Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções Ground State e Nodais Minimais para Problemas Não-Locais

por

Alex de Moura Batista

Orientador: Prof. Marcelo Fernandes Furtado

Brasília

2016

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções Ground State e Nodais Minimais para Problemas Não-Locais

por

Alex de Moura Batista *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

21 de Junho de 2016

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado (MAT/UnB)

Prof. Dra. Liliane de Almeida Maia (MAT/UnB)

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (MAT/UFV)

Prof. Dr. Maxwell Lizete Silva (MAT/UFG)

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva (MAT/UFG)

*O autor foi bolsista da CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer aos meus pais por todo amor, por toda ajuda, por acreditarem sempre nos meus sonhos. Muito obrigado por serem meu porto seguro.

Ao meu orientador Marcelo pela excelente orientação, pelo cuidado e atenção. Serei eternamente grato.

À professora Liliane de Almeida Maia pelas discussões tão importantes, pela atenção, por toda gentileza. Muito obrigado.

Aos professores que tiveram a paciência de analisar este trabalho e contribuir com sugestões tão relevantes: professores Olímpio, Liliane, Edcarlos e Maxwell.

Ao pessoal do banquinho da Matemática pelos momentos de descontração.

Ao professor Everaldo de Souto Medeiros pela excelente orientação no Mestrado. Por toda paciência e por encaminhar-me para o doutorado da UnB. Muito obrigado.

À Rainelly (Lili) por toda amizade e por estar presente em tantos momentos especiais de minha vida. As minhas amigas Elizabeth e Elisânia pela parceria durante o mestrado.

Aos professores de graduação Lourena Karin de Medeiros Rocha, por ensinar-me a gostar de matemática e ao professor Adriano Thiago Lopes Bernardino pelos conselhos no final da graduação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos resultados de existência de soluções ground state e nodais minimais para problemas não-locais do tipo Schrödinger-Poisson e Kirchhoff. As principais ferramentas utilizadas são Métodos Variacionais e minimização sobre restrições apropriadas.

Palavras-Chaves: Problemas não-locais; soluções minimais; minimização sob restrições.

Abstract

In this work, we study the existence of ground state and minimal nodal solutions for some non-local problems of Schrödinger-Poisson and Kirchhoff type. The main tools used are Variational Methods and minimization arguments

Keywords: Non-local problems; minimal solutions; minimization under constraints.

Conteúdo

Notações

- $c, c_1, c_2, ...$ denotam constantes positivas possivelmente distintas.
- $\mathbb{R}^N$ é o espaço euclidiano de dimensão N com vetores $x = (x_1, \cdots, x_N)$.
- $B_r(y)$ é a bola de centro y e raio r em $\mathbb{R}^N$ ou E espaço de Hilbert. Escreveremos B_r no lugar de $B_r(0)$.
- $o_n(1)$ denota uma expressão que dependendo de $n \in \mathbb{N}$ que tende a 0 quando $n \to \infty$.
- ∇u é o gradiente de uma função real u: $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$.
- Δ denota o laplaciano: $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
- $\mu(\Omega)$ é a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável Ω.
- denotamos $\int_\Omega u(x)dx$ simplesmente por $\int_\Omega u$ e quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, abreviamos escrevendo $\int u$.
- $L^p(\Omega)$ é o espaço usual de Lebesgue com norma $\|\cdot\|_p$.
- χ_Ω representa a função característica do conjunto Ω.
- $\to$ q.t.p em Ω representa convergência em quase todo ponto de Ω.
- $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}$

Introdução

Neste trabalho, investigamos a existência de soluções *minimais* para problemas não-locais. Mais precisamente, no Capitulo 1 estudamos o problema de Schrödinger-Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + K(x)\phi(x)u = f(x,u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = K(x)u^2 & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

e nos Capítulo 2 e 3, estudamos o problema de Kirchhoff

$$-\Big(1 + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u + V(x)u = g(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

com $N \in \{3,4\}$ e $\lambda \geq 0$.

O problema de Schrödinger-Poisson foi estudado inicialmente por Benci e Fortunato no artigo [14] (veja também [15]), onde os autores consideram o problema de auto-valor obtido atravéz da interação de ondas estacionárias da equação de Schrödinger com um campo eletroestático ϕ, em um domínio limitado Ω, isto é,

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\Delta u - \phi u = \omega u & \text{em} \quad \Omega, \\ \Delta\phi = 4\pi u^2 & \text{em} \quad \Omega, \\ \phi = g \quad \text{e} \quad u = 0 & \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Após estes trabalhos, o problema tem sido exaustivamente estudado, com vários resultados de existência, não-existência, multiplicidade e concentração de solução (veja [10, 6, 7, 16, 18, 45] e suas referências).

Nos Capítulos 2 e 3, estudamos o problema de Kirchhoff. Este problema foi proposto por Kirchhoff em [32], onde foi feito o estudo de pequenas oscilações transversais de uma corda elástica com densidade linear constante e extremos fixos, cujo modelo unidimensional é

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Big(\frac{\rho_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big| dx\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Sua versão N-dimensional é

$$\begin{cases} u_{tt} - \Big(m_0 + b\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases}$$

Este problema ganhou notoriedade maior após o trabalho [42], onde o autor o abordou via ferramentas de análise funcional não-linear. Sua versão estaciónaria tem sido largamente estudada a partir do trabalho [4], onde os autores notam que este problema tem uma estrutura variacional. Para resultados de existência, não-existência, multiplicidade e concentração (veja [8, 11, 9, 24, 27, 28, 38] e suas referências.)

Para apresentar em detalhes os resultados deste trabalho, dividimos o restante desta introdução em três seções.

Problema de Schrödinger-Poisson

No Capítulo 1, estudaremos o problema de Schrödinger-Poisson, com potenciais que podem mudar de sinal. Na primeira parte obteremos uma solução *ground state* e na segunda uma solução *nodal minimal*. Mais especificamente, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + K(x)\phi(x)u = a(x)f(u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = K(x)u^2 & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{S}$$

onde $f(s) = |s|^{p-1}s$, $p \in (3,5)$. Para apresentar as hipóteses sobre os potenciais vamos denotar $V^+(x) = \max\{V(x), 0\}$, $V^-(x) = \max\{-V(x), 0\}$ e

$$S := \inf\Big\{\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}; \quad u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3), \quad \|u\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 1\Big\}.$$

Vamos supor que

(V_0) $V^- \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ e $\int_{\mathbb{R}^3} |V^-(x)|^{3/2}dx < S^{3/2}$, onde

$$S := \inf\left\{\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}; \quad u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3), \quad \|u\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 1\right\};$$

(V_1) existem constantes μ, $c_V > 0$ tais que

$$V(x) \leq V_\infty - c_V e^{-\mu|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

com

$$0 < V_\infty := \lim_{|x|\to+\infty} V(x);$$

(a_0) $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$;

(a_1) existem constantes $\gamma, c_a > 0$ tais que

$$a(x) \geq a_\infty - c_a e^{-\gamma|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

com

$$a_\infty := \lim_{|x|\to+\infty} a(x) > 0;$$

(K_0) $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$;

(K_1) existem constantes $\alpha, c_K > 0$ tais

$$0 \leq K(x) \leq c_K e^{-\alpha|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, o Teorema da Representação de Riesz garante que o problema

$$-\Delta\phi = K(x)u^2 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3,$$

possui uma única solução fraca $\phi = \phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim, o sistema (S) se reduz à equação

$$-\Delta u + V(x)u + K(x)\phi_u(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \tag{P}$$

que é precisamente a equação de Euler-Lagrange do funcional $I : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1}dx.$$

Então, se $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é um ponto crítico deste funcional, $(u, \phi_u) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é solução fraca do sistema (S).

Dizemos que uma solução $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ não nula do problema (P) é ground state se

$$I(u_0) \leq I(v),$$

para toda possível solução $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ não nula deste problema, isto é, quando ela tem a menor energia entre todas as outras possíveis solução do problema. Dizemos que uma solução $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ do problema (P) é nodal se ela muda de sinal. Ela é dita nodal minimal se possui a menor energia entre todas as outras possíveis solução nodais deste problema.

Os principais resultados do Capítulo 1 são:

Teorema 0.1. *Suponha que $p \in (3,5)$ e os potenciais V, a e K satisfazem $(V_0) - (V_1)$, $(a_0) - (a_1)$ e $(K_0) - (K_1)$, respectivamente. Se*

$$\mu < \min\{\alpha, \gamma\}, \quad \gamma < (p+1)\sqrt{V_\infty} \quad e \quad \alpha < 2\sqrt{V_\infty},$$

então o problema (P) possui uma solução ground state que é não negativa.

Teorema 0.2. *Suponha que $p \in (3,5)$ e os potenciais V, a e K satisfazem $(V_0) - (V_1)$, $(a_0) - (a_1)$ e $(K_0) - (K_1)$, respectivamente. Se*

$$\mu < \min\{\alpha, \gamma\}, \quad \gamma < (p+1)\sqrt{V_\infty} \quad e \quad \alpha < \sqrt{V_\infty},$$

então o problema (P) possui uma solução nodal minimal.

Para a comodidade do leitor, todos os teoremas enunciados aqui serão enunciados novamente nos capítulos correspondentes.

O problema de Schrödinger-Poisson é dito não-local devido a presença do termo ϕ_u. Neste caso, existe uma competição entre este termo e a não-linearidade, cuja consequência é uma série de dificuldades matemáticas. Por exemplo, mesmo para problemas autônomos ou homogêneos deste tipo, o argumento de Multiplicadores de Lagrange utilizado em [13, 17] não é adequado. Inúmeros trabalhos consideram a seguinte variação da condição de Ambrosetti-Rabinowitz:

(AR) existe $\mu > 4$ tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$0 < \mu F(s) := \int_0^s f(t)dt \leq sf(s).$$

Observe que, ao contrário da condição usual $\mu > 2$, temos aqui uma restrição maior, que está relacionada ao fato da propriedade $\phi_{tu}(x) = t^2\phi_u(x)$ implicar no aparecimento de um termo de ordem 4 no funcional energia. Com tal condição é possível provar a existência de uma sequência de Palais-Smale, bem como sua limitação. Utilizando a condição de monotocidade

(M) $s \mapsto f(s)/s^3$ é não-decrescente;

e condições mais gerais que (AR), os autores provam em [2], que o problema possui uma solução ground state. Em [10], os autores estudam este problema, com a não-linearidade satisfazendo as condições gerais dadas em [13]. No entanto, devido ao argumento de trucamento lá utilizado, eles não garantem que a solução é ground state.

Quando $f(s) = |s|^{p-1}s$, em [45], o autor estuda o problema para $p \in (2, 5)$. Devido à influência do termo não local ϕ_u, a principal dificuldade está no intervalo $p \in (2, 3]$. Para superar esta dificuldade, o autor minimizou o funcional energia sobre uma variedade induzida pelos pontos críticos da fibração $\psi(t) := I(tu(xt^2))$. Gostaríamos também de citar os trabalhos [16, 20], onde autores provam a existência de solução ground state para este problema com potenciais não negativos.

Em todos os trabalhos mencionados acima os potenciais são não negativos. Quando os potenciais mudam de sinal, gostaríamos de citar o artigo [48], onde os autores provam que o problema

$$-\Delta u + V(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

possui uma solução ground state e uma solução nodal minimal, com $p \in (2, 5)$ e os pesos satisfazem as condição $(V_0) - (V_1)$ e $(a_0) - (a_1)$ dadas acima.

Baseados nos trabalhos mencionados acima, na primeira parte do Capítulo 1 provamos a existência de uma solução ground state para o problema (P). Como em vários trabalhos na literatura, a obtenção desta solução será dada através da variedade de Nehari

$$\mathcal{N} := \Big\{u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}; \quad I'(u)u = 0\Big\}.$$

Note que faz sentido provar a existência de solução ground state minimizando sobre esta variedade pois ela contém todos os pontos críticos não nulos do funcional I. Após os trabalhos [19, 41, 44], esta variedade tem sido exaustivamente utilizada, não apenas na obteção de soluções ground state para problemas, onde argumentos de escalonamentos dados em [13] não são adequados, como também na recuperação de resultados de compacidade para problemas não-radiais. Para propriedades e generalizações veja [47].

Como o potencial a pode mudar de sinal, o estudo desta variedade se torna delicado. Após provar que ela não é vazia, vamos minimizar o funcional I restrito a $\mathcal{N}$. Para contornar a falta de compacidade da imersão compacta $H^1(\mathbb{R}^3)$ em $L^q(\mathbb{R}^3)$, para $q \in (2,6)$, diferentemente de [16, 20], comparamos níveis adequados de funcionais energia de modo a garantir que a sequência minimizante converge fracamente para alguma solução não nula $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ do problema (P). Por fim, mostraremos que esta solução é ground state pois é obtida como o limite fraco de uma sequência minimizante.

Na segunda parte do Capítulo 1, estamos interessados em provar a existência de uma solução nodal minimal para o problema (P). A existência de solução nodal para o problema autônomo de Schrödinger-Poisson é provada em [29, 30, 33]. Em [3] (veja também [1]), os autores utilizando métodos variacionais provam a existência de solução nodal minimal para este problema. Para isto eles notam que, diferentemente do problema de Schrödinger, onde uma solução nodal pode ser obtida minimizando o funcional energia sobre o conjunto

$$\mathcal{M} := \Big\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3); \quad u^{\pm} \not\equiv 0 \quad \text{e} \quad I'(u^{\pm})u^{\pm} = 0 \Big\},$$

devido a influência do termo não local ϕ_u, o conjunto adequado é

$$\mathcal{N}^{\pm} := \Big\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3); \quad u^{\pm} \not\equiv 0 \quad \text{e} \quad I'(u)u^{+} = 0 = I'(u)u^{-} \Big\}.$$

Em todos os trabalhos anteriores os potenciais envolvidos são positivos.

Motivados pelos trabalhos mencionados acima, estudamos a existência de solução nodal minimal para o problema (P) utilizando a variedade nodal $\mathcal{N}^{\pm}$ dada em [2, 1]. Inicialmente, como a aplicação $u \mapsto u^{\pm}$ é apenas contínua, não podemos utilizar o Teorema da Função Implícita de modo a obter uma sequência minimizante cuja derivada do funcional energia converge para zero. Argumentando como em [48, 12], obtemos uma sequência minimizante que pode não ter essa propriedade. Apesar disto, provamos que esta sequência converge fracamente para $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ solução fraca do problema (P). Depois, argumentando como em [3], garantimos que $(u_1)^{\pm} \not\equiv 0$. Por fim, mostramos que $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é minimal por ser o limite fraco de uma sequência minimizante.

Os resultados obtidos no Capítulo 1 complementam os de [16] e generalizam os de [3, 20].

Problema de Kirchhoff: caso indefinido

No Capítulo 2, estudamos o problema de Kirchhoff, com potenciais que podem mudar de sinal. Na primeira parte obtemos uma solução ground state e na segunda parte uma solução nodal minimal. Mais especificamente, consideramos o problema

$$-\Big(1+\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx\Big)\Delta u+V(x)u=a(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \tag{K}$$

com $p \in (3,5)$. Como será visto, é importante considerarmos inicialmente um problema limite associado a (K). Assim, dados $V_\infty, a_\infty > 0$, mostramos que o problema

$$-\Big(1+\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx\Big)\Delta u+V_\infty u=a_\infty|u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \tag{K_∞}$$

possui uma solução ground state $\omega \in H^1(\mathbb{R}^3)$. A partir desta solução, definimos

$$h^* := \Big(1+\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla \omega|^2dx\Big)^{1/2}.$$

Vamos supor que os potenciais V e a satisfazem, além de (V_0) e (a_0),

$(\widetilde{V}_1)$ existem constantes $\mu, c_V > 0$ e $h > h^*$ tais que

$$V(x) \le V_\infty - c_V e^{-\frac{\mu}{h}|x|}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3,$$

onde

$$0 < V_\infty := \lim_{|x|\to+\infty} V(x);$$

$(\widetilde{a}_1)$ existem constantes $\gamma, c_a > 0$ e $h > h^*$ tais que

$$a(x) \ge a_\infty - c_a e^{-\frac{\gamma}{h}|x|}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3,$$

onde

$$a_\infty := \lim_{|x|\to+\infty} a(x) > 0$$

O primeiro resultado do Capítulo 2 é

Teorema 0.3. *Suponha que $p \in (3,5)$, o potencial V safistaz (V_0) e $(\widetilde{V}_1)$, e o potencial a satisfaz (a_0) e $(\widetilde{a}_1)$. Se*

$$\mu < \gamma < (p+1)\sqrt{V_\infty},$$

então o problema (K) possui uma solução ground state não negativa.

Na segunda parte do Capítulo 2, procuramos por uma solução que muda de sinal. Neste caso, vamos ter que impor uma condição de simetria para o problema de modo a recuperar a compacidade da imersão de $H^1(\mathbb{R}^3)$ nos espaços de Lebesgue. Mais especificamente, vamos supor que V (e também a) é uma função radialmente simétrica, isto é, $V(x) =$

$V(|x|)$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Neste caso, dizemos que uma função radial é nodal minimal se, além de nodal, ela possui energia mínima entre as possíveis soluções radiais nodais do problema.

As hipóteses são

$(\widetilde{V}_0)$ a função $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é radial, satisfaz (V_0) e

$$V_\infty := \lim_{|x| \to +\infty} V(x) > 0;$$

$(\widetilde{a}_0)$ a função $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ é radial e

$$a_\infty := \lim_{|x| \to +\infty} a(x) > 0.$$

Teorema 0.4. *Suponha que $p \in (3, 5)$, V satisfaz $(\widetilde{V}_0)$ e o potencial a satisfaz $(\widetilde{a}_0)$. Então o problema (K) possui uma solução radial nodal minimal.*

Como observado em [4], o problema (K) tem uma estrutura variacional. Suas soluções fracas são precisamente os pontos críticos do funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I(u) := \int_{\mathbb{R}^3} \Big(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\Big)dx + \frac{1}{4}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx\Big)^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1}dx.$$

Este problema também é não-local devido a presença do termo $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx$. Isto gera uma série de dificultadades matemáticas, algumas das quais se assemelham àquelas do problema de Schrödinger-Poisson.

Em relação a existência de solução ground state, a primeira dificuldade encontrada é que, devido a influência do termo não local, mesmo para problemas autônomos ou homogêneos de Kirchhoff, não podemos proceder como em [13]. Para contornar esta dificuldade, nos trabalhos [27, 28], os autores provarm a existência de solução ground state minimizando sobre a variedade de Nehari.

Quanto ao estudo de existência de solução nodal minimal, gostaríamos de citar os trabalhos [22, 23] que utilizam minimização no conjunto

$$\mathcal{N}^\pm := \Big\{u \in H^1(\mathbb{R}^3); \quad u^\pm \not\equiv 0 \quad \text{e} \quad I'(u)u^+ = 0 = I'(u)u^-\Big\}.$$

Na primeira parte do Capítulo 2, estudamos a existência de solução ground state para o problema (K), via variedade de Nehari. Embora tenhamos a influência do termo não local, diferente de alguns trabalhos como [38], provamos de imediato que a sequência minimizante converge fracamente para uma função $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ que é solução do problema problema (K). Como no Capítulo 1, gostaríamos de obter uma relação entre níveis (veja Proposição 1.13), de modo a garantir que u_0 é não nula. No entanto, para obtermos esta estimativa, é fundamental provarmos que a solução ground state do problema limite (K_∞) tenha um decaimento exponencial.

Diferente do problema de Schrödinger-Poisson, temos dificuldade em utilizar o Lema 1.24 para obter este decaimento. Para contornar esta dificultade, argumentando como em [8], notamos que se $\omega \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é solução do problema limite, então $v(x) := \omega(xh^*)$ é solução da equação de Schrödinger e, por [13], segue o decaimento. Com este decaimento, argumentamos como no Capítulo 1 e provamos a existência da solução ground state.

Depois de obter a solução ground state, gostaríamos de proceder como no Capítulo 1 e provar a existência de uma solução nodal minimal. No entanto, uma etapa fundamental deste procedimento exige decaimento exponencial da solução ground state. Como o problema (K) é não-autônomo, até o momento não conseguimos provar este decaimento. Assim, exigindo radialidade para os potenciais, obtivemos uma solução nodal minimal.

Para finalizar, gostaríamos de observar que, até onde sabemos, os resultados deste capítulo são os primeiros que tratam o problema com a presença de potenciais que podem mudar de sinal.

Problema de Kirchhoff: caso definido

No capítulo 3, estudamos o problema

$$-\Big(1+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx\Big)\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \qquad (K_\lambda)$$

onde $N \in \{3,4\}$, $\lambda \geq 0$ e o potencial V satisfaz

$(\widehat{V}_0)$ $V \in C^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ e a aplicação $x \mapsto (V(x), \nabla V(x)\cdot x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, é radial;

$(\widehat{V}_1)$ existe uma constante $c_V > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^N$ vale $V(x) \geq c_V$. Além disso,

$$0 < V_\infty := \lim_{|y|\to+\infty} V(y);$$

Além disto, vamos precisar de algumas condições nas derivadas do potencial V. Mais especificamente, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, vamos supor que

(V_2) $\nabla V(x)\cdot x \leq 0$;

(V_3) $V(x) + \frac{\nabla V(x) \cdot x}{N} \geq V_\infty$;

(V_4) $\nabla V(x) \cdot x + \dfrac{\nabla\Big(\nabla V(x) \cdot x\Big) \cdot x}{N} \leq 0.$

A não linearidade f satisfaz:

(f_0) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(f_1) existem constantes $a_1, a_2 > 0$, $p \in (1, 2^* - 1)$, tais que

$$|f(s)| \leq a_1|s| + a_2|s|^p, \quad \forall\, s \in \mathbb{R};$$

(f_2) $\lim_{s \to 0} f(s)/s = 0$;

(f_3) existe $\zeta > 0$ tal que

$$\int_0^\zeta \Big(f(s) - V_\infty s\Big) ds > 0.$$

O principal resultado do Capítulo 3 é:

Teorema 0.5. *Suponha que $N = 4$, V satisfaz $(\widehat{V}_0)$, $(\widehat{V}_1)$ e $(V_2) - (V_4)$. Se f satisfaz $(f_0) - (f_3)$, então existe $\lambda^* > 0$ tal que, para todo $\lambda \in [0, \lambda^*)$, o problema (K_λ) possui uma solução ground state $u_\lambda \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^4)$. Essa solução satisfaz*

$$u_\lambda \to u_0 \quad \textit{fortemente em} \quad H^1(\mathbb{R}^4),$$

quando $\lambda \to 0^+$, onde $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^4)$ é uma solução não trivial do problema

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \textit{em} \quad \mathbb{R}^4.$$

Se $N = 3$, o mesmo resultado vale com $\lambda^* = +\infty$.

Devido à restrição de radialidade imposta ao potencial V, neste capítulo teremos uma noção mais restrita de solução de energia mínima. Mais precisamente, diremos que uma solução radialmente simétrica $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^3)$ do problema (K_λ) é ground state se

$$I_\lambda(u_\lambda) = \inf \Big\{ I_\lambda(u) \, : \, u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ é solução de } (K_\lambda) \Big\}$$

onde $I_\lambda : H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é o funcional energia associado ao problema (K_λ).

Observamos que as condições $(V_2) - (V_4)$ aparecem no artigo [36], onde os autores consideram a equação de Schrödinger com a não-linearidade assintoticamente linear. Um exemplo de uma função que satisfaz as condições $(\widehat{V}_0)$, $(\widehat{V}_1)$ e $(V_2) - (V_4)$ é

$$V(x) = V_\infty + \frac{1}{(|x|^a + 1)},$$

para $0 < a \leq N$. Com efeito, como

$$\nabla V(x) \cdot x = -\frac{a|x|^a}{(|x|^a + 1)^2},$$

as condições $(\widehat{V}_0)$ e (V_2) são sastifeitas. Além disso,

$$\begin{aligned} V(x) + \frac{\nabla V(x) \cdot x}{N} &= V_\infty + \frac{1}{|x|^a + 1} - \frac{a|x|^a}{N(|x|^a + 1)^2} \\ &= V_\infty + \frac{(N-a)|x|^a + N}{N(|x|^a + 1)^2} \\ &\geq V_\infty, \end{aligned}$$

o que verifica a condição (V_3). Por fim, veja que

$$\nabla(\nabla V(x) \cdot x) \cdot x = -\frac{a^2|x|^a}{(|x|^a + 1)^2} + \frac{2a^2|x|^{2a}}{(|x|^a + 1)^3}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \nabla V(x) \cdot x + \frac{\nabla(\nabla V(x) \cdot x) \cdot x}{N} &= -\frac{a|x|^a}{(|x|^a + 1)^2} - \frac{a^2|x|^a}{N(|x|^a + 1)^2} + \frac{2a^2|x|^{2a}}{N(|x|^a + 1)^3} \\ &= -\frac{a|x|^{2a}(N-a)}{N(|x|^a + 1)^3} - \frac{a|x|^a(N+a)}{N(|x|^a + 1)^3} \leq 0 \end{aligned}$$

e portanto a condição (V_4) é satisfeita.

A hipótese (f_3) está relacionada com um condição análoga introduzida por Berestyckei e Lions em [13]. Ela é satisfeita tanto no caso de não linearidades assintoticamente lineares como superlineares. Mais especificamente, ela é satisfeita se f verifica uma das condições abaixo

(f_4) $\lim_{s \to \infty} f(s)/s = l > V_\infty$, para algum $l \in \mathbb{R}$;

(f_5) $\lim_{s \to \infty} f(s)/s = \infty$.

