à

$F_u \neq \pm F_v$, isto é, as curvas α e β não são tangentes. Por outro lado, como $\zeta_0 \in \mathbb{S}^2$, $\langle \alpha', \alpha \zeta_0 \rangle = 0$ e $\langle \beta', \beta \zeta_0 \rangle = 0$, segue que ζ_0 está na direção do binormal de ambas as curvas o que mostra que os planos osculadores coincidem em $\alpha(0) = \beta(0) = 1$ e pela Proposição 3.2.6 temos que α tem torção 1 e $\bar{\beta}$ tem torção -1, ou seja, as curvas α e β satisfazem as hipóteses do Teorema 3.2.5 como afirmamos. \square

Vimos que, dadas curvas regulares de torção 1 e -1, conseguimos obter uma superfície plana. Reciprocamente, dada uma superfície plana completa conexa e orientável, conseguimos escreve-la como produto de curvas de torção 1 e -1. Em [4], o autor ressalta que essa construção ainda é válida no caso em que uma das curvas é uma geodésica, o que implica não ter torção definida em seus pontos. Em outras palavras, poderíamos ter considerado α e β curvas regulares parametrizadas por comprimento de arco em \mathbb{S}^3 , α com torção 1, β geodésica tais que existe $p \in \mathbb{S}^3$ com $\alpha(u_0) = \beta(v_0) = p$, não tangentes e com seus planos osculadores coincidindo em p . Primeiro, notemos que,

$$0 = \langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle_1 = \langle L_{\alpha(u)*} \alpha'(0), L_{\alpha(u)*} \beta'(0) \rangle_{\alpha(u)} = \langle \alpha'(u), L_{\alpha(u)*} \beta'(0) \rangle_{\alpha(u)}.$$

Sabemos que o espaço tangente de Σ coincide o plano osculador de α em $\alpha(u)$ e assim $\frac{D'}{du} \alpha'(u)$ é uma combinação linear de

$$\alpha'(u) \text{ e } L_{\alpha(u)*} \beta'(0).$$

Como a translação à direita é uma isometria temos que

$$\frac{D'}{du} \Big|_{u=u_0} R_{\beta(v_0)*} \alpha'(u) = R_{\beta(v_0)*} \frac{D'}{du} \Big|_{u=u_0} \alpha'(u),$$

portanto uma combinação linear de

$$R_{\beta(0)*} \alpha'(u_0) \text{ e } R_{\beta(0)*} L_{\alpha(u)*} \beta'(0).$$

Uma vez que $R_{\beta(0)*} L_{\alpha(u)*} \beta'(0) = L_{\alpha(u)*} R_{\beta(0)*} \beta'(0) = R_{\beta(0)*} \beta'(v)$, por (1.5.12) a curva geodésica β é uma curva integral de um campo invariante à direita. Segue que $\frac{D'}{du} \Big|_{u=u_0} R_{\beta(v_0)*} \alpha'(u)$ é combinação linear de $R_{\beta(0)*} \alpha'(u_0)$ e $R_{\beta(0)*} \beta'(v)$. Isso mostra que o vetor normal a curva

$$u \longmapsto \alpha(u) \beta(v_0)$$

em $u = u_0$ pertence ao espaço tangente, ou seja, o plano osculador desta curva em $u = u_0$ coincide com o espaço tangente em $\alpha(u_0) \beta(v_0)$. Portanto $u \longmapsto \alpha(u) \beta(v_0)$ é assintótica o que

implica que $K_{ext} = -1$ da superfície $\Sigma = \alpha(u)\beta(v)$. Para finalizar nossa análise, suponhamos agora que α e β fossem ambas geodésicas distintas tais que $\alpha(u_0) = \beta(v_0) = p$. Consideremos a curva $u \mapsto \alpha(u)\beta(v_0)$. Notemos que esta curva é geodésica, pois como vimos anteriormente

$$\left. \frac{D'}{du} \right|_{u=u_0} R_{\beta(v_0)*} \alpha'(u) = R_{\beta(v_0)*} \left. \frac{D'}{du} \right|_{u=u_0} \alpha'(u) = 0.$$

Analogamente concluímos que a curva $u \mapsto \alpha(u_0)\beta(v)$ também é geodésica, além disso notemos que

$$\begin{aligned} \langle R_{\beta(v_0)*} \alpha'(u_0), L_{\alpha(u_0)*} \beta'(v_0) \rangle &= \langle R_{\beta(v_0)*} L_{\alpha(0)*} \alpha'(0), L_{\alpha(u_0)*} R_{\beta(v_0)*} \beta'(0) \rangle \\ &= \langle L_{\alpha(u_0)*} R_{\beta(v_0)*} \alpha'(0), L_{\alpha(u_0)*} R_{\beta(v_0)*} \beta'(0) \rangle \\ &= \langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle, \end{aligned}$$

o que mostra que Σ tem duas famílias de geodésicas que se intersectam em um ângulo constante, logo

Proposição 3.2.9. *Se duas famílias de geodésicas se intersectam em um ângulo constante para todo ponto em Σ , então Σ é plana.*

Demonstração. Sejam X e Y os campos vetoriais unitários tangentes as curvas da primeira e da segunda família de geodésicas, respectivamente. Então X e Y são paralelos ao longo das curvas integrais de X , pois o ângulo entre eles é constante. Portanto temos que

$$[X, Y] = \nabla_X Y = \nabla_X X = \nabla_Y Y = \nabla_Y X = 0,$$

logo

$$R(X, Y)Y = \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X, Y]} Y = 0.$$

□

3.3 Representação de Kitagawa

Nesta seção estudaremos o método de construção das superfícies planas em \mathbb{S}^3 devido a Kitagawa. Vimos como obter superfícies planas através da Fibrção de Hopf. Estudamos o método devido a Biachi-Spivak, como também enunciamos o Teorema 3.2.8, usando a Proposição 3.2.6 a qual é devida a Kitagawa. Além disso, o método encontrado em [5], apresenta

um critério para a construção de superfícies planas compactas o que o permitiu obter uma classificação para os toros planos, resolvendo assim o problema proposto por Yau, ver [14]. Deste modo, nosso objetivo passa a demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1. (*[9]*) *Sejam $c_1(u)$, $c_2(v)$ duas curvas regulares em \mathbb{S}^2 , com $c_1(0) = c_2(0) = i$, $c'_1(0) = c'_2(0) = \xi_0$, onde $\xi_0 \in \mathbb{S}^3$ é ortogonal a $\{1, i\}$, e que*

$$\kappa_1(u) \neq \kappa_2(v),$$

para todo u, v , onde κ_1, κ_2 são as curvaturas geodésicas de $c_1(u)$, $c_2(v)$, respectivamente. Seja $\pi : \mathbb{S}^3 \mapsto US^2$ o recobrimento dado por

$$\pi(x) = (xi\bar{x}, x\xi_0\bar{x}).$$

Consideremos $a_1(u)$, $a_2(v)$ duas curvas em \mathbb{S}^3 parametrizadas por comprimento de arco e satisfazendo

$$\pi(a_1) = \left(c_1, \frac{c'_1}{\|c'_1\|} \right), \quad \pi(a_2) = \left(c_2, \frac{c'_2}{\|c'_2\|} \right).$$

Definamos

$$\Phi(u, v) = a_1(u)\bar{a}_2(v)$$

$$N(u, v) = a_1(u)\xi_0\bar{a}_2(v)$$

num retângulo R no plano uv . Se Σ é uma superfície simplesmente conexa e $\Psi : \Sigma \mapsto \Psi(\Sigma) = R$ é uma imersão plana, então $F = \Phi \circ \Psi$ é uma superfície plana em \mathbb{S}^3 com o normal unitário $N \circ \Psi$. Neste caso Ψ é uma imersão com coordenadas de Tschebyscheff, e a função ângulo desta superfície é

$$\omega(u, v) = \cotg^{-1}(\kappa_1(u)) - \cotg^{-1}(\kappa_2(v)).$$

Para isto, lembremos que a Fibrção de Hopf foi definida como sendo a aplicação $x \in \mathbb{S}^3 \mapsto xi\bar{x} \in \mathbb{S}^2$. Denotemos por US^2 o fibrado tangente unitário de \mathbb{S}^2 , que pode ser identificado em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ como

$$US^2 = \{(x, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 : \langle x, v \rangle = 0\}.$$

onde a projeção canônica é dada por $\pi_1 : (x, v) \in US^2 \mapsto x \in \mathbb{S}^2$. Definimos

$$\pi : x \in \mathbb{S}^3 \mapsto (xi\bar{x}, x\xi_0\bar{x}) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$$

onde $\xi_0 \in \mathbb{S}^2$ e ortogonal a \mathbf{i} . Notemos que $\pi(x) = \pi(-x)$ e $h = \pi_1 \circ \pi$, para todo $x \in \mathbb{S}^3$. Dado uma curva regular c em \mathbb{S}^2 , definimos

$$\hat{c} := \left(c, \frac{c'}{\|c'\|} \right)$$

uma curva regular em US^2 . Para cada curva c dada, queremos descobrir uma curva a em \mathbb{S}^3 tal que $\pi(a) = \hat{c}$ ou, equivalentemente, queremos a de tal modo que

$$\begin{cases} ai\bar{a} = c \\ a\xi_0\bar{a} = \frac{c'}{\|c'\|} \end{cases} .$$

Deste sistema, obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$a\xi_0\bar{a} = \frac{ai\bar{a}'}{\|ai\bar{a}'\|},$$

tal que existe uma única curva regular a em \mathbb{S}^3 que é solução.

