



TESE DE DOUTORADO

Simulação Computacional de Escoamentos de Fluidos
Magnéticos em Cavidades

Camila de Oliveira Vieira

Brasília, Julho de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

TESE DE DOUTORADO

**Simulação Computacional de Escoamentos de Fluidos
Magnéticos em Cavidades**

Camila de Oliveira Vieira

Orientador: Professor Doutor Yuri Dumaresq Sobral

Brasília, Julho de 2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

ds de Oliveira Vieira, Camila
Simulação Computacional de Escoamentos de Fluidos
Magnéticos em Cavidades / Camila de Oliveira Vieira;
orientador Yuri Dumaresq Sobral. -- Brasília, 2018.
145 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2018.

1. cavidade com paredes móveis. 2. fluido magnético,
magnetização, fluido fracamente magnetizável. 3. diferenças
finitas. 4. formulação vorticidade-função de corrente. 5.
regime periódico. I. Dumaresq Sobral, Yuri, orient. II.
Título.

Simulação Computacional de Escoamento de Fluidos Magnéticos em Cavidades

Por

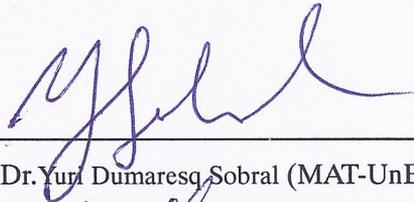
Camila de Oliveira Vieira*

*Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB,
como requisito parcial para obtenção do grau de*

DOUTORA EM MATEMÁTICA

Brasília, 30 de julho de 2018.

Comissão Examinadora:



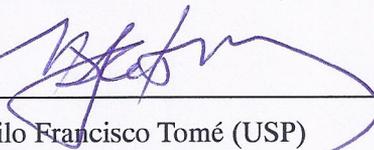
Prof. Dr. Yuri Dumaresq Sobral (MAT-UnB)



Prof. Dr. Jorge Carlos Lucero (CIC-UnB)



Prof. Dr. Francisco Ricardo da Cunha (ENM-UnB)



Prof. Dr. Murilo Francisco Tomé (USP)

* A autora foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração desta tese.

Dedicatória

Aos meus pais, Mara e Lino.

Ao meu irmão Marcelo.

Às minhas avós Inêz e Rosalina.

À memória dos meus avôs Waldemar e Antônio.

Camila de Oliveira Vieira

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por manter-me forte durante os obstáculos dessa caminhada.

Aos meus pais e meu irmão Marcelo, por serem exemplos de coragem, pelo apoio incondicional, incentivo e paciência demonstradas durante esta caminhada e por sempre estarem dispostos a me ajudar. Por todos meus familiares, que são meu porto seguro.

Ao meu namorado Alex, que com seu permanente incentivo e preocupação acompanhou a realização deste trabalho, mantendo-se paciente e proporcionando-me força e apoio.

Às minhas amigas de longa data Camila, Criscian, Gabi (Paquita), Vêronica, Kelly, Carol e Gabi, que apesar da distância e da minha ausência, sempre nos mantivemos unidas e com uma forte amizade.

À minha amiga Gérsica, que por alguns anos foi minha companheira de moradia, que considero irmã de alma e de coração, agradeço pela amizade verdadeira e por compartilharmos momentos memoráveis.

À minha amiga Laís pela amizade demonstrada, a sua inteira disponibilidade em me ouvir e ajudar. Aos meus amigos da sala 431/11, Cid, Dióscoros e Elson, por construirmos uma amizade sólida, pelos momentos divididos e pelo encorajamento.

Aos meus amigos Adriano, Bráulio, Daniel, Gesse e Nuno que foram pessoas de total estímulo e disponibilidade em me ajudar nos momentos de dificuldades.

Aos meus grandes amigos: Daiane, Jú, Bruninha; Hiuri, Hudson, Keidna, Henrique Z., Jéssica, Gabi, Ludi, Luan, Bruno X.; Gilberto, Irving, Walter, Michel, Marcos, Alan, Henrique R., Grazi, Fábio; Marcelo, Jaqueline, Luciana, Martinha, Cacau, Sol; Benedito, Alex M., Zé Carlos; Igor, Filipe, Álvaro, Guilherme, Vander, Yurinho, Ataias, Pavel, Arthur, Shyam, Swati; por tornarem esse período inesquecível e agradável. Ao meu professor e orientador Yuri Dumaresq Sobral por toda a paciência, empenho, total apoio e disponibilidade durante esta jornada. Foi e é fundamental na transmissão de experiências, na partilha de conhecimentos e nos meus pequenos sucessos. Agradeço pelas opiniões, por corrigir-me quando necessário, sem nunca desmotivar-me.

Aos meus professores durante o doutorado, Francisco Ricardo da Cunha, Gustavo Coelho Abade, Rafael Gabler Gontijo nos quais foram de grande influência na minha formação acadêmica e na realização deste trabalho. Também aos demais professores do corpo docente deste departamento que de forma direta ou indireta foram de grande contribuição.

A todos os funcionários do Departamento de Matemática por além do companheirismo sempre foram muito prestativos.

Aos membros da banca examinadora pela disponibilidade de participar e pelas contribuições acerca da tese. À CAPES, ao CNPq e FAP-DF pelo apoio financeiro.

Camila de Oliveira Vieira

RESUMO

Neste trabalho estudamos escoamentos de fluidos magnéticos em uma cavidade com paredes móveis. Propomos uma formulação vorticidade-função de corrente para resolver o escoamento e a equação de evolução da magnetização. As equações que regem o escoamento foram discretizadas utilizando o método de diferenças finitas. Identificamos os principais parâmetros físicos adimensionais do problema como o número de Reynolds, coeficiente de pressão magnético, tempo de relaxação magnética, magnetização de saturação e a intensidade adimensional do campo aplicado. O campo magnético é gerado por um fio condutor pelo qual passa uma corrente elétrica permanente. O fluido é considerado fracamente magnetizável e o campo magnético é localmente constante. Desta forma, o limite magnetostático das equações de Maxwell é satisfeito fracamente. Com esta geometria bem conhecida estudamos os efeitos de cada um dos termos da equação da magnetização no escoamento. Vimos que o termo convectivo da equação da magnetização transporta fluido magnético no escoamento causando mudanças na magnetização local do fluido no regime permanente. O termo da vorticidade intensifica os desvios angulares da magnetização e verificou-se que o termo precessional é um termo restaurador da magnetização. A fim de obter escoamentos com distribuições de velocidades e vorticidade mais intensas em toda a cavidade, estudamos várias configurações de paredes móveis na cavidade e observamos mudanças cada vez mais significativas no regime permanente quanto mais paredes se moviam. Observou-se que para altos valores do coeficiente de pressão magnética, os escoamentos na ausência do termo precessional, ou seja, para fluidos magnéticos simétricos, o regime das equações governantes não são mais permanentes estacionários, e sim periódicos. Além disso, o aumento do coeficiente de pressão magnética nos leva a regimes aperiódicos. Finalmente, simulações preliminares com campo homogêneo foram realizadas na tentativa de isolarmos os efeitos do termo de precessão na equação da magnetização e do termo de torque magnético no rotacional da equação de Navier-Stokes.

Palavras chaves: cavidade com paredes móveis, fluido magnético, magnetização, diferenças finitas, formulação vorticidade-função de corrente, regime periódico, fluido fracamente magnetizável.

ABSTRACT

In this work we studied flows of magnetic fluids in a lid driven cavity. We proposed a vorticity-streamfunction formulation to solve the flow and an evolution equation for the magnetization. The equations governing the flow are solved using a finite differences scheme. We identified the main dimensionless physical parameters of the problem as the Reynolds number, magnetic pressure coefficient, magnetic relaxation time, saturation magnetization and the dimensionless intensity of the applied field. The magnetic field is generated by a conductive wire through which a permanent electric current passes. The fluid is considered weakly magnetizable and the magnetic field is locally constant. In this way, the magnetostatic limit of Maxwell's equations is satisfied weakly. With this well-known geometry we study the effects of each of the terms of the magnetization equation in the flow. We have seen that the convective term of the magnetization equation carries magnetic fluid in the flow causing changes in the local magnetization of the fluid in the steady state. The vorticity term intensifies the angular deviations of magnetization and it has been found that the precessional term is a magnetization restoring term. In order to obtain flows with more intense distributions of velocities and vorticity throughout the cavity, we studied several configurations of moving walls in the cavity and observed more and more significant changes in the permanent regime as more walls moved. It was observed that for high values of the magnetic pressure coefficient, flows in the absence of the precessional term, that is, for symmetrical magnetic fluids, the steady state regime of the flow is not stationary, but periodic. In addition, the increase in the magnetic pressure coefficient leads us to aperiodic regimes. Finally, preliminary simulations with homogeneous field were performed in an attempt to isolate the effects of the precession term on the magnetization equation and the magnetic torque term in the rotational of the Navier-Stokes equation.

Key words: lid driven cavity, magnetic fluid, magnetization, finite differences, vorticity-streamfunction formulation, periodic regime, fluid weakly magnetizable.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Ferrofluidos	1
1.2	Escoamentos em cavidades	3
1.2.1	Escoamentos de fluidos newtonianos	3
1.2.2	Escoamentos de fluidos magnéticos	4
1.3	Objetivos deste trabalho	4
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
2.1	Equações governantes da mecânica dos meios contínuos	6
2.1.1	Equação da conservação da massa	6
2.1.2	Equação da quantidade de movimento	7
2.2	Formulação Vorticidade - Função de Corrente	8
2.3	Magnetismo	9
2.3.1	As equações de Maxwell	10
2.3.2	Limite magnetostático das equações de Maxwell	13
2.3.3	Magnetização em ferrofluidos	13
2.3.4	Modelos fenomenológicos de equações constitutivas	14
2.3.5	Equação do movimento para fluidos magnéticos	16
2.4	Métodos computacionais	19
2.4.1	Diferenças finitas	19
2.4.2	Resolução de sistemas lineares	20

3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	24
3.1	Problema Proposto	24
3.2	Adimensionalização das Equações	29
3.3	Simulação numérica e validação do código	32
3.4	Parâmetros fixos de simulação	40
4	ESCOAMENTOS DE FLUIDOS NEWTONIANOS	42
4.1	Cavidade com parede superior móvel.....	42
4.2	Cavidade com paredes superior e inferior móveis	47
4.3	Cavidade com paredes superior e esquerda móveis.....	50
4.4	Cavidade com todas as paredes móveis	53
5	ESCOAMENTOS DE FLUIDOS MAGNÉTICOS SIMÉTRICOS ..	56
5.1	Equação da magnetização com os termos de advecção e equilíbrio	56
5.1.1	Cavidade com parede superior móvel	57
5.1.2	Cavidade com paredes superior e inferior móveis	67
5.1.3	Cavidade com paredes superior e esquerda móveis	72
5.1.4	Cavidade com todas as paredes móveis.....	79
5.2	Equação da magnetização com os termos de advecção, equilíbrio e vorticidade	84
5.2.1	Cavidade com parede superior móvel	84
5.2.2	Cavidade com paredes superior e esquerda móveis	89
5.2.3	Cavidade com todas as paredes móveis.....	99
5.2.4	Cavidade com paredes superior e inferior móveis	103
5.2.5	Regime permanente periódico	108
6	ESCOAMENTOS DE FLUIDOS MAGNÉTICOS ASSIMÉTRICOS	114
6.1	Campo gerado por um fio	114
6.2	Campo uniforme	115
6.3	Nova proposta de adimensionalização	117
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	119
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121

APÊNDICE	124
I O ROTACIONAL DA FORÇA DE KELVIN	125

LISTA DE FIGURAS

1.1	Ferrofluido (retirada da internet).....	1
1.2	Problema clássico da cavidade hidrodinâmica.....	3
2.1	Elemento de volume δV da média volumétrica. (Cunha, 2012 e Rosa, 2014.).....	14
3.1	Diferentes configurações de cavidade.	26
3.2	Exemplo de uma malha típica utilizada para resolver as equações (3.1)-(3.3). À direita mostramos um ampliação da malha e mostramos onde são calculadas as variáveis desconhecidas do problema.	29
3.3	Perfil velocidade da cavidade para $Re = 1000$	33
3.4	Linhas de Corrente para $Re = 1000$ e $N = 201$. (a) linhas de correntes de Ghia et al (1982), (b) linhas de corrente do presente trabalho.	34
3.5	Efeito do número de Reynolds na localização dos vórtices nas regiões, (a) central,(b) direita e (c) esquerda, para $Re = 100, 400$ e 1000	35
3.6	Mudança na localização do vórtice central para (a) $Re = 100$, (b) $Re = 400$ e (c) $Re = 1000$, respectivamente.	35
3.7	Perfis velocidade em $x = 0.5$, $Re = 10$ e $N = 11, 15, 21, 29, 41$	36
3.8	Regime permanente da força sobre a placa superior para $Re = 10$ e $N = 11, 15, 21, 29, 41, 57$..	37
3.9	Convergência da malha para $Re = 500$ e diferentes valores de malha N	37
3.10	Teste para $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ em relação a vorticidade $\xi(0.5, 0.5, 30)$ para $Re = 500$	38
3.11	Teste para $\mathcal{O}(\Delta t)$ em relação a vorticidade $\xi(0.5, 0.5, 100)$ para $Re = 500$	38
3.12	Convergência da malha para $Re = 500$, $C_{pm} = 1000$ e diferentes valores de malha N	39
3.13	Teste para $\mathcal{O}(\Delta t)$ em relação a magnetização $M_y(0.5, 0.5, 30)$ para $Re = 500$ e $C_{pm} = 1000$..	39
3.14	Teste para $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ em relação a magnetização $M_y(0.5, 0.5, 1)$ para $Re = 500$ e $C_{pm} = 1000$. .	40
3.15	Campo magnético localizado em $H(0.5, -2)$	41
3.16	Módulo da Magnetização de equilíbrio.	41