Com efeito, se (f_4) ou (f_5) se verifica, temos que

$$\lim_{s\to+\infty}\Big(f(s)-V_\infty s\Big)=\lim_{s\to+\infty}\Big(\frac{f(s)}{s}-V_\infty\Big)s=+\infty,$$

e existe $M>0$ tal que $\Big(f(s)-V_\infty s\Big)>1$, para todo $s>M$. Assim, para $\zeta>M$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^\zeta\Big(f(s)-V_\infty s\Big)ds&=\int_0^M\Big(f(s)-V_\infty s\Big)ds+\int_M^\zeta\Big(f(s)-V_\infty s\Big)ds\\&\geq cM+(\zeta-M),\end{aligned}$$

para alguma constante $c\in\mathbb{R}$. Logo, a condição (f_3) é válida para $\zeta>0$ suficientemente grande.

Considerando a condição de monotocidade

(M) $s\mapsto f(s)/s^3$ é não-decrescente,

em [28] os autores obtêm existência de solução ground state para o problema de Kirchhoff utilizando a variedade de Nehari. Sob a condições

(M)$'$ $s\mapsto f(s)/s$ é não-decrescente

e (f_5), em [27] o autor estuda a existência de solução ground state para este problema. Devido a influência do termo não local, sua obtenção via a variedade de Nehari não é adequada. Para obtê-la, ele utiliza uma espécie de *intersecção* da variedade de Nehari com a variedade de Pohozaev que é a variedade induzida pelos pontos que satisfazem a identidade de Pohozaev.

Quando a não linearidade é assintoticamente linear, isto é, satisfaz (f_4), alguns resultado podem ser encontrados em [40].

Nos trabalhos anteriores o problema é não autônomo. Para o caso autônomo, sob as condiçoes gerais dadas em [13], os autores em [11] provam resultados de existência e multiplicadade para o problema de Kirchhoff. Devido ao método utilizado, as soluções obtidas não são necessariamente ground state. Ainda considerando o caso autônomo, sob as mesmas condições dada em [13], o autor em [9] prova a existência de solução ground state para o problema de Kirchhoff. Pela generalidade da não linearidade a variedade de Nehari ou qualquer *intersecção* com esta, não é adquada. Para contornar esta dificuldade, ele utiliza minimização sob a variedade de *Pohozaev* dada por

$$\mathcal{P}:=\Big\{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\};\quad u\text{ satisfaz a Identidade de Pohozaev}\Big\}.$$

Veja que faz sentido provar a existência deste tipo de solução minimizando esta variedade pois, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução não nula do problema de Kirchhoff, por [34] segue que $u \in \mathcal{P}$.

Como não temos monotocidade, procedendo como em [9], provamos a existência de solução ground state (restrita as funções radialmente simétricas) para o problema (K_λ) minimizando sobre a variedade

$$\mathcal{P}_\lambda := \Big\{ u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}; \quad J_\lambda(u) = 0 \Big\},$$

onde

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) := &\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \Big(1 + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \Big) \\ &+ N \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ \Big(V(x) + \frac{\nabla V(x) \cdot x}{N} \Big) u^2 - F(u) \Big\} dx. \end{aligned}$$

Por [25], se $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é solução não nula do problema (K_λ), então $u \in \mathcal{P}_\lambda$. No processo de minimização é fundamental estudar a fibração $\theta \mapsto I(u(x/\theta))$. Este estudo nos permite tratar o problema sem a monotocidade de $f(s)/s$ ou $f(s)/s^3$.

Assim como em [9], o estudo da variedade $\mathcal{P}_\lambda$ se torna delicado devido à influência do termo não local. Em nosso caso, este estudo é ainda mais delicado devido à presença do potêncial V. O primeiro desafio é provar que esta variedade é não vazia. Para isto, argumentamos como em [35], e projetamos determinadas soluções em $\mathcal{P}_\lambda$. O próximo passo é provar que $\mathcal{P}_\lambda$ é, realmente, uma variedade. Em nosso caso, devido a generalidade da não linearidade, temos dificuldade de proceder como em [35]. Em vez disso, argumentaremos como em [9] provaremos isto atravéz de argumento de contradição. Assim, como esta variedade é uma restricação natural, por imersões compactas segue a existência de uma solução ground state para o problema (K_λ).

Para finalizar, observamos que o resultado do Capítulo 3 complementa os encontrados em [9].

CAPÍTULO 1

Problema de Schrödinger-Poisson

Neste capítulo, estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + K(x)\phi(x)u = a(x)|u|^{p-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = K(x)u^2 & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{S}$$

com $p \in (3, 5)$. Vamos supor que

(V_0) $V^- \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ e $\int |V^-|^{3/2} < S^{3/2}$, onde

$$S := \inf \left\{ \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}; \quad u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3), \quad \|u\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 1 \right\};$$

(V_1) existem constantes μ, $c_V > 0$ tais que

$$V(x) \le V_\infty - c_V e^{-\mu|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

com

$$0 < V_\infty := \lim_{|x| \to +\infty} V(x);$$

(a_0) $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$;

(a_1) existem constantes $\gamma, c_a > 0$ tais que

$$a(x) \ge a_\infty - c_a e^{-\gamma|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

com

$$a_\infty := \lim_{|x|\to+\infty} a(x) > 0;$$

(K_0) $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$;

(K_1) existem constantes $\alpha, c_K > 0$ tais

$$0 \le K(x) \le c_K e^{-\alpha|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Como veremos a seguir, a hipótese (K_0) implica que, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, a equação de acoplamento

$$-\Delta\phi = K(x)u^2 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3,$$

possui uma única solução fraca $\phi = \phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim, o sistema (S) se reduz à equação

$$-\Delta u + V(x)u + K(x)\phi_u(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3. \tag{P}$$

Os principais resultados deste capítulo são:

Teorema 1.1. *Suponha que $p \in (3,5)$ e os potenciais V, a e K satisfazem $(V_0)-(V_1)$, $(a_0)-(a_1)$ e $(K_0)-(K_1)$, respectivamente. Se*

$$\mu < \min\{\alpha, \gamma\}, \quad \gamma < (p+1)\sqrt{V_\infty} \quad e \quad \alpha < 2\sqrt{V_\infty},$$

então o problema (P) possui uma solução ground state que é não negativa.

Teorema 1.2. *Suponha que $p \in (3,5)$ e os potenciais V, a e K satisfazem $(V_0)-(V_1)$, $(a_0)-(a_1)$ e $(K_0)-(K_1)$, respectivamente. Se*

$$\mu < \min\{\alpha, \gamma\}, \quad \gamma < (p+1)\sqrt{V_\infty} \quad e \quad \alpha < \sqrt{V_\infty},$$

então o problema (P) possui uma solução nodal minimal.

1.1 Existência de solução ground state

Nesta seção provamos o Teorema 1.1. Esta prova será feita em vários passos conforme se segue.

1.1.1 Resultados preliminares

Estudo da equação de acoplamento e do problema limite

Começamos com o estudo do problema de acoplamento

$$-\Delta\phi = K(x)u^2 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

e das principais propriedades de sua solução.

Lema 1.3. *Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$*

(i) o problema (1.1) *possui uma única solução $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$;*

(ii) existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\int |\nabla\phi_u|^2 \leq c\|u\|^2;$$

(iii) $\phi_u(x) \geq 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^3$;

(iv) $\phi_{tu} = t^2\phi_u$, para todo $t > 0$.

Demonstração. Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, seja $T_u : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ o operador linear dado por

$$T_u\varphi := \int K(x)u^2\varphi.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder obtemos $c > 0$, tal que

$$\left|\int K(x)u^2\varphi\right| \leq \|K\|_2\|u^2\|_3\|\varphi\|_6 = \|K\|_2\|u\|_6^2\|\varphi\|_6 \leq c\|\varphi\|_{\mathcal{D}^{1,2}}, \tag{1.2}$$

o que prova que o operador é limitado. Então, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\int \nabla\phi_u\nabla\varphi = \int K(x)u^2\varphi,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Logo, $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é uma solução fraca do problema (1.1).

Por (1.2) temos que

$$\|\phi_u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}^2 = \int |\nabla\phi_u|^2 = \|\phi_u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}^2 \leq c\|u\|_6^2\|\phi_u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}.$$

Portanto, o item (ii) segue da imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Utilizando a Função de Green do Laplaciano em $\mathbb{R}^3$ (veja [26, Teorema 9.9]) temos que

$$\phi_u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{K(y)u^2(y)}{|x-y|} dy \quad \text{q.t.p em} \quad \mathbb{R}^3, \tag{1.3}$$

A afirmação (iii) segue de forma imediata. Além disso,

$$\phi_{tu}(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{K(y)(ut)^2(y)}{|x-y|} dy = t^2 \frac{1}{4\pi} \int \frac{K(y)u^2(y)}{|x-y|} dy = t^2 \phi_u(x),$$

o que conclui a prova. □

Lema 1.4. *Se $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então*

(i) $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$;

(ii) $\int K(x)\phi_{u_n}(x)u_n^2 \to \int K(x)\phi_u(x)u^2$;

(iii) $\int K(x)\phi_{u_n}(x)u_n\varphi \to \int K(x)\phi_u(x)u\varphi$, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração. Pelo Teorema da Representação de Riesz, para provar (i) é suficiente verificar que

$$\langle \phi_{u_n}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^{1,2}} = \int K(x)\varphi {u_n}^2 \to \int K(x)\varphi u^2 = \langle \phi_u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^{1,2}}. \tag{1.4}$$

Note que

$$\Big| \int K(x)\varphi(u_n^2 - u^2) \Big| \le \|\varphi\|_6 \Big(\int K(x)^{6/5} |u_n^2 - u^2|^{6/5} \Big)^{6/5},$$

de modo que basta checar que

$$\lim_{n\to\infty} \int K(x)^{6/5} |u_n^2 - u^2|^{6/5} = 0. \tag{1.5}$$

Como $K^{6/5} \in L^{5/3}(\mathbb{R}^3)$, obtemos

$$\int K(x)^{6/5} |u_n^2 - u^2|^{6/5} \le \|K\|_{L^2}^{6/5} \Big(\int |u_n^2 - u^2|^3 \Big)^{2/5}. \tag{1.6}$$

Além disso,

$$\Big(\int |u_n^2 - u^2|^3 \Big)^{2/5} \le \|u_n - u\|_6^{6/5} \|u_n + u\|_6^{6/5} \le c_1, \tag{1.7}$$

para alguma constante $c_1 > 0$. Como $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue, temos

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{B_\rho(0)^c} K(x)^2dx = 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\int_{B_\rho(0)^c} K(x)^2dx < \varepsilon,$$

para $\rho > 0$ suficientemente grande. Com isso, por (1.6) e (1.7), obtemos

$$\int_{B_\rho(0)^c} K(x)^{6/5}|u_n^2 - u^2|^{6/5}dx \leq c_1\varepsilon, \tag{1.8}$$

para $\rho > 0$ suficientemente grande. Agora, dado $M > 0$, defina o conjunto

$$\Omega_M := \Big\{x \in B_\rho(0); \quad K(x) \geq M\Big\},$$

com $\rho > 0$ obtido acima. Assim

$$M^2\mu(\Omega_M) \leq \int_{\Omega_M} K(x)^2dx \leq \int K(x)^2,$$

para todo $M > 0$, onde $\mu(\Omega_M)$ é a medida de Lebesgue do conjunto Ω_M. Como $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$, então $\lim_{M\to\infty}\mu(\Omega_M) = 0$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\Big(\int_{\Omega_M} K(x)^2dx\Big)^{6/5} \leq \varepsilon,$$

para M suficientemente grande. Assim, pela desigualdade de Hölder e por (1.7), segue que

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(0)} K(x)^{6/5}|u_n^2 - u^2|^{6/5}dx &= \int_{\Omega_M} K(x)^{6/5}|u_n^2 - u^2|^{6/5}dx + \int_{B_\rho(0)\setminus\Omega_M} K(x)^{6/5}|u_n^2 - u^2|^{6/5}dx \\ &\leq c_2\varepsilon + M^{6/5}\int_{B_\rho(0)\setminus\Omega_M}|u_n^2 - u^2|^{6/5}dx.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Por outro lado, como

$$\int_{B_\rho(0)\setminus\Omega_M}|u_n^2 - u^2|^{6/5}dx \leq \|u_n + u\|^{6/5}_{L^{12/5(B_\rho(0))}}\|u_n - u\|^{6/5}_{L^{12/5(B_\rho(0))}},$$

pela imersão compacta $H_0^1(B_\rho(0)) \hookrightarrow L^{12/5}(B_\rho(0))$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_\rho(0)\setminus\Omega_M} |u_n^2 - u^2|^{6/5} dx = 0.$$

Assim, usando (1.9) e (1.8) obtemos (1.5), o que finaliza a prova do primeiro item.

Agora, provaremos o item (ii). Inicialmente, note que

$$\int K(x)(\phi_{u_n} u_n^2 - \phi_u u^2) = J_1(n) + J_2(n),$$

onde

$$J_1(n) = \int K(x) u^2(\phi_{u_n} - \phi_u) \quad \text{e} \quad J_2(n) = \int K(x)\phi_{u_n}(u_n^2 - u^2).$$

Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, o funcional

$$T_u\varphi = \int K(x) u^2 \varphi,$$

para $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, é limitado. Assim, como, $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} J_1(n) = 0. \tag{1.10}$$

Agora, veja que por (ii) do Lema 1.3 temos

$$\begin{aligned}
\Big| \int K(x)\phi_{u_n}(u_n^2 - u^2)\Big| &\le \|\phi_{u_n}\|_6 \Big(\int K(x)^{6/5} |u_n^2 - u^2|^{6/5}\Big)^{5/6} \\
&\le c_1 \|\phi_{u_n}\|_{\mathcal{D}^{1,2}} \Big(\int K(x)^{6/5} |u_n^2 - u^2|^{6/5}\Big)^{5/6} \\
&\le c_2 \Big(\int K(x)^{6/5} |u_n^2 - u^2|^{6/5}\Big)^{5/6},
\end{aligned}$$

para constantes $c_1, c_2 > 0$. Logo, por (1.5), segue que

$$\lim_{n\to\infty} J_2(n) = 0.$$

O item (ii) segue disto e de (1.10).

Para finalizar, veja que

$$\int K(x)(\phi_{u_n} u_n - \phi_u u)\varphi = J_3(n) + J_4(n)$$

onde

$$J_3(n) = \int K(x)(\phi_{u_n} - \phi_u)u_n\varphi \quad \text{e} \quad J_4(n) = \int K(x)\phi_u(u_n - u)\varphi.$$

Para cada $u, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, o funcional $F_{u,\varphi} : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ definido por

$$F_{u,\varphi}(v) = \int K(x)\phi_u v\varphi,$$

é limitado. Assim, como $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^3)$, segue

$$\lim_{n\to\infty} J_4(n) = 0. \tag{1.11}$$

Além disso, como $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\begin{aligned}
\Big|\int K(x)(\phi_{u_n} - \phi_u)u_n\varphi\Big| &= \Big|\int_{\text{supp}\varphi} K(x)(\phi_{u_n} - \phi_u)u_n\varphi\Big| \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \|u_n\|_6 \Big(\int K(x)^{6/5}(\phi_{u_n} - \phi_u)^{6/5}\Big)^{5/6} \\
&\leq c\|\varphi\|_\infty \Big(\int K(x)^{6/5}(\phi_{u_n} - \phi_u)^{6/5}\Big)^{5/6},
\end{aligned} \tag{1.12}$$

para alguma constante $c > 0$. Como $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e a imersão $\mathcal{D}_0^{1,2}(B_\rho(0)) = H_0^1(B_\rho(0)) \hookrightarrow L^{6/5}(B_\rho)(0)$ é compacta, argumentando como na prova de (1.5), obtemos

$$\int K(x)^{6/5}(\phi_{u_n} - \phi_u)^{6/5} \to 0.$$

Segue de (1.12) que

$$\lim_{n\to\infty} J_3(n) = 0.$$

Isto e (1.11) encerram a prova do lema. □

Objetivamos minimizar o funcional associado ao nosso problema quando restrito à variedade de Nehari $\mathcal{N}$. Para garantirmos que a sequência minimizante converge fracamente para uma função não nula, consideramos o seguinte problema limite

$$-\Delta w + V_\infty w = a_\infty |w|^{p-1}w \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \tag{P_∞}$$

cujo o funcional energia associado $I_\infty : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ é dado por

$$I_\infty(w) := \frac{1}{2}\int \Big(|\nabla w|^2 + V_\infty w^2\Big) - \frac{1}{p+1}\int a_\infty |w|^{p+1}.$$

Note que,

$$I'_\infty(w)\varphi = \int \Big(\nabla w \nabla \varphi + V_\infty w \varphi\Big) - \int a_\infty |w|^{p-1} w \varphi,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Portanto, pontos críticos deste funcional, são precisamente soluções fracas do problema (P_∞). Todo estes pontos críticos não nulos pertencem à variedade de Nehari associada

$$\mathcal{N}_\infty := \Big\{ w \in H^1(\mathbb{R}^3) \backslash \{0\}; \quad I'_\infty(w)w = 0 \Big\}.$$

Lema 1.5. *Se $w \in \mathcal{N}_\infty$, então*

$$I_\infty(w) = \max_{t \geq 0} I_\infty(tw).$$

Demonstração. Dado $w \in \mathcal{N}_\infty$ a função $f_w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_w(t) := \frac{t^2}{2} \int \Big(|\nabla w|^2 + V_\infty w^2\Big) - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int a_\infty |w|^{p+1},$$

possui um ponto de máximo global $t_w > 0$ tal que $f'_w(t_w)t_w = 0$, isto é,

$$t_w^2 \int \Big(|\nabla w|^2 + V_\infty w^2\Big) = t_w^{p+1} \int a_\infty |w|^{p+1}.$$

Como $w \in \mathcal{N}_\infty$, segue que

$$\Big(t_w^2 - t_w^{p+1}\Big) \int \Big(|\nabla w|^2 + V_\infty w^2\Big) = 0$$

e $t_w = 1$, como queríamos. □

Proposição 1.6. *Existe $\omega \in H^1(\mathbb{R}^3)$ solução do problema (P_∞), tal que*

$$I_\infty(\omega) = m_\infty := \inf_{\mathcal{N}_\infty} I_\infty.$$

Além disso, para todo $0 < \delta < \sqrt{V_\infty}$, existe $c := c(\delta) > 0$ tal que

$$\omega(x) \leq c e^{-\delta |x|},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

Demonstração. A prova da existência de solução ground state pode se encontrada em [13]. A prova de seu decaimento é feita no Lema 1.24 sob um caso mais geral. □

O funcional energia e sua variedade de Nehari

Ao problema (P) podemos associar ao funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) := \frac{1}{2}\int \Big(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\Big) + \frac{1}{4}\int K(x)\phi_u(x)u^2 - \frac{1}{p+1}\int a(x)|u|^{p+1}. \tag{1.13}$$

Um argumento padrão mostra que os termos que não envolvem ϕ_u são de classe C^1. Para este termo, vale o

Lema 1.7. *Seja $T : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ um funcional definido por por*

$$T(u) = \frac{1}{4}\int K(x)\phi_u(x)u^2,$$

então $T \in C^1(H^1(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$ com

$$T'(u)\varphi = \int K(x)\phi_u(x)u\varphi,$$

para toda u, φ em $H^1(\mathbb{R}^3)$

Demonstração. Mostraremos inicialmente que T é Gateaux diferenciável. Dadas $u, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, de (1.3) segue que

$$\begin{aligned}\frac{\phi_{(u+t\varphi)}(x) - \phi_u(x)}{t} &= \frac{1}{4\pi t}\Big(\int \frac{K(y)}{|x-y|}(u+t\varphi)^2(y)dy - \int \frac{K(y)}{|x-y|}u^2(y)dy\Big)\\ &= \frac{1}{4\pi}\Big(2\int \frac{K(y)}{|x-y|}(u\varphi)(y)dy + \int \frac{K(y)}{|x-y|}(t\varphi)^2(y)dy\Big),\end{aligned}$$

q.t.p em $\mathbb{R}^3$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\phi_{(u+t\varphi)}(x) - \phi_u(x)}{t} = \frac{2}{4\pi}\int \frac{K(y)}{|x-y|}(u\varphi)(y)dy, \tag{1.14}$$

q.t.p em $\mathbb{R}^3$. Agora, dado $t \geq 0$ definindo $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por

$$f_t(x) := \frac{1}{4}K(x)\phi_{(u+t\varphi)}(x)(u+t\varphi)^2,$$

temos que

$$\frac{f_t(x) - f_0(x)}{t} = \frac{1}{4}K(x)u^2\Big(\frac{\phi_{(u+t\varphi)}(x) - \phi_u(x)}{t}\Big) + \frac{1}{4}K(x)\phi_{(u+t\varphi)}(x)(2u\varphi + t\varphi^2).$$

Segue de (1.14) que

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_t(x)-f_0(x)}{t}=\frac{1}{2}K(x)u^2\frac{1}{4\pi}\int\frac{K(y)}{|x-y|}(u\varphi)(y)dy+\frac{1}{2}K(x)\phi_u(x)u\varphi,$$

q.t.p em $\mathbb{R}^3$. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(u+t\varphi)-T(u)}{t}=\frac{1}{2}\int K(x)u^2\frac{1}{4\pi}\Big(\int\frac{K(y)}{|x-y|}(u\varphi)(y)dy\Big)+\frac{1}{2}\int K(x)\phi_u(x)u\varphi.$$

Note, pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int K(x)u^2\frac{1}{4\pi}\Big(\int\frac{K(y)}{|x-y|}(u\varphi)(y)dy\Big)&=\int K(x)u\varphi\frac{1}{4\pi}\Big(\int\frac{K(y)}{|x-y|}u^2(y)dy\Big)\\&=\int K(x)\phi_u(x)u\varphi.\end{aligned}$$

Assim,

$$T'(u)\varphi=\int K(x)\phi_u(x)u\varphi$$

é a derivada de Gateaux do funcional T. Argumentando como em (iii) do Lema (1.4), segue que se $u_n\to u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ então $T'(u_n)\to T'(u)$ em H^{-1}. Portanto, o operador T é Fréchet diferenciável, e obtemos o resultado. □

O lema acima mostra que $I\in C^1(H^1(\mathbb{R}^3),\mathbb{R})$ com

$$I'(u)\varphi=\int\Big(\nabla u\nabla\varphi+V(x)u\varphi\Big)+\int K(x)\phi_u(x)u\varphi-\int a(x)|u|^{p-1}u\varphi,$$

para toda $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^3)$. Portanto, se $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$ é ponto crítico deste funcional, então $(u,\phi_u)\in H^1(\mathbb{R}^3)\times\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é solução fraca do sistema (S).

Note que, se $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$ é um ponto crítico do funcional $I:H^1(\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$, então $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$ pertence à variedade de Nehari:

$$\mathcal{N}:=\Big\{u\in H^1(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\};\quad I'(u)u=0\Big\}.$$

Portanto, para provar o Teorema 1.1, é suficiente provar a existência de uma solução fraca não nula $u_0\in H^1(\mathbb{R}^3)$ do problema (P) tal que

$$I(u_0)=m:=\inf_{u\in\mathcal{N}}I(u).$$

Apresentamos agora as principais propriedades de $\mathcal{N}$. Elas são bem conhecidas quando o potencial a é não negativo. Vamos mostrar que no caso indefinido elas permanecem válidas.

Inicialmente, observamos que, por $(V_0) - (V_1)$ (veja [21]), a expressão

$$\|u\|_\sharp^2 := \int \left(|\nabla u|^2 + V^+(x)u^2\right)$$

define uma norma em $H^1(\mathbb{R}^3)$ que é equivalente à norma usual. Assim, por (V_0), segue que

$$\begin{aligned}
\int \left(|\nabla u|^2 + V^+(x)u^2 - V^-(x)u^2\right) &\geq \|u\|_\sharp^2 - \|V^-\|_{3/2}\|u\|_6^2 \\
&\geq \|u\|_\sharp^2 - S^-\|V^-\|_{3/2}\|u\|_\sharp^2 \\
&\geq c\|u\|_\sharp^2,
\end{aligned}$$

para alguma constante $c > 0$. Então, podemos munir $H^1(\mathbb{R}^3)$ com a norma

$$\|u\| := \left(\int \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)\right)^{1/2}.$$

Isso será feito daqui para frente.

Lema 1.8. *O conjunto $\mathcal{N}$ satisfaz*

(i) $\mathcal{N} \neq \emptyset$ é uma variedade de classe C^1;

(ii) $m := \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u) > 0$;

(iii) se $u \in \mathcal{N}$, então $I(u) = \max_{t\geq 0} I(tu)$.

Demonstração. Seja $\omega \in H^1(\mathbb{R}^3)$ a solução do problema (P_∞) dada pela Proposição 1.6, tal que

$$m_\infty = I_\infty(\omega) = \max_{t\geq 0} I_\infty(t\omega).$$

Denotando $\omega_n(x) := \omega(x + x_n)$, onde $x_n := (0, 0, n)$, temos por (a_1) que

$$\int a(x)|\omega_n|^{p+1} \to \int a_\infty|\omega|^{p+1} > 0.$$

Então, para $n > n_0$, segue que

$$\int a(x)|\omega_n|^{p+1} > 0.$$

Definindo $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por $f_n(t) := I(t\omega_n)$, do item (iv) do Lema 1.3, obtemos

$$f_n(t) = \frac{t^2}{2}\|\omega_n\|^2 + \frac{t^4}{4}\int K(x)\phi_{\omega_n}(x)\omega_n^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int a(x)|\omega_n|^{p+1}.$$

Como $p \in (3,5)$, segue que

$$\lim_{t \to +\infty} f_n(t) = -\infty.$$

Observando que $f_n(0) = 0$ e $f_n(t) > 0$, para $t > 0$ pequeno, concluímos que f_n possui um ponto de máximo global $t_n > 0$. Ele é tal que

$$f_n'(t_n)t_n = I'(t_n\omega_n)(t_n\omega_n) = 0,$$

isto é, $t_n\omega_n \in \mathcal{N} \neq \emptyset$. Agora, se $J : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ é dado por

$$J(u) := I'(u)u = \|u\|^2 + \int K(x)\phi_u(x)u^2 - \int a(x)|u|^{p+1}, \tag{1.15}$$

então

$$J'(u)u = 2\|u\|^2 + 4\int K(x)\phi_u(x)u^2 - (p+1)\int a(x)|u|^{p+1}.$$

Se $u \in \mathcal{N}$, temos

$$\|u\|^2 + \int K(x)\phi_u(x)u^2 = \int a(x)|u|^{p+1}, \tag{1.16}$$

o que implica que

$$J'(u)u = \Big(2 - (p+1)\Big)\|u\|^2 + \Big(4 - (p+1)\Big)\int K(x)\phi_u(x)u^2. \tag{1.17}$$

Como $p \in (3,5)$, por (K_1) e (iii) do Lema 1.3, segue que $J'(u)u < 0$. Logo, o Teorema da Função Implicita implica que $\mathcal{N}$ é uma variedade de classe C^1.