Vamos mostrar que tal solução possui torção igual a 1 nos pontos de curvatura não nula.

Lema 3.3.2. *Seja c uma curva regular em \mathbb{S}^2 . Seja a uma curva regular em \mathbb{S}^3 tal que $\pi(a) = \hat{c}$. Então a curva a tem torção igual a 1 nos pontos de curvatura não nula.*

Demonstração. Notemos que, primeiramente para $c = ai\bar{a}$ temos que

$$c' = a[\bar{a}a', i]\bar{a}. \quad (3.11)$$

De fato, uma vez que $a\bar{a} = 1$, por derivação temos, $a'\bar{a} + a\bar{a}' = 0$, isto é $a'\bar{a} = -a\bar{a}'$. Segue que

$$\begin{aligned} c' &= a'i\bar{a} + ai\bar{a}' \\ &= a'i\bar{a} - (ai\bar{a}(-a\bar{a}')) \\ &= a'i\bar{a} - ai\bar{a}a'\bar{a} \\ &= a\bar{a}a'i\bar{a} - ai\bar{a}a'\bar{a} \\ &= a(\bar{a}a'i - \bar{a}a')\bar{a} \\ &= a[\bar{a}a', i]\bar{a}, \end{aligned}$$

como afirmamos. Deste fato temos que

$$\langle a', a\xi_0 \rangle = 0. \quad (3.12)$$

De fato, seja $\lambda = \|c'\|$, uma vez que $\frac{c'}{\lambda} = a\xi_0\bar{a}$ temos $a[\bar{a}a', i]\bar{a} = \lambda a\xi_0\bar{a}$ o que implica que $\bar{a}a'i - i\bar{a}a' = \lambda\xi_0$. Ao multiplicarmos esta última igualdade por a obtemos

$$a'i - ai\bar{a}a' = \lambda a\xi_0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lambda \langle a', a\xi_0 \rangle &= \langle a', a'i \rangle - \langle a', ai\bar{a}a' \rangle \\ &= \langle 1, i \rangle - \langle 1, ai\bar{a} \rangle \\ &= -\langle 1, c \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $c \in \mathbb{S}^2$. Logo $\langle a', a\xi_0 \rangle = 0$ como afirmamos. E pela Proposição 3.2.6 a curva a tem torção igual a 1 nos pontos de curvatura não nula, como queríamos. \square

Em [5], o Lema 3.8 garante que a é um levantamento assintótico de c , isto é, $\pi(a) = \hat{c}$ e a é uma curva assintótica em $h^{-1}(c)$. Mostraremos aqui que, se a_1, a_2 são curvas regulares em \mathbb{S}^3 tais que $\pi(a_1) = \hat{c}_1$ e $\pi(a_2) = \hat{c}_2$ então a_1 é uma curva assintótica na superfície $a_1(u)a_2(v)$, desde que bem definida. De fato, basta ver que

$$\langle a'_1\bar{a}_2, a'_1\xi_0\bar{a}_2 \rangle = \langle \bar{a}_2, \xi_0\bar{a}_2 \rangle = 0$$

pelo Lema 3.3.2.

Lema 3.3.3. *Seja c uma curva regular em \mathbb{S}^2 com curvatura geodésica κ . Seja a uma curva regular em \mathbb{S}^3 tal que $\pi(a) = \hat{c}$. Então*

$$\bar{a}a' = \frac{\|c'\|}{2}(\kappa i - \beta j + \alpha k), \quad (3.13)$$

onde $\xi_0 = \alpha j + \beta k$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Considerarmos funções $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ escolhidas adequadamente de tal modo que

$$\bar{a}a' = \lambda_0 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \quad (3.14)$$

Calculemos $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Vemos que

$$\lambda_0 = \langle \bar{a}a', 1 \rangle = \langle a', a \rangle = 0,$$

uma vez que as translações são isometrias e o vetor posição é ortogonal ao espaço tangente. Fazendo o produto com i , temos

$$\bar{a}a'i = -\lambda_1 + \lambda_3j - \lambda_2k$$

$$i\bar{a}a' = -\lambda_1 - \lambda_3j + \lambda_2k.$$

Por (3.11) temos que

$$c' = a(\bar{a}a'i - i\bar{a}a')\bar{a} = 2a(\lambda_3j - \lambda_2k)\bar{a}.$$

$c' = \lambda a \xi_0 \bar{a}$. Assim

$$c' = \lambda a \xi_0 \bar{a} = 2\lambda_3 a j \bar{a} - 2\lambda_2 a k \bar{a}.$$

Como $\xi_0 \in \mathbb{S}^2$ e é ortogonal a i , para $\xi_0 = \alpha j + \beta k$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lambda a \alpha j \bar{a} + \lambda a \beta k \bar{a} = 2\lambda_3 a j \bar{a} - 2\lambda_2 a k \bar{a}$$

o que nos permitir concluir que

$$\lambda_3 = \frac{\alpha \lambda}{2}; \quad \lambda_2 = -\frac{\beta \lambda}{2}.$$

Resta calcular λ_1 . Como $\lambda_1 = \langle \bar{a}a', i \rangle$, $i\xi_0 = \alpha k - \beta j$ e $\xi_0 i = -\alpha k + \beta j$ temos

$$\begin{aligned} [c, c'] &= \lambda \left[c, \frac{c'}{\lambda} \right] \\ &= \lambda [a i \bar{a}, a \xi_0 \bar{a}] \\ &= \lambda (a i \bar{a} a \xi_0 \bar{a} - a \xi_0 \bar{a} a i \bar{a}) \\ &= \lambda (a i \xi_0 \bar{a} - a \xi_0 i \bar{a}) \\ &= \lambda a (i \xi_0 - \xi_0 i) \bar{a} \\ &= 2\lambda a (-\beta j + \alpha k) \bar{a}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.5.9 e pelas equações (2.7), temos que $c \times c' = \frac{1}{2}[c, c']$, pois $c \in \mathbb{S}^2$. Deste modo, a curvatura geodésica da curva de c é dada por

$$\kappa(u) = \frac{\langle \nabla_{c'(u)} c'(u), c(u) \times c'(u) \rangle}{\|c'(u)\|^3} = \frac{1}{2\|c'(u)\|^3} \langle \nabla_{c'(u)} c'(u), [c(u), c'(u)] \rangle.$$

Suponhamos que $\|c'\| = 1$, então $c' = a \xi_0 \bar{a}$, segue que $\nabla_{c'} c' = a' \xi_0 \bar{a} + a \xi_0 \bar{a}'$. Portanto

$$\kappa(u) = \frac{1}{2} \langle a' \xi_0 \bar{a} + a \xi_0 \bar{a}', 2a(-\beta j + \alpha k) \bar{a} \rangle.$$

Novamente utilizando que as translações são isometrias e que $\xi_0 = \alpha j + \beta k \in \mathbb{S}^2$, temos que

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{2} \langle a' \xi_0 \bar{a} + a \xi_0 \bar{a}', 2a(-\beta j + \alpha k) \bar{a} \rangle \\
&= \langle a'(\alpha j + \beta k) \bar{a} + a(\alpha j + \beta k) \bar{a}', a(-\beta j + \alpha k) \bar{a} \rangle \\
&= \langle a' \alpha j \bar{a}, -a \beta j \bar{a} \rangle + \langle a' \beta k \bar{a}, -a \beta j \bar{a} \rangle + \langle a \alpha j \bar{a}', -a \beta j \bar{a} \rangle \\
&\quad + \langle a \beta k \bar{a}', -a \beta j \bar{a} \rangle + \langle a' \alpha j \bar{a}, a \alpha k \bar{a} \rangle + \langle a' \beta k \bar{a}, a \alpha k \bar{a} \rangle \\
&\quad + \langle a \alpha j \bar{a}', a \alpha k \bar{a} \rangle + \langle a \beta k \bar{a}', a \alpha k \bar{a} \rangle \\
&= -\alpha \beta \langle a' j, a j \rangle - \beta^2 \langle a' k, a j \rangle - \alpha \beta \langle j \bar{a}', j \bar{a} \rangle \\
&\quad - \beta^2 \langle k \bar{a}', j \bar{a} \rangle + \alpha^2 \langle a' j, a k \rangle + \beta \alpha \langle a' k, a k \rangle \\
&\quad + \alpha^2 \langle j \bar{a}', k \bar{a} \rangle + \beta \alpha \langle k \bar{a}', k \bar{a} \rangle \\
&= 2(\beta^2 + \alpha^2) \lambda_1 \\
&= 2\lambda_1.
\end{aligned}$$

Logo para o caso $\|c'\| = 1$ temos

$$\lambda_1 = \frac{\kappa}{2}.$$

Por outro lado, qualquer que seja $\|c'\|$ temos que $c' = \|c'\| a \xi_0 \bar{a}$, conseqüentemente obtemos

$$\nabla_{c'} c' = \frac{\langle \nabla_{c'} c', c' \rangle}{\|c'\|^2} c' + \|c'\| (a' \xi_0 \bar{a} + a \xi_0 \bar{a}').$$

Lembremos que $\langle c', [c, c'] \rangle = 0$ e por um cálculo análogo ao anterior temos que curvatura geodésica é dada por