4.1	Linhas de Corrente para diferentes Re .	43
4.2	Perfis de Velocidade de u_x e u_y no centro da cavidade para $Re = 10, 100, 300$ e 1000 .	44
4.3	Evolução para o regime permanente da vorticidade no centro da cavidade, com $Re = 300$ e $Re = 1000$.	45
4.4	Evolução da vorticidade para o regime permanente com Re variando.	45
4.5	Evolução da Força para diferentes valores de Re .	46
4.6	Efeito do número de Reynolds na localização dos (a) vórtice principal, (b) vórtice secundário e (c) vórtice terciário. As barras de erro correspondem ao tamanho da malha.	46
4.7	Linhas de Corrente para $Re = 1, 50, 100$ e 1000 e campo velocidade para $Re = 1000$.	48
4.8	Comparação das Forças na placa superior para o caso da parede superior móvel, e, da parede superior e inferior móveis.	49
4.9	Localização dos vórtices principais para vários Re .	49
4.10	Linhas de Corrente para diferentes Re .	50
4.11	Evolução das linhas de corrente para $Re = 500$.	51
4.12	Força da placa superior, e, da placa esquerda, móveis.	52
4.13	Localização dos vórtices principais para vários Re .	52
4.14	Linhas de Corrente para diferentes Re .	54
4.15	Localização dos vórtices principais para vários Re .	55
5.1	Linhas de corrente para $C_{pm} = 10000$ e alguns valores de Re .	57
5.2	Linhas de corrente para $Re = 500$ e diversos valores de C_{pm} .	58
5.3	Módulo do campo velocidade para $C_{pm} = 3 \times 10^4$.	59
5.4	Perfil velocidade para $Re = 500$ e vários valores de C_{pm} .	60
5.5	Cálculo do $\nabla \cdot \mathbf{B}$ para $N = 201$ e $\zeta = 10^{-2}$ quando $C_{pm} = 10^3$ e $Re = 500$.	60
5.6	Mudança no módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local.	61
5.7	Desvio angular da magnetização, em graus, para alguns valores de C_{pm} . Os vetores brancos representam a magnetização local e os vetores pretos representam a magnetização de equilíbrio local.	62
5.8	Desvio da magnetização dado em graus para $C_{pm} = 50$. Os vetores brancos representam a magnetização local e os vetores pretos representam a magnetização de equilíbrio local.	64
5.9	Mudança do módulo da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio para $C_{pm} = 50$ com $\tau = 10^{-3}$ e $\tau = 0.5$.	65
5.10	Saturação da magnetização de equilíbrio para $C_{pm} = 50$, $\alpha = 100$, $\alpha = 1$ e $\zeta = 10^{-2}$.	66
5.11	Mudança no módulo da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 50$, $\alpha = 100$, $\alpha = 1$ e $\zeta = 10^{-2}$.	66
5.12	Comportamento da força na parede superior para $Re = 500$ em função de C_{pm} . No encarte temos a influência de Re para valores moderados de C_{pm} .	67
5.13	Campo velocidade e linhas de corrente para $Re = 500$ e diversos c_{pm} .	68
5.14	Módulo do campo velocidade para $Re = 500$ e $c_{pm} = 3 \times 10^4$.	69

5.15	Mudança do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local.	70
5.16	Desalinhamento da magnetização dado em graus para $C_{pm} = 50$. Os vetores brancos representam a magnetização local e os vetores pretos representam a magnetização de equilíbrio local.	71
5.17	Perfil velocidade para $Re = 500$ e diversos C_{pm}	71
5.18	Comportamento da Força na parede superior e inferior para $Re = 500$ e diferentes valores de C_{pm}	72
5.19	Campo velocidade para $Re = 500$ e alguns valores de C_{pm}	74
5.20	Linhas de corrente para $Re = 500$ e diversos valores de C_{pm}	75
5.21	Mudança percentual do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local.	76
5.22	Desalinhamento da magnetização dado em graus para $C_{pm} = 50$. Os vetores brancos representam a magnetização local e os vetores pretos representam a magnetização de equilíbrio local.	77
5.23	Perfil velocidade para $Re = 500$ e diversos C_{pm}	78
5.24	Comportamento da força da parede superior e esquerda para $Re = 500$ e diferentes valores de C_{pm}	78
5.25	Campo velocidade para $Re = 500$ e vários valores de C_{pm}	79
5.26	Linhas de corrente para $Re = 500$ e diversos c_{pm}	81
5.27	Mudança percentual do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local.	81
5.28	Desalinhamento angular da magnetização dado em graus para $C_{pm} = 50$. Os vetores Brancos representam a magnetização local e vetores pretos representam a magnetização de equilíbrio local.	82
5.29	Perfil velocidade para $Re = 500$ e diversos C_{pm}	83
5.30	comportamento da Força de cada placa móvel para $Re = 500$ e diferentes valores de C_{pm}	83
5.31	Linhas de corrente para $Re = 500$, $C_{pm} = 0$, $C_{pm} = 10^3$ e a força magnética para $C_{pm} = 10^3$	85
5.32	Módulo do campo velocidade para (a) $C_{pm} = 0$ e (b) $C_{pm} = 10^3$	85
5.33	Representação do desvio angular da magnetização para $C_{pm} = 10^3$, em que, (a) desvio da magnetização sobreposto ao campo de sinal de ξ e (b) desvio da magnetização sobreposto ao campo de vorticidade do escoamento.	86
5.34	Desvio da magnetização, dado em graus para $C_{pm} = 10^3$. Os vetores brancos representam à magnetização local e os vetores preto representam à magnetização de equilíbrio local.	87
5.35	Mudança percentual do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 10^3$	88
5.36	Perfil da magnetização para $Re = 500$ e alguns valores de C_{pm}	88
5.37	Perfil vorticidade para $Re = 500$ e alguns valores de C_{pm}	89
5.38	Evolução das linhas de corrente para $Re = 500$, $C_{pm} = 50$	90

5.39	Evolução das linhas de corrente para $Re = 500$, $C_{pm} = 5 \times 10^2$	91
5.40	Linhas de corrente para $Re = 500$, $C_{pm} = 0, 50, 2 \times 10^2, 5 \times 10^2$ e 10^3 e a força magnética para $C_{pm} = 10^3$	93
5.41	módulo do campo velocidade para $C_{pm} = 0$ e $C_{pm} = 10^3$	94
5.42	Representação do desvio angular da magnetização para $C_{pm} = 10^3$, em que, (a) desvio da magnetização sobreposto ao campo de sinal de ξ e (b) desvio da magnetização sobreposto ao campo de vorticidade do escoamento.	95
5.43	Mudança percentual do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 10^3$	95
5.44	Representação do desvio angular da magnetização para $C_{pm} = 10^3$. Os vetores brancos representam à magnetização local e os vetores pretos representam à magnetização de equilíbrio local.	96
5.45	Evolução temporal do desvio angular, em graus, da magnetização local em relação à magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 50$	97
5.46	Evolução temporal da mudança percentual do módulo da magnetização local, para $C_{pm} = 50$	97
5.47	Evolução temporal do desvio angular, dado em graus, da magnetização local em relação à magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 50$ e $C_{pm} = 10^3$	98
5.48	Evolução temporal da mudança percentual do módulo da magnetização local, para $C_{pm} = 50$ e $C_{pm} = 10^3$	98
5.49	Linhas de corrente para $Re = 500$, $C_{pm} = 0, 5$ e 5×10^2	100
5.50	Módulo do campo velocidade para $C_{pm} = 0$ e $C_{pm} = 5 \times 10^2$	101
5.51	Representação do desvio angular da magnetização para $C_{pm} = 5 \times 10^2$, em que, (a) desvio da magnetização sobreposto ao campo de sinal de ξ , (b) desvio da magnetização sobreposto ao campo de vorticidade do escoamento e (c) desvio angular da magnetização segundo a equação (5.1), dado em graus.....	102
5.52	Mudança do percentual do módulo da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 5 \times 10^2$	103
5.53	A esquerda - Linhas de corrente e a direita - Campo Velocidade, para $Re = 500$	104
5.54	Mudança percentual do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 2 \times 10^3$	105
5.55	Representação do desvio angular da magnetização para $C_{pm} = 2 \times 10^3$, em que, (a) desvio da magnetização sobreposto ao campo de sinal de ξ , (b) desvio angular da magnetização sobreposto ao campo de vorticidade do escoamento e (c) desvio angular da magnetização segundo a equação (5.1) dado em graus.	106
5.56	Evolução temporal do desvio angular da magnetização local, para $C_{pm} = 50$	107
5.57	Evolução temporal da mudança percentual do módulo da magnetização local, para $C_{pm} = 50$ e para $C_{pm} = 10^3$	107
5.58	Evolução do regime permanente para o regime não estacionário.	108

5.59	Evolução da vorticidade para o regime permanente periódico não estacionário para $C_{pm} = 3 \times 10^3$ e $Re = 5 \times 10^2$.	109
5.60	Convergência temporal para o regime permanente periódico não estacionário para $C_{pm} = 3 \times 10^3$ e $Re = 500$.	109
5.61	A esquerda - Linhas de corrente e a direita - Campo Velocidade, para $Re = 500$ e $C_{pm} = 3 \times 10^3$.	111
5.62	A esquerda - Linhas de corrente e a direita - Campo Velocidade, para $Re = 500$ e $C_{pm} = 3 \times 10^3$.	112
5.63	Espectro de frequências.	113
6.1	Módulo das forças magnéticas.	115
6.2	Campo vertical aplicado.	116
6.3	Linhas de corrente e campo velocidade com o termo precessional para $Re = 50$ e $C_{pm} = 5$.	116
6.4	Desvio angular e mudança do módulo da magnetização local em relação à magnetização de equilíbrio, para $Re = 50$ e $C_{pm} = 5$.	117

LISTA DE TABELAS

3.1 Tabela de Parâmetros fixos.....	40
-------------------------------------	----

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Ferrofluidos

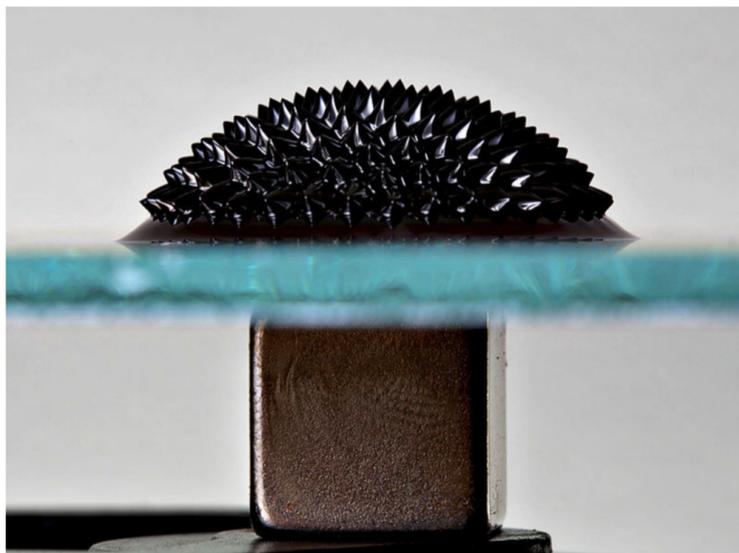


Figura 1.1: Ferrofluido (retirada da internet).

O estudo da dinâmica de fluidos magnéticos ou ferrofluido é uma área inovadora da Dinâmica dos Fluidos que vêm avançando bastante nas pesquisas. Este tipo de material foi desenvolvido por [39], em 1965, pesquisador da NASA, com o intuito de criar combustíveis que fossem remotamente controlados na ausência da gravidade. São materiais compostos por nanopartículas magnéticas diluídas em uma suspensão

líquida não magnética, que podem se interagir uma com as outras formando grandes aglomerados, e portanto desestabilizam a suspensão, deixando de se comportar como um fluido magnético. Para evitar este problema, existem maneiras de estabilizar o ferrofluido, tais como, revestimento das partículas com cargas elétricas ou com camadas lipídicas. Segundo [30] as partículas tem um diâmetro de 3 – 15 nm, sendo aproximadamente 10 nm para o dipolo interno e cerca de 2 nm de camada de surfactantes.

Na presença de um campo magnético externo os momentos de dipolo magnético interno de cada partícula interagem com o campo na tentativa de alinhar as partículas na mesma direção do campo magnético, conforme pode ser visto em [23]. As interações do campo magnético externo com as partículas geram efeitos coletivos interessantes em grandes escalas. É possível controlar remotamente escoamentos de fluidos magnéticos, nos quais aparecem uma formação de picos na superfície livre do ferrofluido, como pode ser visto na Figura (1.1), mudança na viscosidade do fluido, alteração das propriedades térmicas, instabilidades da superfície, entre outros.

A média volumétrica dos momentos de dipolo das partículas magnéticas que se alinham na presença do campo denomina-se de magnetização. É uma propriedade local extremamente importante que pode sofrer alterações nas quais dependem do material fluido, da viscosidade e do campo magnético. Existem diversos tipos de aplicações de ferrofluidos na indústria, tais como, na vetorização de drogas, dispositivos mecânicos ativos, processos de separação, etc.