Dado $u \in \mathcal{N}$, por (1.16), (K_1) e (iii) do Lema 1.3, obtemos

$$\int a(x)|u|^{p+1} \geq \|u\|^2.$$

Como $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, pela imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$, existe $c_1 > 0$ tal que

$$c_1\|u\|^{p+1} \geq \|u\|^2,$$

isto é, existe uma constante $\rho > 0$ tal que

$$\|u\| \geq \rho, \tag{1.18}$$

para toda $u \in \mathcal{N}$. Como $p \in (3,5)$, por (K_1) e (iii) do Lema 1.3, temos que

$$\begin{aligned} I(u) &= I(u) - \frac{1}{p+1} I'(u)u \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big)\|u\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big)\int K(x)\phi_u(x)u^2 \\ &\geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big)\|u\|^2. \end{aligned} \tag{1.19}$$

e portanto $m > 0$.

Para finalizar, veja que se $u \in \mathcal{N}$ então, por (1.16),

$$\int a(x)|u|^{p+1} > 0.$$

Definindo $f_u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$f_u(t) := I(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}\int K(x)\phi_u(x)u^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int a(x)|u|^{p+1},$$

o mesmo argumento de antes mostra que f_u possui um ponto de máximo global em $t_u > 0$. Logo,

$$t_u^2\|u\|^2 + t_u^4\int K(x)\phi_u(x)u^2 = t_u^{p+1}\int a(x)|u|^{p+1}.$$

Segue de (1.16) que

$$\Big(t_u^2 - t_u^{p+1}\Big)\|u\|^2 + \Big(t_u^4 - t_u^{p+1}\Big)\int K(x)\phi_u(x)u^2 = 0.$$

Novamente, como $p \in (3,5)$, obtemos $t_u = 1$, o que conclui a prova. □

Existência de um ponto crítico para o funcional I

No que se segue vamos obter um ponto crítico para o funcional energia associado ao problema (P). A existência de tal ponto crítico é importante por ser um ótimo candidato a solução ground state do problema.

O proximo resultado nos fornece uma sequência minimizante adequada para a variedade $\mathcal{N}$.

Lema 1.9 (Princípio Variacional de Ekeland)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $G \in C^2(X,\mathbb{R})$ tal que para todo $v \in V := \Big\{v \in X; G(v) = 0\Big\}$, tem-se $G'(v) \neq 0$. Sejam*

$F \in C^1(X, \mathbb{R})$ *limitado inferiormente em* V*,* $v \in V$ *e* $\varepsilon, \delta > 0$ *tais que*

$$F(v) \leq \inf_V F + \varepsilon.$$

Então existe $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in V \times \mathbb{R}$ *tal que*

(i) $F(u_\varepsilon) \leq \inf_V F + 2\varepsilon$*;*

(ii) $\|u_\varepsilon - v\| \leq 2\delta$*;*

(iii) $\|F'(u_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon G'(u_\varepsilon)\| \leq 8\varepsilon/\delta$*.*

Demonstração. Veja [51, Teorema 8.5]. □

Lema 1.10. *Existe uma sequência* $(u_n) \subset \mathcal{N}$ *tal que*

$$I(u_n) \to m \quad e \quad I'(u_n) \to 0.$$

Demonstração. Como $\mathcal{N}$ é uma variedade de classe C^1, podemos usar o Lema 1.9 para garantir a existência de $(u_n) \subset \mathcal{N}$ e $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tais que

$$I(u_n) \to m \quad \text{e} \quad I'(u_n) + \lambda_n J'(u_n) \to 0,$$

onde $J : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ foi definido em (1.15). Por (1.19) a sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é limitada. Logo, para alguma constante $c > 0$, temos

$$\begin{aligned} o_n(1) = \|I'(u_n) + \lambda_n J'(u_n)\| &\geq \frac{|I'(u_n)u_n + \lambda_n J'(u_n)u_n|}{\|u_n\|} \\ &\geq \frac{|I'(u_n)u_n + \lambda_n J'(u_n)u_n|}{c} \\ &= \frac{|\lambda_n J'(u_n)u_n|}{c}. \end{aligned}$$

Por (1.17) e (1.18), existe uma constante $c_1 > 0$ tal que $J'(u_n)u_n < -c_1 < 0$. Assim, $\lambda_n \to 0$. Além disso, pela limitação de (u_n) segue que, para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, a sequência $J'(u_n)\varphi$ é limitada. Como

$$o_n(1) = \|I'(u_n) + \lambda_n J'(u_n)\| \geq \frac{|I'(u_n)\varphi + \lambda_n J'(u_n)\varphi|}{\|\varphi\|},$$

segue o resultado. □

Lema 1.11. *Seja* $(u_n) \subset \mathcal{N}$ *tal que*

$$I(u_n) \to m \quad e \quad I'(u_n) \to 0.$$

Então existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $u_n \rightharpoonup u_0$ *fracamente em* $H^1(\mathbb{R}^3)$ *e* $I'(u_0) = 0$.

Demonstração. Por (1.19), (u_n) é limitada. Logo $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^3)$ para alguma função $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, de forma imediata

$$\int \Big(\nabla u_n \nabla \varphi + V(x) u_n \varphi\Big) \to \int \Big(\nabla u_0 \nabla \varphi + V(x) u_0 \varphi\Big).$$

Além disso, por (iii) do Lema 1.4, segue que

$$\int K(x)\phi_{u_n}(x) u_n \varphi \to \int K(x)\phi_{u_0}(x) u_0 \varphi.$$

Seja $A := \operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^3$ o suporte da função φ e $B_r(0)$ uma bola aberta contendo A. Como a imersão $H^1(B_r(0)) \hookrightarrow L^p(B_r(0))$ é compacta, temos que

$$\int a(x)|u_n|^{p-1} u_n \varphi \to \int a(x)|u_0|^{p-1} u_0 \varphi.$$

Então, $I'(u_0)\varphi = 0$, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Portanto, argumentando por densidade, concluímos que $I'(u_0) = 0$. □

Finalizamos essa subseção com um resultado auxiliar que será útil no futuro.

Lema 1.12. *Se* $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ *é tal que* $u_n \rightharpoonup 0$ *fracamente em* $H^1(\mathbb{R}^3)$, *então*

$$\int a(x)|u_n|^{p+1} = \int a_\infty |u_n|^{p+1} + o_n(1), \qquad \int V(x) u_n^2 = \int V_\infty u_n^2 + o_n(1),$$

em que $o_n(1)$ *denota uma quantidade que tende para zero quando* $n \to +\infty$.

Demonstração. Como

$$\lim_{|x|\to\infty} a(x) = a_\infty,$$

dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que $|a(x) - a_\infty| < \varepsilon$, para todo $x \in B_R(0)^c$. Assim,

$$\int_{B_R(0)^c} |a(x) - a_\infty||u_n|^{p+1} \le \varepsilon \int_{B_R(0)^c} |u_n|^{p+1} \le c_1 \varepsilon, \tag{1.20}$$

para alguma constante $c_1 > 0$. Por outro lado, como $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{B_R(0)} |a(x) - a_\infty||u_n|^{p+1} \leq c_2 \int_{B_R(0)} |u_n|^{p+1},$$

para alguma constante $c_2 > 0$. Então, como $u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^3)$, pela imersão compacta $H_0^1(B_R(0)) \hookrightarrow L^{p+1}(B_R(0))$ a última integral acima converge para zero. Assim, a primeira parte do resultado segue de (1.20). Uma vez que $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty$, a prova da outra afirmação é inteiramente análoga. □

Estimativa para os níveis de energia

Nesta subseção relacionamos os níveis de energia associados às variedades $\mathcal{N}$ e $\mathcal{N}_\infty$. Diferente dos trabalhos [16, 21], que utilizam relações entre níveis de energia e argumentos de concentração e compacidade dados em [50] (Lema de Splitting) para obter resultados de compacidade, aqui utilizaremos a estimativa obtida nesta subseção para garartimos que a sequência minimizande de $\mathcal{N}$ converge fracamente, não necessariamente forte, para uma função não nula.

Proposição 1.13. *Vale a seguinte desigualdade*

$$m < m_\infty.$$

Demonstração. Por (i) do Lema 1.8, para $n > n_0$, existe $t_n > 0$ tal que $t_n\omega_n \in \mathcal{N}$. Assim,

$$m \leq I(t_n\omega_n) = I_\infty(t_n\omega_n) + \frac{t_n^2}{2}V_n + \frac{t_n^4}{4}K_n + \frac{t_n^{p+1}}{p+1}A_n, \tag{1.21}$$

onde

$$V_n := \int \Big(V(x) - V_\infty\Big)\omega_n^2, \qquad K_n := \int K(x)\phi_{\omega_n}(x)\omega_n^2$$

e

$$A_n := \int \Big(a_\infty - a(x)\Big)|\omega_n|^{p+1}.$$

<u>*Afirmação 1*</u>: Existem constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ tais que

$$V_n \leq -c_1 e^{-\mu n}, \quad K_n \leq c_2 e^{-\alpha n} \quad \text{e} \quad A_n \leq c_3 e^{-\gamma n}.$$

De fato, como $|x - x_n| \leq |x| + n$, por (V_2) temos que

$$V_n \leq -c_V \int e^{-\mu|x|}|\omega_n|^2 = -c_V \int e^{-\mu|x-x_n|}|\omega|^2$$
$$\leq -c_V e^{-\mu n} \int e^{-\mu|x|}|\omega|^2.$$

Afirmamos que a última integral acima é finita. Se isso for verdade, segue que existe $c_1 > 0$ tal que

$$V_n \leq -c_1 e^{-\mu n}.$$

Para verificar que a integral é de fato finita observe que, dado $\delta_1 \in (0, \sqrt{V_\infty})$, pela Proposição 1.6 segue que

$$\int e^{-\mu|x|}|\omega|^2 \leq \int e^{-\mu|x|}e^{-2\delta_1|x|} < \infty.$$

Para estimar o termo que envolve o potencial a usamos a desigualdade $n - |x| \leq |x - x_n|$ e a hipótese (a_1) para calcular

$$A_n \leq c_a \int e^{-\gamma|x|}|\omega_n|^{p+1} = c_a \int e^{-\gamma|x-x_n|}|\omega|^{p+1}$$
$$\leq c_a e^{-\gamma n} \int e^{\gamma|x|}|\omega|^{p+1}.$$

Como $\gamma < (p+1)\sqrt{V_\infty}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $\delta_2 \in (\frac{\gamma}{p+1}, \sqrt{V_\infty})$. Pela Proposição 1.6, temos que

$$\int e^{\gamma|x|}|\omega|^{p+1} \leq \int e^{\gamma|x|}e^{-(p+1)\delta_2|x|} < +\infty.$$

Finalmente,

$$K_n \leq \int K(x)\phi_{\omega_n}(x)\omega_n^2 \leq c_K e^{-\alpha n}\|\phi_{\omega_n}\|_6 \left(\int e^{\alpha 6/5|x|}\omega^{12/5}\right)^{5/6}. \tag{1.22}$$

Usando (ii) do Lema 1.3 a imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ obtemos

$$\|\phi_{\omega_n}\|_6 \leq c_4\|\phi_{\omega_n}\|_{\mathcal{D}^{1,2}} \leq c_5\|\omega_n\|^2 = c_5\|\omega\|^2,$$

para constantes $c_4, c_5 > 0$. Como $\alpha < 2\sqrt{V_\infty}$ podemos escolher $\delta_3 \in (\frac{\alpha}{2}, \sqrt{V_\infty})$, usar a Proposição 1.6 e argumentar como acima para obter $\int e^{\alpha 6/5|x|}\omega^{12/5} < \infty$. Segue então de (1.22) que existe $c_2 > 0$ tal que

$$K_n \leq c_2 e^{-\alpha n}.$$

Afirmação 2: Se $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ é tal que $t_n\omega_n \in \mathcal{N}$, então $t_n \to t_0 > 0$.

Inicialmente provaremos que $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ é limitada. Com efeito, como $t_n\omega_n \in \mathcal{N}$, pela Afirmação 1, (a_1) e (V_1), temos que

$$\begin{aligned}
0 &= t_n^{-2}\int |\nabla\omega_n|^2 + V(x)|\omega_n|^2 + \int K(x)\phi_{\omega_n}(x)\omega_n^2 - t_n^{p-3}\int a(x)|\omega_n|^{p+1} \\
&\leq t_n^{-2}\int |\nabla\omega_n|^2 + V(x)|\omega_n|^2 + c_2e^{-\alpha n} - t_n^{p-3}\int a(x)|\omega_n|^{p+1} \\
&= t_n^{-2}\int |\nabla\omega|^2 + V_\infty|\omega|^2 + c_2e^{-\alpha n} - t_n^{p-3}\int a_\infty|\omega|^{p+1} + o_n(1),
\end{aligned}$$

e segue a limitação de $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$. Então, a menos de subsequência, $t_n \to t_0$. Agora, por (1.18), temos que

$$t_n^2\int |\nabla\omega|^2 + V_\infty|\omega|^2 + o_n(1) = t_n^2\int \Big(|\nabla\omega_n|^2 + V(x)|\omega_n|^2\Big) \geq c,$$

para alguma constante $c > 0$, o que implica em $t_0 > 0$ e segue a afirmação.

Por (1.21) e pela Afirmação 1, segue que

$$\begin{aligned}
m \leq I(t_n\omega_n) &= I_\infty(t_n\omega_n) + \frac{t_n^2}{2}V_n + \frac{t_n^4}{4}K_n + \frac{t_n^{p+1}}{p+1}A_n \\
&\leq I_\infty(t_n\omega_n) - \frac{t_n^2}{2}c_1e^{-\mu n} + \frac{t_n^4}{4}c_2e^{-\alpha n} + \frac{t_n^{p+1}}{p+1}c_3e^{-\gamma n} \\
&\leq I_\infty(t_n\omega_n) + t_n^2e^{-\mu n}\Big\{-\frac{1}{2}c_1 + \frac{t_n^2}{4}c_2e^{(\mu-\alpha)n} + \frac{t_n^{p-1}}{p+1}c_3e^{(\mu-\gamma)n}\Big\}.
\end{aligned}$$

Como $\mu < \min\{\alpha, \gamma\}$, pela Afirmação 2, temos que $m < I_\infty(t_n\omega_n)$, para $n > n_0$. Do Lema 1.5 segue que

$$m < I_\infty(t_n\omega_n) = I_\infty(t_n\omega) \leq \max_{t\geq 0} I_\infty(t\omega) = I_\infty(\omega) = m_\infty,$$

como queríamos. $\square$

1.1.2 Prova do Teorema 1.1

Pelos Lemas 1.10 e 1.11 existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ limitada tal que

$$I(u_n) \to m, \quad I'(u_n) \to 0,$$

e

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{fracamente em} \quad H^1(\mathbb{R}^3),$$

com $I'(u_0) = 0$. Provaremos que $u_0 \not\equiv 0$. Com efeito, se $u_0 \equiv 0$, a convergência fraca acima e o Lema 1.12 implicam que

$$\|u_n\|^2 = \int |\nabla u_n|^2 + V_\infty u_n^2 + o_n(1) \quad \text{e} \quad \int a(x)|u_n|^{p+1} = \int a_\infty |u_n|^{p+1} + o_n(1). \tag{1.23}$$

Além disso, por (ii) do Lema 1.4, temos que

$$\int K(x)\phi_{u_n}(x)u_n^2 = o_n(1). \tag{1.24}$$

Assim, como

$$\|u_n\|^2 + \int K(x)\phi_{u_n}(x)u_n^2 = \int a(x)|u_n|^{p+1},$$

por (1.23) temos que

$$\|u_n\|_*^2 := \int \left(|\nabla u_n|^2 + V_\infty u_n^2\right) = \int a_\infty |u_n|^{p+1} + o_n(1). \tag{1.25}$$

Seja $t_n > 0$ tal que $t_n u_n \in \mathcal{N}_\infty$, isto é,

$$t_n^2 \|u_n\|_*^2 = t_n^{p+1} \int a_\infty |u_n|^{p+1}.$$

Por (1.25), obtemos

$$\left(t_n^2 - t_n^{p+1}\right)\|u_n\|_*^2 = o_n(1). \tag{1.26}$$

Como $u_n \in \mathcal{N}$ existe uma constante $c > 0$ tal que

$$0 < c \leq \|u_n\|^2.$$

A primeira igualdade em (1.23) nos diz que

$$0 < c \leq \|u_n\|^2 = \|u_n\|_*^2 + o_n(1).$$

Deste modo, implica que $t_n \to 1$. Logo, por (1.23) e (1.24), segue que

$$\begin{aligned} I_\infty(t_n u_n) &= I_\infty(t_n u_n) - \frac{1}{p+1} I'_\infty(t_n u_n)(t_n u_n) \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) t_n^2 \|u_n\|_*^2 \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \|u_n\|^2 + o_n(1) \\ &= I(u_n) - \frac{1}{p+1} I'(u_n)u_n + o_n(1) \\ &= I(u_n) + o_n(1), \end{aligned}$$

e portanto

$$m_\infty \leq I_\infty(t_n u_n) = I(u_n) + o_n(1),$$

isto é, $m_\infty \leq m$, que contradiz a Proposição 1.13. Portanto, $u_0 \not\equiv 0$, de modo que $u_0 \in \mathcal{N}$. Como a norma em $H^1(\mathbb{R}^3)$ é fracamente semi-contínua inferiormente, podemos usar a convergência fraca de (u_n) e (ii) do Lema 1.4 para obter

$$\begin{aligned} m \leq I(u_0) &= I(u_0) - \frac{1}{p+1} I'(u_0)u_0 \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big)\|u_0\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big) \int K(x)\phi_{u_0}(x)u_0^2 \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \Big(I(u_n) - \frac{1}{p+1} I'(u_n)u_n \Big) = \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = m, \end{aligned}$$

isto é, $I(u_0) = m$.

Note que não sabemos o sinal de u_0. Para obtermos uma solução não negativa, vamos mostrar que $v := |u_0|$ é ainda solução de (P). Com efeito, por (1.3) temos $\phi_v = \phi_{u_0}$ e

$$I(v) = I(u_0) = m.$$

Além disso, como $u_0 \in \mathcal{N}$, segue que $v \in \mathcal{N}$. Assim, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'(v) = \lambda J'(v),$$

onde $J(v) = I'(v)v$. Agora, como $v \in \mathcal{N}$, temos $I'(v)v = 0$ e $J'(v)v < 0$. Portanto, $\lambda = 0$ e $I'(v) = 0$, o que conclui a demonstração do teorema.

1.2 Existência de solução nodal minimal

Nesta seção provamos o Teorema 1.2. Inicialmente, note que se $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma solução nodal do problema (P), então

$$0 = I'(u)u^+ = I'(u^+)u^+ + \int K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2,$$

isto é,

$$I'(u^+)u^+ = -\int K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2 < 0.$$

De forma análoga,

$$I'(u^-)u^- = -\int K(x)\phi_{u^+}(x)(u^-)^2 < 0.$$

Assim, minimização sobre o conjunto

$$\mathcal{M} := \Big\{u \in H^1(\mathbb{R}^3); \quad u^+, u^- \not\equiv 0, \quad I'(u^+)u^+ = I'(u^-)u^- = 0\Big\},$$

não é adequada para provar o Teorema 1.2. Como em [1, 3] a prova deste teorema será dada minimizando sobre o conjunto

$$\mathcal{N}^\pm := \Big\{u \in H^1(\mathbb{R}^3); \quad u^+, u^- \not\equiv 0, \quad I'(u)u^+ = I'(u)u^- = 0\Big\}.$$

Veja que se uma solução nodal $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ do problema (P) é tal que

$$I(u_1) = m^\pm := \inf_{\mathcal{N}^\pm} I$$

então ela é minimal. Assim, nosso objetivo é mostrar que esse ínfimo é assumido.

1.2.1 Resultados preliminares

Como no primeito teorema, vamos precisar de várias etapas para provar o teorema.

Existência de sequência minimizante

Como a aplicação $u \mapsto u^\pm$ é apenas contínua, não podemos utilizar o Teorema da Função Implícita para obter $(u_n) \subset \mathcal{N}^\pm$ tal que

$$I(u_n) \to m^\pm \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0.$$

Para contornar esta dificuldade nesta subseção vamos argumentar como em [3, 48] e provar que, para cada $R > 0$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + K(x)\phi(x)u = a(x)f(u) & \text{em} \quad B_R(0), \\ -\Delta\phi = K(x)u^2 & \text{em} \quad B_R(0), \\ u, \phi_u \in H_0^1(B_R(0)), \end{cases} \tag{1.27}$$

possui uma solução $u_R \in H_0^1(B_R(0))$, tal que

$$I(u_R) = m_R := \inf_{u \in \mathcal{N}_R^{\pm}} I(u),$$

onde

$$\mathcal{N}_R^{\pm} := \mathcal{N}^{\pm} \cap H_0^1(B_R(0)).$$

Lema 1.14. *Se $u \in \mathcal{N}_R^{\pm}$, então*

$$\|u^+\|_R^2 + \int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^+)^2 + \int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2 = \int_{B_R} a(x)|u^+|^{p+1}$$

e

$$\|u^-\|_R^2 + \int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^-)^2 + \int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^-)^2 = \int_{B_R} a(x)|u^-|^{p+1},$$

onde

$$\|u^{\pm}\|_R^2 := \int_{B_R} \Big(|\nabla u^{\pm}|^2 + V(x)(u^{\pm})^2\Big).$$

Demonstração. Vamos inicialmente recordar que

$$\phi_u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{K(y)u^2(y)}{|x-y|} dy \quad \text{q.t.p em} \quad \mathbb{R}^3. \tag{1.28}$$

Assim, é fácil ver que

$$\phi_u = \phi_{u^+} + \phi_{u^-}. \tag{1.29}$$

Se $u \in \mathcal{N}_R^{\pm}$, então $I'(u)u^{\pm} = 0$, e portanto

$$\|u^{\pm}\|_R^2 + \int_{B_R} K(x)\phi_u(x)(u^{\pm})^2 = \int_{B_R} a(x)|u^{\pm}|^{p+1}.$$

Basta agora usar a expressão acima e (1.29). $\square$

Lema 1.15. *Dada $u \in \mathcal{N}_R^{\pm}$, seja $f_u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f_u(t,s) := I(tu^+ - su^-).$$

Então

$$f_u(t,s) \le f_u(1,1),$$

para todo $t, s \ge 0$.

Demonstração. Como $I'(u)u^+ = 0$, temos

$$\int_{B_R} a(x)|u^+|^{p+1} = \|u^\pm\|_R^2 + \int_{B_R} K(x)\phi_u(x)(u^+)^2 > 0. \tag{1.30}$$

De forma análoga, como $I'(u)u^- = 0$, temos

$$\int_{B_R} a(x)|u^-|^{p+1} > 0.$$

Veja que, por (1.28) e pelo Teorema de Fubini, temos que

$$\int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2 = \int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^-)^2. \tag{1.31}$$

Assim, por (1.29) obtemos

$$\begin{aligned} f_u(t,s) &= \frac{t^2}{2}\|u^+\|^2 + \frac{s^2}{2}\|u^-\|^2 + \frac{s^2t^2}{2}\int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^-)^2 dx \\ &+ \frac{t^4}{4}\int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^+)^2 + \frac{s^4}{4}\int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^-)^2 \\ &- \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{B_R} a(x)|u^+|^{p+1} - \frac{s^{p+1}}{p+1}\int_{B_R} a(x)|u^-|^{p+1}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Então,

$$\lim_{|(t,s)|\to+\infty} f_u(t,s) = -\infty,$$

e segue que a função f_u possui um máximo global $(t_u, s_u) \in \mathbb{R}^2$. Inicialmente, provaremos que $t_u, s_u > 0$. Com efeito, se $(t_u, 0)$ é um ponto de máximo global de f_u, tomando $s > 0$ pequeno o suficiente tal que $I(su^-) > 0$, por (1.32), temos que

$$f_u(t_u, 0) = I(t_u u^+) < I(t_u u^+) + I(su^-) + \frac{t_u^2 s^2}{2}\int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2 = f_u(t_u, s),$$

o que é uma contradição, já que $(t_u, 0)$ é o ponto de máximo global de f_u. De forma análoga, provamos que $s_u > 0$.