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{2\|c'\|^3} \left\langle \frac{\langle \nabla_{c'} c', c' \rangle}{\|c'\|^2} c' + \|c'\| (a' \xi_0 \bar{a} + a \xi_0 \bar{a}'), [c, c'] \right\rangle \\
&= \frac{1}{2\|c'\|^5} \langle \nabla_{c'} c', c' \rangle \langle c', [c, c'] \rangle + \frac{1}{2\|c'\|^3} \langle \|c'\| (a' \xi_0 \bar{a} + a \xi_0 \bar{a}'), 2\|c'\| (-\beta j + \alpha k) \rangle \\
&= \frac{2}{\|c'\|} \lambda_1.
\end{aligned}$$

Logo, para o caso geral temos

$$\lambda_1 = \frac{\kappa}{2} \|c'\|.$$

Ao substituir os valores de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ na expressão (3.14) temos que

$$\bar{a} a' = \frac{\|c'\|}{2} (\kappa i - \beta j + \alpha k),$$

como queríamos. □

Demonstração do Teorema 3.3.1. Primeiramente notemos que a_1, a_2 satisfazem o Teorema 3.2.8. De fato, consideremos as curvas a_1, a_2 parametrizadas por comprimento de arco e satisfazendo $\pi(a_n) = \left(c_n, \frac{c'_n}{\|c'_n\|} \right), n = 1, 2$. Por (3.12) temos que

$$\langle a'_1, a_1 \xi_0 \rangle = 0 = \langle a'_2, a_2 \xi_0 \rangle.$$

Além disso,

$$a_1(0) \xi_0 \bar{a}_1(0) = c'_1(0) = \xi_0,$$

o que implica $a_1(0) = 1$. Do mesmo modo, $a_2(0) \xi_0 \bar{a}_2(0) = c'_2(0) = \xi_0$. Logo, $a_2(0) = 1$.

Afirmção 1. Se $\kappa_1(u) \neq \kappa_2(v)$ então $\bar{a}_1(u) a'_1(u) \neq \pm \bar{a}_2(v) a'_2(v)$.

De fato, suponhamos por contradição que $\bar{a}_1(u) a'_1(u) = \pm \bar{a}_2(v) a'_2(v)$, pela equação (3.13) temos que

$$\bar{a}_1(u) a'_1(u) = \frac{\|c'_1(u)\|}{2} [\kappa_1(u) \cdot i - \beta \cdot j + \alpha \cdot k] = \pm \frac{\|c'_2(v)\|}{2} [\kappa_2(v) \cdot i - \beta \cdot j + \alpha \cdot k] = \bar{a}_2(v) a'_2(v),$$

o que nos leva ao seguinte sistema

$$\begin{cases} \|c'_1(u)\| \kappa_1(u) = \pm \|c'_2(v)\| \kappa_2(v) \\ \|c'_1(u)\| \beta = \pm \|c'_2(v)\| \beta \\ \|c'_1(u)\| \alpha = \pm \|c'_2(v)\| \alpha. \end{cases} \quad (3.15)$$

Como $\xi_0 \in \mathbb{S}^2$, temos $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, o que implica que α e β não se anulam simultaneamente e assim do sistema (3.15) obtemos que $\|c'_1(u)\| = \pm \|c'_2(v)\|$. Ao substituir na primeira equação de (3.15) obtemos $\kappa_1(u) = \kappa_2(v)$, absurdo pois por hipótese $\kappa_1(u) \neq \kappa_2(v)$ portanto $\bar{a}_1(u) a'_1(u) \neq \pm \bar{a}_2(v) a'_2(v)$, o que conclui nossa afirmação.

Assim temos que Φ é uma imersão plana por coordenadas de Tschebyscheff em \mathbb{S}^3 com normal unitário N e

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_\Phi &= du^2 + 2\cos\omega \, dudv + dv^2 \\ \mathbb{III}_\Phi &= 2\sin\omega \, dudv \end{aligned},$$

como definida em (3.5). Se $\xi_0 = \alpha j + \beta k$, escreva $\xi_1 = -\beta j + \alpha k$. Notemos que, por a_1, a_2 serem curvas parametrizadas por comprimento de arco podemos escrever

$$\bar{a}_1(u) a'_1(u) = \cos\theta_1(u) \cdot i + \sin\theta_1(u) \cdot \xi_1 \quad (3.16)$$

$$\overline{a_2}(u)a'_2(v) = \cos\theta_2(v) \cdot i + \operatorname{sen}\theta_2(v) \cdot \xi_1 \quad (3.17)$$

onde θ_n é o ângulo entre $\overline{a_n}a'_n$ e i , $n = 1, 2$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{du} &= a'_1(u)\overline{a_2}(v) \\ &= a_1(u)(\overline{a_1}(u)a'_1(u))\overline{a_2}(v) \\ &= a_1(u)(\cos\theta_1(u) \cdot i + \operatorname{sen}\theta_1(u) \cdot \xi_1)\overline{a_2}(v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dv} &= a_1(u)\overline{a'_2}(v) \\ &= a_1(u)(\overline{a'_2}(v)a_2(v))\overline{a_2}(v) \\ &= a_1(u)\overline{(\overline{a_2}(v)a'_2(v))}\overline{a_2}(v) \\ &= a_1(u)(-\cos\theta_2(v) \cdot i - \operatorname{sen}\theta_2(v) \cdot \xi_1)\overline{a_2}(v) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\overline{a_1}a'_1\xi_0 = -\operatorname{sen}\theta_1(u) \cdot i + \cos\theta_1(u) \cdot \xi_1.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial u} &= a'_1(u)\xi_0\overline{a_2}(v) \\ &= a_1(u)(\overline{a_1}(u)a'_1(u)\xi_0)\overline{a_2}(v) \\ &= a_1(u)(-\operatorname{sen}\theta_1(u) \cdot i + \cos\theta_1(u) \cdot \xi_1)\overline{a_2}(v). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \cos\omega &= \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\rangle \\ &= -\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_2 \\ &= -(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= -\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 - \theta_2 + \pi) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\omega &= -\left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle \\ &= -(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= -\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2 + \pi). \end{aligned}$$

Por estas relações temos que

$$\omega(u, v) = \theta_1(u) - \theta_2(v) + \pi = \theta_1(u) - (\theta_2(v) - \pi). \quad (3.18)$$

Segue de (3.13), (3.16) e (3.17) que

$$\frac{\|c'_1\|}{2}(\kappa_1 \cdot i + \xi_1) = \cos\theta_1 \cdot i + \sin\theta_1 \cdot \xi_1$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\|c'_2\|}{2}(\kappa_2 \cdot i + \xi_1) &= \cos\theta_2 \cdot i + \sin\theta_2 \cdot \xi_1 \\ &= -\cos(\theta_2 - \pi) \cdot i - \sin(\theta_2 - \pi) \cdot \xi_1. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\frac{\|c'_1\|}{2}\kappa_1}{\frac{\|c'_1\|}{2}} = \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = \cotg\theta_1, \\ \kappa_2 &= \frac{\frac{\|c'_2\|}{2}\kappa_2}{\frac{\|c'_2\|}{2}} = \frac{-\cos(\theta_2 - \pi)}{-\sin(\theta_2 - \pi)} = \cotg(\theta_2 - \pi). \end{aligned}$$

Consequentemente (3.18) pode ser reescrita como

$$\omega(u, v) = \cotg^{-1}(\kappa_1(u)) - \cotg^{-1}(\kappa_2(v)).$$

Como Ψ é uma imersão isométrica de uma superfície simplesmente conexa Σ em $R(u, v)$ segue imediatamente que $F = \Phi \circ \Psi$ é uma superfície plana em \mathbb{S}^3 com o normal unitário $N \circ \Psi$. \square

Com relação a recíproca do Teorema 3.3.1, localmente a afirmação é verdadeira, uma vez que para uma superfície plana obtida pelo produto das a_1, a_2 como acima, podemos definir c_1, c_2 curvas regulares em \mathbb{S}^2 por

$$\pi(a_1) = \left(c_1, \frac{c'_1}{\|c'_1\|} \right), \quad \pi(a_2) = \left(c_2, \frac{c'_2}{\|c'_2\|} \right).$$

Como

$$\langle a'_1, a_1 \xi_0 \rangle = 0 = \langle a'_2, a_2 \xi_0 \rangle,$$

temos que se c_1 é regular então c'_1 é colinear com $a_1 \xi_0 \bar{a}_1$, equação (3.11). Segue analogamente para c_2 o que mostra que o processo pode ser revertido neste contexto, desde que a_1 e a_2 sejam curvas parametrizadas por comprimento de arco não tangentes.

Em caráter global, ainda em [5], no Teorema 4.3 o autor mostra que se Σ for uma superfície plana completa conexa com a curvatura média limitada é possível definir curvas na superfície plana de maneira que estas curvas também sejam levantamentos assintóticos de curvas regulares em \mathbb{S}^2 com todas as propriedades das curvas ' c_i 's que foram supostas no Teorema 3.3.1.