Equações governantes relativas a evolução da magnetização foram por muito tempo estudadas e reformuladas. Um primeiro modelo da magnetização de equilíbrio foi inserido em [30] em que considera-se um regime superparamagnético e sem interações dipolares entre as partículas magnéticas. Posteriormente, a fim de formular um modelo mais geral Shliomis, em [35] apresentou o primeiro modelo de evolução da magnetização com os termos de equilíbrio, vorticidade do fluido e torque magnético, entretanto, válidos somente para regime perto do equilíbrio. Contudo, os estudos feitos em [11, 34, 21, 22] obtiveram novos resultados consistentes que foram comparados experimentalmente com os estudos [1, 25, 32].

Segundo Rosensweig e Cunha, em [5, 30], ferrohodinâmica (FHD) é o estudo dos fluidos magnéticos quando submetido a um campo magnético, no qual não consideram a presença de campos elétricos e correntes elétricas. Este regime da FHD denomina-se limite magnetostático das equações de Maxwell. Magnetohodinâmica (MHD) é o estudo das interações entre campo magnético e fluidos condutores de eletricidade, onde neste contexto, as forças magnéticas são denominadas por força de Lorentz.

O grupo de pesquisa da Universidade de Brasília-UnB (Vortex) tem diversas pesquisas na área de ferrofluidos, mais especificamente, foram estudados por [8] uma aplicação dos estudos referentes à dinâmica dos ferrofluidos na tecnologia de limpeza de derramamentos de óleo em ambientes naturais. Posteriormente, um estudo reológico foram analisados por [7, 28, 29] suspensões magnéticas sobre os efeitos de um campo magnético.

1.2 Escoamentos em cavidades

1.2.1 Escoamentos de fluidos newtonianos

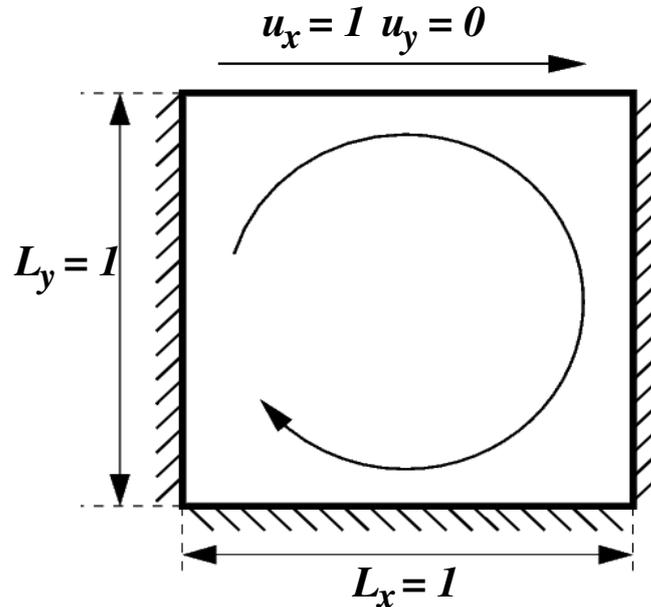


Figura 1.2: Problema clássico da cavidade hidrodinâmica.

Em virtude dos avanços computacionais na área de Dinâmica dos Fluidos, pode-se desenvolver técnicas de algoritmos numéricos capazes de resolver o problema bem conhecido de escoamentos em cavidades, o que motivou a pesquisa para este problema.

O problema clássico mais explorado de cavidades, foi o escoamento em uma cavidade com a parede superior móvel, com velocidade $u_x = 1$ e $u_y = 0$, e nas demais paredes as velocidades são $u_x = u_y = 0$, conforme mostra a Figura (1.2). Este problema também é conhecido como "cavidade cisalhante singular", de acordo com [3], pois possui duas discontinuidades nas condições de contorno da velocidade \mathbf{u} , uma na quina das paredes direita e superior e, outra na quina das paredes esquerda e superior.

Porém, as pesquisas iniciais nesta linha relataram a lentidão que pode ocorrer na convergência da solução numérica, que dependem de alguns parâmetros, tais como, número de Reynolds, tamanho da malha, etc. A fim de diminuir o tempo computacional para uma malha fina e um alto número de Reynolds, o problema clássico do escoamento em uma cavidade foi estudado por [12] obtendo-se um banco de dados para as pesquisas posteriores. Entretanto, este problema foi otimizado e sistematizado por [10, 9] encontrando resultados relevantes para literatura. Mais tarde, em [20] obteve a melhor precisão numérica para seus dados específicos até o momento, e gerou dados para validações posteriores.

Ainda no problema clássico da cavidade, foi abordado por [26] o problema com as paredes superior e esquerda móveis e com as quatro paredes da cavidade móveis com o objetivo de encontrar novas configurações do escoamento e múltiplas soluções. O problema com quatro paredes móveis foi investigado por [43]

que encontrou para um certo número crítico de Re , multiplicidade de soluções estáveis assimétricas e de soluções instáveis simétrica.

Um estudo minuciosamente revisado sobre a cavidade cisalhante foi feito por Shankar e Deshpande, em [33], em que eles abordam vários trabalhos com distintas configurações de cavidade. Estes diferentes estudos de escoamentos em cavidades no caso hidrodinâmico foram de extrema relevância para a validação das simulações numéricas para os resultados de escoamentos de fluidos magnéticos em cavidades.

1.2.2 Escoamentos de fluidos magnéticos

Em [40] foram investigados escoamentos de fluidos biomagnéticos (BFD) (sangue) em cavidades retangulares. Utilizou-se a formulação vorticidade-função de corrente, com a hipótese da magnetização \mathbf{M} ser escrita linearmente em função do campo magnético aplicado \mathbf{H} e da temperatura T , no qual obteve, principalmente, resultados relacionados a ferrohrodinâmica (FHD).

Posteriormente, foi estudado por [42] o comportamento do biofluido magnético em uma cavidade quadrada cisalhante com a hipótese na magnetização de superparamagnetismo, com o intuito de compreender as interações que os mecanismos de Magnetohidrodinâmica (MHD) e de Ferrohrodinâmica (FHD) trazem para o escoamento. Os resultados mostram o surgimento de novos vórtices na presença de um campo magnético, para cada caso de MHD, FHD e BFD.

Na mesma linha de pesquisa em BFD, foi estudado por [41] uma geometria diferente das anteriores, um aneurisma, usando os princípios da FDH, com a hipótese de superparamagnetismo para a magnetização e a formulação vorticidade-função de corrente. Investigaram quais regiões dessa nova geometria são afetadas pelos efeitos da temperatura, velocidade, transferência de calor, na presença do campo magnético. Portanto, até então, fazia-se muitas simulações interessantes em escoamentos de fluidos magnéticos em cavidades, porém com a restrição da magnetização de equilíbrio de Langevin.

Entretanto, recentemente, um estudo feito por [37], simulou escoamentos de fluidos magnéticos em uma cavidade, considerando a equação completa da magnetização de Shliomis, no qual obteve estruturas diferentes no escoamento. Motivados por [42], o objetivo principal deste trabalho foi simular escoamentos de fluidos magnéticos em uma cavidade quadrada bidimensional, com a inovação de consideramos a equação de evolução da magnetização de Shliomis.

1.3 Objetivos deste trabalho

Neste trabalho, tivemos o principal objetivo em estudar o escoamento de fluidos magnéticos em uma cavidade com paredes móveis. Utilizamos uma formulação vorticidade-função de corrente para resolver o escoamento e uma equação de evolução da magnetização para investigar o que cada mecanismo físico da equação traz para o escoamento. Discretizamos as equações que regem este problema, usando o método de diferenças finitas.

Testamos diferentes configurações da cavidade a fim de investigar a influência no comportamento do escoamento. Desta forma, realizamos um avanço na compreensão do escoamento de fluidos magnéticos, já que até o momento, os trabalhos mais relevantes na literatura, traziam discussões a respeito da caracterização desses fluidos. Portanto, estruturamos este trabalho da seguinte forma.

No Capítulo 2, apresentamos os pré-requisitos básicos para deixar o leitor apto a ler a tese. No Capítulo 3, apresentamos o problema proposto deste trabalho em estudar escoamentos de fluidos magnéticos em cavidades cisalhantes, em que analisamos quatro casos de fronteiras móveis: no primeiro caso, a placa superior é móvel, no segundo, as placas superior e inferior são móveis, no terceiro, as placas superior e esquerda e por último, as quatro placas se movimentam. Mostramos as equações governantes desse problema, que são, as equações da vorticidade-função de corrente, a evolução da magnetização e o campo magnético utilizado. Fizemos as adimensionalizações necessárias e identificamos os parâmetros adimensionais. E verificamos que nossos resultados estão bem comportados.

No Capítulo 4, apresentamos os resultados de escoamentos puramente hidrodinâmicos em uma cavidade, tal que primeiramente, analisamos o comportamento do escoamento com a parede superior móvel. Posteriormente, observamos as alterações no escoamento quando colocamos as paredes superior e inferior móveis, em seguida, observamos as estruturas novas que aparecem quando colocamos as paredes superior e esquerda móveis e por fim, apresentamos as quatro paredes móveis com soluções estáveis assimétricas.

No Capítulo 5, estudamos os escoamentos de fluidos magnéticos simétricos em cavidades, com a presença de um campo magnético permanente e localizado. Primeiramente, analisamos as mudanças no escoamento causadas pelos termos de equilíbrio e advecção da magnetização, nas diversas configurações de cavidade. Posteriormente, introduzimos o termo da vorticidade na equação da magnetização e analisamos os efeitos que os termos de equilíbrio, advecção e vorticidade trazem para o escoamento e pontuamos suas exatas diferenças.

No Capítulo 6, realizamos o estudo de escoamentos para fluidos assimétricos. Introduzimos o rotacional da força de torque na formulação vorticidade-função de corrente e o termo precessional na equação da magnetização. Com a equação evolutiva da magnetização completa, podemos investigar as influências que o termo precessional junto com o torque, causa no escoamento e na magnetização, sobre os efeitos de um campo magnético localizado e permanente e um campo magnético uniforme. No capítulo 7 apresentamos as principais conclusões obtidas para este trabalho, bem como os trabalhos futuros e também as melhorias que podemos realizar. No Apêndice A, temos os detalhes que mostram que se considerarmos a hipótese de superparamagnetismo para a magnetização então a força magnética será irrotacional.

Ao longo deste trabalho surgiram dois desafios: o primeiro foi o desafio numérico, no qual tivemos que acoplar o campo magnético com o escoamento, considerando novas equações, escalas de tempo e discretizações. O segundo desafio foi a modelagem do problema, em que tivemos que compreender a dinâmica da magnetização, escolhendo uma equação para ela e registrar o que cada termo da equação da magnetização causavam no escoamento.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Equações governantes da mecânica dos meios contínuos

Estamos assumindo neste trabalho a hipótese do meio contínuo, ou seja, toda a porção fluida é considerada como um meio contínuo. As propriedades do fluido são definidas e válidas em todo o domínio de tal forma que podem ser representadas por funções contínuas no espaço e no tempo. Para maiores detalhes, (Batchelor, 1967) .

A fim de estudar o transporte de quantidade de movimento em fluidos, precisamos introduzir as equações governantes que regem o escoamento de fluidos, que são a Equação da Conservação da Massa ou Equação da Continuidade e Equação da Quantidade de Movimento.

2.1.1 Equação da conservação da massa

Para um meio contínuo, a equação da continuidade é dada por [2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

em que ρ é a massa específica do fluido e \mathbf{u} é o campo de velocidade. Reescrevendo a equação (2.1) em termos da taxa de variação da massa específica, temos

$$-\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

em que $\frac{D}{Dt}(\ast)$ é a derivada material, dada por

$$\frac{D}{Dt}(\ast) = \frac{\partial}{\partial t}(\ast) + \mathbf{u} \cdot \nabla(\ast). \quad (2.3)$$

Assumindo que o fluido é incompressível, isto é, não há variação de densidade ao longo do escoamento, a equação 2.1 é simplificada para

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

2.1.2 Equação da quantidade de movimento

A equação do balanço da Quantidade de Movimento para um meio contínuo é dado pela Equação de Cauchy

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}, \quad (2.5)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões de segunda ordem e \mathbf{b} é a força de campo por unidade de massa. Para o fechamento da equação (2.5), precisamos de uma equação constitutiva para o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$.

2.1.2.1 Formulação da equação constitutiva de para o tensor de tensões

A ideia é obter uma equação para $\boldsymbol{\sigma}$ que obedeça o Princípio da Objetividade (MFI) das quantidades físicas envolvidas na equação constitutiva [31]. Como podemos escrever qualquer tensor de tensões de segunda ordem como a soma de uma parte isotrópica, e uma parte deviatórica, temos que

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_H. \quad (2.6)$$

Por definição, no contexto da mecânica dos fluidos, a pressão mecânica é dada por

$$-\frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \sigma_{ii} = -\frac{1}{3} \underbrace{\sigma_{kk}}_{(*)} = p, \quad (2.7)$$

em que em (*) usamos a convenção da soma de Einstein, no qual costuma-se eliminar o símbolo de somatório da equação e colocar índices repetidos no mesmo termo como um indicador de somatório.