Afirmamos agora que $t_u, s_u \le 1$. De fato, como (t_u, s_u) é um ponto de máximo global de f_u segue que

$$t_u^2\|u^+\|_R^2 + t_u^4\int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^+)^2 + t_u^2 s_u^2\int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2 = t_u^{p+1}\int_{B_R} a(x)|u^+|^{p+1}.$$

Sem perda de generalidade, vamos supor que $s_u \leq t_u$. Então

$$t_u^2\|u^+\|_R^2 + t_u^4\int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^+)^2 + t_u^4\int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2 \geq t_u^{p+1}\int a(x)|u^+|^{p+1}.$$

Como $u \in \mathcal{N}^{\pm}$, temos pelo Lema 1.14 que

$$\left(t_u^2 - t_u^{p+1}\right)\|u^+\|_R^2 + \left(t_u^4 - t_u^{p+1}\right)\int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^+)^2 + \left(t_u^4 - t_u^{p+1}\right)\int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2 \geq 0,$$

e segue a afirmação. Para finalizar, provaremos que $(t_u, s_u) = (1,1)$. Com efeito, sendo

$$f_u(t_u, s_u) = I(t_u u^+ - s_u u^-) - \frac{1}{p+1} I'(t_u u^+ - s_u u^-)(t_u u^+ - s_u u^-),$$

temos

$$\begin{aligned} f_u(t_u, s_u) = &\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\left(t_u^2\|u^+\|_R^2 + s_u^2\|u^-\|_R^2\right) \\ &+ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\right)\left(t_u^4\int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^+)^2 + s_u^2\int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^-)^2\right) \\ &+ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\right) 2s_u^2 t_u^2\int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2. \end{aligned}$$

Assim, se $s_u < 1$ ou $t_u < 1$, teríamos

$$f_u(t_u, s_u) < f_u(1,1),$$

o que é uma contradição, e conclui a prova do lema. $\square$

Observação 1.1. *Observamos que a prova do lema anterior nos diz que o ponto de máximo global* $(t_u, s_u) = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ *de* $f_u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é único quando* $u_R \in \mathcal{N}_R^{\pm}$*. Nestas condições*

$$f_u(t,s) < f_u(1,1),$$

para $(t,s) \neq (1,1)$*.*

Lema 1.16. *Dado* $u \in \mathcal{N}_R^{\pm}$*, defina* $\psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *por*

$$\psi(t,s) := (I'(tu^+ - su^-)u^+, I'(tu^+ - su^-)u^-).$$

Então

$$\det \psi'(1,1) < 0.$$

Demonstração. Como

$$\begin{aligned} I'(tu^+ - su^-)u^+ &= t\|u^+\|_R^2 + t^3 \int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^+)^2 \\ &+ s^2 t \int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2 - t^p \int_{B_R} a(x)|u^+|^p \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I'(tu^+ - su^-)u^- &= -s\|u^-\|_R^2 - s^3 \int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^-)^2 \\ &- t^2 s \int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^-)^2 + s^p \int_{B_R} a(x)|u^-|^p, \end{aligned}$$

então $\psi'(1,1) = (a_{i,j})$, com

$$a_{1,1} = \|u^+\|_R^2 + 3\int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^+)^2 + \int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2 - p\int_{B_R} a(x)|u^+|^{p+1},$$

$$a_{2,2} = -\|u^-\|_R^2 - 3\int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^-)^2 - \int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^-)^2 + p\int_{B_R} a(x)|u^-|^{p+1},$$

e

$$a_{1,2} = 2\int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2, \quad a_{2,1} = -2\int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^-)^2.$$

Como $u \in \mathcal{N}^\pm$, por (1.31) e pelo Lema 1.14, temos que

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 2\int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^+)^2 - (p-1)\int_{B_R} a(x)|u^+|^{p+1} \\ &< 2\Big(\int_{B_R} K(x)\phi_{u^+}(x)(u^+)^2 - \int_{B_R} a(x)|u^+|^{p+1}\Big) \\ &= 2\Big(-\|u^+\|_R^2 - \int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2\Big) < a_{2,1}. \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$a_{2,2} > 2\Big(\|u^-\|_R^2 + \int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2\Big) > a_{1,2}.$$

Então

$$\det \psi'(1,1) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} < 0,$$

o que prova o lema. □

Lema 1.17. *Seja* $u \in H_0^1(B_R)$ *tal que*

$$\int_{B_R} a(x)|u^{\pm}|^{p+1} > 0.$$

Então existe $(t_u, s_u) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $(t_u u^+ - s_u u^-) \in \mathcal{N}_R^{\pm}$.

Demonstração. Definindo $f_u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por $f_u(t,s) := I(tu^+ - su^-)$, como

$$\int_{B_R} a(x)|u^{\pm}|^{p+1} > 0,$$

então

$$\lim_{|(t,s)| \to +\infty} f_u(t,s) = -\infty,$$

e segue que a função f_u possui um máximo global $(t_u, s_u) \in \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\frac{\partial f_u}{\partial t}(t_u, s_u) = I'(t_u u^+ - s_u u^-)u^+ = 0$$

e

$$\frac{\partial f_u}{\partial s}(t_u, s_u) = -I'(t_u u^+ - s_u u^-)u^- = 0$$

De forma análoga ao Lema 1.15 temos $t_u, s_u > 0$ e segue o resultado. □

Lema 1.18. *Existe* $u_R \in \mathcal{N}_R^{\pm}$ *tal que* $I(u_R) = m_R$.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}_R^{\pm}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} I(u_n) = m_R.$$

Como

$$I'(u_n)u_n^+ = I'(u_n)u_n^- = 0,$$

então $(u_n) \subset \mathcal{N}$. Por (1.19), esta sequência é limitada. Assim,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em} \quad H_0^1(B_R), \tag{1.33}$$

o que implica em

$$u_n^{\pm} \rightharpoonup u^{\pm} \quad \text{fracamente em} \quad H_0^1(B_R), \tag{1.34}$$

e

$$\|u^{\pm}\|_R^2 \leq \liminf_{n \to \infty} \|u_n^{\pm}\|_R^2. \tag{1.35}$$

Além disso, argumentando como na prova de (ii) do Lema 1.4, temos que

$$\int_{B_R} K(x)\phi_{u_n^-}(x)(u_n^+)^2 = \int_{B_R} K(x)\phi_{u^-}(x)(u^+)^2 + o_n(1). \tag{1.36}$$

Agora, como

$$\int_{B_R} a(x)|u_n^{\pm}|^{p+1} = \|u_n\|_R^2 + \int_{B_R} K(x)\phi_{u_n}(x)(u_n^{\pm})^2 > 0,$$

existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\int_{B_R} a(x)|u_n^{\pm}|^{p+1}dx > c.$$

Sendo a imersão $H_0^1(B_R) \hookrightarrow L^{p+1}(B_R)$ compacta, por (1.34), temos que

$$\int_{B_R} a(x)|u^{\pm}|^{p+1} \geq c > 0.$$

Pelo Lema 1.17 existem $(t_u, s_u) \in \mathbb{R}^2$ tais que $t_u u^+ - s_u u^- \in \mathcal{N}_R^{\pm}$. Então, por (1.32), (1.34), (1.35), (1.36), (ii) do Lema 1.4 e pelo Lema 1.15, temos que

$$\begin{aligned} m_R \leq I(t_u u^+ - s_u u^-) &\leq \liminf_{n\to\infty} I(t_u u_n^+ - s_u u_n^-) \\ &= \liminf_{n\to\infty} f_{u_n}(t_u, s_u) \leq \liminf_{n\to\infty} f_{u_n}(1,1) = \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = m_R. \end{aligned}$$

O lema então vale para $u_R := (t_u u^+ - s_u u^-)$. □

Lema 1.19. $\lim_{R\to\infty} m_R = m^{\pm}$.

Demonstração. Por definição

$$\limsup_{R\to\infty} m_R \geq m^{\pm}. \tag{1.37}$$

Agora, dado $\eta > 0$, existe $u_\eta \in \mathcal{N}^{\pm}$ tal que $I(u_\eta) \leq m^{\pm} + \eta$. Como $u_\eta^{\pm} \neq 0$, existe $R_0 > 0$ tal que $u_\eta^{\pm} \neq 0$ em B_{R_0}. Seja $u_{R,\eta} := \zeta_R u_\eta$, onde $R \geq 4R_0$ e $\zeta_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ é definida por

$$\zeta_R(x) := \begin{cases} 1, & |x| \leq R/4, \\ 0, & |x| \geq 3R/4. \end{cases}$$

Como

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B_R} |a(x)u_{R,\eta}^{\pm}|^{p+1} = \int_{\mathbb{R}^3} |a(x)u_\eta^{\pm}|^{p+1} > 0,$$

para R suficientemente grande,

$$\int_{B_R} |a(x)u_{R,\eta}^{\pm}|^{p+1} > 0.$$

Assim, pelo Lema 1.17 existem $(t_R, s_R) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\left(t_R u_{R,\eta}^{+} - s_R u_{R,\eta}^{-}\right) \in \mathcal{N}_R^{\pm}$. Argumentando como no Lema 1.15 concluímos que $t_R, s_R \leq 1$. Logo,

$$m_R \leq I(t_R u_{R,\eta}^{+} - s_R u_{R,\eta}^{-}) = I(t_R u_{\eta}^{+} - s_R u_{\eta}^{-}) + o_R(1) \leq I(u_\eta) + o_R(1) \leq m^{\pm} + \eta + o_R(1),$$

e o resultado segue de (1.37). □

Agora, argumentando como em [12], provaremos que:

Lema 1.20. *$I'(u_R)\varphi = 0$, para toda $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $I'(u_R) \neq 0$. Então, existem $\delta, \lambda > 0$ tais que $\|v - u_R\| < 3\delta$ implica em $\|I'(v)\| > \lambda$. Agora, definindo $g(t,s) := tu_R^{+} - su_R^{-}$, pelo Lema 1.15 existe $D \subset \mathbb{R}^2$ com $(1,1) \in D$ tal que

$$\rho := \max_{\partial D} I \circ g < m_R. \tag{1.38}$$

Para $\varepsilon < \min\{(m_R - \rho)/2, \lambda\rho/8\}$ e $S := B_\delta(u_R)$ segue de [51, Lema 2.3] que existe uma deformação $\eta \in C([0,1] \times H_0^1(B_R), H_0^1(B_R))$ tal que

(i) $\eta(1,u) = u$ se $u \notin I^{-1}([m_R - 2\varepsilon, m_R + 2\varepsilon])$;

(ii) $\eta(1, I^{m_R+\varepsilon} \cap S) \subset I^{m_R-\varepsilon}$;

(iii) $I(\eta(1,u)) \leq I(u)$ para todo $u \in H_0^1(B_R)$.

Afirmamos que,

$$\max_{(t,s)\in D} I(\eta(1, g(t,s))) < m_R. \tag{1.39}$$

Com efeito, para todo $(t,s) \in D\backslash(1,1)$, por (iii), pelo Lema 1.18 e Observação 1.1 obtemos

$$I(\eta(1, g(t,s))) \leq I(g(t,s)) < I(g(1,1)) = m_R,$$

para todo $(t,s) \in D \setminus (1,1)$. Além disso, como $g(1,1) \in I^{m_R+\varepsilon} \cap S$, por (ii) temos que

$$I(\eta(1, g(1,1))) \leq m_R - \varepsilon < m_R.$$

Assim,

$$I(\eta(1, g(t,s))) < m_R,$$

para todo $(t,s) \in D$ e segue (1.39). Agora, defina

$$h(t,s) := \eta(1, g(t,s))$$

$$\psi(t,s) := (I'(g(t,s))u_R^+, I'(g(t,s))u_R^-) \tag{1.40}$$

e

$$\Psi(t,s) := (t^{-1}I'(h(t,s))h(t,s)^+, s^{-1}I'(h(t,s))h(t,s)^-). \tag{1.41}$$

Como $u_R \in \mathcal{N}_R^\pm$, então $\psi(t,s) = 0$ se, e somente se $(t,s) = (1,1) \in D$. Pelo Lema 1.16 segue que

$$\deg(\psi, D, 0) = -1.$$

Pela escolha de $\varepsilon > 0$, por (1.38) e pela propriedade (i) da deformação η, temos que $g = h$ na ∂D. Logo, por (1.40) e (1.41), segue que $\psi = \Psi$ na ∂D e

$$\deg(\Psi, D, 0) = \deg(\psi, D, 0) = -1.$$

Assim, existe $(t,s) \in D$ tal que $h(t,s) \in \mathcal{N}_R^\pm$ o que contradiz (1.39). $\square$

Estimativa para os níveis de energia

Agora, afim de provarmos que a sequência minimizante obtida pelos Lema 1.18, 1.19 e 1.20 converge fracamente, não necessariamente forte, para alguma função que muda de sinal, relacionaremos os níveis de energia associados das variedades $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_\infty$ e $\mathcal{N}^\pm$.

Lema 1.21. *Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ a solução não negativa ground state do problema (P) obtida pelo Teorema 1.1 e $\omega \in H^1(\mathbb{R}^3)$ a solução ground state do problema (P_∞). Defina $\omega_n(x) := \omega(x + x_n)$ onde $x_n := (0,0,n)$. Se $\psi_n := tu_0 - s\omega_n$ $(t,s) \in [1/2, 2] \times [1/2, 2]$, então*

$$\int K(x)\phi_{\psi_n}(x)\psi_n^2 \le t^4 \int K(x)\phi_{u_0}(x)u_0^2 + c_1 e^{-\alpha n},$$

para alguma constante $c_1 > 0$. Além disso,

$$\int K(x)\phi_{u_0}(x)u_0\omega_n \le c_2 e^{-\alpha n}.$$

Demonstração. Como $u_0, \omega \in H^1(\mathbb{R}^3)$ são não negativas por (1.28) temos

$$\int K(x)\phi_{\psi_n}(x)\psi_n^2 dx \leq t^2 \int K(x)\phi_{\psi_n}(x)u_0^2 dx + s^2 \int K(x)\phi_{\psi_n}(x)\omega_n^2 dx.$$

Ainda, por (1.28), segue que $\phi_{\psi_n} \leq \phi_{tu_0} + \phi_{s\omega_n}$. Usando o Teorema de Fubini e argumentando como na Proposição 1.13 obtemos

$$\int K(x)\phi_{\omega_n}(x)u_0^2 = \int K(x)\phi_{u_0}(x)\omega_n^2 \leq c_3 e^{-\alpha n},$$

para alguma constante $c_3 > 0$. Além disso, ainda pela Proposição 1.13, segue que

$$\int K(x)\phi_{\omega_n}(x)\omega_n^2 \leq c_4 e^{-\alpha n},$$

para alguma constante $c_4 > 0$. Isto prova a primeira parte do lema. Agora note que, por (K_1),

$$\int K(x)\phi_{u_0}(x)u_0\omega_n \leq c_K e^{-\alpha n}\|\phi_{u_0}\|_6\|u_0\|_3\left(\int e^{2\alpha|x|}\omega^2\right)^{1/2}.$$

Como $\alpha < \sqrt{V_\infty}$, seja $\delta \in (\alpha, \sqrt{V_\infty})$. Pela Proposição 1.1 temos que

$$\int e^{2\alpha|x|}\omega^2 \leq \int e^{2\alpha|x|}e^{-2\delta|x|} < \infty,$$

o que conclui a prova. □

Antes de provar os próximos lemas enunciaremos dois resultados auxiliares.

Lema 1.22. *Seja $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ uma função convexa e par tal que $F(0) = 0$ e $f(s) = F'(s) \geq 0$ para todo $s \in [0, \infty)$. Então, para todo $t, s \geq 0$*

$$|F(t-s) - F(t) - F(s)| \leq 2(f(t)s + f(s)t).$$

Demonstração. Veja [5, Lema 2.4] □

Lema 1.23 (Teorema de Miranda)**.** *Seja $G := \{x \in \mathbb{R}^N; |x_i| < L, \quad para \quad 1 \leq i \leq n\}$ e $F = (f_1, f_2, ..., f_n) : \overline{G} \to \mathbb{R}^N$ é contínua. Se $F(x) \neq (0, 0, ..., 0)$ para todo $x \in \partial G$ e*

(i) $f_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, -L, x_{i+1}, ..., x_n) \geq 0$, para $1 \leq i \leq n$,

(ii) $f_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, L, x_{i+1}, ..., x_n) \leq 0$, para $1 \leq i \leq n$,

então $F(x) = (0, 0, ..., 0)$ possui solução em G.

Demonstração. Veja [49, 43]. $\square$

Agora, argumentando como [39] provaremos que:

Lema 1.24. *Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ a solução não negativa do problema*

$$-\Delta u + V(x)u + K(x)\phi_u(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \quad em \quad \mathbb{R}^3, \tag{P}$$

obtida no Teorema 1.1. Então, para todo $\delta \in (0, \sqrt{V_\infty})$, existe $c := c(\delta) > 0$ tal que

$$u_0(x) \leq ce^{-\delta|x|},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

Demonstração. Seja $\mu > 1$ tal que $\delta\sqrt{\mu} = \sqrt{V_\infty}$ e considere $A, B > 0$ tais que

$$A + B - V_\infty = -\frac{V_\infty}{\mu}. \tag{1.42}$$

Por regularidade elíptica para algum $\alpha \in (0,1)$, temos que $u_0 \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Assim, por (iii) do Lema 1.3, obtemos

$$-\Delta u_0 + V(x)u_0 \leq a(x)u_0^p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3. \tag{1.43}$$

Então, argumentando como em [37] segue que $\lim_{|x|\to\infty} u_0(x) = 0$, o que implica em

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{a(x)u_0^p(x)}{u_0(x)} = 0$$

visto que $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Logo, existe $R_1 > 0$ tal que

$$a(x)u_0^p(x) < Au_0(x), \qquad \forall\, |x| > R_1.$$

Por (V_1), existe $R > R_1 > 0$ tal que

$$V_\infty - B < V(x), \qquad \forall\, x \in \Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}.$$

Usando as duas últimas desigualdades (1.42) e (1.43), obtemos, para $x \in \Omega$,

$$-\Delta u_0 \leq a(x)u_0^p - V(x)u_0 \leq \Big(A + B - V_\infty\Big)u_0(x) = -\frac{V_\infty}{\mu}u_0(x),$$

isto é,

$$-\Delta u_0(x) + \frac{V_\infty}{\mu} u_0(x) \leq 0, \qquad \forall\, x \in \Omega. \tag{1.44}$$

Defina agora $v(x) := \|u_0\|_\infty e^{\delta R} e^{-\delta|x|}$, para $x \in \mathbb{R}^3$. Um cálculo direto mostra que, para todo $x \in \Omega$, vale

$$-\Delta v(x) + \frac{V_\infty}{\mu} v(x) = \|u_0\|_\infty e^{\delta R} e^{-\delta|x|} \Big\{ -\delta^2 + \frac{2\delta}{|x|} + \frac{V_\infty}{\mu} \Big\}.$$

Uma vez que $\delta\sqrt{\mu} = \sqrt{V_\infty}$, segue que

$$-\Delta v(x) + \frac{V_\infty}{\mu} v(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \Omega. \tag{1.45}$$

Como $v(x) = \|u_0\|_\infty$ em $\partial B_R(0)$, temos que $\varphi := (u_0 - v)^+$ é tal que $\varphi \equiv 0$ neste mesmo conjunto. Logo, por (1.44) e (1.45), temos que

$$0 \geq \int_\Omega (\nabla(u_0 - v) \cdot \nabla\varphi) dx + \int_\Omega \frac{V_\infty}{\mu}(u_0 - v)\varphi\, dx \geq \int_\Omega \frac{V_\infty}{\mu} \left((u_0 - v)^+\right)^2 dx \geq 0,$$

e portanto

$$\int_\Omega \left((u_0 - v)^+\right)^2 dx = 0.$$

Concluímos então que $(u_0 - v) \leq 0$ em Ω, isto é,

$$u_0(x) \leq \|u_0\|_\infty e^{\delta R} e^{-\delta|x|}, \qquad \forall\, |x| > R.$$

O resultado segue disto e do fato da função $x \mapsto u_0(x)\left(\|u_0\|_\infty e^{\delta R} e^{-\delta|x|}\right)^{-1}$ ser contínua em $\overline{B_R(0)}$. □

Lema 1.25. *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, vale*

$$I(\psi_n) < m + m_\infty.$$

Demonstração. Pelo Lema 1.21 temos

$$I(\psi_n) \leq I(tu_0) + I_\infty(s\omega_n) - T_1 - T_2 - T_3 - T_4 + ce^{-\alpha n}, \tag{1.46}$$

onde

$$T_1 := ts \int \nabla u_0 \nabla \omega_n + V(x) u_0 \omega_n,$$

$$T_2 := \frac{1}{p+1}\int a(x)\Big(|\psi_n|^{p+1} - |tu_0|^{p+1} - |s\omega_n|^{p+1}\Big),$$

$$T_3 := \frac{1}{2}\int \Big(V_\infty - V(x)\Big)|s\omega_n|^2 dx \quad \text{e} \quad T_4 := \frac{1}{p+1}\int \Big(a(x) - a_\infty\Big)|s\omega_n|^{p+1}.$$

Pela Proposição 1.13, segue que

$$T_3 \geq c_1 e^{-\mu n} \tag{1.47}$$

e

$$T_4 \geq -c_2 e^{-\gamma n}, \tag{1.48}$$

para constantes $c_1, c_2 > 0$. Além disso, pelo lema anterior e a hipótese em μ, existe uma constante $\mu < \theta < \sqrt{V_\infty}$ e $c_3 > 0$ tal que

$$|u_0(x)| \leq c_3 e^{-\theta|x|},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Então, considerando $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(s) := |s|^{p+1}$ com $p \in (3,5)$ no Lema 1.22, temos

$$|T_2| \leq c_4 \int \Big(|tu_0|^p s\omega_n + |s\omega_n|^p tu_0\Big) \leq c_5 e^{-\theta n}. \tag{1.49}$$

Além disso, pelo Lema 1.21, segue que

$$|T_1| = ts\Big|\int a(x)|u_0|^{p-1}u\omega_n - \int K(x)\phi_{u_0}(x)u_0\omega_n\Big| \leq c_6 e^{-\theta n} + c_7 e^{-\alpha n}.$$

Assim, por (1.46), (1.47), (1.48) e (1.49), como $\mu < \min\{\alpha, \theta, \gamma\}$ temos

$$I(\psi_n) < I(tu_0) + I_\infty(s\omega_n) = I(tu_0) + I_\infty(s\omega),$$

para $n > n_0$. Agora, como $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é tal que $I(u_0) = m$, temos por (iii) do Lema 1.8 que

$$m = I(u_0) = \max_{t\geq 0} I(tu_0).$$

Além disso, sendo

$$m_\infty = I_\infty(\omega) = \max_{t\geq 0} I_\infty(t\omega),$$

segue o resultado. $\square$

Lema 1.26. $m^\pm < m + m_\infty$.

Demonstração. Pelo Lema 1.25, para provarmos o resultado é suficiente exibir $(t_0, s_0) \in$

$[1/2,2]\times[1/2,2]$ tal que $\Big(t_0u_0 - s_0\omega_n\Big)\in\mathcal{N}^{\pm}$. Seja

$$\begin{aligned}h^{\pm}(t,s,n) :&= \int |\nabla(tu_0 - s\omega_n)^{\pm}|^2 + V(x)|(tu_0 - s\omega_n)^{\pm}|^2\\ &+ \int K(x)\phi_{(tu_0-s\omega_n)}(x)\Big((tu_0 - s\omega_n)^{\pm}\Big)^2\\ &- \int a(x)|(tu_0 - s\omega_n)^{\pm}|^{p+1}.\end{aligned}$$

Como $I'(u_0)u_0^+ = 0$ e $3<p<5$, temos

$$\begin{aligned}h^+(1/2,0,n) &= \Big((1/2)^2 - (1/2)^{p+1}\Big)\int |\nabla u_0|^2 + V(x)|u_0|^2\\ &+ \Big((1/2)^4 - (1/2)^{p+1}\Big)\int K(x)\phi_{u_0}(x)u_0^2 > 0\end{aligned}\tag{1.50}$$

e

$$\begin{aligned}h^+(2,0,n) &= \Big(2^2 - 2^{p+1}\Big)\int |\nabla u_0|^2 + V(x)|u_0|^2\\ &+ \Big(2^4 - 2^{p+1}\Big)\int K(x)\phi_{u_0}(x)u_0^2 < 0.\end{aligned}\tag{1.51}$$

Como $I'_\infty(\omega)\omega = 0$ e $(-\omega)^- = \omega$, já que $\omega\geq 0$ em $\mathbb{R}^3$, por (V_1), (K_1) e (a_1), de forma análoga temos

$$h^-(0,1/2,n) = \Big((1/2)^2 - (1/2)^{p+1}\Big)\int |\nabla\omega|^2 + V_\infty|\omega|^2 + o_n(1)\tag{1.52}$$

e

$$h^-(0,2,n) = \Big(2^2 - 2^{p+1}\Big)\int |\nabla\omega|^2 + V_\infty|\omega|^2 + o_n(1).\tag{1.53}$$

Sendo

$$\Big\langle(1/2u_0 - s\omega_n)^+,(1/2u_0 - s\omega_n)^+\Big\rangle_{H^1} = \Big\langle(1/2u_0 - s\omega_n)^+,(1/2u_0 - s\omega_n)\Big\rangle_{H^1}$$

e

$$\int a(x)|(1/2u_0 - s\omega_n)^+|^{p+1} = \int a(x)|(1/2u_0 - s\omega_n)^+|^{p-1}(1/2u_0 - s\omega_n)^+(1/2u_0 - s\omega_n),$$

para todo $s \in [1/2, 2]$, temos

$$
\begin{aligned}
h^+(1/2, s, n) := 1/2 &\int \nabla u_0 \nabla (1/2 u_0 - s\omega_n)^+ + V(x) u_0 (1/2 u - s\omega_n)^+ \\
&+ s \int \nabla \omega \nabla (1/2 u_0(x - x_n) - s\omega)^+ + V(x - x_n)\omega(1/2u_0(x - x_n) - s\omega)^+ \\
&+ \int K(x)\phi_{(1/2u_0 - s\omega_n)}(x)\Big((1/2u_0 - s\omega_n)^+\Big)^2 \\
&- 1/2 \int a(x) u_0 |(1/2u_0 - s\omega_n)^+|^{p-1}(1/2u_0 - s\omega_n)^+ \\
&+ s \int a(x - x_n)\omega|(1/2u_0(x - x_n) - s\omega)^+|^{p-1}(1/2u_0(x - x_n) - s\omega)^+.
\end{aligned} \tag{1.54}
$$

Agora, pelo decaimento da solução $\omega \in H^1(\mathbb{R}^3)$ do problema (P_∞), segue que

$$(1/2u_0 - s\omega_n)^+ \to 1/2u_0 \quad \text{q.t.p em} \quad \mathbb{R}^3,$$

$$(1/2u_0(x - x_n) - s\omega)^+ \to 0 \quad \text{q.t.p em} \quad \mathbb{R}^3,$$

$$(1/2u_0 - s\omega_n)^+ \rightharpoonup 1/2u_0 \quad \text{fracamente em } H^1(\mathbb{R}^3) \text{ e } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

e

$$(1/2u_0 - s\omega_n)^- \rightharpoonup 0 \quad \text{fracamente em } H^1(\mathbb{R}^3).$$

Argumentando como na prova de (ii) do Lema 1.4, temos que

$$
\begin{aligned}
\int K(x)\phi_{(1/2u_0 - s\omega_n)}(x)\Big((1/2u_0 - s\omega_n)^+\Big)^2 &= \int K(x)\phi_{(1/2u_0 - s\omega_n)^+}(x)\Big((1/2u_0 - s\omega_n)^+\Big)^2 \\
&+ \int K(x)\phi_{(1/2u_0 - s\omega_n)^-}(x)\Big((1/2u_0 - s\omega_n)^+\Big)^2 \\
&= \int K(x)\phi_{1/2u_0}(x)(1/2u_0)^2 + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Portanto, por (1.54), pelas convergências acima e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesque, obtemos

$$h^+(1/2, s, n) = h^+(1/2, 0, n) + o_n(1).$$

De forma análoga,

$$h^+(2, s, n) = h^+(2, 0, n) + o_n(1).$$

Então, por (1.50) e (1.51), segue que

$$h^+(1/2, s, n) > 0 \quad \text{e} \quad h^+(2, s, n) < 0, \tag{1.55}$$

para $n > n_0$, para todo $s \in [1/2, 2]$.