Em [9] tem-se que toda **superfície analítica** plana em \mathbb{S}^3 é construída pelo método acima para o mesmo ξ_0 . Em contrapartida o caso geral não se verifica. Mais especificamente, a hipótese de ser **analítica** é necessária uma vez que existem superfícies planas em \mathbb{S}^3 com três curvas assintóticas não congruentes. Este caso será abordado no Capítulo 4, Exemplo 7. Notemos também que nesses casos, se a imersão Ψ for injetiva temos um sistema de coordenadas de Tschebyscheff globalmente definido. Com relação ao problema da classificação do toros planos comecemos pelas seguintes definições:

Definição 3.3.4. ([5]) *Sejam c_1, c_2 curvas regulares em \mathbb{S}^2 . O par $\Gamma = (c_1, c_2)$ é dito ser admissível se satisfaz as seguintes condições:*

- $c_1(0) = c_2(0) = 1, c_1'(0)/\|c_1'(0)\| = c_2'(0)/\|c_2'(0)\| = \xi_0$;
- $\|c_1'(0)\|^2(1 + \kappa_1^2) = \|c_2'(0)\|^2(1 + \kappa_2^2) = 4$;
- $\kappa_1 \neq \kappa_2$ em toda parte, onde κ_1, κ_2 são as curvaturas geodésicas de c_1, c_2 respectivamente e ξ_0 é ortogonal a 1 e a i .

Seja $\Gamma = (c_1, c_2)$ um par admissível e F uma imersão plana com coordenadas de Tschebyscheff.

Definimos $G(\Gamma)$ por

$$G(\Gamma) = \{\rho \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2) : F \circ \rho = F\},$$

onde $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ denota o grupo de todos os difeomorfismos de \mathbb{R}^2 .

Definição 3.3.5. *Um par admissível $\Gamma = (c_1, c_2)$ é dito ser periódico se existe números l_1 e l_2 tais que as curvas c_1, c_2 são periódicas com períodos l_1, l_2 respectivamente.*

Por um cálculo simples temos que as c_1, c_2 nas condições do Teorema 3.3.1 formam um par admissível e pelo mesmo resultado temos que o produto de seus respectivos levantamentos assintóticos dão origem a uma superfície plana. Deste modo enunciemos sem demonstração o seguinte resultado:

Teorema 3.3.6. (*[5]*) *O espaço quociente $\mathbb{R}^2/G(\Gamma)$ é compacto se e somente Γ é periódico.*

Com este resultado, Kitagawa [5] reduziu o problema de classificação do toros planos em \mathbb{S}^3 à periodicidade dos pares admissíveis. Mais que isso, vimos que uma superfície plana completa, conexa e orientável pode ser obtida por um produto de curvas e assim não existe superfície plana completa conexa não orientável imersa isometricamente em \mathbb{S}^3 . Dado um par admissível periódico a superfície obtida pelo produto das curvas é compacta, orientável e plana. Segue do Teorema de Gauss-Bonnet que a característica desta superfície é nula, portanto é homeomorfa a um toro plano. Desta discussão Kitagawa consegue mostrar também o seguinte teorema.

Teorema 3.3.7. (*[5]*) *Se M é um toro isometricamente imerso em \mathbb{S}^3 , então todas curvas assintóticas em M são periódicas.*

Capítulo 4

Aplicações planas em \mathbb{S}^3

Neste capítulo, trataremos de uma generalização das superfícies planas em \mathbb{S}^3 , as **aplicações planas**. Veremos como os métodos devido a Bianchi-Spivak e a Kitagawa continuam válidos, isto é, estes dois métodos podem ser adaptados para construir aplicações planas em \mathbb{S}^3 . As referências para este capítulo são os trabalhos de Gálvez-Mira [10] e de Kitagawa-Umehara [7].

4.1 Aplicação plana em \mathbb{S}^3

Nesta seção, veremos como as aplicações planas generalizam superfícies planas. Apresentaremos como adaptar os métodos de construções para superfícies planas às aplicações planas. Neste contexto, vamos iniciar nossa discussão com a seguinte definição:

Definição 4.1.1. (*[10]*) *Uma aplicação plana em \mathbb{S}^3 é uma aplicação $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ de uma superfície Σ em \mathbb{S}^3 simplesmente conexa cuja a curvatura intrínseca é nula nos pontos regulares, e para a qual existe uma aplicação $\widehat{F} : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ (chamada aplicação polar de F) tal que $\langle F, \widehat{F} \rangle = \langle dF, \widehat{F} \rangle = 0$, e $\langle dF, dF \rangle + \langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle > 0$ em todo ponto de Σ .*

Sejam Σ uma superfície e $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ uma imersão plana. Se $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ é o normal

da imersão, existem parâmetros assintóticos definidos num retângulo $R(u, v)$ tais que:

$$\begin{aligned}\langle dF, dF \rangle &= du^2 + 2 \cos\omega \, dudv + dv^2, \\ \langle dF, dN \rangle &= 2 \operatorname{sen}\omega \, dudv, \\ \langle dN, dN \rangle &= du^2 - 2 \cos\omega \, dudv + dv^2, \\ \langle F, N \rangle &= 0, \\ \langle dF, N \rangle &= \langle F, dN \rangle = 0, \\ \omega_{uv} &\equiv 0.\end{aligned}$$

onde $\omega : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é o ângulo de F . Das equações acima, temos que $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ satisfaz a Definição 4.1.1, isto é, F é uma aplicação plana, portanto as aplicações planas generalizam superfícies planas. Notemos que a Definição 4.1.1 permite que uma aplicação plana F assumas singularidades, mais ainda, as equações acima continuam válidas para o caso das aplicações planas. De fato, seja $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ uma aplicação plana, uma vez que

$$\langle dF, \widehat{F} \rangle = \langle F, \widehat{F} \rangle = 0 \quad (4.1)$$

obtemos

$$\langle F, d\widehat{F} \rangle = 0. \quad (4.2)$$

Como nos pontos regulares, F tem curvatura intrínseca nula, pelo Teorema 1.4.7, existem vizinhanças destes pontos tais que as seguintes relações são satisfeitas:

$$\langle dF, dF \rangle = du^2 + 2 \cos\omega \, dudv + dv^2, \quad (4.3)$$

$$\langle dF, d\widehat{F} \rangle = 2 \operatorname{sen}\omega \, dudv, \quad (4.4)$$

$$\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle = du^2 - 2 \cos\omega \, dudv + dv^2, \quad (4.5)$$

$$\omega_{uv} \equiv 0 \quad (4.6)$$

como afirmamos. Reciprocamente, se $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ é tal que existem coordenadas satisfazendo as relações (4.1)-(4.6), temos que nos pontos regulares,

$$K_{ext} = -\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{1 - \cos^2\omega} = -1,$$

ou equivalentemente, $K_{int} = 0$. Uma vez que

$$\langle dF, dF \rangle + \langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle = 2(du^2 + dv^2) > 0,$$

temos que F é um aplicação plana como tínhamos afirmado.

Neste texto, usamos o termo **aplicação plana** como tradução do termo *flat front* como em Gálvez-Mira [10]. O estudo que apresentamos aqui é baseado neste artigo. Observamos que as aplicações planas também são considerados em Kitagawa-Umehara [7], em que a estrutura de grupo de Lie para \mathbb{S}^3 é $SU(2)$.

Destas observações temos que aplicação polar \widehat{F} é um aplicação plana. De fato, notemos que, ao considerar a aplicação F , temos:

$$\begin{aligned}
\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle &= du^2 - 2 \cos\omega \, dudv + dv^2 \\
&= du^2 + 2 \cos(\omega + \pi) \, dudv + dv^2, \\
\langle d\widehat{F}, dF \rangle &= 2 \operatorname{sen}\omega \, dudv = -2 \operatorname{sen}(\omega + \pi) \, dudv, \\
\langle dF, dF \rangle &= du^2 + 2 \cos\omega \, dudv + dv^2 = du^2 - 2 \cos(\omega + \pi) \, dudv + dv^2, \\
\langle \widehat{F}, F \rangle &= 0, \\
\langle dF, \widehat{F} \rangle &= \langle F, d\widehat{F} \rangle = 0, \\
\omega_{uv} &\equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Portanto o ângulo polar de \widehat{F} é $\widehat{\omega} = \omega + \pi$. Segue destas equações, em especial a (4.7), que $-F$ é a aplicação polar de \widehat{F} .

Pela definição 4.1.1, podemos introduzir o conceito de *aplicação paralela*.

Definição 4.1.2. *Seja $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ uma aplicação plana. Para cada número real δ a aplicação dada por*

$$F_\delta := (\cos\delta)F + (\operatorname{sen}\delta)\widehat{F}$$

*chamaremos de **aplicação paralela de F** .*

Vimos que uma aplicação polar de uma aplicação plana também é uma aplicação plana, e assim, se F for uma aplicação plana as aplicações $-F, \widehat{F}$ também serão aplicações planas. Isto sugere que a aplicação paralela, na Definição 4.1.2, é um aplicação plana uma vez

que para $F_\pi = -F$, $F_{\pi/2} = \widehat{F}$. De fato, tome F_δ como na Definição 4.1.2

$$\begin{aligned}
\langle dF_\delta, dF_\delta \rangle &= \langle (\cos\delta)dF + (\operatorname{sen}\delta)d\widehat{F}, (\cos\delta)dF + (\operatorname{sen}\delta)d\widehat{F} \rangle \\
&= \cos^2\delta\langle dF, dF \rangle + 2\cos\delta\operatorname{sen}\delta\langle dF, d\widehat{F} \rangle + \operatorname{sen}^2\delta\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle \\
&= \cos^2\delta(du^2 + 2\cos\omega\,dudv + dv^2) + 2\cos\delta\operatorname{sen}\delta(2\operatorname{sen}\omega\,dudv) \\
&\quad + \operatorname{sen}^2\delta(du^2 - 2\cos\omega\,dudv + dv^2) \\
&= du^2 + 2(\cos^2\delta\cos\omega - \operatorname{sen}^2\delta\cos\omega + 2\operatorname{sen}\delta\cos\delta\operatorname{sen}\omega)dudv + dv^2 \\
&= du^2 + 2(\cos(2\delta)\cos\omega + \operatorname{sen}(2\delta)\operatorname{sen}\omega)dudv + dv^2 \\
&= du^2 + 2\cos(\omega - 2\delta)dudv + dv^2,
\end{aligned}$$