Por outro lado, para um fluido Newtoniano incompressível, o tensor deviatórico é dado por

$$\boldsymbol{\sigma}_H = 2\mu\mathbf{D}, \quad (2.8)$$

em que μ é a viscosidade de cisalhamento e \mathbf{D} é chamado de tensor taxa de deformação dado por,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T), \quad (2.9)$$

que é a parte simétrica do gradiente de velocidade. Portanto, para um fluido newtoniano incompressível,

das equações (2.7) e (2.8), obtemos a equação constitutiva para $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}. \quad (2.10)$$

Assim, de (2.5) e (2.10), obtemos a conhecida equação de Navier-Stokes¹,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.11)$$

No presente estudo, estamos interessados em analisar a quantidade de movimento do fluido sobre a perspectiva de uma outra representação similar a equação (2.11), porém escrita com variáveis diferentes. Para isso, introduzimos a seguinte Formulação Vorticidade-Função de corrente na seção abaixo.

2.2 Formulação Vorticidade - Função de Corrente

Para escoamentos bidimensionais podemos definir a função de corrente, que denotaremos por $\psi(x, y, t)$, que retrata toda a configuração do escoamento. Nos locais em que temos ψ constante, definimos as linhas de corrente do escoamento. Representamos as componentes de velocidade do fluido como derivadas parciais da função de corrente,

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.12)$$

No caso bidimensional, a vorticidade é dada por

$$\xi = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{e}_k. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.12) em (2.13), obtemos

$$\xi = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\nabla^2 \psi. \quad (2.14)$$

Com o intuito de obter a equação da vorticidade em termos da função de corrente, calculamos o rotacional da equação de (2.11), com a ausência de forças de campo e encontramos

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \xi. \quad (2.15)$$

Considerando o escoamento bi-dimensional é possível desprezar o termo de estiramento $\xi \cdot \nabla \mathbf{u}$, obtendo, portanto:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \nu \nabla^2 \xi, \quad (2.16)$$

¹É importante ressaltar que esta equação será modificada posteriormente a fim de modelar fluidos magnéticos.

em que

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

é a viscosidade cinemática; e

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(x, y)}.$$

2.3 Magnetismo

Um dos conceitos fundamentais do magnetismo é o de dipolo magnético. De fato, diferentemente da eletricidade, nunca foram observados monopólos magnéticos. Um exemplo clássico de aplicação da teoria do magnetismo são os ímãs, que por menor que seja sua escala, tem dois polos, norte e sul, que não podem ser separados. Se pegarmos dois ímãs, claramente perceberemos que existem formas de manuseá-los para que eles sejam repelidos ou atraídos. Ímãs com polos iguais se repelem, enquanto que ímãs com polos opostos repelem.

A magnetização \mathbf{M} de um material magnetizável é definida como uma média volumétrica dos momentos de dipolo, que na presença do campo magnético tendem a se alinhar com ele. Definimos por campo induzido \mathbf{H} como sendo a soma do campo magnético aplicado \mathbf{B} e da magnetização \mathbf{M} , ou seja,

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (2.17)$$

em que μ_0 é permeabilidade magnética no vácuo, a saber, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$. \mathbf{H} e \mathbf{M} tem unidade de A/m, indução magnética \mathbf{B} tem unidade Tesla (T).

Pode-se classificar os materiais magnéticos de acordo com suas propriedades em diferentes tipos [16]. Três destas classificações são: diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos, de acordo com a origem do material e a interação dos dipolos magnéticos. São essas características que determinam como o material se comporta quando submetidos a um campo magnético. Classificamos o ímã como um material ferromagnético.

- **Materias Paramagnéticos:** São materiais que possuem magnetização apenas na presença de um campo externo, em que os dipolos tendem-se a alinhar com o campo. Na ausência de campo externo, os dipolos presentes nestes materiais tendem a uma configuração randômica. Estes geralmente possuem valores pequenos de magnetização. Exemplos incluem: alumínio, magnésio, sulfato de cobre, etc.

De forma similar, temos os materiais superparamagnéticos. Estes comportam-se de forma similar aos paramagnéticos, porém, são constituídos de domínios ferromagnéticos que tendem a se desalinhar na ausência de um campo magnético externo. Devido a este fato, a magnetização destes materiais tendem a ser muito alta do que a de materiais paramagnéticos. Nestes casos, a magnetização é paralela ao

campo magnético, isto é

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (2.18)$$

em que χ é a susceptibilidade magnética.

- **Materiais Diamagnéticos:** São materiais que, de forma oposta aos paramagnéticos, quando sujeitos à presença de um campo magnético externo, possuem seus dipolos alinhados na direção contrária a este. Exemplos conhecidos incluem bismuto, cobre, prata, chumbo, etc;
- **Materiais Ferromagnéticos:** são aqueles que se imantam fortemente na presença de campo magnético, exemplos: ferro, cobalto, níquel, etc. Estes materiais são utilizados quando desejam obter campos magnéticos de alta intensidade.

Usando a equação (2.18), podemos reescrever a equação (2.17), para materiais superparamagnéticos, como

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}(1 + \chi). \quad (2.19)$$

Definimos a permeabilidade relativa do fluido, como

$$K_m = \frac{\mu_m}{\mu_0} = 1 + \chi, \quad (2.20)$$

em que μ_m é a permeabilidade magnética do meio (neste caso, do fluido). Assim,

$$\mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H}. \quad (2.21)$$

No caso do vácuo, temos que $K_m = 1$ e então $\chi = 0$, pois não existem dipolos magnéticos para serem alinhados com o campo e assim temos que

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (2.22)$$

Para materiais paramagnéticos temos que K_m é um pouco maior do que 1, para materiais diamagnéticos temos que K_m é um pouco menor do que 1 e para materiais ferromagnéticos, temos que a relação entre \mathbf{B} e \mathbf{H} é não linear.

2.3.1 As equações de Maxwell

As Equações de Maxwell são um conjunto de quatro equações que descrevem todos os fenômenos de eletricidade e magnetismo em uma única teoria, o eletromagnetismo [18].

2.3.1.1 Lei de Gauss da eletricidade

A Lei de Gauss da eletricidade é dada por

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (2.23)$$

em que \mathbf{E} é o campo elétrico gerado por uma fonte qualquer no interior de uma superfície S , q é a soma da carga elétrica total que se encontra no interior de S e ϵ_0 é a constante de permissividade do vácuo, à saber, $8,85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N m}^2$. A equação (2.23) diz que não importa a intensidade do campo elétrico e nem a geometria dessa região, o fluxo elétrico através de S é sempre igual à soma total das cargas que se encontram no interior dessa superfície, a menos de uma constante ϵ_0 .

A fim de reescrever a equação (2.23) na sua forma diferencial, usamos o Teorema da Divergência:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV, \quad (2.24)$$

em que \mathbf{F} é um campo vetorial e V é o volume delimitado por S . Por outro lado, podemos expressar a carga q como uma integral de volume através da densidade de carga elétrica ρ_e , isto é,

$$q = \int_V \rho_e dV, \quad (2.25)$$

temos pelas equações (2.24) e (2.25), que a equação (2.23), é reescrita como

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_e dV. \quad (2.26)$$

Para que as duas integrais sejam idênticas sobre qualquer volume arbitrário, é necessário que os integrandos sejam idênticos em cada ponto. Portanto em qualquer ponto do espaço, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e. \quad (2.27)$$

Esta é a forma diferencial da Lei de Gauss.

2.3.1.2 Lei de Gauss do magnetismo

Esta Lei segue diretamente do fato de não termos uma carga magnética isolada, afirmando que o fluxo de indução magnética \mathbf{B} através de qualquer superfície fechada é sempre nulo, isto é,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.28)$$

Pelo Teorema da Divergência e pelos argumentos vistos em (2.3.1.1), a equação (2.28) é reescrita como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.29)$$

mostrando que a indução magnética é um campo solenoidal.

2.3.1.3 Lei de Faraday

A Lei de Faraday, ou Lei da Indução Eletromagnética diz que uma variação temporal no fluxo de indução magnética gera um campo elétrico,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right), \quad (2.30)$$

. Do teorema de Stokes,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.31)$$

em que \mathbf{F} é um campo vetorial. Considerando que \mathbf{S} não varia com o tempo, podemos reescrever a equação (2.30), como

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.32)$$

Novamente, como esta equação se aplica a qualquer superfície arbitrária, pelo Teorema da Localização, temos que,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.33)$$

Esta é a forma diferencial da Lei de Faraday.

2.3.1.4 Lei de Ampère-Maxwell

A lei de Ampère-Maxwell é dada por

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_m \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right) + \mu_0 \mathbf{I}, \quad (2.34)$$

que associa o campo \mathbf{B} , a corrente I e a derivada temporal do campo elétrico. Primeiramente, foi Ampère que introduziu esta Lei, mas sem o termo de variação temporal, mais tarde foi introduzido por Maxwell. A corrente I , pode ser expressa como o fluxo do vetor densidade de corrente \mathbf{J} , através da superfície S , isto é,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.35)$$

Assim, com esta definição juntamente com o Teorema de Stokes, dado pela equação (2.31), obtemos

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mu_m \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.36)$$

Pela arbitrariedade de \mathbf{S} , temos que a Lei de Ampere-Maxwell aplica que em cada ponto do espaço, conforme mostra a equação abaixo,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_m \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.37)$$

Podemos ainda reescrever a equação (2.37) usando a (2.21), e assim obtemos,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.38)$$

2.3.2 Limite magnetostático das equações de Maxwell

A ferrohodinâmica consiste em estudar o comportamento de um fluido magnético sobre a ação de um campo magnético. Portanto, considerando a ausência de corrente elétrica, campo elétrico, as equações de Maxwell se reduzem a:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.39)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (2.40)$$

Estas equações definem o *limite magnetostático das Equações de Maxwell*.

2.3.3 Magnetização em ferrofluidos

Considerando uma suspensão coloidal monodispersa com partículas magnéticas que possuem o mesmo volume v_p e momento de dipolo \mathbf{m} , podemos obter uma aproximação para a média volumétrica de cada partícula da seguinte forma (maiores detalhes, veja capítulo 1 de [5]),

$$\langle m \rangle = \frac{1}{\delta V} \sum_{j=1}^N \mathbf{m}^j v_p = \frac{N}{\delta V} v_p^j \bar{\mathbf{m}} = n v_p \mathbf{m} = \phi \mathbf{m} \quad (2.41)$$

em que $n = N/\delta V$ é o número de densidade das partículas e $\phi = n v_p$ é a fração volumétrica de partículas para o volume total δV . Portanto definimos magnetização como sendo,

$$\mathbf{M} = \frac{\langle \mathbf{m} \rangle}{v_p} \quad (2.42)$$

ou seja, é uma média volumétrica dos momentos de dipolo das partículas magnéticas que se alinham na presença de um campo magnético, conforme vemos na Figura (2.1).

Se a média \mathbf{m} é nula, ou seja, cada partícula se alinha em uma direção diferente, então $\mathbf{M} = 0$. Se todas as partículas se alinham na direção do campo, então a magnetização da suspensão atinge seu valor de saturação \mathbf{M}_s . Assim,

$$\mathbf{M}_s = n \langle \mathbf{m} \rangle_s. \quad (2.43)$$

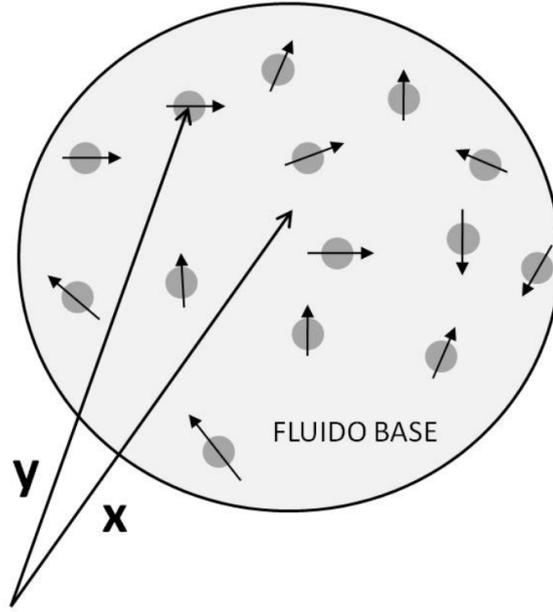


Figura 2.1: Elemento de volume δV da média volumétrica. (Cunha, 2012 e Rosa, 2014.)

Definimos a magnetização do material sólido que compõem as partícula como sendo,

$$\mathbf{M}_d = \frac{\langle \mathbf{m} \rangle}{v_p}. \quad (2.44)$$

De (2.43) e (2.44), temos

$$\mathbf{M}_s = n \mathbf{M}_d v_p = \phi \mathbf{M}_d \quad (2.45)$$

2.3.4 Modelos fenomenológicos de equações constitutivas

A fim de buscar uma equação da magnetização que caracterize o escoamento em ferrofluidos, seguem abaixo alguns modelos. Segundo (Rosensweig, 1985), primeiramente a magnetização para um fluido superparamagnético em equilíbrio, é dada por

$$\mathbf{M}_0 = M_s \mathcal{L}(\alpha) \quad (2.46)$$

com M_s representando a magnetização de saturação e $\mathcal{L}(\alpha)$ a função de Langevin para o superparamagnetismo, dada por,

$$\mathcal{L}(\alpha) = \left(\coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right), \quad (2.47)$$

em que

$$\alpha = \alpha_1 H = \frac{\mu_0 m H}{k T} \quad (2.48)$$

é a intensidade adimensional do campo magnético. Nesta equação m é o momento de dipolo magnético, k é a constante de Boltzmann que vale $1,3806503 \cdot 10^{-23}$ J/K, e T é a temperatura.