Além disso, como a solução $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ do problema (P) é não negativa, pelo seu decaimento, temos que

$$(tu_0 - s\omega_n)^- \to 0 \quad \text{q.t.p em} \quad \mathbb{R}^3,$$

$$(tu_0(x - x_n) - s\omega)^- \to s\omega \quad \text{q.t.p em} \quad \mathbb{R}^3$$

e

$$(tu_0(x - x_n) - s\omega)^- \rightharpoonup s\omega \quad \text{fracamente em } H^1(\mathbb{R}^3) \text{ e } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

$s \in \{1/2, 2\}$. Então, argumentando como acima, por (1.52) e (1.53), temos que

$$h^-(t, 1/2, n) > 0 \quad \text{e} \quad h^-(t, 2, n) < 0,$$

para $n > n_0$, para todo $t \in [1/2, 2]$. Por (1.55) e pelo Lema 1.23, existem $(t_0, s_0) \in [1/2, 2] \times [1/2, 2]$ tais que $t_0u_0 - s_0\omega_n \in \mathcal{N}^\pm$. Portanto, como observado anteriormente, segue a prova do lema. □

1.2.2 Prova do Teorema 1.2

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $u_n \in \mathcal{N}_n^\pm$ a função obtida pelo Lema 1.18. Como $I(u_n) = m_n$, segue do Lema 1.19 que

$$I(u_n) \to m^\pm.$$

Uma vez que $\mathcal{N}_n^\pm \subset \mathcal{N}$, a sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é limitada. Logo, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{fracamente em} \quad H^1(\mathbb{R}^3) \tag{1.56}$$

e

$$\|u_0\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 \tag{1.57}$$

Afirmamos que $I'(u_0) = 0$. Com efeito, considere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Como supp$\varphi$ é compacto existe $n_\varphi \in \mathbb{N}$ tal que supp$\varphi \subset B_{n_\varphi}$. Assim, para $n > n_\varphi$ temos supp$\varphi \subset B_n$, e pelo Lema 1.20 segue que $I'(u_n)\varphi = 0$ para $n > n_\varphi$. Fazendo $n \to \infty$, concluímos que $I'(u_0)\varphi = 0$. Por um argumento de densidade segue que $I'(u_0)\varphi = 0$, para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, e portanto $I'(u_0) = 0$.

Vamos mostrar que $u_0^+ \not\equiv 0$ e $u_0^- \not\equiv 0$. De fato, suponhamos por contradição que

$u_0^+ \equiv 0$. Então
$$u_n^+ \rightharpoonup 0 \quad \text{fracamente em } H^1(\mathbb{R}^3).$$

Por (ii) do Lema 1.4, temos que

$$\int K(x)\phi_{u_n^+}(x)(u_n^+)^2 = o_n(1). \tag{1.58}$$

A imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ e (ii) do Lema 1.3 nos fornecem

$$\begin{aligned}\int K(x)\phi_{u_n}(x)(u_n^+)^2 &\leq \|\phi_{u_n}\|_6\Big(\int K(x)^{6/5}(u_n^+)^{12/5}\Big)^{5/6}\\ &\leq c\Big(\int K(x)^{6/5}(u_n^+)^{12/5}\Big)^{5/6},\end{aligned}$$

para alguma constante $c > 0$. Usando (K_1) e o mesmo argumento do Lema 1.12, obtemos

$$\int K(x)\phi_{u_n}(x)(u_n^+)^2 = o_n(1).$$

Ainda pelo Lema 1.12, temos que

$$\|u_n^+\|^2 = \|u_n^+\|_*^2 + o_n(1), \qquad \int a(x)|u_n^+|^{p+1} = \int a_\infty|u_n^+|^{p+1} + o_n(1), \tag{1.59}$$

onde
$$\|u_n^+\|_*^2 := \int \Big(|\nabla u_n^+|^2 + V_\infty(u_n^+)^2\Big).$$

Como
$$\|u_n^+\|^2 + \int K(x)\phi_{u_n}(x)(u_n^+)^2 = \int a(x)|u_n^+|^{p+1}, \tag{1.60}$$

temos
$$\|u_n^+\|_*^2 = \int a_\infty|u_n^+|^{p+1} + o_n(1). \tag{1.61}$$

Agora, seja $t_n > 0$ tal que $t_n u_n^+ \in \mathcal{N}_\infty$, isto é,

$$t_n^2\|u_n^+\|_*^2 = t_n^{p+1}\int a_\infty|u_n^+|^{p+1}.$$

Então, de (1.61), obtemos
$$\Big(t_n^2 - t_n^{p+1}\Big)\|u_n^+\|_*^2 = o_n(1). \tag{1.62}$$

Como na prova do Teorema 1.1, temos que $t_n \to 1$. Então, por (1.58) e (1.59) temos

$$\begin{aligned} I_\infty(t_n u_n^+) &= I_\infty(t_n u_n^+) - \frac{1}{p+1} I'_\infty(t_n u_n^+)(t_n u_n^+) \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) t_n^2 \|u_n^+\|_*^2 \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \|u_n^+\|^2 + o_n(1) \\ &= I(u_n^+) - \frac{1}{p+1} I'(u_n^+) u_n^+ + o_n(1) \\ &= I(u_n^+) + o_n(1). \end{aligned} \tag{1.63}$$

Considere agora

$$a := \lim_{n\to\infty} \Big\{ I(u_n^+) + \frac{1}{4} \int K(x) \phi_{u_n^-} (u_n^+)^2 \Big\} \tag{1.64}$$

e

$$b := \lim_{n\to\infty} \Big\{ I(u_n^-) + \frac{1}{4} \int K(x) \phi_{u_n^+} (u_n^-)^2 \Big\}. \tag{1.65}$$

Pelo Lema 1.26,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = m^{\pm} < m + m_\infty,$$

e portanto,

$$a + b < m + m_\infty. \tag{1.66}$$

Usando agora (1.63), obtemos

$$m_\infty \le I_\infty(t_n u_n^+) = I(u_n^+) + o_n(1) \le I(u_n^+) + \frac{1}{4} \int K(x) \phi_{u_n^-} (u_n^+)^2 + o_n(1) = a.$$

Isto e (1.66) implicam em

$$b < m. \tag{1.67}$$

Seja $s_n > 0$ tal que $s_n u_n^- \in \mathcal{N}$, isto é,

$$s_n^2 \|u_n^-\|^2 + s_n^4 \int K(x) \phi_{u_n^-}(x) (u_n^-)^2 = s_n^{p+1} \int a(x) |u_n^-|^{p+1}. \tag{1.68}$$

Afirmamos que $s_n < 1$. Com efeito, como

$$0 = I'(u_n) u_n^- = I'(u_n^-) u_n^- + \int K(x) \phi_{u_n^-}(x) (u_n^+)^2, \tag{1.69}$$

segue $I'(u_n^-)u_n^- < 0$, ou ainda

$$\|u_n^-\|^2 + \int K(x)\phi_{u_n^-}(x)(u_n^-)^2 < \int a(x)|u_n^-|^{p+1}.$$

Por (1.68), temos

$$\Big(s_n^2 - s_n^{p+1}\Big)\|u_n^-\|^2 + \Big(s_n^4 - s_n^{p+1}\Big)\int K(x)\phi_{u_n^-}(x)(u_n^-)^2 > 0$$

e segue a afirmação. Então

$$\begin{aligned} m \le I(s_n u_n^-) &= I(s_n u_n^-) - \frac{1}{p+1}I'(s_n u_n^-)(s_n u_n^-) \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big)s_n^2\|u_n^-\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big)s_n^4\int K(x)\phi_{u_n^-}(u_n^-)^2 \\ &< I(u_n^-) - \frac{1}{p+1}I'(u_n^-)(u_n^-). \end{aligned}$$

Por (1.69) e (1.65) temos

$$m \le I(u_n^-) + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n^+}(u_n^-)^2 dx \le I(u_n^-) + \frac{1}{4}\int K(x)\phi_{u_n^+}(u_n^-)^2 = b + o_n(1),$$

isto é, $m \le b$, contradizendo (1.67). Portanto, $u_0^+ \not\equiv 0$. De forma análoga, $u_0^- \not\equiv 0$, e segue que $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma solução nodal do problema (P).

Para finalizarmos, veja por (1.56), (1.57) e (ii) do Lema 1.4, temos

$$\begin{aligned} m^\pm \le I(u_0) &= I(u_0) - \frac{1}{p+1}I'(u_0)u_0 \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big)\|u_0\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big)\int K(x)\phi_{u_0}(x)u_0^2 \\ &\le \liminf_{n\to\infty}\Big(I(u_n) - \frac{1}{p+1}I'(u_n)u_n\Big) \\ &= \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = m^\pm, \end{aligned}$$

isto é, $I(u_0) = m^\pm$. O teorema está provado.

CAPÍTULO 2

Problema de Kirchhoff: caso indefinido

Neste capítulo estudamos o problema

$$-\Big(1+\int |\nabla u|^2\Big)\Delta u + V(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \tag{K}$$

com $p \in (3,5)$. Como no capítulo anterior, vamos considerar um problema limite associado ao problema (K). Mais especificamente, para $V_\infty, a_\infty > 0$ e $p \in (3,5)$, mostramos inicialmente que o problema

$$-\Big(1+\int |\nabla u|^2\Big)\Delta u + V_\infty u = a_\infty|u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \tag{K_∞}$$

possui uma solução ground state $\omega \in H^1(\mathbb{R}^3)$. A partir desta solução definimos

$$h^* := \Big(1+\int |\nabla \omega|^2\Big)^{1/2}.$$

Na primeira parte deste capítulo, vamos supor que os potenciais V e a satisfazem

(V_0) $V^- \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ e $\int |V^-|^{3/2} < S^{3/2}$, onde

$$S := \inf\Big\{\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \,:\, u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \text{ e } \|u\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 1\Big\}.$$

$(\widetilde{V}_1)$ existem constantes $\mu, c_V > 0$ e $h > h^*$ tais que

$$V(x) \leq V_\infty - c_V e^{-\frac{\mu}{h}|x|}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3,$$

onde

$$0 < V_\infty := \lim_{|x| \to +\infty} V(x);$$

(a_0) $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$;

$(\widetilde{a}_1)$ existem constantes $\gamma, c_a > 0$ e $h > h^*$ tais que

$$a(x) \geq a_\infty - c_a e^{-\frac{\gamma}{h}|x|}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3,$$

onde

$$a_\infty := \lim_{|x| \to +\infty} a(x) > 0$$

Os resultados deste capítulo são:

Teorema 2.1. *Suponha que $p \in (3,5)$, o potencial V safistaz (V_0) e $(\widetilde{V}_1)$, e o potencial a satisfaz (a_0) e $(\widetilde{a}_1)$. Se*

$$\mu < \gamma < (p+1)\sqrt{V_\infty},$$

então o problema (K) possui uma solução ground state não negativa.

Para encontrar a solução nodal vamos supor que

$(\widetilde{V}_0)$ a função $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é radial, satisfaz (V_0) e

$$V_\infty := \lim_{|x| \to +\infty} V(x) > 0;$$

$(\widetilde{a}_0)$ a função $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ é radial e

$$a_\infty := \lim_{|x| \to +\infty} a(x) > 0$$

e provar o seguinte resultado

Teorema 2.2. *Suponha que $p \in (3,5)$, V satisfaz $(\widetilde{V}_0)$ e o potencial a satisfaz $(\widetilde{a}_0)$. Então o problema (K) possui uma solução radial nodal minimal.*

2.1 Existência de solução ground state

Nesta seção provamos o Teorema 2.1.

2.1.1 Resultados preliminares

Estudo do problema limite

Nesta subseção, estudamos o problema limite

$$-\left(1+\int|\nabla u|^2\right)\Delta u+V_\infty u=a_\infty|u|^{p-1}u,\quad \text{em}\quad \mathbb{R}^3. \tag{K_∞}$$

O principal objetivo aqui é provar a existência de solução ground state que possua decaimento exponencial. Diferente do problema de Schrödinger-Poisson, temos dificuldade em utilizar o Lema 1.24 para obter este decaimento. Para contornar esta dificultade, argumentando como em [8], notamos que se $\omega\in H^1(\mathbb{R}^3)$ é solução do problema limite, então $v(x):=\omega(xh^*)$ é solução da equação

$$-\Delta v+V_\infty v=a_\infty|v|^{p-1}v,\quad \text{em}\quad \mathbb{R}^3,$$

para $h^*:=\left(1+\|\nabla\omega\|_2^2\right)^{1/2}$ e segue o decaimento.

A este problema, associamos o funcional energia $I_\infty:H^1(\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$ dado por

$$I_\infty(u):=\frac{1}{2}\|u\|_*^2+\frac{1}{4}\|\nabla u\|_2^4-\frac{1}{p+1}\int a_\infty|u|^{p+1},$$

onde

$$\|u\|_*^2:=\int\left(|\nabla u|^2+V_\infty u^2\right).$$

Note que,

$$I'_\infty(u)\varphi=\left(1+\int|\nabla u|^2\right)\int\nabla u\cdot\nabla\varphi+\int V_\infty u\varphi dx-\int a_\infty|u|^{p-1}u\varphi,$$

para toda $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^3)$. Portanto, pontos críticos deste funcional são, precisamente, soluções fracas do problema (K_∞). Aqueles que são não nulos pertencem ao conjunto

$$\mathcal{N}_\infty:=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\};\quad I'_\infty(u)u=0\right\}.$$

Lema 2.3. *O conjunto $\mathcal{N}_\infty$ satisfaz*

(i) $\mathcal{N}_\infty$ é uma variedade de classe C^1;

(ii) $m_\infty := \inf_{u\in\mathcal{N}_\infty} I_\infty(u) > 0$;

(iii) *se* $u \in \mathcal{N}_\infty$, *então* $I_\infty(u) = \max_{t\geq 0} I_\infty(tu)$.

Demonstração. Se $J_\infty : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$J_\infty(u) := I'_\infty(u)u = \|u\|_*^2 + \|\nabla u\|_2^4 - \int a_\infty |u|^{p+1},$$

então

$$J'_\infty(u)u = 2\|u\|_*^2 + 4\|\nabla u\|_2^4 - (p+1)\int a_\infty |u|^{p+1}.$$

Se $u \in \mathcal{N}_\infty$, segue que

$$\|u\|_*^2 + \|\nabla u\|_2^4 = \int a_\infty |u|^{p+1}, \tag{2.1}$$

e portanto

$$J'_\infty(u)u = \Big(2-(p+1)\Big)\|u\|_*^2 + \Big(4-(p+1)\Big)\|\nabla u\|_2^4 < 0,$$

pois $p \in (3,5)$. Segue então do Teorema do Função Implicita que $\mathcal{N}_\infty$ é uma variedade de classe C^1.

Se $u \in \mathcal{N}_\infty$, por (2.1) e pela imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$, obtemos $c_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_*^2 \leq \|u\|_*^2 + \|\nabla u\|_2^4 = \int a_\infty |u|^{p+1} \leq c_1 \|u\|_*^{p+1}.$$

Logo, par algum $\rho > 0$, vale

$$\|u\|_*^2 \geq \rho, \tag{2.2}$$

para toda $u \in \mathcal{N}_\infty$. Como para estas funções temos

$$I_\infty(u) = I_\infty(u) - \frac{1}{p+1}I'_\infty(u)u = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big)\|u\|_*^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big)\|\nabla u\|_2^4. \tag{2.3}$$

Como $p \in (3,5)$ segue que $m_\infty > 0$.

Seja $f_u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_u(t) := I_\infty(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|_*^2 + \frac{t^4}{4}\|\nabla u\|_2^4 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int a_\infty |u|^{p+1}.$$

Como $(p+1) > 4$, segue

$$\lim_{t\to\infty} f_u(t) = -\infty.$$

Observando que $f_u(0) = 0$ e que $f_u(t) > 0$, para $t > 0$ suficientemente pequeno, concluímos que f_u possui um ponto de máximo global $t_u > 0$, tal que $f'_u(t_u) = 0$, isto é,

$$t_u^2\|u\|_*^2 + t_u^4\|\nabla u\|_2^4 = t_u^{p+1}\int a_\infty |u|^{p+1}.$$

Uma vez que $u \in \mathcal{N}_\infty$, temos

$$\Big(t_u^2 - t_u^{p+1}\Big)\|u\|_*^2 + \Big(t_u^4 - t_u^{p+1}\Big)\|\nabla u\|_2^4 = 0.$$

Assim, como $p \in (3,5)$, concluímos que $t_u = 1$, o que finaliza a prova do lema. $\square$

Para provar o próximo resultado, vamos introduzir o conceito de *simetrização de Schwarz* de uma função $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p \leq \infty$ (para maiores detalhes veja [31]). Se $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p \leq \infty$, é uma função não-negativa, existe uma única função $u^* \in L^p(\mathbb{R}^3)$, denominada a *simetrização de Schwarz* da função $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$, que satisfaz:

(i) para todo $\lambda > 0$

$$\mu\Big(\{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, u^*(x) \geq \lambda\}\Big) = \mu\Big(\{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, u(x) \geq \lambda\}\Big)$$

e existe $R_\lambda > 0$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^3; \quad u^*(x) \geq \lambda\} = B_{R_\lambda}(0)$, onde $\mu(\Omega)$ denota a medida de Lebesque do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$;

(ii) se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua não-decrescente e $f(0) = 0$, então

$$\int f(u) = \int f(u^*); \tag{2.4}$$

(iii) se $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, então $u^* \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e

$$\|\nabla u^*\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2. \tag{2.5}$$

Através do próximo resultado obteremos uma sequência minimizante adequada para a variedade $\mathcal{N}_\infty$.

Lema 2.4. *Para cada $v \in \mathcal{N}_\infty$, existe $u \in \mathcal{N}_\infty \cap H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$ tal que $I(u) \leq I(v)$.*

Demonstração. Dada $v \in \mathcal{N}_\infty$, podemos supor que esta função é não-negativa, pois $|v| \in \mathcal{N}_\infty$. Considere $v^* \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$ a simetrização de Schwarz da função v. Como, por (2.4),

$$\int a_\infty |v|^{p+1} = \int a_\infty |v^*|^{p+1} > 0, \tag{2.6}$$

argumentando como na prova de (iii) do Lema 2.3, a função $f_{v^*} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f_{v^*}(t) = I_\infty(tv^*)$ possui um ponto de máximo global $t_* > 0$ tal que $t_* v^* \in \mathcal{N}_\infty$. Então

$$t_*^2\|v^*\|_*^2 + t_*^4\|\nabla v^*\|_2^4 = t_*^{p+1}\int a_\infty|v^*|^{p+1}.$$

Como $v \in \mathcal{N}_\infty$, segue de (2.6) que

$$t_*^2\|v^*\|_*^2 + t_*^4\|\nabla v^*\|_2^4 = t_*^{p+1}\|v\|_*^2 + t_*^{p+1}\|\nabla v\|_2^4.$$

Usando (2.5), obtemos

$$\left(t_*^2 - t_*^{p+1}\right)\|v^*\|_*^2 + \left(t_*^4 - t_*^{p+1}\right)\|\nabla v^*\|_2^4 \geq 0,$$

e portanto, $t_* \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
I_\infty(v) = I_\infty(v) - \frac{1}{p+1}I'_\infty(v)v &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|v\|_*^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\right)\|\nabla v\|_2^4 \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|v^*\|_*^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\right)\|\nabla v^*\|_2^4 \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)t_*^2\|v^*\|_*^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\right)t_*^4\|\nabla v^*\|_2^4 \\
&= I_\infty(tv^*),
\end{aligned}$$

e o resultado segue com $u = t_* v^*$. □

Proposição 2.5. *O problema (K_∞) possui uma solução $\omega \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que,*

$$I_\infty(\omega) = m_\infty.$$

Além disso, para todo $0 < \delta < \sqrt{V_\infty}$, existe $c := c(\delta) > 0$ tal que

$$|\omega(x)| \leq ce^{-\frac{\delta}{h^*}|x|},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$, onde $h^* := \left(1 + \|\nabla\omega\|_2^2\right)^{1/2}$.

Demonstração. Seja $(v_n) \subset \mathcal{N}_\infty$ tal que $I_\infty(v_n) \to m_\infty$. Pelo Lema 2.4, existe $(u_n) \subset \mathcal{N}_\infty \cap H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo $m_\infty \leq I_\infty(u_n) \leq I_\infty(v_n)$, e portanto

$$I_\infty(u_n) \to m_\infty.$$

Por (2.3), a sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\infty \cap H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$ é limitada e, a menos de subsequência, vale

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em } H^1(\mathbb{R}^3) \text{ e } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3). \tag{2.7}$$

Assim,

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|^2. \tag{2.8}$$

Usando (2.1) e (2.2), obtemos $c > 0$ tal que

$$0 < c \leq \int a_\infty |u_n|^{p+1}.$$

Como a imersão $H^1_{rad}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$ é compacta, segue de (2.7) que

$$\int a_\infty |u_n|^{p+1} \to \int a_\infty |u|^{p+1}. \tag{2.9}$$

e portanto,

$$0 < c \leq \int a_\infty |u|^{p+1}.$$

Argumentando como no Lema 2.3 obtemos $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\infty$. Usando (2.8), (2.9) e (iii) do Lema 2.3 obtemos

$$m_\infty \leq I_\infty(t_u u) \leq \liminf_{n\to\infty} I_\infty(t_u u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} I_\infty(u_n) = m_\infty,$$

isto é, $I_\infty(t_u u) = m_\infty$.

Defina $\omega := t_u u$ e note que, como $\mathcal{N}_\infty$ é uma variedade de classe C^1, podemos usar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para obter $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'_\infty(\omega) = \lambda J'_\infty(\omega).$$

Como $I'_\infty(\omega)\omega = 0$ e $J'_\infty(\omega)\omega < 0$, temos que $\lambda = 0$ e, portanto $I'_\infty(\omega) = 0$.

Para obter o decaimento de ω, considere $v(x) := \omega(xh^*)$. Como $\omega \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é solução do problema (K_∞), temos que

$$-\Delta v = -(h^*)^2 \Delta\omega(xh^*) = \frac{(h^*)^2\Big(a_\infty|\omega(xh^*)|^{p-1}\omega(xh^*) - V_\infty \omega(xh^*)\Big)}{1 + \|\nabla\omega\|_2^2}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3.$$

Assim, para $h^* := \Big(1 + \|\nabla\omega\|_2^2\Big)^{1/2}$, seque que

$$-\Delta v + V_\infty v = a_\infty |v|^{p-1} v, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3.$$

Argumentando como no Lema 1.24, temos que, para todo $0 < \delta < \sqrt{V_\infty}$, existe $c := c(\delta) > 0$, tal que $|v(y)| \leq ce^{-\delta|y|}$, para todo $y \in \mathbb{R}^3$. Desde modo,

$$|\omega(x)| = v\left(\frac{x}{h^*}\right) \leq ce^{-\frac{\delta}{h^*}|x|},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e isto finaliza a prova do lema. □

O funcional energia e sua variedade de Nehari

Podemos associar ao problema (P) o funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) := \frac{1}{2}\int \Big(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\Big) + \frac{1}{4}\Big(\int |\nabla u|^2\Big)^2 - \int a(x)|u|^{p+1}.$$

Argumentado como no Capítulo 1, as condições (V_0) e $(\widetilde{V}_1)$ nos diz que

$$\|u\| := \left(\int \Big(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\Big)\right)^{1/2},$$

define uma norma equivalente à norma usual de $H^1(\mathbb{R}^3)$. Uma vez que

$$I'(u)\varphi = \Big(1 + \int |\nabla u|^2\Big)\int \nabla u \nabla \varphi + \int V(x)u\varphi - \int a(x)|u|^{p-1}u\varphi,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, os pontos críticos deste funcional são, precisamente, as soluções fracas do problema (K). Estes pontos que são não nulos pertencem à *variedade de Nehari* dada por

$$\mathcal{N} := \Big\{u \in H^1(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}, \quad I'(u)u = 0\Big\}.$$

Portanto, para provar o Teorema 2.1, é suficiente verificar a existência de uma solução não nula $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ do problema (K) tal que

$$I(u_0) = m := \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u).$$

Na sequência vamos estudar a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ para, em seguida, relacionar seu nível de energia com o nível de energia da variedade $\mathcal{N}_\infty$. Diferente de alguns trabalhos como [38], vamos provar, de imediato que a sequência minimizante de $\mathcal{N}$ converge fracamente para uma função que, de fato, é solução do problema (K). Então, como no capítulo anterior, vamos garantir que esse limite fraco é não nulo.