o que novamente sugere que $\omega_\delta = \omega - 2\delta$ seja o ângulo polar de F_δ . Além disso se tomarmos

$$\widehat{F}_\delta = -(\operatorname{sen}\delta)F + (\cos\delta)\widehat{F},$$

temos que

$$\begin{aligned}
\langle d\widehat{F}_\delta, d\widehat{F}_\delta \rangle &= \langle -(\operatorname{sen}\delta)dF + (\cos\delta)d\widehat{F}, -(\operatorname{sen}\delta)dF + (\cos\delta)d\widehat{F} \rangle \\
&= \operatorname{sen}^2\delta\langle dF, dF \rangle - 2\operatorname{sen}\delta\cos\delta\langle dF, d\widehat{F} \rangle + \cos^2\delta\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle \\
&= \operatorname{sen}^2\delta(du^2 + 2\cos\omega\,dudv + dv^2) - 2\operatorname{sen}\delta\cos\delta(2\operatorname{sen}\omega\,dudv) \\
&\quad + \cos^2\delta(du^2 - 2\cos\omega\,dudv + dv^2) \\
&= du^2 + 2(\operatorname{sen}^2\delta\cos\omega - \cos^2\delta\cos\omega - 2\cos\delta\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\omega)dudv + dv^2 \\
&= du^2 + 2(-\cos(2\delta)\cos\omega - \operatorname{sen}(2\delta)\operatorname{sen}\omega)dudv + dv^2 \\
&= du^2 - 2\cos(\omega - 2\delta)dudv + dv^2 \\
&= du^2 - 2\cos\omega_\delta\,dudv + dv^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle dF_\delta, d\widehat{F}_\delta \rangle &= \langle (\cos\delta)dF + (\operatorname{sen}\delta)d\widehat{F}, -(\operatorname{sen}\delta)dF + (\cos\delta)d\widehat{F} \rangle \\
&= -\cos\delta\operatorname{sen}\delta\langle dF, dF \rangle + (\cos^2\delta - \operatorname{sen}^2\delta)\langle dF, d\widehat{F} \rangle + \operatorname{sen}\delta\cos\delta\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle \\
&= -4\cos\delta\operatorname{sen}\delta\cos\omega\,dudv + 2\cos(2\delta)\operatorname{sen}\omega\,dudv \\
&= 2\operatorname{sen}(\omega - 2\delta) \\
&= 2\operatorname{sen}\omega_\delta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle F_\delta, \widehat{F}_\delta \rangle &= \langle (\cos\delta)F + (\operatorname{sen}\delta)\widehat{F}, -(\operatorname{sen}\delta)F + (\cos\delta)\widehat{F} \rangle \\
&= -\cos\delta\operatorname{sen}\delta\langle F, F \rangle + (\cos^2\delta - \operatorname{sen}^2\delta)\langle F, \widehat{F} \rangle + \operatorname{sen}\delta\cos\delta\langle \widehat{F}, \widehat{F} \rangle \\
&= -\cos\delta\operatorname{sen}\delta \cdot 1 + (\cos^2\delta - \operatorname{sen}^2\delta) \cdot 0 + \operatorname{sen}\delta\cos\delta \cdot 1 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle F_\delta, d\widehat{F}_\delta \rangle &= \langle (\cos\delta)F + (\sin\delta)\widehat{F}, -(\sin\delta)dF + (\cos\delta)d\widehat{F} \rangle \\
&= -\cos\delta\sin\delta\langle F, dF \rangle + (\cos^2\delta - \sin^2\delta)\langle F, d\widehat{F} \rangle + \sin\delta\cos\delta\langle \widehat{F}, d\widehat{F} \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $\langle F, dF \rangle = \langle F, d\widehat{F} \rangle = \langle \widehat{F}, d\widehat{F} \rangle = 0$ uma vez que F e \widehat{F} estão na esfera \mathbb{S}^3 e satisfazem a Definição 4.1.1. Analogamente temos que $\langle F_\delta, d\widehat{F}_\delta \rangle = 0$ e $(\omega_\delta)_{uv} = (\omega - 2\delta)_{uv} = 0$. Isso mostra que F_δ satisfaz a Definição 4.1.1, como afirmamos.

Resumidamente, mostramos acima que se F é uma aplicação plana com aplicação polar \widehat{F} e ângulo ω , obtemos uma família de aplicações paralelas F_δ tal que cada elemento desta família é um aplicação plana com aplicação polar \widehat{F} e ângulo $\omega_\delta = \omega - 2\delta$. Além disso, os parâmetros assintóticos associados a F também serão assintóticos em F_δ .

Dados uma aplicação plana $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ e $p \in \Sigma$, a aplicação paralela é regular em p a menos de uma quantidade finita de valores reais $\delta \in [0, 2\pi]$. De fato, como $F_\delta = \cos\delta F + \sin\delta\widehat{F}$, então $dF_\delta = \cos\delta dF + \sin\delta d\widehat{F}$. Segue que

$$\langle dF_\delta, dF_\delta \rangle = \cos^2\delta\langle dF, dF \rangle + 2\cos\delta\sin\delta\langle dF, d\widehat{F} \rangle + \sin^2\delta\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle. \quad (4.8)$$

Afirmamos que $\langle dF_\delta, dF_\delta \rangle = 0$ em uma quantidade finita de valores para δ em $[0, 2\pi]$.

- Se $\langle dF, dF \rangle = 0$, então $\langle dF_\delta, dF_\delta \rangle = 0$ apenas em $\delta = 0$ ou $\delta = \pi$.
- Se $\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle = 0$, então $\langle dF_\delta, dF_\delta \rangle = 0$ apenas em $\delta = \pi/2$ ou $\delta = 3\pi/2$.
- Se $\langle dF, dF \rangle > 0$ e $\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle > 0$, então $\langle dF_\delta, dF_\delta \rangle = 0$ somente nos pontos em que $dF = \lambda d\widehat{F}$, em que λ é uma constante e $\delta = \arctan(-\lambda)$. De fato, como $\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle > 0$, podemos considerar que $\delta \neq \pi/2$ e usar (4.8) para escrever

$$0 = \langle dF, dF \rangle + 2\tan\delta\langle dF, d\widehat{F} \rangle + (\tan\delta)^2\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle.$$

A equação do segundo grau acima possui solução se e somente se

$$\langle dF, d\widehat{F} \rangle^2 - \langle dF, dF \rangle\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle \geq 0.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, a única possibilidade que temos é $\langle dF, d\widehat{F} \rangle^2 = \langle dF, dF \rangle\langle d\widehat{F}, d\widehat{F} \rangle$, o que é equivalente a $dF = \lambda d\widehat{F}$. Neste caso, a solução para a equação do segundo grau é $\tan\delta = -\lambda$.

4.2 Representação de Bianchi-Spivak para aplicação plana

Nesta seção, estudaremos o método de construção para aplicações planas baseado na Representação de Bianchi-Spivak. Na Seção 3.2 vimos que uma superfície plana na esfera 3-dimensional, pode ser descrita, localmente, como um produto de curvas e além disso pelo Lema 1.4.8 e pelo Teorema 1.4.7 temos tal superfície satisfaz a Definição 4.1.1, ou seja, é uma aplicação plana. Neste contexto mais geral temos o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1. (*[10]*) *Seja $\zeta_0 \in \mathbb{S}^2$. Sejam α e β curvas regulares em \mathbb{S}^3 parametrizadas por comprimento de arco tais que $\alpha(0) = \beta(0) = 1$. Suponha que*

$$\langle \alpha', \alpha \zeta_0 \rangle = 0, \quad \langle \beta', \beta \zeta_0 \rangle = 0.$$

Definamos as aplicações

$$\Phi(u, v) = \alpha(u)\bar{\beta}(v),$$

$$\hat{\Phi}(u, v) = \alpha(u)\zeta_0\bar{\beta}(v)$$

no retângulo $R(u, v)$. Então

$$F = \Phi \circ \Psi$$

é uma aplicação plana com aplicação polar

$$\hat{F} = \hat{\Phi} \circ \Psi$$

onde $\Psi : \Sigma \rightarrow R(u, v)$ é a imersão canônica tal que $\Psi(\Sigma) = R$.

A prova desse resultado segue diretamente do método de construção devido a Bianchi-Spivak, Teorema 3.2.8, e das observações feitas sobre aplicação plana F . De acordo com [10], defina uma relação de equivalência \sim em Σ tal que $p \sim q$ se e somente se $\Psi(p) = \Psi(q)$, temos que F, \hat{F} estão bem definidas em $\Sigma^* = \Sigma / \sim$. Além disso, $\Psi : \Sigma^* \rightarrow R(u, v)$ está bem definida e é injetiva, assim u, v são coordenadas no sentido usual e $\Psi(\Sigma^*) = R(u, v)$.