Para o estudo de fluidos magnéticos em regimes fora do equilíbrio, é necessário definir uma equação de evolução para a magnetização. Para tal, diversos autores formularam diferentes modelos de equações partindo de vários caminhos. Um exemplo de modelo de equação para evolução da magnetização é dado por (Martsenyuk, Raikher e Shliomis,)

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} - \frac{6}{\tau_B} \left[1 - \frac{\alpha_e \alpha (\mathbf{H}_e \cdot \mathbf{H})}{\alpha_e^2} \right] \mathbf{M} - \frac{1}{\mathcal{L}(\alpha_e)} \left[\frac{1}{\mathcal{L}(\alpha_e)} - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})}{6 \eta_0 \phi}, \quad (2.49)$$

em que $\tau_B = 3 \pi \eta_0 \sigma^3 k T$ é o tempo de relaxação Browniano, η_0 é a viscosidade do fluido, σ é o diâmetro das partículas, e

$$\alpha_e = \frac{\mu_0 m H_e}{k T} \quad \mathbf{H}_e = H_e \hat{\mathbf{H}}_e,$$

em que \mathbf{H}_e é o campo magnético efetivo diferente do campo imposto.

Um outro modelo mais geral da equação da magnetização dada pela equação (2.50) foi proposto por (Shen e Doi, 1972),

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{6}{\tau_B} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} + \frac{A(\alpha)}{6 \mu \phi} \left[(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M} + (M_0^2 - M^2) \mathbf{H} \right], \quad (2.50)$$

em que

$$A(\alpha) = \frac{1}{\mathcal{L}(\alpha)^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}(\alpha) \right)$$

é uma função do campo magnético dada pela magnetização de equilíbrio e M_0 é a intensidade da equação de equilíbrio.

O modelo que vêm abaixo é o primeiro modelo constitutivo da equação da magnetização proposta por Shliomis [35], no qual baseou-se em reformular a equação utilizando uma forma mais simples para a relaxação da magnetização, que é o modelo de Debye. A equação é dada por,

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} + \frac{\mu_0}{6 \mu \phi} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}, \quad (2.51)$$

em que τ é o tempo de relaxação magnética, ϕ é a fração volumétrica. É um modelo mais simples do que os outros dois anteriores e por este motivo é comumente utilizado na literatura.

Uma outra equação constitutiva da magnetização foi proposta por (Cunha, 2012) é dada por,

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} + \frac{1}{6 \phi \mu_0} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}), \quad (2.52)$$

em que \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação.

2.3.5 Equação do movimento para fluidos magnéticos

Em uma partícula magnetizada, agem forças e torques devido a interações magnéticas de seus momentos de dipolo com o campo externo aplicado, além de interações com outros dipolos magnéticos.

2.3.5.1 Força magnética

A presente abordagem para o cálculo das forças magnéticas sobre um dipolo segue a proposta por Rosensweig [30]. Seja um pequeno volume cilíndrico de um material magnetizado cujo eixo geométrico $\delta\mathbf{r}$ está alinhado com o vetor magnetização \mathbf{M} . Sobre o material atua um campo magnético aplicado \mathbf{H} e pólos de densidade $\rho_s = \mu_0 M$ que aparecem nas duas extremidades do cilindro de área S do imã, com polaridade invertida. Um volume $\delta\mathbf{V}$ desse elemento é dado por $S|\delta\mathbf{r}|$. Assim, a força líquida que o elemento de volume do material magnético é submetida é dado por

$$\mathbf{f}_m = -\mathbf{H}(\mathbf{r}')\rho_s S + \mathbf{H}(\mathbf{r}' + \delta\mathbf{r})\rho_s S = \delta\mathbf{H}\rho_s S, \quad (2.53)$$

em que $\delta\mathbf{H}$ é a variação de \mathbf{H} na direção de $\delta\mathbf{r}$. Usando uma expansão em série de Taylor de primeira ordem para $\mathbf{H}(\mathbf{r}' + \delta\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}') + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{H}|_{\mathbf{r}'} + \mathcal{O}(|\delta\mathbf{r}|^2)$, temos

$$\mathbf{f}_m = \rho_s S(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{H}|_{\mathbf{r}'} + \mathcal{O}(|\delta\mathbf{r}|^2)). \quad (2.54)$$

Tomando o limite $|\delta\mathbf{r}| \rightarrow 0$, temos que a força magnética associada com gradientes de campo magnético é dado por

$$\mathbf{f}_m = \delta\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{H}\rho_s S. \quad (2.55)$$

Mas, como $\delta\mathbf{r}$ está alinhado com a magnetização \mathbf{M} , temos que $\delta\mathbf{r} = \frac{\mathbf{M}}{M}|\delta\mathbf{r}|$ e então a equação (2.55) se reduz a

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 \mathbf{M} |\delta\mathbf{r}| S \cdot \nabla\mathbf{H} = \mu_0 \delta\mathbf{V} \mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H}. \quad (2.56)$$

Portanto a força magnética por unidade de volume do material magnetizado é dada por

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H}, \quad (2.57)$$

ou também, como $\delta\mathbf{V}$ é o volume de uma partícula, temos que

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 m \cdot \nabla\mathbf{H}, \quad (2.58)$$

em que $m = \delta\mathbf{V} \mathbf{M}$ é o vetor momento de dipolo magnético de uma partícula. E então, concluímos que a força magnética existe devido a um campo magnético externo não uniforme que atua sobre um dipolo magnético. Esta força também é chamada de densidade de força de Kelvin, conforme pode ser vista em [30].

2.3.5.2 Torque magnético

O torque magnético se origina do fato de que o momento de dipolo magnético, não nulo, está vinculado com a orientação do campo magnético local. Ou melhor, se alterarmos a orientação do campo magnético \mathbf{H} , temos que a magnetização \mathbf{M} responde executando um movimento de rotação das partículas, que deseja ficar orientada na mesma direção do campo. Porém, ela sofre uma resistência da viscosidade do fluido.

Considere $\delta\mathbf{r}$ pequeno o suficiente para que não tenha variação do campo aplicado, ou seja, $\delta\mathbf{H} = 0$. A soma dos momentos de torque em torno da origem é dado por

$$\tau_{\mathbf{m}} = \rho_s \delta\mathbf{r} (-\mathbf{r}' \times \mathbf{H} + \mathbf{r}'' \times \mathbf{H}), \quad (2.59)$$

em que \mathbf{r}' e \mathbf{r}'' são os vetores posição das faces com relação a origem. Desta forma,

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + \delta\mathbf{r} \quad \text{ou} \quad \mathbf{r}'' - \mathbf{r}' = \delta\mathbf{r}. \quad (2.60)$$

Substituindo (2.60) em (2.59) e dividindo a equação resultante pelo volume da matéria, temos que o torque é dado por

$$\tau_{\mathbf{m}} = \mu_0 m \times \mathbf{H}. \quad (2.61)$$

Portanto, conforme vimos, o torque aparece devido ao desalinhamento do momento de dipolo com campo magnético aplicado.

2.3.5.3 Formulação contínua das equações do movimento

A ferrohodinâmica, conforme já foi discutido, está interessada em determinar como a Força magnética, que está associada com os gradientes de campos magnéticos, e o torque atuantes nos dipolos magnéticos influenciam o movimento de um fluido. As propriedades magnéticas do ferrofluido influenciam a sua microestrutura, e, portanto, acarretam em uma mudança do tensor de tensões: haverá uma contribuição extra devido a presença de partículas magnéticas.

Assim, o tensor de tensões visto na equação (2.6), agora terá uma contribuição magnética,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_H + \boldsymbol{\sigma}_m, \quad (2.62)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}_H$ é o tensor de tensões hidrodinâmico, visto na equação (2.8) e $\boldsymbol{\sigma}_m$ é a contribuição magnética. A fim de encontrar equações constitutivas para a contribuição magnética, Rosensweig em [30] apresentou o seguinte tensor de tensões,

$$\boldsymbol{\sigma}_m^{(1)} = -\frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{H}. \quad (2.63)$$

Porém, ao extrair o divergente desse tensor de tensões na equação de Cauchy, obtive para a parte magnética, a força de Kelvin, dada por (2.58). Notou que essa formulação era válida para um regime superparamag-

nético. No entanto, continha inconsistências, quando considerava-se a presença de torques magnéticos no escoamento, pois utilizando (2.63), falta o termo de força de torque na equação do movimento para fluidos magnéticos. Desta forma, uma reformulação do tensor de tensões magnético apresentado acima, foi feita, com o intuito de encontrar a contribuição do torque magnético na formulação,

$$\boldsymbol{\sigma}_m^{(2)} = -\frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{B}. \quad (2.64)$$

Portanto, quando extraímos o divergente da equação (2.64), obtemos

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m^{(2)} = \mu_0(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H} + \nabla \times (\mu_0\mathbf{M} \times \mathbf{H}), \quad (2.65)$$

que é uma parte relacionada à força magnética e outra parte relacionada á força de torque, a menos de uma constante. Entretanto, partindo de uma abordagem mais microhidrodinâmica, foi (Cunha, 2018) em [6] que apresentou um tensor de tensões geral, dado por,

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathcal{P}_m\mathbf{I} + \frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{H}), \quad (2.66)$$

onde \mathbf{I} é o tensor unitário,

$$\mathcal{P}_m = \mu_0 n m \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{d}}_k \cdot \mathbf{H},$$

\mathcal{P}_m é a pressão magnética modificada, identificamos por $n = N/V$ como sendo o número de densidade de partículas magnéticas, em que, N é o número de partículas, e, $V = V_f + \sum_{k=1}^N v_k$ é o volume total do fluido, tal que uma contribuição vêm do volume do fluido base e a outra do volume de cada partícula magnética. m é o momento de dipolo magnético e $\hat{\mathbf{d}}_k$ é um vetor unitário orientado na direção do momento de dipolo.

Portanto, substituindo as equações (2.1.2.1) e (2.66), no tensor de tensões (2.62), obtemos

$$\boldsymbol{\sigma} = -(p - \mathcal{P}_m)\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{H}). \quad (2.67)$$

Note que, o tensor de tensões Σ é assimétrico, pois a parte antissimétrica, dada por, $\frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{H})$, é não nula, pelo fato de estarmos considerando presença de torques magnéticos. É devido a esta nomenclatura de "tensor de tensões assimétrico", que chamamos o fluido de assimétrico.

Assim, substituindo (2.62) para um fluido assimétrico em (2.5), obtemos finalmente a equação do movimento para um fluido magnético,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mu_0 \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \rho \mathbf{b}. \quad (2.68)$$

2.4 Métodos computacionais

Seja uma função $G(x, y) \in \mathbb{C}^2(\Omega)$, e, considere a EDP abaixo, linear, de 2ª ordem, dada por,

$$\frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial y^2} = F(x, y), \quad (2.69)$$

com condições de fronteira de Dirichlet,

$$\psi = 0, \quad \partial(\Omega).$$

Desejamos encontrar uma solução aproximada para este problema. Para tal, recorremos ao método das diferenças finitas, no qual se baseia na aproximação das derivadas que aparecem nas EDPs.

2.4.1 Diferenças finitas

Suponha que temos uma malha unidirecional que foi construída em pontos igualmente espaçados, cuja a distância de um ponto para outro, denominamos por Δx , e queiramos avaliar a função $G(x)$ nos pontos da malha. Se estivéssemos em um contínuo, para avaliar o valor das derivadas, usaríamos a definição de limite, e portanto encontraríamos o valor analítico de $G'(x)$, porém neste caso, como estamos em um espaço discreto, o mais próximo que conseguimos da operação de limite é,

$$G'(x) \approx \frac{G(x_{i+1}) - G(x_i)}{\Delta x}, \quad (2.70)$$

tal que, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, em que $x_{i+1} > x_i$ e $i = 1, \dots, N$. Entretanto, quando realizamos uma aproximação deste tipo estamos sujeitos a cometer um erro, e este erro pode ser encontrado usando uma série de Taylor e a fórmula do erro de Lagrange na função G , ou seja,

$$G'(x_j) = \frac{G(x_j) - G(x_i)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (2.71)$$

obtemos um erro da ordem de $\mathcal{O}(\Delta x)$.

Desta forma, segue abaixo, as principais Diferenças Finitas de primeira ordem,

$$\begin{aligned} \text{Diferença Avançada} & : \quad G'_i = \frac{G_{i+1} - G_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \text{Diferença Atrasada} & : \quad G'_i = \frac{G_i - G_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \text{Diferença Central} & : \quad G'_i = \frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Para a derivada segunda fazemos um procedimento similar e obtemos

$$G''_i = \frac{G_{i+1} - 2G_i + G_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Portanto, agora estamos aptos a discretizar a equação (2.69), em que avaliamos as funções em cada ponto da malha uniforme com um número finito de pontos, N^2 , pelo método da Diferença Finita Central de segunda ordem, e, além disso, denominando por Δx o espaçamento na direção x e Δy o espaçamento na direção y ,

$$\frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{G_{i+1,j} - 2G_{i,j} + G_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{G_{i,j+1} - 2G_{i,j} + G_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) = F_{i,j}, \quad (2.72)$$

em que $F_{i,j} = F(x_i, x_j)$. Isolando $G_{i,j}$ na equação acima, temos

$$G_{i,j} = \frac{1}{4} \left[G_{i+1,j} + G_{i-1,j} + G_{i,j+1} + G_{i,j-1} - \frac{F_{i,j}}{1/\Delta x^2} \right]; \quad i, j = 2, \dots, N-1. \quad (2.73)$$

Analisando a equação (2.73), notamos que, para cada $i, j = 2, N-1$, teremos $(N-2)^2$ equações com $(N-2)^2$ incógnitas, ou seja, recaímos em um sistema linear e então precisamos de ferramentas para resolvê-lo e encontrar a desejada solução aproximada da EDP.