Lema 2.6. *O conjunto $\mathcal{N}$ satisfaz:*

(i) $\mathcal{N} \neq \emptyset$ *é uma variedade de classe* C^1*;*

(ii) $m := \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u) > 0$.

Demonstração. Seja $\omega \in H^1(\mathbb{R}^3)$ a solução do problema (K_∞) obtida na Proposição 2.5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $\omega_n(x) := \omega(x + x_n)$, onde $x_n := (0, 0, n)$. Por (a_1), temos que

$$\int a(x)|\omega_n|^{p+1} \to \int a_\infty|\omega|^{p+1} > 0.$$

Então, para $n \geq n_0$, temos que

$$\int a(x)|\omega_n|^{p+1} > 0.$$

Definindo $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(t) := I(t\omega_n) = \frac{t^2}{2}\|\omega_n\|^2 + \frac{t^4}{4}\|\nabla\omega_n\|_2^4 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int a(x)|\omega_n|^{p+1},$$

o mesmo argumento do Lema 2.3 fornece $t_n > 0$ tal que $t_n w_n \in \mathcal{N} \neq \emptyset$.

Para cada $u \in \mathcal{N}$, seja $J : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dada por

$$J(u) := I'(u)u = \|u\|^2 + \|\nabla u\|_2^4 - \int a(x)|u|^{p+1}. \tag{2.10}$$

Temos que

$$J'(u)u = 2\|u\|^2 + 4\|\nabla u\|_2^4 - (p+1)\int a(x)|u|^{p+1}$$

e

$$J'(u)u = \Big(2 - (p+1)\Big)\|u\|^2 + \Big(4 - (p+1)\Big)\|\nabla u\|_2^4 < 0. \tag{2.11}$$

Aplicando o Teorema da Função Implicita vemos que $\mathcal{N}$ é uma variedade de classe C^1.

Finalmente, se $u \in \mathcal{N}$, temos que

$$\|u\|^2 + \|\nabla u\|_2^4 = \int a(x)|u|^{p+1}.$$

Como $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, argumentando como no Lema 2.3, existe $\rho_1 > 0$ tal que

$$\|u\|^2 \geq \rho_1, \tag{2.12}$$

para toda $u \in \mathcal{N}$. Para estas funções vale

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{p+1} I'(u)u \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \|u\|^2, \tag{2.13}$$

e portanto segue de (2.12) que $m > 0$. O lema está provado. □

Estimativa para os níveis de energia

Proposição 2.7. *O nível m verifica*

$$m < m_\infty.$$

Demonstração. Por (i) do Lema 2.6, existe $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $t_n \omega_n \in \mathcal{N}$, para $n \geq n_0$. Assim,

$$m \leq I(t_n \omega_n) = I_\infty(t_n \omega_n) + \frac{t_n^2}{2} V_n + \frac{t_n^{p+1}}{p+1} A_n, \tag{2.14}$$

com

$$V_n := \int \Big(V(x) - V_\infty\Big) \omega_n^2, \quad A_n := \int \Big(a_\infty - a(x)\Big) |\omega_n|^{p+1}.$$

Afirmamos que existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$A_n \leq c_2 e^{-\frac{\gamma}{h} n} \quad \text{e} \quad V_n \leq -c_1 e^{-\frac{\mu}{h} n}. \tag{2.15}$$

Com efeito, como $\gamma < (p+1)\sqrt{V_\infty}$, tome $\delta_1 \in (\frac{\gamma}{p+1}, \sqrt{V_\infty})$. Sendo $h \in (h^*, \infty)$, pela Proposição 2.5 existe $c := c(\delta_1) > 0$, tal que

$$|\omega(x)| \leq c e^{-\frac{\delta_1}{h^*}|x|} \leq c e^{-\frac{\delta_1}{h}|x|},$$

para todo x em $\mathbb{R}^3$, o que implica em

$$\int e^{\frac{\gamma}{h}|x|} |\omega|^{p+1} \leq \int e^{\frac{\gamma}{h}|x|} e^{\frac{-(p+1)\delta_1}{h}|x|} < \infty. \tag{2.16}$$

Como $n - |x| \leq |x - x_n|$, segue de $(\widetilde{a}_1)$ que

$$\begin{aligned} A_n \leq c_a \int e^{-\frac{\gamma}{h}|x|} |\omega_n|^{p+1} &= c_a \int e^{-\frac{\gamma}{h}|x - x_n|} |\omega|^{p+1} \\ &\leq c_a e^{-\frac{\gamma}{h} n} \int e^{\frac{\gamma}{h}|x|} |\omega|^{p+1}. \end{aligned}$$

Por (2.16) a ultima integral acima é finita e temos para alguma $c_2 > 0$,

$$A_n \leq c_2 e^{-\frac{\gamma}{h}n}.$$

Sendo $|x - x_n| \leq |x| + n$, temos por $(\widetilde{V}_2)$ que

$$\begin{aligned} V_n \leq -c_V \int e^{-\frac{\mu}{h}|x|}\omega_n^2 &= -c_V \int e^{-\frac{\mu}{h}|x-x_n|}\omega^2 \\ &\leq -c_V e^{-\frac{\mu}{h}n} \int e^{-\frac{\mu}{h}|x|}\omega^2. \\ &= -c_1 e^{-\frac{\mu}{h}n}, \end{aligned}$$

o que conclui a prova da afirmação.

Para $n \geq n_0$, existe $t_n > 0$ tal que $t_n\omega_n \in \mathcal{N}$. Afirmamos que

$$t_n \to t_0 > 0.$$

Com efeito, sendo $I'(t_n\omega_n)t_n\omega_n = 0$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= t_n^{-2}\|\omega_n\|^2 + \|\nabla\omega_n\|_2^4 - t_n^{p-3}\int a(x)|\omega_n|^{p+1} \\ &= t_n^{-2}\int |\nabla\omega|^2 + V_\infty|\omega|^2 + \|\nabla\omega\|_2^4 - t_n^{p-3}\int a_\infty|\omega|^{p+1} + o_n(1). \end{aligned}$$

Como $p \in (3, 5)$, temos que (t_n) é limitada e, a menos de subsequência, $t_n \to t_0$. Por (2.12) que existe uma constante $c > 0$ tal que $\|u\| \geq c$, para toda $u \in \mathcal{N}$. Logo

$$t_n^2 \int \Big(|\nabla\omega|^2 + V_\infty|\omega|^2\Big) + o_n(1) = t_n^2\|\omega_n\|^2 \geq c > 0,$$

e portanto, passando ao limite, concluímos que $t_0 > 0$.

Por (2.14) e (2.15), temos que

$$\begin{aligned} m \leq I(t_n\omega_n) &= I_\infty(t_n\omega_n) + \frac{t_n^2}{2}V_n + \frac{t_n^{p+1}}{p+1}A_n \\ &\leq I_\infty(t_n\omega_n) - \frac{t_n^2}{2}c_1 e^{-\frac{\mu}{h}n} + \frac{t_n^{p+1}}{p+1}c_2 e^{-\frac{\gamma}{h}n} \\ &\leq I_\infty(t_n\omega_n) + t_n^2 e^{-\frac{\mu}{h}n}\Big\{-\frac{1}{2}c_1 + \frac{t_n^{p-1}}{p+1}c_2 e^{\frac{(\mu-\gamma)}{h}n}\Big\}. \end{aligned}$$

Como $\mu > \gamma$ e $t_n \to t_0 > 0$, obtemos $m < I_\infty(t_n\omega_n)$, para $n > n_0$. Da Proposição 2.5 e

(iii) do Lema 2.3 segue que

$$m < I_\infty(t_n\omega_n) = I_\infty(t_n\omega) \leq \max_{t\geq 0} I_\infty(t\omega) = I_\infty(\omega) = m_\infty,$$

como queríamos. □

Existência de um ponto crítico para o funcional I

Lema 2.8. *Existe uma sequência* $(u_n) \subset \mathcal{N}$ *tal que*

$$I(u_n) \to m \quad e \quad I'(u_n) \to 0.$$

Demonstração. Como $\mathcal{N}$ é uma variedade de classe C^1, podemos usar o Lema 1.9 para garantir a existência de $(u_n) \subset \mathcal{N}$ e $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tais que

$$I(u_n) \to m \quad \text{e} \quad I'(u_n) + \lambda_n J'(u_n) \to 0,$$

onde J foi definido em (2.10). Por (2.13), a sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é limitada. Logo, para alguma constante $c > 0$, temos

$$\begin{aligned} o_n(1) = \|I'(u_n) + \lambda_n J'(u_n)\| &\geq \frac{|I'(u_n)u_n + \lambda_n J'(u_n)u_n|}{\|u_n\|} \\ &\geq \frac{|I'(u_n)u_n + \lambda_n J'(u_n)u_n|}{c} \\ &= \frac{|\lambda_n J'(u_n)u_n|}{c}. \end{aligned}$$

Por (2.11) e (2.12), existe uma constante $c_1 > 0$ tal que $J'(u_n)u_n < -c_1 < 0$. Assim, $\lambda_n \to 0$. Além disso, pela limitação de (u_n) segue que, para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, a sequência $J'(u_n)\varphi$ é limitada. Como

$$o_n(1) = \|I'(u_n) + \lambda_n J'(u_n)\| \geq \frac{|I'(u_n)\varphi + \lambda_n J'(u_n)\varphi|}{\|\varphi\|},$$

segue o resultado. □

Lema 2.9. *Seja* $(u_n) \subset \mathcal{N}$ *tal que*

$$I(u_n) \to m \quad e \quad I'(u_n) \to 0.$$

Então existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $u_n \rightharpoonup u_0$ *fracamente em* $H^1(\mathbb{R}^3)$ *e* $I'(u_0) = 0$.

Demonstração. Por (2.13) a sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é limitada e existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{fracamente em} \quad H^1(\mathbb{R}^3) \quad \text{e} \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \tag{2.17}$$

e

$$\|\nabla u_n\|_2^2 \to A^2. \tag{2.18}$$

Vamos verificar que $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é solução do problema

$$-\Big(1 + A^2\Big)\Delta u + V(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3. \tag{2.19}$$

Com efeito, dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, por (2.17), temos que

$$\int \Big(\nabla u_n \nabla \varphi + V(x)u_n\varphi\Big) \to \int \Big(\nabla u_0 \nabla \varphi + V(x)u_0\varphi\Big)$$

e

$$\int \nabla u_n \nabla \varphi \to \int \nabla u_0 \nabla \varphi.$$

Seja $M := \operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^3$ o suporte da função φ e $B_r(0)$ uma bola aberta contendo M. Como a imersão $H^1(B_r(0)) \hookrightarrow L^p(B_r(0))$ é compacta, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n|^{p-1}u_n\varphi \to \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_0|^{p-1}u_0\varphi.$$

Usando (2.18) e um argumento de densidade segue que u_0 é solução do problem (2.19).

Por (2.17).

$$\|\nabla u_0\|_2^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_2^2 = A^2.$$

Afirmamos que $A^2 = \|\nabla u_0\|_2^2$ e portanto $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é solução do problema (K). Suponhamos, por contradição que, $\|\nabla u_0\|_2^2 < A^2$. Como $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é solução de (2.19) temos que

$$\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|_2^4 = \|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|_2^2\|\nabla u_0\|_2^2 < \|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|_2^2 A^2 = \int a(x)|u_0|^{p+1}. \tag{2.20}$$

Defina $f_{u_0} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por $f_{u_0}(t) := I(tu_0)$. Esta função possui um ponto de máximo global em $t_0 > 0$, com $t_0u_0 \in \mathcal{N}$, isto é,

$$t_0^2\|u_0\|^2 + t_0^4\|\nabla u_0\|_2^4 = t_0^{p+1}\int a(x)|u_0|^{p+1}.$$

Usando (2.20), obtemos

$$\left(t_0^2 - t_0^{p+1}\right)\|u_0\|^2 + \left(t_0^4 - t_0^{p+1}\right)\|\nabla u_0\|_2^4 > 0,$$

isto é, $t_0 \in (0,1)$. Assim,

$$\begin{aligned} m \leq I(tu_0) - \frac{1}{p+1}I'(tu_0)tu_0 &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big)t_0^2\|u_0\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big)t_0^4\|\nabla u_0\|_2^4 \\ &< \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big)\|u_0\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big)\|\nabla u_0\|_2^4. \end{aligned}$$

Como as normas em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ são fracamente semi-contínuas inferiormente, segue de (2.17) que

$$m < \liminf_{n\to\infty}\left(I(u_n) - \frac{1}{p+1}I'(u_n)u_n\right) = \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = m,$$

o que é uma contradição. Portanto,

$$\|\nabla u\|_2^2 = \liminf_{n\to\infty}\|\nabla u_n\|_2^2 = A^2,$$

o que conclui a prova do lema. □

Apresentamos agora um resultado de convergência:

Lema 2.10. *Se $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é tal que $u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então*

$$\int a(x)|u_n|^{p+1} = \int a_\infty |u_n|^{p+1} + o_n(1)$$

e

$$\int V(x)u_n^2 = \int V_\infty u_n^2 + o_n(1).$$

Demonstração. Como

$$\lim_{|x|\to\infty} a(x) = a_\infty,$$

dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que $|a(x) - a_\infty| < \epsilon$, para todo $x \in B_R(0)^c$. Assim,

$$\int_{B_R(0)^c} |a(x) - a_\infty||u_n|^{p+1} \leq \epsilon \int_{B_R(0)^c} |u_n|^{p+1} \leq c_1\epsilon, \tag{2.21}$$

para alguma constante $c_1 > 0$. Por outro lado, como $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{B_R(0)} |a(x) - a_\infty||u_n|^{p+1} \leq c_2 \int_{B_R(0)} |u_n|^{p+1},$$

para alguma constante $c_2 > 0$. Então, como $u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^3)$, pela imersão compacta $H_0^1(B_R(0)) \hookrightarrow L^{p+1}(B_R(0))$ a última integral acima converge para zero. Assim, a primeira parte do resultado segue de (2.21). Uma vez que

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty,$$

a prova da outra afirmação é inteiramente análoga. $\square$

2.1.2 Prova do Teorema 2.1

Pelos Lemas 2.8 e 2.9 existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ limitada tal que

$$I(u_n) \to m, \quad I'(u_n) \to 0,$$

e

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{fracamente em} \quad H^1(\mathbb{R}^3) \quad \text{e} \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3), \tag{2.22}$$

com $I'(u_0) = 0$. Vamos verificar que $u_0 \not\equiv 0$. Com efeito, se $u_0 \equiv 0$, pelo Lema 2.10 temos que

$$\|u_n\|^2 = \|u_n\|_*^2 + o_n(1) \quad \text{e} \quad \int a(x)|u_n|^{p+1} = \int a_\infty |u_n|^{p+1} + o_n(1). \tag{2.23}$$

Assim, como

$$\|u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|_2^4 = \int a(x)|u_n|^{p+1},$$

segue que

$$\|u_n\|_*^2 + \|\nabla u_n\|_2^4 = \int a_\infty |u_n|^{p+1} + o_n(1).$$

Considerando $t_n > 0$ tal que $t_n u_n \in \mathcal{N}_\infty$, isto é

$$t_n^2 \|u_n\|_*^2 + t_n^4 \|\nabla u_n\|_2^4 = t_n^{p+1} \int a_\infty |u_n|^{p+1},$$

obtemos

$$\left(t_n^2 - t_n^{p+1}\right)\|u_n\|_*^2 + \left(t_n^4 - t_n^{p+1}\right)\|\nabla u_n\|_2^4 = o_n(1).$$

Como $u_n \in \mathcal{N}$ existe uma constante $c > 0$ tal que

$$0 < c \leq \|u_n\|^2.$$

A primeira igualdade em (2.23) nos diz que.

$$0 < c \leq \|u_n\|^2 = \|u_n\|_*^2 + o_n(1).$$

Deste modo, a igualdadade acima implica que $t_n \to 1$. Logo, por (2.23) obtemos

$$\begin{aligned}
I_\infty(t_n u_n) &= I_\infty(t_n u_n) - \frac{1}{p+1} I'_\infty(t_n u_n)(t_n u_n) \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) t_n^2 \|u_n\|_*^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big) t_n^4 \|\nabla u_n\|_2^4 \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \|u_n\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big) \|\nabla u_n\|_2^4 + o_n(1) \\
&= I(u_n) - \frac{1}{p+1} I'(u_n) u_n + o_n(1) \\
&= I(u_n) + o_n(1).
\end{aligned}$$

Então

$$m_\infty \leq I_\infty(t_n u_n) = I(u_n) + o_n(1),$$

isto é, $m_\infty \leq m$, o que contradiz a Proposição 2.7. Portanto, $u_0 \not\equiv 0$ e $u_0 \in \mathcal{N}$. Logo, como as normas em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ são fracamente semi-contínuas inferiormentes por (2.22), temo que

$$\begin{aligned}
m \leq I(u_0) &= I(u_0) - \frac{1}{p+1} I'(u_0) u_0 \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \|u_0\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big) \|\nabla u_0\|_2^4 \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \Big(I(u_n) - \frac{1}{p+1} I'(u_n) u_n\Big) = \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = m,
\end{aligned}$$

isto é, $I(u_0) = m$.

Agora, denotando $v := |u_0|$, temos $I(v) = I(u_0) = m$ e $v \in \mathcal{N}$. Pelo Lema 2.6, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'(v) = \lambda J'(v).$$

Como $I'(v)v = 0$ e $J'(v)v < 0$, segue que $\lambda = 0$. Portanto, $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma solução ground state não negativa do problema (K) e isto finaliza a prova do Teorema 2.1.

2.2 Existência de solução nodal minimal

Nesta seção, provaremos o Teorema 2.2. Devido a restrição de radialidade imposta aos potenciais, nesta seção, teremos uma noção mais restrita de solução nodal minimal. Diremos que uma solução nodal radialmente simétrica $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ do problema (K) é minimal se

$$I(u_1) = \inf \Big\{ I(u); \quad u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^3) \text{ é solução de } (K) \text{ e } u^\pm \not\equiv 0 \Big\}.$$

Veja que, se $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$ é uma solução nodal do problema (K), então

$$0 = I'(u)u^+ = \|u^+\|^2 + \Big(\|\nabla u^+\|_2^2 + \|\nabla u^-\|_2^2 \Big) \|\nabla u^+\|_2^2 - \int a(x)|u^+|^{p+1},$$

isto é,

$$I'(u^+)u^+ = -\|\nabla u^-\|_2^2 \|\nabla u^+\|_2^2 < 0.$$

De forma análoga,

$$I'(u^-)u^- = -\|\nabla u^-\|_2^2 \|\nabla u^+\|_2^2 < 0.$$

Então, minimização sobre o conjunto

$$\mathcal{M} := \Big\{ u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^3); \quad u^+, u^- \not\equiv 0, \quad I'(u^+)u^+ = I'(u^-)u^- = 0 \Big\},$$

não é adequada para provar o Teorema 2.2. Veja que se uma solução nodal $u_1 \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$ do problema (K) é tal que

$$I(u_1) = m^\pm := \inf_{\mathcal{N}^\pm} I,$$

onde

$$\mathcal{N}^\pm := \Big\{ u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^3); \quad u^+, u^- \not\equiv 0, \quad I'(u)u^+ = I'(u)u^- = 0 \Big\},$$

então ela é minimal. Aqui nosso objetivo é provar que este ínfimo é atingido.

2.2.1 Resultados preliminares

Lema 2.11. $\mathcal{N}^\pm \neq \emptyset$.

Demonstração. Como

$$\lim_{|x| \to \infty} a(x) = a_\infty > 0,$$

existe $R > 0$ tal que $a(x) \geq a_\infty/2 > 0$ q.t.p para $x \in \mathbb{R}^3/B_R(0)$. Escolhendo $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$, com $u^\pm \not\equiv 0$ e o suporte da parte positiva e negativa satisfazendo $\operatorname{supp} u^\pm \subset \mathbb{R}^3/B_R(0)$, temos que

$$\int a(x)|u^{\pm}|^{p+1} > 0.$$

Seja $h_u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $h_u(t,s) := I(tu^+ - su^-)$, isto é,

$$\begin{aligned} h_u(t,s) = \frac{t^2}{2}\|u^+\|^2 + \frac{s^2}{2}\|u^-\|^2 + \frac{1}{4}\Big(t^2\|\nabla u^+\|^2 + s^2\|\nabla u^-\|^2\Big)^2 \\ - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int a(x)|u^+|^{p+1} - \frac{s^{p+1}}{p+1}\int a(x)|u^-|^{p+1}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Como $(p+1) > 4$, temos que

$$\lim_{|(t,s)|\to\infty} h_u(t,s) = -\infty.$$

Logo, h_u possui um ponto de máximo global $(t_u, s_u) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz

$$\frac{\partial h_u}{\partial t}(t_u, s_u) = I'(t_u u^+ - s_u u^-)u^+ = 0, \quad \frac{\partial h_u}{\partial s}(t_u, s_u) = -I'(t_u u^+ - s_u u^-)u^- = 0. \tag{2.25}$$

Afirmamos que $t_u, s_u > 0$. De fato, suponha que $s_u = 0$, de modo que $(t_u, 0)$ é um máximo global de h_u. Escolhendo $s > 0$ pequeno de modo que $I(su^-) > 0$, temos por (2.24) que

$$h_u(t_u, 0) = I(t_u u^+) < I(t_u u^+) + I(su^-) + \frac{t_u^2 s^2}{2}\|\nabla u^+\|_2^2\|\nabla u^-\|_2^2 = h_u(t_u, s),$$

que é uma contradição. De forma análoga, prova-se que $s_u > 0$. Então, por (2.25), segue que $(t_u u^+ - s_u u^-) \in \mathcal{N}^{\pm} \neq \emptyset$. $\square$

Lema 2.12. $m^{\pm} := \inf_{\mathcal{N}^{\pm}} I > 0$.

Demonstração. Se $u \in \mathcal{N}^{\pm}$, temos $I'(u)u^{\pm} = 0$ e $I'(u)u = 0$. Logo, a desigualdade é consequência do item (ii) do Lema 2.6. $\square$

Lema 2.13. *Dada $u \in \mathcal{N}^{\pm}$, seja $f_u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h_u(t,s) = I(tu^+ - su^-).$$

Então

$$h_u(t,s) \le h_u(1,1),$$

para todo $(t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Como $I'(u)u^+ = 0$, temos que

$$\int a(x)|u^+|^{p+1} = \|u^+\|^2 + \|\nabla u^+\|_2^2\|\nabla u\|_2^2 > 0.$$

De forma análoga, como $I'(u)u^- = 0$, temos que $\int a(x)|u^-|^{p+1} > 0$. Assim, argumentando da mesma maneira que no Lema 2.11, concluímos que a função

$$\begin{aligned} h_u(t,s) = &\frac{t^2}{2}\|u^+\|^2 + \frac{s^2}{2}\|u^-\|^2 + \frac{1}{4}\Big(t^2\|\nabla u^+\|^2 + s^2\|\nabla u^-\|^2\Big)^2 \\ &- \frac{t^{p+1}}{p+1}\int a(x)|u^+|^{p+1} - \frac{s^{p+1}}{p+1}\int a(x)|u^-|^{p+1}, \end{aligned}$$

assume máximo global em $(t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $t_0, s_0 > 0$.

Afirmamos que $s_0, t_0 \leq 1$. De fato, como $(t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de máximo global de h_u temos

$$t_0^2\|u^+\|^2 + t_0^4\|\nabla u^+\|_2^4 + t_0^2 s_0^2\|\nabla u^+\|_2^2\|\nabla u^-\|_2^2 = t_0^{p+1}\int a(x)|u^+|^{p+1}.$$

Vamos supor que $s_0 \leq t_0$. Então,

$$t_0^2\|u^+\|^2 + t_0^4\|\nabla u^+\|_2^4 + t_0^4\|\nabla u^+\|_2^2\|\nabla u^-\|_2^2 \geq t_0^{p+1}\int a(x)|u^+|^{p+1}.$$

Como $u \in \mathcal{N}^{\pm}$, temos que

$$\int a(x)|u^+|^{p+1} = \|u^+\|^2 + \|\nabla u^+\|_2^4 + \|\nabla u^+\|_2^2\|\nabla u^-\|_2^2. \tag{2.26}$$

Assim,

$$\Big(t_0^2 - t_0^{p+1}\Big)\|u^+\|^2 + \Big(t_0^4 - t_0^{p+1}\Big)\|\nabla u^+\|_2^4 + \Big(t_0^4 - t_0^{p+1}\Big)\|\nabla u^+\|_2^2\|\nabla u^-\|_2^2 \geq 0$$

e segue a afirmação. O caso em que $t_0 \leq s_0$ é análogo.

Agora, provaremos que $(t_0, s_0) = (1, 1)$. Com efeito, sendo

$$h_u(t_0, s_0) = I(t_0u^+ - s_0u^-) - \frac{1}{p+1}I'(t_0u^+ - s_0u^-)(t_0u^+ - s_0u^-),$$

temos

$$h_u(t_0,s_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\left(t_0^2\|u^+\|^2 + s_0^2\|u^-\|^2\right) +$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\right)\left\{t_0^4\|\nabla u^+\|_2^4 + s_0^4\|\nabla u^-\|_2^4 + 2s_0^2t_0^2\|\nabla u^+\|_2^2\|\nabla u^-\|_2^2\right\}.$$

Se $\max\{t_0,s_0\} < 1$, teríamos

$$h_u(t_0,s_0) < h_u(1,1),$$

o que seria uma contradição. Logo $t_0 = s_0 = 1$. □

Observação 2.1. *Observamos que a prova do lema anterior nos diz que o ponto de máximo global $(t_u,s_u) = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ de $h_u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é único quando $u_R \in \mathcal{N}_R^{\pm}$. Nestas condições*

$$h_u(t,s) < h_u(1,1),$$

para $(t,s) \neq (1,1)$.