Como afirmado no Capítulo 3, vamos mostrar que a recíproca do Teorema 5.1.3 não é válido em geral para uma aplicação plana, porém esta construção pode ser revertida para toda aplicação plana analítica simplesmente conexa. Considere primeiramente um caso análogo ao discutido no Teorema 3.2.4, em outras palavras, seja F uma aplicação plana com aplicação

polar \widehat{F} e ângulo $\omega(u, v)$, definido sobre uma superfície simplesmente conexa U , e dotada com uma imersão canônica $\Psi : U \rightarrow R(u, v)$ injetiva. Então podemos identificar U com $R(u, v)$, e supor que $(0, 0) \in R(u, v)$. Como antes, vamos supor que $F(0, 0) = 1$ e $\widehat{F}(0, 0) = \zeta_0 \in \mathbb{S}^2$ e tomar $a_1(u) = F(u, 0)$ e $a_2(u) = F(0, v)$. Usando argumento análogo ao desenvolvido no Teorema 3.2.4, temos que, para

$$\Phi(u, v) = a_1(u)a_2(v), \quad \widehat{\Phi}(u, v) = a_1(u)\zeta_0a_2(v),$$

definidas no retângulo $R(u, v)$, obtemos

$$\begin{aligned} F &= \Phi \circ \Psi, \\ \widehat{F} &= \widehat{\Phi} \circ \Psi, \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde $\Psi : U \rightarrow R(u, v)$ é a imersão canônica injetiva e $\Psi(U) \subset R$.

Além disso, suponhamos que F é uma aplicação plana analítica definida em Σ . Então temos que a aplicação polar \widehat{F} e a imersão canônica $\Psi : \Sigma \rightarrow R(u, v)$ são ambas analíticas, e existem $U \subset \Sigma$ simplesmente conexa, tal que $\Psi|_U$ é injetiva e como discutido acima recuperamos as equações (4.9) em U . Observemos o seguinte resultado:

Proposição 4.2.2. (*[13]*) *Se f e g são ambas funções analíticas definidas sobre U e existe um aberto $W \subset U$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in W$, então $f(x) = g(x)$, para todo $x \in U$.*

Pela Proposição 4.2.2, podemos estender as curvas analíticas a_1, a_2 o máximo possível, assim $\Phi, \widehat{\Phi}$ são definidas num retângulo $R'(u, v)$. Segue que as equações (4.9) se mantêm num conjunto $W \supset U$. Da continuidade de F e do fato que Φ não admite extensão contínua adequada fora de R' tal que $\Psi(\Sigma) \subset R'(u, v)$, tem-se $W = \Sigma$. Assim, (4.9) se mantêm globalmente. Em particular, (F, \widehat{F}) está bem definidos sobre $\Sigma^* = \Sigma / \sim$, e u, v são coordenadas no sentido usual. Caso seja necessário, as coordenadas u, v podem ser escolhidas sendo definidas sobre todo $R'(u, v)$, tal que $\Psi(\Sigma^*) = R'(u, v)$.

4.3 Representação de Kitagawa para aplicação plana

Nesta seção estudaremos o método de construção para aplicações planas baseado na Representação de Kitagawa. Na Seção 3.3, definimos a Fibração de Hopf pela aplicação

$$x \in \mathbb{S}^3 \longmapsto xi\bar{x} \in \mathbb{S}^2.$$

Definimos também o recobrimento duplo π dado por

$$\pi : x \in \mathbb{S}^3 \longmapsto (xi\bar{x}, x\xi_0\bar{x}) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2,$$

onde $\xi_0 \in \mathbb{S}^3$ é ortogonal a 1 e a \mathbf{i} . Pela equação (3.11) temos que, para $c = ai\bar{a}$,

$$c' = a[\bar{a}a', i]\bar{a}.$$

Segue deste fato que

$$\langle a', a\xi_0 \rangle = 0.$$

Além disso, para uma curva regular c em \mathbb{S}^2 com curvatura geodésica κ tal que $\pi(a) = \hat{c}$ temos ainda que,

$$\bar{a}a' = \frac{\|c'\|}{2}(\kappa.i - \beta.j + \alpha.k).$$

Destes fatos citados podemos enunciar a seguinte generalização do método de Kitagawa:

Teorema 4.3.1. *Sejam $c_1(u)$, $c_2(v)$ duas curvas regulares em \mathbb{S}^2 , com $c_1(0) = c_2 = i$, $c'_1(0) = c'_2(0) = \xi_0$ para $\xi_0 \in \mathbb{S}^3$ ortogonal a 1, i . Seja $\pi : \mathbb{S}^3 \longmapsto U\mathbb{S}^2$ o recobrimento dado por*

$$\pi(x) = (xi\bar{x}, x\xi_0\bar{x}).$$

Consideremos $a_1(u)$, $a_2(v)$ duas curvas em \mathbb{S}^3 parametrizadas por comprimento de arco e satisfazendo

$$\pi(a_1) = \left(c_1, \frac{c'_1}{\|c'_1\|} \right), \quad \pi(a_2) = \left(c_2, \frac{c'_2}{\|c'_2\|} \right).$$

Definamos

$$\Phi(u, v) = a_1(u)\bar{a}_2(v),$$

$$\widehat{\Phi}(u, v) = a_1(u)\xi_0\bar{a}_2(v),$$

num retângulo $R(u, v)$ no plano uv . Se Σ é uma superfície simplesmente conexa e $\Psi : \Sigma \mapsto \Psi(\Sigma) = R$ é uma imersão plana, então $F = \Phi \circ \Psi$ é uma aplicação plana com aplicação polar $\widehat{F} = \widehat{\Phi} \circ \Psi$ e ângulo

$$\omega(u, v) = \theta(u) - \theta(v),$$

onde θ_1 (resp. θ_2) é o ângulo entre $\overline{a_1 a'_1}$ ($\overline{a_2 a'_2}$) e i .

A demonstração deste resultado segue diretamente da prova do Teorema 3.3.1, exceto que a condição de regularidade foi retirada. Em outras palavras, vimos que se κ_1, κ_2 são as curvaturas geodésicas de $c_1(u), c_2(v)$ respectivamente, tais que

$$\kappa_1(u) \neq \kappa_2(v),$$

para todo u, v , então a_1, a_2 são não tangentes, o que implica que todos os pontos da aplicação plana são regulares.

Com relação a recíproca do Teorema 5.1.4, temos que localmente, a afirmação é verdadeira, análogo ao Capítulo 3. Em caráter global, temos também que se Σ for completa e simplesmente conexa conseguimos que toda aplicação plana pode ser dada desta maneira, como no Teorema 3.2.4. Note que é suficiente ver que as formas fundamentais coincidem. Neste contexto, em [5] pela suposição que a curvatura média seja limitada é possível encontrar um par admissível para o qual uma superfície plana completa conexa pode ser obtida pelo método descrito no Teorema 3.3.1. Além deste casos, podemos afirmar que toda aplicação plana analítica simplesmente conexa em \mathbb{S}^3 pode ser construída pelo método acima para o mesmo ξ_0 , basta usarmos a Proposição 4.2.2. A hipótese da analiticidade, como dito no Capítulo 3, não pode ser enfraquecida, como veremos no exemplo seguinte:

Exemplo 7. (Observação 11, [10]) *Existe superfície plana simplesmente conexa em \mathbb{S}^3 que não pode ser obtida, em caráter global, através de qualquer um dos dois métodos estudados aqui. De fato, sejam $a_1, a_2, \tilde{a}_2 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{S}^3$ curvas parametrizadas por comprimento de arco, tal que:*

1. a_1 tem torção $\tau = 1$, e a_2, \tilde{a}_2 ambas com torção $\tau = -1$;
2. $a_1(0) = a_2(0) = \tilde{a}_2(0) = 1$;

3. $a_2(t) = \tilde{a}_2(t)$ para todo $t \in (-1, 0]$, porém $a_2(t) \neq \tilde{a}_2(t)$ para $t \in (0, 1)$;

4. Os pares de curvas a_1, a_2 e a_1, \tilde{a}_2 estão nas condições do Teorema 3.3.1.

Em seguida, defina $\Sigma_0 = (-1, 1) \times (-1, 1) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$, e $\Sigma_1 = (-1, 1) \times (-1, 1) \times \{1\} \subset \mathbb{R}^3$, e considere a superfície plana não conexa $\Phi : \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{S}^3$ dada por

$$\Phi(u, v, 0) = a_1(u)a_2(v)$$

$$\Phi(u, v, 1) = a_1(u)\tilde{a}_2(v).$$

Agora defina em $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ a relação de equivalência que identifica $(u, v, 0) \simeq (u, v, 1)$ para todo $(u, v) \in (-1, 1) \times (-1, 0)$, e considere os conjuntos

$$R_0 = ((-1, 1) \times (-1, 0) \times \{0\}) \cup ((-1, -1/2) \times (-1, 1) \times \{0\}) \subset \Sigma_0,$$

$$R_1 = ((-1, 1) \times (-1, 0) \times \{1\}) \cup ((1/2, 1) \times (-1, 1) \times \{1\}) \subset \Sigma_0.$$

Segue que $\Sigma := (R_0 \cup R_1)/\simeq$ é uma superfície plana simplesmente conexa, com coordenadas u, v adequadas. Note que esta superfície não pode ser obtida pelos métodos de Bianchi-Spivak e Kitagawa, pois ela possui mutuamente três curvas assintóticas não-congruentes, fato este que não aconteceria se as curvas fossem analíticas, uma vez que pela Proposição 4.2.2, seria impossível a condição $a_2(t) \neq \tilde{a}_2$.