2.4.2 Resolução de sistemas lineares

A fim de resolver um sistema do tipo

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad (2.74)$$

em que a matriz \mathbf{A} é inversível, e $\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ seja solução única, buscamos encontrar um processo iterativo no qual determinamos a solução \mathbf{w} como sendo um ponto fixo assintoticamente estável, ou seja, que atraem a solução do problema.

Nesta seção buscaremos encontrar processos iterativos da forma,

$$\mathbf{w}^{k+1} = T\mathbf{w}^k + \mathbf{C}, \text{ com } \mathbf{w}^0 = \mathbf{w}_0,$$

como condição inicial e queremos que \mathbf{w}^{k+1} se aproxime cada vez mais da solução do sistema \mathbf{w}^* , porém como estamos lidando com valores aproximados, temos um erro que acontece entre duas iterações consecutivas ou entre a iteração e o valor esperado, que é definido por,

$$\mathbf{e}^{k+1} = T\mathbf{e}^k = T^k\mathbf{e}^0,$$

no qual concluímos que esse erro é um processo iterativo linear convergente, somente se a matriz T for convergente.

Apresentaremos, a seguir, alguns métodos para resolver sistemas lineares:

2.4.2.1 Método de Gauss Jacobi

Seja uma matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são todos não nulos e suponha que podemos decompor a matriz A da seguinte forma:

$$A = L + D + U, \quad (2.75)$$

em que L é uma matriz triangular inferior estrita, D uma matriz diagonal e U uma matriz triangular superior estrita. Substituindo (2.75) em (2.74), obtemos,

$$\mathbf{w} = -D^{-1}(L + U)\mathbf{w} + D^{-1}\mathbf{b}. \quad (2.76)$$

Considerando o lado esquerdo de (2.76) como os elementos de um novo passo de iteração $k+1$ e os elementos do lado direito como elementos do passo anterior k , temos

$$\mathbf{w}^{k+1} = T\mathbf{w}^k + \mathbf{C}, \quad (2.77)$$

onde w^{k+1} w^k são representações das iterações $k+1$ e k , respectivamente, que se aproximam da solução do sistema. $\mathbf{C} = D^{-1}\mathbf{b}$, é um vetor constante e $T = -D^{-1}(L + U)$ é a matriz que define o processo iterativo, que para este caso, é chamado de Método Iterativo de Gauss Jacobi.

A seguir, veremos o método de Gauss Seidel.

2.4.2.2 Método de Gauss Seidel

No método de Gauss Jacobi em (2.4.2.1), vimos que cada equação independe das soluções encontradas anteriormente, ou seja, as soluções somente são atualizadas no final de cada passo, e essa é uma das grandes diferenças para o método iterativo atual. Neste método, os valores já conhecidos de w_i^{k+1} , $i < i+1$, em que $i+1$ é o processo da iteração atual, são usados no cálculo de w_{i+1}^{k+1} , melhor dizendo, a solução é atualizada durante o processo iterativo.

O custo desta operação é nulo e o processo de convergência do método atual é mais rápido do que o processo de convergência do método de Gauss Jacobi. Seguindo uma construção similar de (2.4.2.1), podemos escrever o processo iterativo para Gauss Seidel como,

$$w_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j>i} a_{ij}w_j^k - \sum_{j<i} a_{ij}w_j^{k+1}}{a_{ii}}. \quad (2.78)$$

Ambos os métodos, (2.4.2.1) e (2.4.2.2) assumem uma taxa de convergência linear somente se a matriz T for convergente ou equivalentemente se o raio espectral, $\rho(T) < 1$. Por fim, mostraremos um outro método de resolução de sistema linear, no intuito de conseguir melhor a convergência do processo iterativo.

2.4.2.3 Método SOR - Sobre-Relaxação Sucessiva

Conforme vimos, os processos iterativos de Gauss Jacobi e Gauss Seidel são escritos como processos iterativos afim,

$$\mathbf{w}^{k+1} = T\mathbf{w}^k + \mathbf{C},$$

em que

$$T_{GS} = -(L + D)^{-1}U \quad (2.79)$$

$$T_{GJ} = -D^{-1}(L + U), \quad (2.80)$$

e a convergência é governada pelo raio espectral de T . O método iterativo de SOR é um melhoramento do método de Gauss-Seidel para a solução de sistemas lineares, que tem o intuito de modificar T a ponto de minimizar o raio espectral. A relação de recorrência é dada por,

$$\mathbf{w}^{k+1} = (1 - \omega)\mathbf{w}^k + \omega \underbrace{D^{-1}(-U\mathbf{w}^k - L\mathbf{w}^{k+1} + \mathbf{b})}_{GS}, \quad (2.81)$$

em que ω é uma constante de relaxação que tem o poder de acelerar o processo de convergência para a solução do sistema. Existem três casos para analisar o melhor ω :

1. $0 < \omega < 1$, temos que o método é sub-relaxado;
2. $\omega = 1$, temos exatamente o método de Gauss-Seidel;
3. $1 < \omega < 2$, o método é sobre-relaxado, e, é considerado o mais eficiente.

Acima de $\omega > 2$ as iterações divergem. Existe um valor ideal em relação ao parâmetro de relaxação que, neste caso, está conectado com este tipo de Problema de Poisson e o tamanho da malha, a saber,

$$\omega_{ideal} = \frac{2}{1 + \pi/N}.$$

Adotamos como critério de parada de cada processo iterativo citados acima, aquele em que, dados duas iterações consecutivas, temos que o processo continua efetuando os cálculos até atingir um erro tão pequeno quanto desejamos.

Portanto, os métodos acima são aplicados para encontrar uma solução aproximada para sistemas lineares, e então aplicando qualquer um desses métodos na equação dada por (2.73), encontraremos a solução aproximada para G_{ij} .

2.4.2.4 Método de Euler

Agora, suponha que temos um PVI, tal que a EDO é de primeira ordem no tempo, conforme segue um exemplo abaixo,

$$\begin{cases} \frac{\partial H(t)}{\partial t} = F(t, H) \\ H(x_0) = H_0, \quad t \in [x_0, x_N] \end{cases} \quad (2.82)$$

e queremos encontrar a solução de H .

Existem vários métodos para resolver esse tipo de problema, o que adotaremos é o Método de Euler, no qual tem ordem $\mathcal{O}(h)$, em que h é o tamanho da malha, cuja a vantagem desse método vem do fato de ser um processo explícito e fácil de implementá-lo.

A fim de entender a estrutura desse método, vamos apresentar a sua construção. Discretizando uma quantidade finita de pontos compreendidos no intervalo $[x_0, x_N]$, de tal maneira que sejam equidistantes, e, aplicando uma série de Taylor de até 2ª ordem em termos de $H(t)$ e considerando t_i os pontos da malha para $i = 1, \dots, N$, temos que,

$$H(t_{i+1}) = H(t_i) + hF(t_i, H(t_i)) + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.83)$$

Definimos H_i como sendo a aproximação de $H(t_i)$ construída por este método e então obtemos o Método de Euler,

$$H_{i+1} = H_i + hF(t_i, H_i) + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.84)$$

Quando implementamos um método numérico, já estamos carregando um erro nas aproximações, porém tentamos analisar a ordem de convergência do método, e, ver o quão ruim são os resultados, porém, existem métodos com ordens mais arbitrárias, mas não apresentaremos neste trabalho pois são complicadas para deduzir e exigem muitas avaliações algébricas.

Desta forma, com o método de Euler é possível encontrar uma solução aproximada para a função $H(t)$ da EDO (2.82).

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Nesta seção faremos a formulação do problema da cavidade, com condições de contorno e inicial adequadas. Mostraremos as equações que regem este problema, bem como as variáveis e parâmetros adimensionais.

3.1 Problema Proposto

Neste trabalho vamos resolver o problema da cavidade laminar, em que as paredes podem ser móveis, para um fluido magnético. O escoamento é bidimensional e incompressível e o campo magnético aplicado localizado na parede inferior da cavidade.

No que segue, a barra em cima das variáveis indica valores dimensionais. O conjunto de equações que regem este problema são dados pelo problema de Poisson para a função de corrente, uma equação de evolução da vorticidade e uma equação de evolução para a magnetização, respectivamente:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\psi} = -\bar{\xi} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\xi} + \bar{\xi} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} = \nu \bar{\nabla}^2 \bar{\xi} + \mu_0 \bar{\nabla} \times (\bar{\mathbf{M}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{H}}) + \frac{1}{2} \mu_0 \bar{\nabla} \times [\bar{\nabla} \times (\bar{\mathbf{M}} \times \bar{\mathbf{H}})] \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{M}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{M}} = -\frac{1}{\bar{\tau}} (\bar{\mathbf{M}} - \bar{\mathbf{M}}_0) + \frac{1}{2} \bar{\xi} \times \bar{\mathbf{M}} + \frac{\mu_0}{6 \mu \phi} (\bar{\mathbf{M}} \times \bar{\mathbf{H}}) \times \bar{\mathbf{M}}. \quad (3.3)$$

Os dois últimos termos da equação (3.2) foram obtidos a partir do rotacional dos termos magnéticos que aparecem na equação (2.68). E a equação (3.3) é a forma padrão da equação da magnetização de Shliomis, [35].

Como o escoamento é bidimensional, podemos desprezar o termo de estiramento $\bar{\xi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}$ da equação (3.2). Desta forma, podemos reescrever as equações (3.1) e (3.2) em componentes cartesianas da seguinte forma, respectivamente,

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} = -\bar{\xi}. \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial x} \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial y} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} \right) \\ &- \frac{\partial^2 \bar{M}_x}{\partial x^2} \bar{H}_y - 2 \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial x} - \bar{M}_x \frac{\partial^2 \bar{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{M}_y}{\partial x^2} \bar{H}_x + 2 \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial x} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial x} \\ &+ \bar{M}_y \frac{\partial^2 \bar{H}_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{M}_x}{\partial y^2} \bar{H}_y - 2 \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial y} \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial y} - \bar{M}_x \frac{\partial^2 \bar{H}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{M}_y}{\partial y^2} \bar{H}_x. \\ &+ 2 \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} + \bar{M}_y \frac{\partial^2 \bar{H}_x}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A equação (3.3), pode ser reescrita nas componentes x e y , respectivamente por

$$\frac{\partial \bar{M}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\tau} (\bar{M}_x - \bar{M}_{0x}) - \frac{1}{2} \bar{\xi} \bar{M}_y - \frac{\mu_0}{6 \mu \phi} \bar{M}_y (\bar{M}_x \bar{H}_y - \bar{M}_y \bar{H}_x). \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_y}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} = -\frac{1}{\tau} (\bar{M}_y - \bar{M}_{0y}) + \frac{1}{2} \bar{\xi} \bar{M}_x + \frac{\mu_0}{6 \mu \phi} \bar{M}_x (\bar{M}_x \bar{H}_y - \bar{M}_y \bar{H}_x). \quad (3.7)$$

Para cada uma das configurações da cavidade, conforme pode ser visto na Figura (3.1), teremos as seguintes condições de contorno:

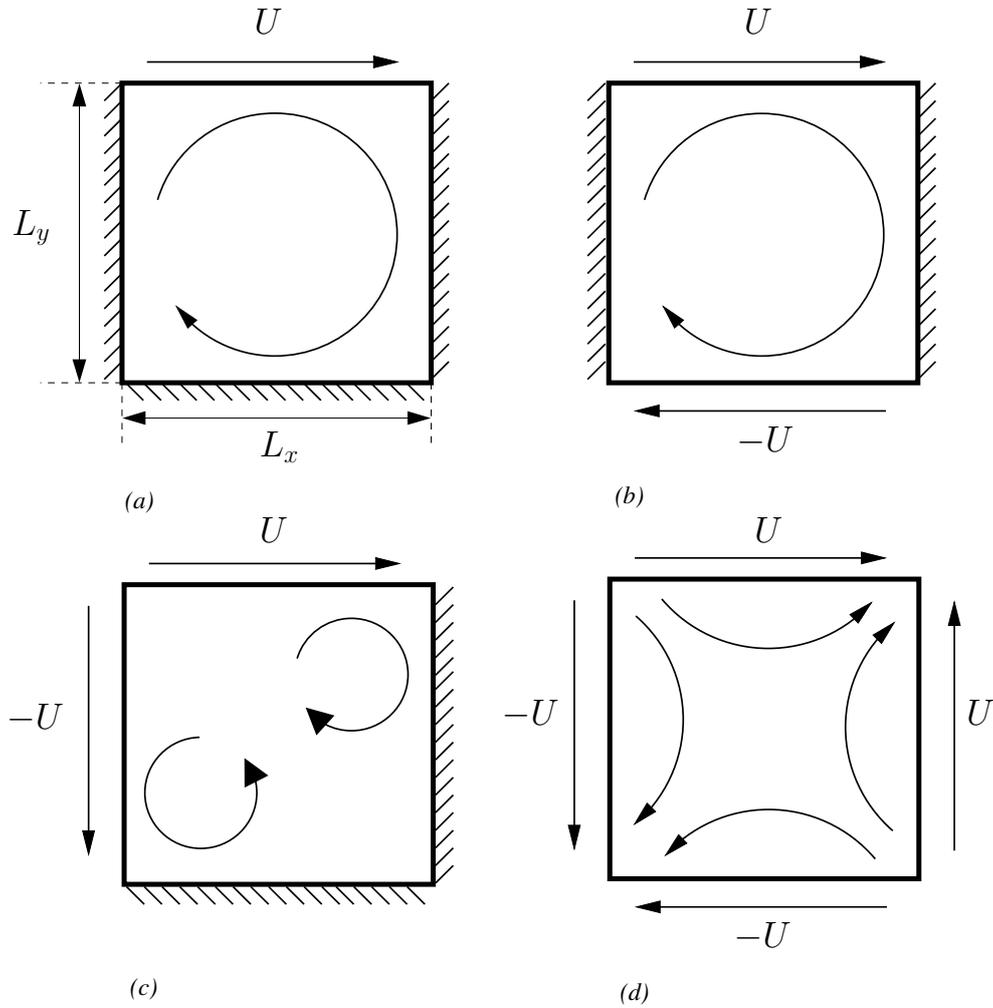


Figura 3.1: Diferentes configurações de cavidade.