Lema 2.14. *Dada $u \in \mathcal{N}^{\pm}$, seja $\psi(t,s) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\psi(t,s) := \Big(I'(tu^+ - su^-)u^+, I'(tu^+ - su^-)u^-\Big).$$

Então

$$\det \psi'(1,1) < 0.$$

Demonstração. Uma vez que

$$I'(tu^+ - su^-)u^+ = t\|u^+\|^2 + t^3\|\nabla u^+\|_2^4 + s^2t\|\nabla u^-\|_2^2\|\nabla u^+\|_2^2 - t^p\int a(x)|u^+|^{p+1}$$

e

$$I'(tu^+ - su^-)u^- = -s\|u^-\|^2 - s^3\|\nabla u^-\|_2^4 - t^2s\|\nabla u^-\|_2^2\|\nabla u^+\|_2^2 + s^p\int a(x)|u^-|^{p+1},$$

um cálculo direto mostra que $\psi'(1,1) = (a_{i,j})$, com

$$a_{1,1} = \|u^+\|^2 + 3\|\nabla u^+\|_2^4 + \|\nabla u^-\|_2^2\|\nabla u^+\|_2^2 - p\int a(x)|u^+|^{p+1}$$

$$a_{2,2} = -\|u^-\|^2 - 3\|\nabla u^-\|_2^4 - \|\nabla u^-\|_2^2\|\nabla u^+\|_2^2 + p\int a(x)|u^-|^{p+1}$$

e

$$a_{1,2} = 2\|\nabla u^-\|_2^2\|\nabla u^+\|_2^2, \quad a_{2,1} = -2\|\nabla u^-\|_2^2\|\nabla u^+\|_2^2.$$

Como $u \in \mathcal{N}^{\pm}$, por (2.26) segue que

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 2\|\nabla u^+\|_2^4 - (p-1)\int a(x)|u^+|^{p+1} \\ &\leq 2\Big(\|\nabla u^+\|_2^4 - \int a(x)|u^+|^{p+1}\Big) \\ &= 2\Big(-\|u^+\|^2 - \|\nabla u^-\|_2^2\|\nabla u^+\|_2^2\Big) \\ &\leq a_{2,1}. \end{aligned}$$

Sendo

$$-\|u^-\|^2 - \|\nabla u^-\|_2^4 - \|\nabla u^-\|_2^2\|\nabla u^+\|_2^2 + \int a(x)|u^-|^{p+1} = 0,$$

temos que

$$\begin{aligned} a_{2,2} &= -2\|\nabla u^-\|_2^4 + (p-1)\int a(x)|u^-|^{p+1} \\ &\geq -2\Big(\|\nabla u^-\|_2^4 - \int a(x)|u^-|^{p+1}\Big) \\ &= -2\Big(-\|u^-\|_2^2 - \|\nabla u^-\|_2^2\|\nabla u^-\|_2^2\Big) \geq a_{1,2}. \end{aligned}$$

Então $\det \psi'(1,1) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} < 0$ e segue o resultado. □

Lema 2.15. *Existe $u_1 \in \mathcal{N}^{\pm}$ tal que $I(u_1) = m^{\pm}$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}^{\pm}$ tal que $I(u_n) \to m^{\pm}$. Como

$$I(u_n) = I(u_n) - \frac{1}{p+1}I'(u_n)u_n = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big)\|u_n\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big)\|\nabla u_n\|_2^4,$$

essa sequência é limitada e, a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^3)$, o que implica que,

$$u_n^{\pm} \rightharpoonup u^{\pm} \quad \text{fracamente em} \quad H^1(\mathbb{R}^3). \tag{2.27}$$

Como $I'(u_n)u_n^{\pm}$, temos

$$\|u_n^{\pm}\|^2 + \Big(\|\nabla u_n^+\|^2 + \|\nabla u_n^-\|^2\Big)\|\nabla u_n^{\pm}\|^2 = \int a(x)|u_n^{\pm}|^{p+1}.$$

Argumentando com em (ii) do Lema 2.3, obtemos uma constante $c > 0$ tal que

$$\int a(x)|u_n^{\pm}|^{p+1} \geq c.$$

Usando a imersão compacta $H^1_{rad}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$ e (2.27) obtemos

$$\int a(x)|u^{\pm}|^{p+1} \geq c.$$

Logo, argumentando como no Lema 2.11 existem $(t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\Big(t_0u^+ - s_0u^-\Big) \in \mathcal{N}^{\pm}$. Portanto, pelo Lema 2.13, pela imersão compacta $H^1_{rad}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$, por (2.27), sendo as normas de $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{D}^{1.2}(\mathbb{R}^3)$ fracamente semi-contínuas inferiormente, temos que

$$\begin{aligned} m^{\pm} \leq I(t_0u^+ - s_0u^-) &\leq \liminf_{n\to\infty} I(t_0u_n^+ - s_0u_n^-) \\ &= \liminf_{n\to\infty} h_{u_n}(t_0, s_0) \leq \liminf_{n\to\infty} h_{u_n}(1,1) = \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = m^{\pm}. \end{aligned}$$

O resultado, segue com $u_1 := t_0u^+ - s_0u^-$. $\square$

Antes de provar o principal resultado desta seção apresentaremos algumas definições e um importante resultado.

Seja X um espaço normado e G um grupo topológico. Dizemos que G age em X se existe uma aplicação $(g, u) \mapsto gu$ de $G \times X$ em X satisfazendo

(i) $(1, u) = u$;

(ii) $(gh, u) = (g, hu)$;

(iii) $u \mapsto gu$ é linear,

para todo $u \in X$ e todos $g, h \in G$. Dizemos que um grupo G age isometricamente se $\|gu\| = \|u\|$ para todo $u \in X$ e $g \in G$. Podemos considerar o espaço invariante da ação dado por

$$Fix(G) = \Big\{u \in X; \quad gu = u \quad \text{para todo} \quad g \in G\Big\}.$$

Dizemos que $T \in C^1(X, \mathbb{R})$ é um funcional G-invariante se $T \circ g = T$ para todo $g \in G$.

Lema 2.16 (Princípio da Criticabilidade Simétrica de Palais)**.** *Suponha que X é um espaço de Hilbert, que G age isometricamente em X e que $T \in C^1(X, \mathbb{R})$. Então se T G-invariante e u é um ponto crítico de T restrito a $Fix(G)$, então u é ponto crítico de T.*

Demonstração. Veja [51, Teorema 1.28]. $\square$

2.2.2 Prova do Teorema 2.2

Pelo Lema 2.15, existe $u_1 \in \mathcal{N}^\pm$ tal que $I(u_1) = m^\pm$. Suponhamos, por contradição, que $I'(u_1) \neq 0$. Então, existem $\delta, \lambda > 0$ tais que $\|v - u_1\| < 3\delta$ implica em $\|I'(v)\| > \lambda$. Agora, definindo $g(t,s) := tu_1^+ - su_1^-$, pelo Lema 2.13 existe $D \subset \mathbb{R}^2$ com $(1,1) \in D$ tal que

$$\rho := \max_{\partial D} I \circ g < m^\pm. \tag{2.28}$$

Para $\varepsilon < \min\{(m^\pm - \rho)/2, \lambda\rho/8\}$ e $S := B_\delta(u_1)$ segue de [51, Lema 2.3] que existe uma deformação $\eta \in C([0,1] \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^3), H^1_{rad}(\mathbb{R}^3))$ tal que

(i) $\eta(1,u) = u$ se $u \notin I^{-1}([m^\pm - 2\varepsilon, m^\pm + 2\varepsilon])$;

(ii) $\eta(1, I^{m^\pm+\varepsilon} \cap S) \subset I^{m^\pm-\varepsilon}$;

(iii) $I(\eta(1,u)) \leq I(u)$ para todo $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$.

Afirmamos que

$$\max_{(t,s)\in D} I(\eta(1, g(t,s))) < m^\pm. \tag{2.29}$$

Com efeito, para todo $(t,s) \in D\backslash(1,1)$, por (iii), pelo Lema 1.18 e Observação 2.1 obtemos

$$I(\eta(1, g(t,s))) \leq I(g(t,s)) < I(g(1,1)) = m_R,$$

para todo $(t,s) \in D \setminus (1,1)$. Além disso, como $g(1,1) \in I^{m_R+\varepsilon} \cap S$, por (ii) temos que

$$I(\eta(1, g(1,1))) \leq m_R - \varepsilon < m_R.$$

Assim,

$$I(\eta(1, g(t,s))) < m_R,$$

para todo $(t,s) \in D$ e segue (2.29).

Agora, defina

$$h(t,s) := \eta(1, g(t,s))$$

$$\psi(t,s) := (I'(g(t,s))u_1^+, I'(g(t,s))u_1^-) \tag{2.30}$$

e

$$\Psi(t,s) := (t^{-1}I'(h(t,s))h(t,s)^+, s^{-1}I'(h(t,s))h(t,s)^-). \tag{2.31}$$

Como $u_1 \in \mathcal{N}^\pm$, então $\psi(t,s) = 0$ se, e somente se, $(t,s) = (1,1) \in D$ e pelo Lema 2.14

segue que

$$\deg(\psi, D, 0) = -1.$$

Pela escolha de $\varepsilon > 0$, por (2.28) e pela propriedade (i) da deformação η temos $g = h$ na ∂D. Então por (2.30) e (2.31) temos que $\psi = \Psi$ na ∂D, e

$$\deg(\Psi, D, 0) = \deg(\psi, D, 0) = -1.$$

Assim, existe $(t, s) \in D$ tal que $h(t, s) \in \mathcal{N}^{\pm}$ que contradiz (2.29). Portanto, $I'(u_1)\varphi = 0$, para todo $\varphi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$. Então por $(\widetilde{V}_0)$ e $(\widetilde{a}_0)$ utilizando o Lema 2.16 com $T = I$ e $Fix(O(3)) = H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$, onde $O(3)$ é o grupo das rotações em $\mathbb{R}^3$ segue a prova do Teorema 2.2.

CAPÍTULO 3

Problema de Kirchhoff: caso definido

Neste capítulo, estudamos o problema

$$-\Big(1+\lambda\int|\nabla u|^2\Big)\Delta u+V(x)u=f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{K_λ}$$

onde $N\in\{3,4\}$, $\lambda\geq 0$ e o potencial V satisfaz

($\widehat{V}_0$) $V\in C^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ e a aplicação $x\mapsto(V(x),\nabla V(x)\cdot x)$, $x\in\mathbb{R}^N$, é radialmente simétrica;

($\widehat{V}_1$) existe uma constante $c_V>0$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}^N$ vale $V(x)\geq c_V$. Além disso,

$$0<V_\infty:=\lim_{|y|\to+\infty}V(y);$$

Além disto, vamos precisar de algumas condições nas derivadas do potencial V. Mais especificamente, para cada $x\in\mathbb{R}^N$, vamos supor que

(V_2) $\nabla V(x)\cdot x\leq 0$;

(V_3) $V(x)+\frac{\nabla V(x)\cdot x}{N}\geq V_\infty$;

(V_4) $\nabla V(x)\cdot x+\frac{\nabla\Big(\nabla V(x)\cdot x\Big)\cdot x}{N}\leq 0$.

A não linearidade f satisfaz:

(f_0) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(f_1) existem constantes $a_1, a_2 > 0$, $p \in (1, 2^* - 1)$, tais que

$$|f(s)| \leq a_1|s| + a_2|s|^p, \quad \forall\, s \in \mathbb{R};$$

(f_2) $\lim_{s\to 0} f(s)/s = 0$;

(f_3) existe $\zeta > 0$ tal que

$$\int_0^\zeta \Big(f(s) - V_\infty s\Big) ds > 0.$$

Devido à restrição de radialidade imposta ao potencial V, neste capítulo teremos uma noção mais restrita de solução de energia mínima. Mais precisamente, diremos que uma solução radialmente simétrica $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^3)$ do problema (K_λ) é ground state se

$$I_\lambda(u_\lambda) = \inf\Big\{I_\lambda(u)\ :\ u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ é solução de } (K_\lambda)\Big\}$$

onde $I_\lambda : H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é o funcional energia associado ao problema (K_λ).

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema 3.1. *Suponha que $N = 4$, V satisfaz $(\widehat{V}_0)$, $(\widehat{V}_1)$ e $(V_2) - (V_4)$. Se f satisfaz $(f_0) - (f_3)$, então existe $\lambda^* > 0$ tal que, para todo $\lambda \in [0, \lambda^*)$, o problema (K_λ) possui uma solução ground state $u_\lambda \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^4)$. Essa solução satisfaz*

$$u_\lambda \to u_0 \quad em \quad H^1(\mathbb{R}^4),$$

quando $\lambda \to 0^+$, onde $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^4)$ é uma solução não trivial do problema

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^4.$$

Se $N = 3$, o mesmo resultado vale com $\lambda^* = +\infty$.

3.1 Resultados preliminares

Como o principal objetivo deste capítulo é provar a existência de uma solução ground state para o problema (K_λ), no que se segue induzimos uma variedade que se mostrará adequada para este objetivo e provamos algumas de suas principais propriedades.

Inicialmente, veja que pela condição $(\widehat{V}_1)$

$$\|u\| := \left(\int \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2 \right) \right)^{1/2},$$

define uma norma em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, por $(f_0)-(f_2)$, fica bem definido o funcional $I_\lambda : H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{2} \int \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \Big(\int |\nabla u|^2 \Big)^2 - \int F(u),$$

onde $F(s) := \int_0^s f(t)dt$. Além disso, $I_\lambda \in C^1(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ com

$$I'_\lambda(u)\varphi = \int \Big(\nabla u \cdot \nabla \varphi + V(x)u\varphi \Big) + \lambda \|\nabla u\|_2^2 \int \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int f(u)\varphi,$$

para toda $\varphi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, por (V_0) e pelo Príncipio da Criticabilidade Simétrica de Palais, os pontos críticos de I_λ são precisamente as soluções fracas de (K_λ).

Apresentamos agora um resultado que nos fornece uma condição que deve ser satisfeita por toda solução do problema (K_λ).

Lema 3.2. *Seja $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema*

$$-\Delta u = g(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

e $G(x,t) := \int_0^t g(x,s)ds$, então

$$\frac{(N-2)}{2} \int |\nabla u|^2 = N \int G(x,u) + \sum_{i=1}^N \int x_i \frac{\partial G}{\partial x_i}(x,u).$$

Demonstração. Veja [25] e [35, Proposição 2.1]. □

Pelo resultado acima, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ é uma solução do problema

$$-c\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

com $c := \Big(1 + \lambda \|\nabla u\|_2^2\Big)$, então

$$\frac{N-2}{2} \|\nabla u\|_2^2 \Big(1 + \lambda \|\nabla u\|_2^2\Big) = N \int \Big\{ F(u) - \Big(V(x) + \frac{\nabla V(x) \cdot x}{N} \Big) \frac{u^2}{2} \Big\}.$$

Assim, faz sentido buscar solução para o problema (K_λ) minimizando o funcional I_λ sobre a variedade de Pohozaev, dada por

$$\mathcal{P}_\lambda := \Big\{ u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} \,:\, J_\lambda(u) = 0 \Big\},$$

onde

$$J_\lambda(u) := \frac{N-2}{2}\|\nabla u\|_2^2\Big(1+\lambda\|\nabla u\|_2^2\Big) - N\int\Big\{F(u) - \Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)\cdot x}{N}\Big)\frac{u^2}{2}\Big\}. \quad (3.1)$$

Conforme veremos posteriormente, para provar o Teorema 3.1 é suficiente verificar que existe $u_\lambda \in P_\lambda$ tal que

$$I_\lambda(u_\lambda) = \inf_{u\in\mathcal{P}_\lambda} I_\lambda(u).$$

Lema 3.3. *Se $N = 3$ o conjunto $\mathcal{P}_\lambda$ é não vazio para todo $\lambda \geq 0$. Se $N = 4$, existe $\lambda^* > 0$ tal que o mesmo ocorre se $\lambda \in [0, \lambda^*)$.*

Demonstração. Se $N = 3$, segue de [13] que o problema

$$-\Delta u + V_\infty u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3,$$

possui uma solução $w_1 \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$ que satisfaz

$$0 < \frac{1}{2}\|\nabla w_1\|_2^2 = 3\int\Big(F(w_1) - V_\infty\frac{w_1^2}{2}\Big). \quad (3.2)$$

Considere $g_\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_\lambda(\theta) := I(w_1(x/\theta)) = \frac{\theta}{2}\|\nabla w_1\|_2^2 + \frac{\lambda\theta^2}{4}\|\nabla w_1\|_2^4 - \theta^3\int\Big(F(w_1) - V(x\theta)\frac{w_1^2}{2}\Big).$$

Usando $(\widehat{V}_1)$, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e (3.2), obtemos

$$\lim_{\theta\to+\infty}\int\Big(F(w_1) - V(x\theta)\frac{w_1^2}{2}\Big) = \int\Big(F(w_1) - V_\infty\frac{w_1^2}{2}\Big) > 0,$$

de modo que

$$\lim_{\theta\to+\infty} g_\lambda(\theta) = -\infty.$$

Segue ainda de $(\widehat{V}_1)$ que

$$g_\lambda(\theta) \geq \frac{\theta}{2}\|\nabla w_1\|_2^2 + \frac{\lambda\theta^2}{4}\|\nabla w_1\|_2^4 - \theta^3\int\Big(F(w_1) - c_V\frac{w_1^2}{2}\Big),$$

e portanto $g_\lambda(\theta) > 0$, para θ suficientemente pequeno. Logo, a função g_λ possui um ponto de máximo global $\theta_0 > 0$. Assim, $g'_\lambda(\theta_0)\theta_0 = 0$, o que implica em

$$\frac{\theta_0}{2}\|\nabla w_1\|_2^2 + \frac{\lambda\theta_0^2}{4}\|\nabla w_1\|_2^4 = 3\theta_0^3 \int \Big\{F(w_1) - \Big(V(x\theta_0) + \frac{\nabla V(x\theta_0)\cdot x\theta_0}{3}\Big)\frac{w_1^2}{2}\Big\}. \tag{3.3}$$

Definindo $w_{\theta_0}(x) := w_1(x/\theta_0)$, temos que $\nabla w_{\theta_0}(x) = \theta_0^{-1}\nabla w_1(x/\theta_0)$. Assim, fazendo a mudança de variável $y = x/\theta_0$, obtemos

$$\|\nabla w_{\theta_0}\|_2^2 = \int |\nabla w_{\theta_0}(x)|^2 dx = \theta_0^{-2}\int |\nabla w_1(x/\theta_0)|^2 dx = \theta_0^{-2}\theta_0^3 \int |\nabla w_1(y)|^2 dy = \theta_0\|\nabla w_1\|_2^2.$$

Utilizando o mesmo argumento nos outros termos que aparecem em (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int |\nabla w_1(x/\theta_0)|^2 dx + \frac{\lambda}{4}\Big(\int |\nabla w_1(x/\theta_0)|^2 dx\Big)^2\\ &= 3\int \Big\{F(w_1(x/\theta_0)) - \Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)\cdot x}{3}\Big)\frac{w_1(x/\theta_0)^2}{2}dx\Big\}.\end{aligned}$$

Confrontando a expressão acima com (3.1) concluímos que $w_{\theta_0} \in \mathcal{P}_\lambda$, e portanto este conjunto é não vazio.

Suponha que $N = 4$ e considere $v \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^4)$ solução não nula de

$$-\Delta v + V_\infty v = f(v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^4.$$

Conforme provado em [8], para todo $\lambda \in [0, \|\nabla v\|_2^{-2})$, o problema

$$-\Big(1 + \lambda\|\nabla u\|_2^2\Big)\Delta u + V_\infty u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^4,$$

possui uma solução $w_2 \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^4)$ que satisfaz

$$0 < \|\nabla w_2\|_2^2 = 4\int \Big(F(w_2) - V_\infty\frac{w_2^2}{2}\Big)dx - \lambda\|\nabla w_2\|_2^4.$$

Então, definindo $g_\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$g_\lambda(\theta) := I(w_2(x/\theta)) = \frac{\theta^2}{2}\|\nabla w_2\|_2^2 + \frac{\lambda\theta^4}{4}\|\nabla w_2\|_2^4 - \theta^4\int \Big(F(w_2) - V(x\theta)\frac{w_2^2}{2}\Big),$$

e argumentando como no caso $N = 3$ obtemos o resultado. $\square$

Lema 3.4. *Existe $c > 0$, independente de $\lambda \geq 0$, tal que*

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq c, \qquad \forall\, u \in \mathcal{P}_\lambda.$$

Demonstração. Como $2 < p+1 < 2^*$, para algum $\alpha \in (0,1)$, temos

$$\frac{1}{p+1} = \frac{\alpha}{2} + \frac{(1-\alpha)}{2^*}.$$

Assim, pela desigualdade de interpolação, para toda função $u \in \mathcal{P}_\lambda$ vale

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \le \|u\|_2^{(p+1)\alpha} \|u\|_{2^*}^{(p+1)(1-\alpha)}.$$

Lembre agora que, se $a, b \ge 0$ e $s > 1$ então, pela desigualdade generalizada de Young para todo $\varepsilon > 0$, existe $c_\varepsilon > 0$ tal que

$$ab \le \varepsilon a^s + c_\varepsilon b^{s'},$$

com $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Observando que

$$\frac{(p+1)\alpha}{2} + \frac{\Big(2-(p+1)\alpha\Big)}{2} = 1,$$

podemos usar essa desigualdade com $a = \|u\|_2^{(p+1)\alpha}$, $b = \|u\|_{2^*}^{(p+1)(1-\alpha)}$ e $s = 2/(p+1)\alpha$, de modo a obtermos

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \le \varepsilon \|u\|_2^2 + c_\varepsilon \|u\|_{2^*}^{k(p,\alpha)}, \tag{3.4}$$

onde

$$k(p,\alpha) := \frac{2(p+1)(1-\alpha)}{2-(p+1)\alpha}.$$

Se $u \in \mathcal{P}_\lambda$, segue de (3.1) e da condição (V_3) que

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2}\|\nabla u\|_2^2 \le \frac{N-2}{2}\|\nabla u\|_2^2\Big(1+\lambda\|\nabla u\|_2^2\Big) \\ = N\int \Big\{F(u) - \Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)\cdot x}{N}\Big)\frac{u^2}{2}\Big\} \\ \le N\int \Big(F(u) - V_\infty \frac{u^2}{2}\Big). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Agora, dado $\delta > 0$, as condições $(f_0) - (f_2)$ fornecem $c_\delta > 0$ tal que

$$|F(s)| \le \frac{\delta}{2}s^2 + \frac{c_\delta}{p+1}|s|^{p+1},$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Logo, por (3.4) e pela imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, existe $c_1 > 0$ tal

que
$$\frac{N-2}{2}\|\nabla u\|_2^2 \leq c_1\|\nabla u\|_2^{k(p,\alpha)} + N\int\left(\frac{(\delta - V_\infty)}{2} + \frac{c_\delta \varepsilon}{p+1}\right)u^2.$$
Tomando $\delta < V_\infty$ e $\varepsilon > 0$ tal que
$$\frac{\delta - V_\infty}{2} + \frac{c_\delta \varepsilon}{p+1} < 0,$$
obtemos
$$\frac{N-2}{2}\|\nabla u\|_2^2 \leq c_1\|\nabla u\|_2^{k(p,\alpha)}.$$
Tendo em vista a desigualdade acima, para finalizar a prova basta mostrar que $k(p,\alpha) > 2$. Para tanto, basta notar que
$$(p+1) - (p+1)\alpha > 2 - (p+1)\alpha,$$
isto é,
$$\frac{k(p,\alpha)}{2} = \frac{(p+1)(1-\alpha)}{2-(p+1)\alpha} > 1.$$
O lema está provado. □

Uma consequência simples e importante do resultado acima é o seguinte

Lema 3.5. *Sob as condições em λ dadas no Lema 3.3, vale a seguinte desigualdade*
$$p_\lambda := \inf_{u \in \mathcal{P}_\lambda} I_\lambda(u) > 0.$$

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{P}_\lambda$, segue de (3.1) que
$$\begin{aligned} I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\lambda}{4}\|\nabla u\|_2^4 - \int\left(\frac{\nabla V(x)\cdot x}{N}\right)\frac{u^2}{2} \\ - \frac{(N-2)}{2N}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{\lambda(N-2)}{2N}\|\nabla u\|_2^4. \end{aligned}$$
A expressão acima e (V_2) implicam que
$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{N}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\lambda(4-N)}{4N}\|\nabla u\|_2^4 \geq \frac{1}{N}c^2 > 0, \tag{3.6}$$
em que a constante $c > 0$ é dada pelo Lema 3.4. □

Lema 3.6. *Sob as condições em λ dadas no Lema 3.3, o conjunto $\mathcal{P}_\lambda$ é uma variedade de classe C^1.*

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{P}_\lambda$, afirmamos que $J'_\lambda(u)\varphi \neq 0$, para algum $\varphi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. De fato, suponhamos por contradição que este não é o caso. Então

$$\begin{aligned}(N-2)\int \nabla u \cdot \nabla \varphi + (N-2)2\lambda\|\nabla u\|_2^2 \int \nabla u \cdot \nabla \varphi \\ = N\int f(u)\varphi - N\int \Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)\cdot x}{N}\Big)u\varphi,\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Assim, considerando $T : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}T(u) :&= \frac{N-2}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{N}{2}\int \Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)\cdot x}{N}\Big)u^2 \\ &+ \frac{\lambda(N-2)}{2}\|\nabla u\|_2^4 - N\int F(u)\end{aligned}$$

e utilizando a condição de radialidade imposta na condição $(\widehat{V}_0)$, o Lema 2.16 com $FixO(N) = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, onde $O(N)$ é o grupo das rotações em $\mathbb{R}^N$, podemos concluir que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz, no sentido fraco,

$$-(N-2)\Big(1 + 2\lambda\|\nabla u\|_2^2\Big)\Delta u = Nf(u) - N\Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)\cdot x}{N}\Big)u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Segue então do Lema 3.2 que

$$\begin{aligned}\frac{(N-2)^2}{2}\|\nabla u\|_2^2\Big(1 + 2\lambda\|\nabla u\|_2^2\Big) &= N\Big\{N\int F(u) - N\int \Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)\cdot x}{N}\Big)\frac{u^2}{2}\Big\} \\ &- N\int \Big(\nabla V(x)x + \frac{\nabla\Big(\nabla V(x)\cdot x\Big)x}{N}\Big)\frac{u^2}{2}.\end{aligned}$$