Capítulo 5

Considerações

Do que estudamos até aqui, temos duas representações fundamentais para descrever as superfícies planas em \mathbb{S}^3 , os métodos de Kitagawa e Bianchi-Spivak. Neste capítulo faremos algumas considerações e citaremos alguns resultados importantes desta teoria. Além disto, apresentaremos um resumo dos problemas em aberto.

5.1 Resumo dos resultados apresentados

Temos que as construções devido a Spivak-Bianchi e Kitagawa podem ser recuperadas localmente, para superfícies planas completas e simplesmente conexas, ou ainda sob a suposição da analiticidade e que nenhuma dessas hipóteses podem ser retiradas, (Exemplo 7). Em resumo estudamos os seguintes resultados:

Teorema 5.1.1. *Sejam α e β curvas regulares parametrizadas por comprimento de arco em \mathbb{S}^3 com torções 1 e -1, respectivamente, tais que $\alpha(0) = \beta(0) = 1$. Se α e β não são tangentes em 0 e seus planos osculadores coincidem em 0, então $\Sigma = \alpha(u)\beta(v)$ é uma superfície plana.*

Teorema 5.1.2. *([9]) Seja $c_1(u)$, $c_2(v)$ duas curvas regulares em \mathbb{S}^2 , com $c_n(0) = i$, $c'_n(0) = \xi_0$, $n = 1, 2$ para $\xi_0 \in \mathbb{S}^3$ ortogonal a $1, i$ e que*

$$\kappa_1(u) \neq \kappa_2(v),$$

para todo u, v , onde κ_1, κ_2 são as curvaturas geodésicas de $c_1(u), c_2(v)$, respectivamente. Seja $\pi : \mathbb{S}^3 \mapsto U\mathbb{S}^2$ o recobrimento dado por

$$\pi(x) = (xi\bar{x}, x\xi_0\bar{x}).$$

Consideremos $a_1(u), a_2(v)$ duas curvas em \mathbb{S}^3 parametrizadas por comprimento de arco e satisfazendo $\pi(a_n) = \left(c_n, \frac{c'_n}{\|c'_n\|} \right), n = 1, 2$. Definamos

$$\Phi(u, v) = a_1(u)\bar{a}_2(v)$$

$$N(u, v) = a_1(u)\xi_0\bar{a}_2(v)$$

num retângulo R no plano uv . Se Σ é uma superfície simplesmente conexa e $\Psi : \Sigma \mapsto \Psi(\Sigma) = R$ é uma imersão plana, então $F = \Phi \circ \Psi$ é uma superfície plana em \mathbb{S}^3 com o normal unitário $N \circ \Psi$. Neste caso, Ψ é uma imersão com coordenadas de Tschebyscheff, e a função ângulo desta superfície é

$$\omega(u, v) = \cotg^{-1}(\kappa_1(u)) - \cotg^{-1}(\kappa_2(v)).$$

Estudamos também as aplicações planas, apresentamos como os métodos acima podem ser adaptados para a construir uma aplicação plana. Em resumo, temos:

Teorema 5.1.3. (*[10]*) *Seja $\zeta_0 \in \mathbb{S}^2$. Sejam α e β curvas regulares em \mathbb{S}^3 parametrizadas por comprimento de arco tais que $\alpha(0) = \beta(0) = 1$. Suponha que*

$$\langle \alpha', \alpha\zeta_0 \rangle = 0, \quad \langle \beta', \beta\zeta_0 \rangle = 0.$$

Definamos as aplicações

$$\Phi(u, v) = \alpha(u)\bar{\beta}(v),$$

$$\widehat{\Phi}(u, v) = \alpha(u)\zeta_0\bar{\beta}(v)$$

no retângulo $R(u, v)$. Então

$$F = \Phi \circ \Psi$$

é uma aplicação plana com aplicação polar

$$\widehat{F} = \widehat{\Phi} \circ \Psi$$

onde $\Psi : \Sigma \rightarrow R(u, v)$ é a imersão canônica tal que $\Psi(\Sigma) = R$.

Teorema 5.1.4. *Sejam $c_1(u)$, $c_2(v)$ duas curvas regulares em \mathbb{S}^2 , com $c_1(0) = c_2(0) = i$, $c'_1(0) = c'_2(0) = \xi_0$ para $\xi_0 \in \mathbb{S}^3$ ortogonal a $1, i$. Seja $\pi : \mathbb{S}^3 \mapsto \mathbb{S}^2$ o recobrimento dado por*

$$\pi(x) = (xi\bar{x}, x\xi_0\bar{x}).$$

Consideremos $a_1(u)$, $a_2(v)$ duas curvas em \mathbb{S}^3 parametrizadas por comprimento de arco e satisfazendo

$$\pi(a_1) = \left(c_1, \frac{c'_1}{\|c'_1\|} \right), \quad \pi(a_2) = \left(c_2, \frac{c'_2}{\|c'_2\|} \right).$$

Definamos

$$\Phi(u, v) = a_1(u)\overline{a_2(v)}$$

$$\widehat{\Phi}(u, v) = a_1(u)\xi_0\overline{a_2(v)}$$

num retângulo $R(u, v)$ no plano uv . Se Σ é uma superfície simplesmente conexa e $\Psi : \Sigma \mapsto \mathbb{S}^2$ é uma imersão plana, então $F = \Phi \circ \Psi$ é uma aplicação plana com aplicação polar $\widehat{F} = \widehat{\Phi} \circ \Psi$ e ângulo

$$\omega(u, v) = \theta(u) - \theta(v),$$

onde θ_1 (resp. θ_2) é o ângulo entre $\overline{a_1}a'_1$ ($\overline{a_2}a'_2$) e i .

5.2 Resultados globais fundamentais

Em Spivak [4], são levantadas algumas questões sobre superfícies planas, em especial o toro plano:

1. Seja h a fibração de Hopf e \tilde{c} uma curva assintótica não-geodésica em $h^{-1}(c)$ tal que $h(\tilde{c}) = c$. É possível determinar precisamente para quais curvas c a curva \tilde{c} é fechada?
2. Existem α e β curvas regulares fechadas em \mathbb{S}^3 de torções $\tau = 1$ e $\tau = -1$ tais que a superfície obtida pelo produto destas curvas é um toro plano imerso?
3. Existem α e β curvas injetivas em \mathbb{S}^3 de torções $\tau = 1$ e $\tau = -1$ tais que a superfície obtida pelo produto destas curvas é uma aplicação injetiva em \mathbb{S}^3 ?
4. Tentar analisar as superfícies planas completas não-orientáveis em \mathbb{S}^3 com $K_{ext} = -1$.

O estudo de tais questões ajudou a desenvolver a teoria global em \mathbb{S}^3 . Em Gálvez [9], nas seções 6.6 e 6.7, encontramos um resumo acerca dos resultados globais fundamentais, que está organizado da seguinte forma:

A classificação dos toros planos: Como dito anteriormente, este problema foi proposto por Yau [14] e resolvido por Kitagawa [5]. O autor provou que as curvas assintóticas de um toro plano em \mathbb{S}^3 são periódicas, respondendo assim a questão 2 de Spivak. Tal resultado mostra que qualquer toro plano é gerado pelo método devido a Kitagawa (Teorema 3.3.1) se as duas curvas regulares c_1, c_2 em \mathbb{S}^2 são fechadas.

Toro plano mergulhado em \mathbb{S}^3 : Seja $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ a fibração de Hopf. Temos que para c uma curva regular fechada em \mathbb{S}^2 , a imagem inversa $h^{-1}(c)$ é um toro plano mergulhado em \mathbb{S}^3 . Além destes, em Kitagawa [5], o autor obteve exemplos de toros planos também mergulhados em \mathbb{S}^3 (Teorema B), que diferem dos primeiros por não conter grandes círculos em \mathbb{S}^3 . Em [8], Kitagawa mostrou que a simetria antipodal mantém-se para todos os toros planos mergulhados em \mathbb{S}^3 , isto é, se $f : M \rightarrow \mathbb{S}^3$ é um mergulho isométrico do toro plano M em \mathbb{S}^3 , então a imagem $f(M)$ é invariante pela aplicação antipodal de \mathbb{S}^3 (Teorema 1.1). Tem-se também o seguinte corolário:

Corolário 5.2.1. *(Corolário 3.2, [8]) Se $f : M \rightarrow \mathbb{S}^3$ é um mergulho isométrico de um toro plano M em \mathbb{S}^3 , então existe um par admissível periódico Γ tal que f e F são congruentes, isto é, existe uma isometria A de \mathbb{S}^3 que satisfaz $A \circ f = F \circ \rho$, para algum difeomorfismo $\rho : M \rightarrow M_\Gamma$, onde M_Γ é o toro plano $\mathbb{R}^2/G(\Gamma)$.*

Superfícies planas não-orientáveis \mathbb{S}^3 : A questão 4 propõe o estudo de superfícies planas não-orientáveis. Dos resultados citados na introdução deste capítulo segue que nenhuma superfície plana completa e não-orientável pode ser imersa isometricamente em \mathbb{S}^3 . Por outro lado, a existência de superfícies não-orientáveis em \mathbb{S}^3 ainda não é clara. Sob a suposição de analiticidade temos que toda superfície plana analítica em \mathbb{S}^3 é orientável, o que difere com a situação \mathbb{R}^3 . Além disso, esta condição não pode ser enfraquecida a suavidade, como há exemplos de faixas de Möbius planas em \mathbb{S}^3 , construído em [10].