1. Condições de Contorno para a equação (3.1)

A condição para resolvermos a equação (3.1) é a condição de impenetrabilidade, que é expressa por $\psi = 0$ em todas as paredes.

2. Condições de Contorno para a equação (3.2):

Como não conhecemos a função $\bar{\xi}$ nas paredes, e precisamos de uma condição de contorno para a vorticidade, buscamos um método em que tentamos estimar esse valor. Mas antes de apresentá-lo, é preciso conhecer às velocidades tangenciais nas paredes, conforme seguem abaixo, em que U corresponde a velocidade máxima da placa.

2.1. Para a placa superior móvel com velocidade positiva (para a direita):

$$\begin{cases} u_x(x, 1) = U \sin^2(\pi x); & 0 < x < 1, \\ u_x(x, 0) = 0; & 0 < x < 1, \\ u_y(1, y) = 0; & 0 < y < 1, \\ u_y(0, y) = 0; & 0 < y < 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

2.2. Para a placa superior móvel com velocidade positiva (para a direita) e a placa inferior móvel com velocidade negativa (para a esquerda):

$$\begin{cases} u_x(x, 1) = U \sin^2(\pi x); & 0 < x < 1, \\ u_x(x, 0) = -U \sin^2(\pi x); & 0 < x < 1, \\ u_y(1, y) = 0; & 0 < y < 1, \\ u_y(0, y) = 0; & 0 < y < 1, \end{cases} \quad (3.9)$$

2.3. Para a placa superior móvel com velocidade positiva (para a direita) e a placa esquerda móvel com velocidade negativa (para baixo):

$$\begin{cases} u_x(x, 1) = U \sin^2(\pi x); & 0 < x < 1, \\ u_x(x, 0) = 0; & 0 < x < 1, \\ u_y(1, y) = 0; & 0 < y < 1, \\ u_y(0, y) = -U \sin^2(\pi y); & 0 < y < 1, \end{cases} \quad (3.10)$$

2.4. Para a placa superior móvel com velocidade positiva (para a direita), a placa inferior móvel com velocidade negativa (para esquerda), a placa esquerda móvel com velocidade negativa (para baixo) e a placa direita móvel com velocidade positiva (para cima):

$$\begin{cases} u_x(x, 1) = U \sin^2(\pi x); & 0 < x < 1, \\ u_x(x, 0) = -U \sin^2(\pi x); & 0 < x < 1, \\ u_y(1, y) = U \sin^2(\pi y); & 0 < y < 1, \\ u_y(0, y) = -U \sin^2(\pi y); & 0 < y < 1, \end{cases} \quad (3.11)$$

Desta forma, agora podemos apresentar o método para calcular a vorticidade nas paredes. Tomemos como referência a parede inferior, as outras seguem analogamente. No que segue, o ponto i , que corresponde a discretização da malha na direção x , está variando de $1, \dots, N$.

Temos que a vorticidade estimada no ponto mais próximo possível da parede inferior é dado por,

$$\xi_{i,5/4} = -u'_{i,5/4}. \quad (3.12)$$

Discretizando a velocidade da equação (3.12) em Diferença Finita Central, temos,

$$u'_{i,5/4} = -\frac{u_{i,3/2} - u_{i,1}}{\Delta y/2}, \quad (3.13)$$

em que $u_{i,1}$ é a conhecida velocidade da parede inferior. Por outro lado, temos que,

$$u_{i,3/2} = -\frac{\psi_{i,2} - \psi_{i,1}}{\Delta y}. \quad (3.14)$$

Desta forma, substituindo (3.14) em (3.13) e por sua vez, substituindo em (3.12), obtemos,

$$\xi_{i,1} \approx \xi_{i,5/4} = \frac{-\frac{\psi_{i,2} - \psi_{i,1}}{\Delta y} + u_{i,1}}{\Delta y/2}. \quad (3.15)$$

Esta aproximação possui um erro $\mathbf{O}(\Delta x)$. A fim de melhorar a ordem desse erro, utilizamos o método de extrapolação quadrático nos pontos 5/4 e no ponto interior 2, e, conseqüentemente extrapolamos para a fronteira, para obter uma condição de 2ª ordem, conforme segue a expressão abaixo,

$$\xi_{i,1} = \frac{4}{3}\xi_{i,5/4} - \frac{1}{3}\xi_{i,2}. \quad (3.16)$$

3. Condições de contorno para a equação (3.3): A magnetização é uma propriedade material do fluido, e portanto não possui condição de contorno. Evoluímos a magnetização localmente em todos os pontos da malha.

4. Condições iniciais do problema: Consideramos o escoamento inicialmente em repouso e o fluido magnetizado em equilíbrio, isto é,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, 0) &= 0, \\ \xi(\mathbf{x}, 0) &= 0, \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{M}_0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde \mathbf{x} é um ponto do domínio de escoamento.

5. Demais propriedades do problema: Consideramos um campo magnético externo $\overline{\mathbf{H}}$, gerado por um fio pelo qual passa uma corrente elétrica, como pode ser visto em [42]. As componentes \overline{H}_x e \overline{H}_y são dadas pelas coordenadas x e y , respectivamente,

$$\overline{H}_x = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{\overline{y} - \overline{b}}{(\overline{x} - \overline{a})^2 + (\overline{y} - \overline{b})^2}, \quad (3.18)$$

$$\overline{H}_y = -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{\overline{x} - \overline{a}}{(\overline{x} - \overline{a})^2 + (\overline{y} - \overline{b})^2}, \quad (3.19)$$

em que $(\overline{a}, \overline{b})$ é a localização da fonte magnética e γ é a intensidade de campo magnético gerado pelo fio. Neste trabalho, a fonte magnética está localizada em $(0.5, -2)$.

A magnitude $\overline{\mathbf{H}}$, é dada por,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{H}} &= \sqrt{\overline{H}_x^2 + \overline{H}_y^2} \\ &= \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\overline{x} - \overline{a})^2 + (\overline{y} - \overline{b})^2}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A Figura (3.2) é um modelo de malha que utilizamos em nossas simulações numéricas. Escolhemos para exemplificar uma malha $N \times N = 41 \times 41$. A fonte magnética está localizada em (a, b) e em cada ponto i, j da malha resolvemos a vorticidade $\xi(i, j)$, a função de corrente $\psi(i, j)$ e as componentes da magnetização $M_x(i, j)$ e $M_y(i, j)$.

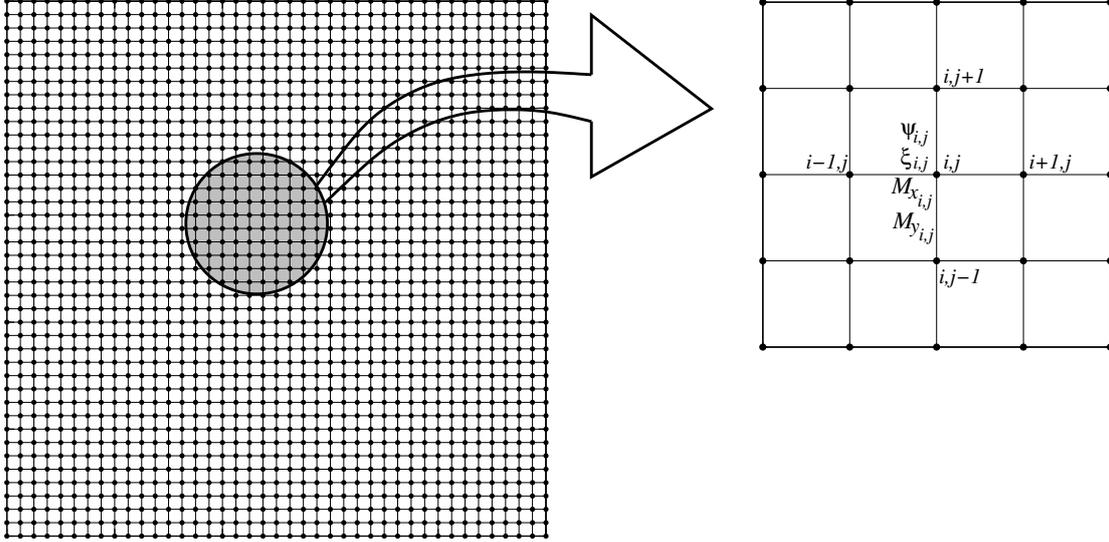


Figura 3.2: Exemplo de uma malha típica utilizada para resolver as equações (3.1)-(3.3). À direita mostramos um ampliação da malha e mostramos onde são calculadas as variáveis desconhecidas do problema.

Nesta primeira abordagem, não resolvemos o campo magnético localmente instantaneamente. Este será um desafio para uma próxima etapa.

3.2 Adimensionalização das Equações

Para adimensionalizar as equações (3.1), (3.2), (3.3), (3.18), (3.19) e (3.20), consideramos as seguintes escalas específicas: L_x uma escala de comprimento em x , L_y uma escala de comprimento em y , \bar{L}_x/U uma escala de tempo, U escala de velocidade, ρU^2 escala característica de pressão e $H_0 = H(\bar{a}, 0)$ escala característica para quantidades magnéticas. Com isso, obtemos as seguintes variáveis adimensionais:

1. variáveis independentes:

$$\nabla = \bar{\nabla} \bar{L}_x, \quad t = \frac{\bar{t}}{\bar{L}_x/U}, \quad x = \frac{\bar{x}}{\bar{L}_x}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}_x}. \quad (3.21)$$

2. variáveis dimensionais Hidrodinâmicas:

$$\mathbf{u} = \frac{\bar{\mathbf{u}}}{U}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\rho U^2}, \quad \xi = \frac{\bar{\xi}}{U/\bar{L}_x}, \quad \psi = \frac{\bar{\psi}}{\bar{L}_x U}. \quad (3.22)$$

3. variáveis adimensionais Magnéticas:

$$H_x = \frac{\bar{H}_x}{\bar{H}_0}, \quad H_y = \frac{\bar{H}_y}{\bar{H}_0}, \quad B = \frac{\bar{B}}{\mu_0 \bar{H}_0}, \quad M = \frac{\bar{M}}{\bar{H}_0}. \quad (3.23)$$

Desta forma, substituindo (3.21), (3.22) e (3.23) nas equações (3.1), (3.2), (3.3), (3.18), (3.19) e em (3.20), obtemos o seguinte sistema de equações adimensionais,

$$\nabla^2 \psi = -\xi \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \xi + C_{pm} \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) + \frac{1}{2} C_{pm} \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})], \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} + \frac{C_{pm} Re}{6\phi} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}. \quad (3.26)$$

Desprezando o termo de estiramento da equação (3.25), podemos reescrever as equações adimensionais (3.24), (3.25) e (3.26) nas componentes cartesianas,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\xi. \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + C_{pm} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{1}{2} C_{pm} \left(-\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} H_y - 2 \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} H_x + 2 \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial x} \right. \\ &+ M_y \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} H_y - 2 \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial H_y}{\partial y} - M_x \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} H_x + 2 \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ &\left. + M_y \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial M_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{1}{\tau} (M_x - M_{0x}) - \frac{1}{2} \xi M_y - \frac{C_{pm} Re}{6\phi} M_y (M_x H_y - M_y H_x). \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial M_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial M_y}{\partial y} = -\frac{1}{\tau} (M_y - M_{0y}) + \frac{1}{2} \xi M_x + \frac{C_{pm} Re}{6\phi} M_x (M_x H_y - M_y H_x). \quad (3.30)$$

O campo aplicado adimensional, é dado por,

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2}; \\ H_y = -\frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2}; \\ \mathbf{H} = \frac{|b|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}; \end{array} \right. \quad (3.31)$$

em que (a, b) é a localização da fonte magnética.