Como $u \in \mathcal{P}_\lambda$, usando (3.1) e (V_4) obtemos

$$\frac{(N-2)^2}{2}\|\nabla u\|_2^2\Big(1 + 2\lambda\|\nabla u\|_2^2\Big) \geq N\Big\{\frac{N-2}{2}\|\nabla u\|_2^2\Big(1 + \lambda\|\nabla u\|_2^2\Big)\Big\},$$

ou ainda

$$-2\|\nabla u\|_2^2 + \lambda(N-4)\|\nabla u\|_2^4 \geq 0.$$

Lembrando que $N \in \{3, 4\}$ a desigualdade acima fornece $\|\nabla u\|_2^2 = 0$, o que contradiz o Lema 3.4. Concluímos então que, para todo $u \in \mathcal{P}_\lambda$, vale $J'_\lambda(u) \neq 0$, e portanto segue do Teorema da Função Implícita que $\mathcal{P}_\lambda$ é uma variedade de classe C^1. $\square$

Lema 3.7. *Se $u \in \mathcal{P}_\lambda$, então*

$$I_\lambda(u) = \max_{\theta>0} I_\lambda(u(x/\theta)).$$

Demonstração. Suponhamos primeiro que $N = 3$. Se $u \in \mathcal{P}_\lambda$, segue de (3.5) que

$$0 < 3\int \Big(F(u) - V_\infty \frac{u^2}{2}\Big)$$

Assim, definindo $g_\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$g_\lambda(\theta) := I_\lambda(u(x/\theta)) = \frac{\theta^{N-2}}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \lambda\frac{\theta^{2(N-2)}}{4}\|\nabla u\|_2^4 - \theta^N \int \Big(F(u) - V(x\theta)\frac{u^2}{2}\Big),$$

o mesmo argumento do Lema 3.3 mostra que esta função possui um ponto de máximo global $\theta_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\theta_0\|\nabla u\|_2^2\Big(1 + \lambda\theta_0\|\nabla u\|_2^2\Big) = 3\theta_0^3 \int \Big(F(u) - \psi_x(\theta_0)\frac{u^2}{2}\Big), \tag{3.7}$$

em que $\psi_x(\theta) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\psi_x(\theta) := V(x\theta) + \frac{\nabla V(x\theta)\cdot x\theta}{3}.$$

Como

$$\theta\psi_x'(\theta) = \nabla V(x\theta)\cdot x\theta + \frac{\nabla\Big(\nabla V(x\theta)\cdot x\theta\Big)\cdot x\theta}{3} + \frac{\nabla V(x\theta)\cdot x\theta}{3},$$

segue de (V_2) e (V_4) que ψ_x é não-crescente. Então, se $\theta_0 > 1$, como

$$\frac{1}{2}\theta_0\|\nabla u\|_2^2\Big(\theta_0 + \lambda\theta_0\|\nabla u\|_2^2\Big) > \frac{1}{2}\theta_0\|\nabla u\|_2^2\Big(1 + \lambda\theta_0\|\nabla u\|_2^2\Big),$$

por (3.7) temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2\Big(1 + \lambda\|\nabla u\|_2^2\Big) &> 3\theta_0 \int \Big\{F(u) - \Big(V(x\theta_0) + \frac{\nabla V(x\theta_0)\cdot x\theta_0}{3}\Big)\frac{u^2}{2}\Big\}\\ &> 3\int \Big\{F(u) - \Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)\cdot x}{3}\Big)\frac{u^2}{2}\Big\},\end{aligned}$$

o que é uma contradição, visto que $u \in \mathcal{P}_\lambda$. De forma análoga, descartamos $\theta_0 < 1$. Assim, $\theta_0 = 1$, o que é equivalente a tese do lema.

Se $N = 4$ e $u \in \mathcal{P}_\lambda$ temos, por (V_3), que

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_2^2 &= 4\int_{\mathbb{R}^4} F(u) - 4\int_{\mathbb{R}^4}\Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)x}{4}\Big)\frac{u^2}{2} - \lambda\|\nabla u\|_2^4 \\ &\leq 4\int \Big(F(u) - V_\infty\frac{u^2}{2}\Big) - \lambda\|\nabla u\|_2^4.\end{aligned}$$

Então, como acima, a função $g_\lambda(\theta) = I_\lambda(u(x/\theta))$ assume seu máximo global em $\theta = 1$ e a conclusão segue. □

Agora, argumentando como em [35, Lema 3.14] (veja também [46]), provamos que

Lema 3.8. *Se é $u \in \mathcal{P}_\lambda$ tal que*

$$I(u) = \inf_{v\in\mathcal{P}_\lambda} I_\lambda(v),$$

então $I'_\lambda(u)\varphi = 0$, para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Pelo Lema 3.6, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'_\lambda(u) + \mu J'_\lambda(u) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}&\int\Big(\nabla u\cdot\nabla\varphi + V(x)u\varphi\Big) + \lambda\int(\nabla u\cdot\nabla\varphi)\|\nabla u\|_2^2 - \int f(u)\varphi \\ &+ \mu(N-2)\int(\nabla u\cdot\nabla\varphi) + \mu 2\lambda(N-2)\|\nabla u\|_2^2\int(\nabla u\cdot\nabla\varphi) \\ &+ \mu N\int\Big\{\Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)\cdot x}{N}\Big)u\varphi - f(u)\varphi\Big\} = 0,\end{aligned} \tag{3.8}$$

para toda $\varphi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Como no Lema 3.6, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca do problema

$$\begin{gathered}-\Big(1 + \lambda\|\nabla u\|_2^2\Big)\Delta u + V(x)u - f(u) - \mu\Big((N-2) + 2\lambda(N-2)\|\nabla u\|_2^2\Big)\Delta u + \\ N\mu\Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)\cdot x}{N}\Big)u - \mu N f(u) = 0,\end{gathered}$$

que é equivalente a

$$-c\Delta u = (1 + \mu N)\Big(f(u) - V(x)u\Big) - \mu(\nabla V(x)\cdot x)u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

onde

$$c := \Big\{1 + \mu(N-2) + \Big(\lambda + \mu\lambda 2(N-2)\Big)\|\nabla u\|_2^2\Big\}.$$

Segue do Lema 3.2, que

$$\frac{(N-2)}{2}c\|\nabla u\|_2^2 = N(1+\mu N)\Big\{\int F(u) - \int \Big(V(x) + \frac{\nabla V(x)\cdot x}{N}\Big)\frac{u^2}{2}\Big\}$$
$$- N\mu \int \left(\nabla V(x)\cdot x + \frac{\nabla\Big(\nabla V(x)\cdot x\Big)x}{N}\right)\frac{u^2}{2}.$$

Usando (3.1) e (V_4), obtemos

$$\frac{(N-2)}{2}c\|\nabla u\|_2^2 \geq (1+\mu N)\frac{(N-2)}{2}\|\nabla u\|_2^2\Big(1+\lambda\|\nabla u\|_2^2\Big),$$

ou ainda

$$\frac{(N-2)}{2}\|\nabla u\|_2^2\Big\{(1+\mu N)\Big(1+\lambda\|\nabla u\|_2^2\Big) - c\Big\} \leq 0.$$

Suponhamos por contradição que $\mu > 0$. Usando a definição de c, obtemos

$$\mu\frac{(N-2)}{2}\|\nabla u\|_2^2\Big(2+\lambda(4-N)\|\nabla u\|_2^2\Big) \leq 0.$$

Como $N \in \{3,4\}$ a expresão acima implicaria em $\|\nabla u\|_2^2 = 0$, o que pelo Lema 3.4 seria uma contradição. De forma análoga excluímos a possibilidade $\mu < 0$. Portanto $\mu = 0$ e, como (3.8) vale para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, segue o resultado. $\square$

Lema 3.9. *Se $(u_n) \subset H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\int F(u_n) \to \int F(u).$$

Demonstração. Por $(f_0)-(f_2)$ temos que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $c_\varepsilon > 0$ tal que

$$\Big|F(u_n) - F(u)\Big| \leq \varepsilon\Big(|u_n|^2 + |u|^2\Big) + c_\varepsilon\Big(|u_n|^p + |u|^p\Big). \tag{3.9}$$

Como a imersão $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ é compacta, segue que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^N).$$

Assim,

$$u_n(x) \to u(x), \quad |u_n(x)| \leq h(x) \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N, \tag{3.10}$$

para alguma $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Se $g_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é definida por

$$g_n := \max\Big\{\Big|F(u_n) - F(u)\Big| - \varepsilon\Big(|u_n|^2 + |u|^2\Big), 0\Big\},$$

então $g_n(x) \to 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Além disso, por (3.9) e (3.10), valem as desigualdades $|g_n(x)| = g_n(x) \leq c_\varepsilon h(x)^p$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesque,

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n = 0.$$

Assim, como

$$\Big|F(u_n) - F(u)\Big| - \varepsilon\Big(|u_n|^2 + |u|^2\Big) \leq g_n,$$

por (3.9), dada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que

$$\int \Big|F(u_n) - F(u)\Big| < \varepsilon \int \Big(|u_n|^2 + |u|^2\Big) + \varepsilon,$$

para $n > n_0$. Como a sequência $(u_n) \subset H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é limitada, existe $c > 0$ tal que

$$\int \Big|F(u_n) - F(u)\Big| < \varepsilon c + \varepsilon,$$

para $n > n_0$. Portanto

$$\int F(u_n) \to \int F(u),$$

e o lema está provado. $\square$

3.2 Prova do Teorema 3.1

Seja $(u_n) \subset \mathcal{P}_\lambda$ tal que

$$I_\lambda(u_n) \to p_\lambda.$$

Afirmamos que (u_n) é limitada. De fato, como $(I_\lambda(u_n))$ é limitada, segue de (3.6) que a sequência $(\|\nabla u_n\|_2)$ também é limitada, o mesmo valendo para $(\|u_n\|_{2^*})$, por conta da imersão de Sobolev. Dados $\varepsilon, \delta > 0$, podemos usar $(f_0) - (f_2)$, $(\widehat{V}_1)$, (3.4) e argumentar como no Lema 3.5 para obter

$$I_\lambda(u_n) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 + \frac{1}{2}\int V_\infty u_n^2 - \frac{\delta}{2}\int u_n^2 - \frac{\varepsilon c_\delta}{p+1}\int u_n^2 - c\|u_n\|_{2^*}^{k(p,\alpha)},$$

com $k(p, \alpha) > 2$. Isto equivale a

$$\int \frac{1}{2}\Big(V_\infty - \delta - \frac{2\varepsilon c_\delta}{p+1}\Big)u_n^2 \leq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 + c\|u_n\|_{2^*}^{k(p,\alpha)}.$$

Escolhendo ε, δ pequenos de modo que

$$\left(V_\infty - \delta - \frac{2\varepsilon c_\delta}{p+1}\right) > 0,$$

concluímos $(\|u_n\|_2)$ é limitada, e portanto a sequência é limitada em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

Diante do exposto acima podemos supor que, a menos de subsequência, existe $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em} \quad H^1_{rad}(\mathbb{R}^N). \tag{3.11}$$

Assim,

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2, \quad \|\nabla u\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|^2 \quad \text{e} \quad \|u\|_2^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_2^2. \tag{3.12}$$

Utilizando (3.5) e o Lema 3.4, obtemos $c_1 > 0$ tal que

$$0 < c_1 < \frac{N-2}{2N}\|\nabla u_n\|_2^2 \leq \int \left(F(u_n) - V_\infty \frac{u_n^2}{2}\right).$$

Segue de (3.12) e do Lema 3.9 que

$$0 < c_1 \leq \int \left(F(u) - V_\infty \frac{u^2}{2}\right).$$

Portanto, como no Lema 3.3, existe $\theta > 0$ tal que $u(x/\theta) \in \mathcal{P}_\lambda$.

A convergência fraca e o argumento do Lema 3.9 garante que

$$V(x\theta)u_n^2(x) \to V(x\theta)u^2(x) \quad \text{q.t.p em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Assim, pelo Lema de Fatou,

$$\int V(x\theta)u^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \int V(x\theta)u_n^2.$$

Deste modo, usando (3.12) e o Lema 3.9, segue que

$$I_\lambda(u(\cdot/\theta)) \leq \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n(\cdot/\theta)).$$

Como $(u_n) \subset \mathcal{P}_\lambda$, pelo Lema 3.7 temos que $I_\lambda(u_n(x/\theta)) \leq I_\lambda(u_n(x))$. Então

$$p_\lambda \leq I_\lambda(u(x/\theta)) \leq \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n(x/\theta)) \leq \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n(x)) = p_\lambda,$$

e podemos concluir que a função $u_\lambda := u(\cdot/\theta) \in \mathcal{P}_\lambda$ satisfaz

$$I(u_\lambda) = \inf_{v \in \mathcal{P}_\lambda} I_\lambda(v).$$

O Lema 3.8 implica que $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é solução fraca do problema (K_λ).

Provaremos agora o resultado de concentração. Para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o problema (K_λ) possui uma solução $u_\lambda \in \mathcal{P}_\lambda$ tal que $p_\lambda = I_\lambda(u_\lambda)$. Como $u_\lambda \in \mathcal{P}_\lambda$, podemos usar (3.1), (V_2) e $N \in \{3, 4\}$ para obter

$$Np_\lambda = \|\nabla u_\lambda\|_2^2 + \frac{\lambda(4-N)}{4}\|\nabla u_\lambda\|_2^4 - \int (\nabla V(x) \cdot x)\frac{u_\lambda^2}{2} \geq \|\nabla u_\lambda\|_2^2. \tag{3.13}$$

Fixado um elemento $u \in P_\lambda$, segue do Lema 3.7 que

$$\begin{aligned} p_\lambda = I_\lambda(u_\lambda) = \min_{u \in \mathcal{P}_\lambda} I_\lambda(u) &= \min_{u \in \mathcal{P}_\lambda} \max_{\theta > 0} I_\lambda(u(x/\theta)) \\ &\leq \max_{\theta > 0} I_\lambda(u(x/\theta)) \\ &\leq \max_{\theta > 0} I_{\lambda^*}(u(x/\theta)). \end{aligned}$$

Como $u \in \mathcal{P}_\lambda$, podemos usar (3.5) para concluir que $\int (F(u) - V_\infty u^2/2) > 0$. Assim, argumentando como no Lema 3.3, obtemos

$$\lim_{\theta \to \infty} I_{\lambda^*}(u(x/\theta)) = -\infty.$$

Segue então que $(p_\lambda)_{\lambda \in (0,\lambda^*)}$ é uma sequência limitada. Logo, por (3.13), a sequência $(\|\nabla u_\lambda\|_2)_{\lambda \in (0,\lambda^*)}$ é também limitada.

Dado $0 < \delta < 1$, segue de $(f_0) - (f_2)$ que, para algum $c_\delta > 0$,

$$\|u_\lambda\|^2 \leq \|u_\lambda\|^2 + \lambda \|\nabla u_\lambda\|_2^4 = \int f(u_\lambda)u_\lambda \leq \delta \int u_\lambda^2 + c_\delta \int |u_\lambda|^{p+1}.$$

Usando (3.4) e a imersão de Sobolev, obtemos

$$\|u_\lambda\|^2 \leq (\delta + \varepsilon c_\delta)\|u_\lambda\|^2 + c\|\nabla u_\lambda\|_2^{k(p,\alpha)}.$$

Escolhendo ε de tal modo que $\varepsilon < (1-\delta)/c_\delta$, usando a expressão acima e a limitação de $(\|\nabla u_\lambda\|_2)_{\lambda \in (0,\lambda^*)}$, concluímos que a sequência $(u_\lambda)_{\lambda \in (0,\lambda^*)}$ é limitada em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Assim, a menos de subsequência,

$$u_\lambda \rightharpoonup u_0 \quad \text{fracamente em} \quad H^1_{rad}(\mathbb{R}^N). \tag{3.14}$$

Como $I'(u_\lambda)(u_\lambda - u_0) = 0$, temos que

$$\int f(u_\lambda)(u_\lambda - u_0) = \langle u_\lambda, u_\lambda - u_0\rangle_{H^1} + \lambda\langle u_\lambda, u_\lambda - u_0\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|\nabla u_\lambda\|_2^2.$$

Argumentando como no Lema 3.9, podemos mostrar que $\int f(u_\lambda)(u_\lambda - u_0) \to 0$, quando $\lambda \to 0^+$. Assim, passando a igualdade acima ao limite e usando a convergência fraca obtemos

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \langle u_\lambda, u_\lambda - u_0\rangle_{H^1} = 0,$$

e portanto, da convergência fraca novamente, concluímos que $u_\lambda \to u_0$ fortemente em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

A convergência forte e o Lema 3.4 implicam que $\|u_0\|_2^2 \geq c > 0$, e portanto $u_0 \neq 0$. Finalmente, se $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$\Big(1 + \lambda\|\nabla u_\lambda\|_2^2\Big)\int(\nabla u_\lambda \cdot \nabla\varphi) + \int V(x)u_\lambda\varphi = \int f(u_\lambda)\varphi.$$

Fazendo $\lambda \to 0^+$, usando os argumentos acima e a convergência forte de u_λ, concluímos que

$$\int(\nabla u_0 \cdot \nabla\varphi) + \int V(x)u_0\varphi = \int f(u_0)\varphi,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, isto é, u_0 é solução fraca de

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

O teorema 3.3 está provado.

Bibliografia

[1] C.O. Alves, M.A. Souto, *Existence of least energy nodal solution for a Schrödinger-Poisson system in bounded domains.* Z. Angew. Math. Phys. **65** (2014), no. 6, 1153-1166.

[2] C.O. Alves, M.A. Souto, S.H.M. Soares, *Schrödinger-Poisson equations without Ambrosetti-Rabinowitz condition*, J. Math. Anal. Appl. **377** (2011), 584-592.

[3] C.O. Alves, M.A. Souto, S.H.M. Soares, *A sign-changing solution for the Schrödinger-Poisson equation.* preprint.

[4] C. O. Alves, F. J. S. A. Correia ,T. F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type.* Comput. Math. Appl., **49** (2005), 85-93.

[5] C. O. Alves, P. C. Carrião, E. S. Medeiros, *Multiplicity of solutions for a class of quasilinear problem in exterior domains with Neumann conditions.* Abstr. Appl. Anal. 2004, no. 3, 251-268.

[6] A. Ambrosetti, *On Schrödinger-Poisson systems.* Milan J. Math. **76** (2008), 257-274.

[7] A. Ambrosetti, D. Ruiz, *Multiple bound states for the Schrödinger-Poisson problem.* Commun. Contemp. Math. **10** (2008), no. 3, 391-404.

[8] A. Azzollini, *A note on the elliptic Kirchhoff equation in* $\mathbb{R}^N$ *perturbed by a local nonlinearity.* Commun. Contemp. Math. **17** (2015), no. 4,

[9] A. Azzollini, *The elliptic Kirchhoff equation in* $\mathbb{R}^N$ *perturbed by a local nonlinearity*, Differential Integral Equations **25** (2012), no. 5-6, 543-554.

[10] A. Azzollini, P. d'Avenia, A. Pomponio, *On the Schrödinger-Maxwell equations under the effect of a general nonlinear term.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **27** (2010), no. 2, 779-791.

[11] A. Azzollini, P. d'Avenia, A. Pomponio, *Multiple critical points for a class of nonlinear functionals.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **190** (2011), no. 3, 507-523.

[12] T. Bartsch, T. Weth, M. Willem: *Partial symmetry of least energy nodal solution to some variational problems.* J. D'Analyse Mathématique 1, 1-18 (2005)

[13] H. Berestycki, P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state,* Arch. Rational Mech. Anal. 82, no. 4, (1983), 313-345.

[14] V. Benci, D. Fortunato, *An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations,* Topol. Methods Nonlinear Anal. **11** (1998) 283-293.

[15] V. Benci, D. Fortunato, *Solitary waves of the nonlinear Klein-Gordon equation coupled with Maxwell equations,* Rev. Math. Phys. **14** (2002) 409-420.

[16] G. Cerami, G. Vaira, *Positive solutions for some non-autonomous Schrödinger-Poisson systems,* J. Differential Equations **248** (2010), 521-543.

[17] S. Coleman, V. Glaser, A. Martin, *Action minima amoung solutions to a class of euclidean scalar field equations.* Commun. math. Phys., 58: 211-221 (1978).

[18] T. D'Aprile, D. Mugnai, *Non-Existence results for the coupled Klein-Gordon- Maxwell equations*, Adv. Nonlinear Stud. **4**, 307-322 (2004).

[19] W. Y. Ding; Ni, Wei-Ming, *On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation.* Arch. Rational Mech. Anal. **91** (1986), no. 4, 283-308.

[20] M. F. Furtado; L. A. Mais; E. S. Medeiros,*A Note on the Existence of a Positive Solution for a Non-autonomous Schrödinger-Poisson System.* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, v. **85**, p. 277-286, 2014.

[21] M. F. Furtado, L. A. Maia, E. S. Medeiros, *Positive and nodal solutions for a nonlinear Schrödinger equation with indefinite potential*, Adv. Nonlinear Stud. **8** (2008) 353-373.

[22] G. M. Figueiredo, R. G. Nascimento, *Existence of a nodal solution with minimal energy for a Kirchhoff equation.* Math. Nachr. **288** (2015), no. 1, 48-60.

[23] G. M. Figueiredo; J. R. Santos Júnior, *Existence of a least energy nodal solution for a Schrödinger-Kirchhoff equation with potential vanishing at infinity.* J. Math. Phys. **56** (2015) no. 5.

[24] G. M. Figueiredo, N. Ikoma, J. R. Santos Júnior, *Existence and concentration result for the Kirchhoff type equations with general nonlinearities.* Arch. Ration. Mech. Anal. **213** (2014), no. 3, 931-979.

[25] D.G. de Figueiredo, P.L. Lions and R.D. Nussbaum, *A Priori Estimates and Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations.*J. Math. Pures Appl.(9) **61** (1982), no.1, 41-63.

[26] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order.* Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[27] Z. Guo, *Ground states for Kirchhoff equations without compact condition.* J. Differential Equations **259** (2015), no. 7, 2884-2902.

[28] X, He, W. Zou, *Existence and concentration behavior of positive solutions for a Kirchhoff equation in* $\mathbb{R}^3$. J. Differential Equations **252** (2012), no. 2, 1813-1834.

[29] I. Ianni, *Sign-changing radial solutions for the Schrödinger-Poisson-Slater problem.* Topol. Methods Nonlinear Anal. **41** (2013), no. 2, 365-385.

[30] I. Ianni, G. Vaira, *Non-radial sign-changing solutions for the Schrödinger-Poisson problem in the semiclassical limit.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **22** (2015), no. 4, 741-776.

[31] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques,* Springer-Verlag, 1993

[32] G. Kirchhoff, Mechanik, Teubner,Leipzig, 1883.

[33] S. Kim, J. Seok, *On nodal solutions of the nonlinear Schrödinger-Poisson equations.* Commun. Contemp. Math. **14** (2012).

[34] R. S. J. Pohozaev, *Eingenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0,$ Soviet Math. Doklady, **6** (1965) 1408-1411.

[35] R, Lehrer, L. A. Maia, *Positive solutions to asymptotically linear equations via Pohozaev manifold*, J. Funct. Anal **266** (2014), 213-246.

[36] R, Lehrer, L. A. Maia, R. Ruviaro, *Bound states of a nonhomogeneous non- linear Schrödinger equation with non symmetric potential.* Nonlinear Differential Equations and Applications 22 (2015), no. 4, 651-672.

[37] G. B. Li, S. S. Yan, *Eigenvalue problems for quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}^N$. Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), no. 8-9, 1291-1314.

[38] G. Li, H. Ye, *Existence of positive ground state solutions for the nonlinear Kirchhoff type equations in* $\mathbb{R}^3$. J. Differ. Equ. (2014).

[39] G. Li, S. Yan, *Eigenvalue problems for quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations **14** (1989) 1291-1314.

[40] Z. Liu, S. Gou, *Positive solutions for asymptotically linear Schrödinger-Kirchhoff-type equations.* Math. Methods Appl. Sci. **37** (2014), no. 4, 571-580.

[41] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, II.* Annales de l'Institut Henri Poincaré- Analyse non linéaire **1** (1984), 223-283.

[42] J.L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics.* International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro(1977), Mathematics Studies, North- Holland, Amsterdam, **30** (1978), 284-346.

[43] C. Miranda, Un´osservazione su un teorema di Brouwer, Bol. Un. Mat. Ital. 3 (1940) 5-7.

[44] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations.* Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), no. 2, 270-291.

[45] D. Ruiz, *The Schrödinger-Poisson equation under the effect of a nonlinear local term*, J. Funct. Anal. **237** (2006) 655-674.

[46] J. Shatah, *Unstable Ground State of Nonlinear Klein-Gordon Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **290**, no. 2, (1985), 701-710.

[47] A. Szulkin, T. Weth, *The method of Nehari manifold.* Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, pages 597-632, 2010.

[48] Y. Wu, Y. Huang, *Sign-changing solutions for Schrödinger equations with indefinite supperlinear nonlinearities.* J. Math. Anal. Appl. **401** (2013), no. 2, 850-860.

[49] M. Vrahatis, *A short proof and a generalization of Miranda's existence theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989) 701-703.

[50] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Math. Z. **187** (1984), no. 4, 511-517.

[51] Willem, M., *Minimax Theorems.* Birkhäuser, 1996.

[52] X. Yu, *Existence of solutions for Schrödinger-Poisson systems with sign-changing weight.* J. Partial Differ. Equ. **24** (2011), no. 2, 180-194.