5.3 Problemas em aberto

Apresentaremos nesta seção um resumo dos problemas em aberto desta teoria. Em [10], Gálvez afirma que uma das características da teoria das superfícies planas em \mathbb{S}^3 é a existência de questões muito básicas que ainda não foram respondidas, e cuja solução parece ser bastante complicada. De fato, da bibliografia estudada, temos algumas questões em aberto deixadas pelos próprios autores, a exemplo do Spivak. Isto torna a teoria ainda mais interessante. Nesta última seção apresentaremos apenas os destacados como mais relevantes em [9].

Existência de um mergulho isométrico do \mathbb{R}^2 em \mathbb{S}^3 : "Este é certamente o maior problema aberto na teoria" (Gálvez [9]). Uma superfície plana completa tem a topologia de um plano, um cilindro, um toro, uma faixa de Möbius ou uma garrafa de Klein. Destes, os dois casos não-orientáveis são impossíveis se a superfície plana é imersa isometricamente em \mathbb{S}^3 , como vimos anteriormente. Além disso, sabe-se que existem toros planos e cilindros planos mergulhados em \mathbb{S}^3 . Contudo, a existência de uma superfície plana completa e simplesmente conexa mergulhada em \mathbb{S}^3 é desconhecido. Esse problema foi inicialmente posto por Spivak [4] usando uma formulação ligeiramente diferente. Em [15] foi conjecturado que o problema tem uma resposta negativa.

Rigidez dos toros de Clifford: O problema da rigidez questiona se duas imersões isométricas diferentes de uma variedade Riemanniana M^n numa variedade Riemanniana N^{n+p} diferem necessariamente apenas por uma isometria da variedade ambiente N^{n+p} . Se este for o caso, diz-se que M^n é rígido em N^{n+p} . Como as superfícies planas mais simples em \mathbb{S}^3 são os toros de Clifford $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$, é completamente natural perguntar se estes toros são rígidos em \mathbb{S}^3 . Este problema tem sido atraente entre os especialistas, e algumas condições naturais sob as quais os toros de Clifford são rígidos foram obtidos, mas o problema de rigidez permanece aberto.

O espaço de imersões isométricas de um toro plano: Já comentamos que Kitagawa classificou os toros planos. Contudo, tem-se a seguinte questão: Dado um toro plano abstrato T , qual é o espaço das imersões isométricas de T em \mathbb{S}^3 ?

Superfícies planas com singularidades: As aplicações planas podem ser entendidas como superfícies com um certo tipo de singularidades admissíveis. Neste texto, o que chamamos de aplicação plana, é citado na bibliografia como *flat front*. Dos trabalhos de Gálvez-Mira [10] e Kitagawa-Umehara [7], estudamos como os métodos de construção de superfícies planas podem ser adaptados as aplicações planas. Sendo assim, seria interessante entender o comportamento das aplicações planas a partir dos métodos de construção estudados. Ainda em [10], os autores afirmam que as aplicações planas em \mathbb{S}^3 são uma ferramenta importante no problema da classificação das imersões isométricas de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^4 , como também conseguiram obter uma nova família de toros planos em \mathbb{R}^4 que não estão na esfera tridimensional.

Referências Bibliográficas

- [1] MARTIN, Luiz A. B. San. *Grupo de Lie*. Notas de aula. IMECC-Unicamp. 2016. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~smartin/cursos/grupolie-2016/gruplie0.pdf>;
- [2] CARMO, Manfredo P. do *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, 3ª ed. Rio de Janeiro, 2008.
- [3] CARMO, Manfredo P. do *Geometria Riemanniana*. IMPA, 5ª ed. Rio de Janeiro, 2015.
- [4] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Texas, 3rd Edition, 1995.
- [5] KITAGAWA, Yoshihisa. *Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in \mathbb{S}^3* , J. Math. Soc. Japan, 40 (1988), 457-476.
- [6] KITAGAWA, Yoshihisa. *Flat tori in the 3-dimensional sphere*, Sugaku Expositions. Volume 21 (2008), 133-145.
- [7] KITAGAWA, Yoshihisa. UMEHARA, Masaaki *Extrinsic diameter of immersed flat tori in \mathbb{S}^3* , Geom. Dedicata (2011).155:105-140.
- [8] KITAGAWA, Yoshihisa. *Embedded flat tori in the unit 3-sphere*, J. Math. Soc. Japan, 47 (1995), 275-296;
- [9] GALVEZ, José A. *Surfaces of constant curvature in 3-dimensional space forms*. Matemática Contemporânea 37 (2009): 01-42. SBM, 3ª ed. Rio de Janeiro, 2008.
- [10] GALVEZ, José A., MIRA, P. *Isometric immersions of \mathbb{R}^2 into \mathbb{R}^4 and perturbation of Hopf tori*, Math. Z

- [11] PINKALL, U. *Hopf tori in \mathbb{S}^3* , Invent. Math. 81 (1985), 379-386;
- [12] BIEZUNER, Rodney Josué, *Geometria Riemanniana*. Notas de aula. Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais. 26 de junho de 2016. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/iedp.pdf.
- [13] KRANTZ, Steven G., PARKS, Harold R., *A primer of real analytic functions*. Springer Science & Business Media, 27 de jun de 2002;
- [14] YAU, S. T., *Submanifolds with constant mean curvature II*, Amer. J. Math., 97 (1975), 76-100.
- [15] DADOK, J., SHA, J., **On embedded flat surfaces in \mathbb{S}^3** , J. Geom. Anal. 7 (1997), 47-55;
- [16] BIANCHI, L.: *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica*. Ann. Mat. Pura Appl. 24, 93-129 (1896).

Apêndice A

Apêndice

Neste apêndice apresentaremos alguns cálculos e\ou observações que não entraram no corpo principal do texto.

Afirmção 2. *o vetor binormal é unitário*

De fato, por definição

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left(\sum_{n=1}^3 f_n \tilde{X}_n \right) \times \left(\frac{1}{\mathbf{k}} \sum_{m=1}^3 f'_m(s) \tilde{X}_m \right) \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}} \sum_{n,m=1}^3 f_n f'_m \tilde{X}_n \times \tilde{X}_m \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}} [(f_2 f'_3 - f_3 f'_2) \tilde{X}_1 + (f_3 f'_1 - f_1 f'_3) \tilde{X}_2 + (f_1 f'_2 - f_2 f'_1) \tilde{X}_3] ; \text{ por (2.9)}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle &= \frac{1}{\mathbf{k}^2} [(f_2 f'_3 - f_3 f'_2)^2 + (f_3 f'_1 - f_1 f'_3)^2 + (f_1 f'_2 - f_2 f'_1)^2] \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}^2} [f_2^2 f_3'^2 - 2f_2 f'_3 f_3 f'_2 + f_3^2 f_2'^2 + f_3^2 f_1'^2 - 2f_3 f'_1 f_1 f'_3 + f_1^2 f_3'^2 \\ &\quad + f_2^2 f_1'^2 - 2f_2 f'_1 f_1 f'_2 + f_1^2 f_2'^2] \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}^2} [f_1^2 (f_2'^2 + f_3'^2) + f_2^2 (f_1'^2 + f_3'^2) + f_3^2 (f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2) \\ &\quad - 2f_2 f'_3 f_3 f'_2 - 2f_3 f'_1 f_1 f'_3 - 2f_2 f'_1 f_1 f'_2] \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}^2} [\mathbf{k}^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) - f_1 f'_1 (f_1 f'_1 + f_2 f'_2) - f_2 f'_2 (f_2 f'_2 + f_3 f'_3) \\ &\quad - f_3 f'_3 (f_3 f'_3 + f_1 f'_1) - f_1 f'_1 f_2 f'_2 - f_1 f'_1 f_3 f'_3 - f_2 f'_2 f_3 f'_3], \text{ por (2.14), (2.10)} \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}^2} [\mathbf{k}^2 + f_1 f'_1 f_3 f'_3 + f_2 f'_2 f_1 f'_1 + f_3 f'_3 f_2 f'_2 \\ &\quad - f_1 f'_1 f_2 f'_2 + f_1 f'_1 f_3 f'_3 - f_2 f'_2 f_3 f'_3] \\ &= 1 \end{aligned}$$

como queríamos.

Observação A.0.1. *Temos que*

$$h^{-1}(p) = \{x \in \mathbb{S}^3 \mid -x_1p_4 + x_2p_3 - x_3(1 + p_2) = 0, x_2p_4 + x_1p_3 - x_4(1 + p_2) = 0\}$$

assim

$$\frac{-x_1p_4 + x_2p_3}{1 + p_2} = x_3, \quad \frac{x_2p_4 + x_1p_3}{1 + p_2} = x_4;$$

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (-p_4, p_3, -(1 + p_2), 0) \rangle = 0, \quad \langle (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (p_3, p_4, 0, -(1 + p_2)) \rangle = 0.$$

o que conclui o afirmado.

Afirmção 3. *Note que todas as curvas $v \mapsto \alpha(u)\beta(v)$ têm torção -1 uma vez que β tem torção -1 .*

De fato, tome $\gamma = \alpha(u)\beta$ temos

$$\gamma' = \alpha(u)\beta', \quad \gamma'' = \alpha(u)\beta''$$

o que implica que as curvaturas de γ e β são iguais, isto é $\mathbf{k}_\gamma = \mathbf{k}_\beta$. No mesmo contexto, temos $\mathbf{n}_\gamma = \alpha(u)\mathbf{n}_\beta$ logo $\tau_\gamma = \tau_\beta$. pelo Teorema 2.5.1 concluímos nossa afirmação.