Os parâmetros adimensionais são dados por

$$Re = \frac{\bar{L}_x \bar{\rho} U}{\mu}, \quad \text{número de Reynolds} \quad (3.32)$$

$$C_{pm} = \frac{\mu_0 \bar{H}_0^2}{\bar{\rho} U^2}, \quad \text{coeficiente de pressão magnética} \quad (3.33)$$

$$\tau = \frac{\bar{\tau} U}{\bar{L}_x}, \quad \text{tempo de relaxação magnética,} \quad (3.34)$$

$$\zeta = \frac{\bar{M}_s}{\bar{H}_0}, \quad \text{magnetização de saturação do ferrofluido,} \quad (3.35)$$

$$\alpha = \frac{\mu_0 \bar{m} \bar{H}}{\bar{k} \bar{T}}, \quad \text{intensidade adimensional do campo aplicado.} \quad (3.36)$$

Nos parâmetros adimensionais acima temos que, Re representa a razão entre forças inerciais e forças viscosas, C_{pm} representa a razão entre pressão magnética e pressão hidrodinâmica, τ é o tempo adimensional dado pela razão entre o tempo característico do escoamento e o tempo de relaxação magnética. O tempo de relaxação magnética está relacionado com a relaxação orientacional dos momentos de dipolo das partículas magnéticas. Esta relaxação pode ter origem em efeitos distintos, como no movimento Browniano, que é a rotação dos momentos de dipolo fixados em cada partícula magnética do fluido, ou em flutuações quânticas (Néel), que é rotação dos momentos de dipolos internos de cada partícula magnética do fluido em que a partícula como um todo não rotaciona. Desta forma, podemos estimar o tempo de relaxação magnética como

$$\tau = \frac{1}{\frac{1}{\tau_B} + \frac{1}{\tau_N}},$$

em que τ_B é o tempo de relaxação Browniano e τ_N é o tempo de relaxação de Néel. A constante de tempo τ é dominada pelo menor dos tempos entre τ_B e τ_N . Para maiores detalhes veja [30].

O parâmetro adimensional ζ é o parâmetro adimensional da magnetização de saturação do ferrofluido em relação a uma escala de campo magnético, e por fim, α é o parâmetro adimensional do campo aplicado, ou seja, ele representa o argumento da função de Langevin.

Como não iremos resolver localmente o campo magnético, apenas vamos satisfazer fracamente a hipótese do limite magnetostático das equações de Maxwell. Vamos definir, a seguir, a hipótese de fluido fracamente magnetizável. De fato, escolhemos a magnetização de saturação adimensional $\zeta \ll 1$, e com isso temos que a magnetização \mathbf{M} é muito pequena. Portanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{H}) \approx \nabla \cdot \mathbf{H} \approx 0 \quad (3.37)$$

Desta forma, satisfazemos aproximadamente a divergência nula do vetor campo induzido \mathbf{B} . Esta aproximação será tanto melhor quanto menor for ζ e mais refinada for a malha.

3.3 Simulação numérica e validação do código

Utilizamos diferenças finitas centrais para discretizar as derivadas espaciais nos pontos interiores da cavidade. Para as derivadas espaciais das paredes superior e direita, utilizamos diferenças finitas atrasadas de 2^a ordem. Para as derivadas espaciais das paredes inferior e esquerda, utilizamos diferenças finitas avançadas de 2^a ordem. Para as derivadas temporais, utilizamos o método de Euler. Para a vorticidade nas paredes usamos o método da extrapolação. Desta forma, obtemos um erro $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$ no sistema. Para evitar as instabilidade numéricas do problema, impomos condições para o passo de tempo dos termos difusivo e advectivo, respectivamente.

$$\Delta t < \frac{1}{4} Re \Delta x^2, \quad (3.38)$$

$$\Delta t < \Delta x \quad (\text{Condição CFL}). \quad (3.39)$$

Além disso, para visualizarmos os efeitos magnéticos no escoamento, precisamos impor uma condição no passo tempo associada ao tempo de relaxação magnética, dada por

$$\Delta t < \tau,$$

em que τ é o tempo de relaxação magnética.

Para efetuarmos a validação do nosso código, tomamos como referência o Problema clássico da cavidade, em que apenas a parede superior é móvel com velocidade $u_x(x, 1) = 1$. No gráfico da Figura (3.3)(a) e (b), mostramos os perfis velocidade de u_x e u_y no centro da cavidade, respectivamente. Observamos que a nossa solução numérica para $Re = 1000$ está bem comportada, comparada com as soluções numéricas de [10, 12, 20].

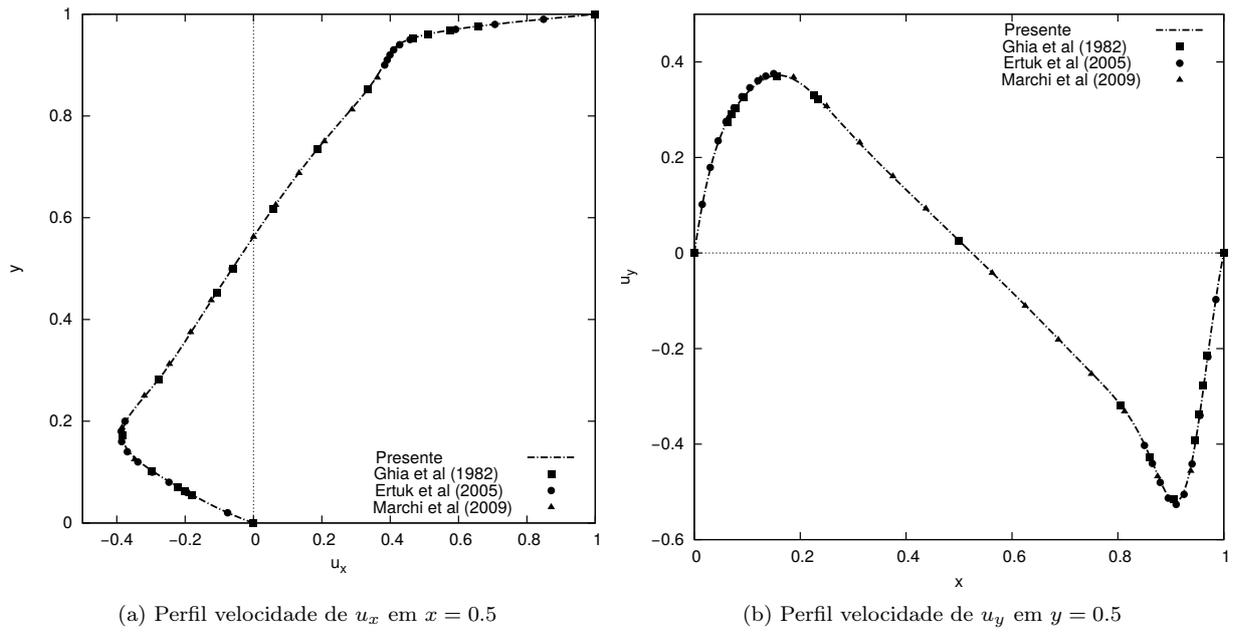
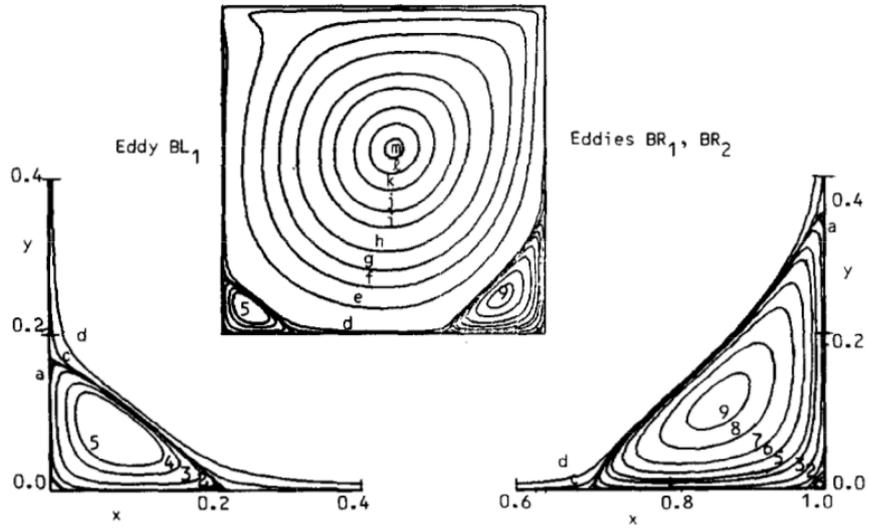
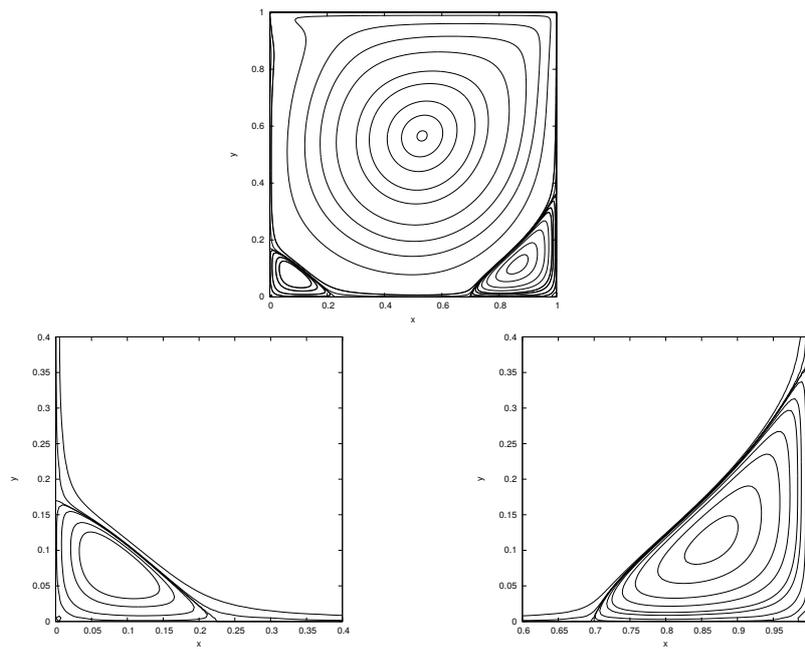


Figura 3.3: Perfil velocidade da cavidade para $Re = 1000$.

Na Figura (3.4) temos uma verificação de que as linhas de corrente encontradas pelo nosso problema tem uma concordância qualitativa com às linhas de corrente apresentadas por [12]. Além disso, encontramos os mesmos vórtices que [12] para $Re = 1000$ e número de pontos da malha $N = 201$, que são um vórtice central primário, um secundário, no canto inferior direito e um outro vórtice adicional pequeno no canto inferior esquerdo.



(a) [12]



(b) Presente Trabalho

Figura 3.4: Linhas de Corrente para $Re = 1000$ e $N = 201$. (a) linhas de correntes de Ghia et al (1982), (b) linhas de corrente do presente trabalho.

Na Figura (3.5), foram plotados a localização dos vórtices vistos na Figura (3.4), para $Re = 100$ com o número de pontos da malha $N = 129$, para $Re = 400$ com $N = 257$ e para $Re = 1000$ com $N = 129$, de acordo com [12]. Podemos ver o efeito do número de Reynolds na localização do centro dos vórtices nas regiões central, parede esquerda e parede direita. Na Figura (3.5)(a) temos que a localização do vórtice central em que este se move no sentido do centro geométrico da cavidade, à medida em que Re aumenta. Na Figura (3.5)(b) obtemos a localização do vórtice perto da parede direita, e na Figura (3.5)(c) temos a localização do vórtice agora mais próximo da parede esquerda. Observamos que ambos, inicialmente, encontram-se nos cantos inferiores direito e esquerdo da cavidade, respectivamente, e tendem a ser movidos, muito suavemente, para o centro da cavidade, conforme Re aumenta. Portanto, há uma concordância quantitativa dos nossos resultados com [12].

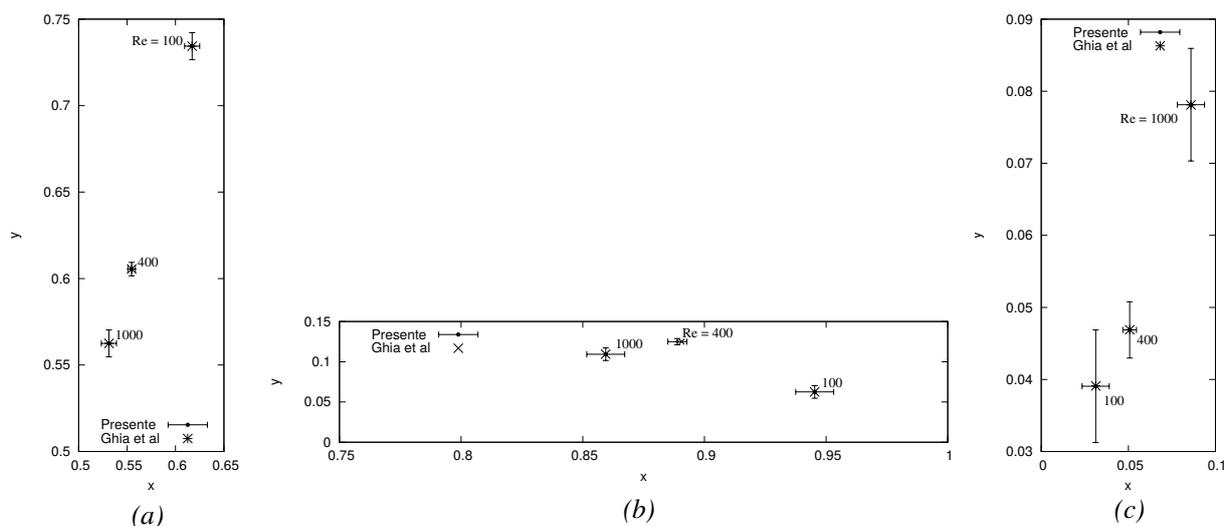


Figura 3.5: Efeito do número de Reynolds na localização dos vórtices nas regiões, (a) central, (b) direita e (c) esquerda, para $Re = 100, 400$ e 1000 .

A Figura (3.6) representa um resultado similar ao da Figura (3.5)(a), mas de forma visual, em que analisamos o valor que a função de corrente assume para (a) $Re = 100$, (b) $Re = 400$ e (c) $Re = 1000$. Observamos que regiões centrais em que ψ varia de 0.010 a 0.08 , o tamanho do vórtice aumenta com Re .

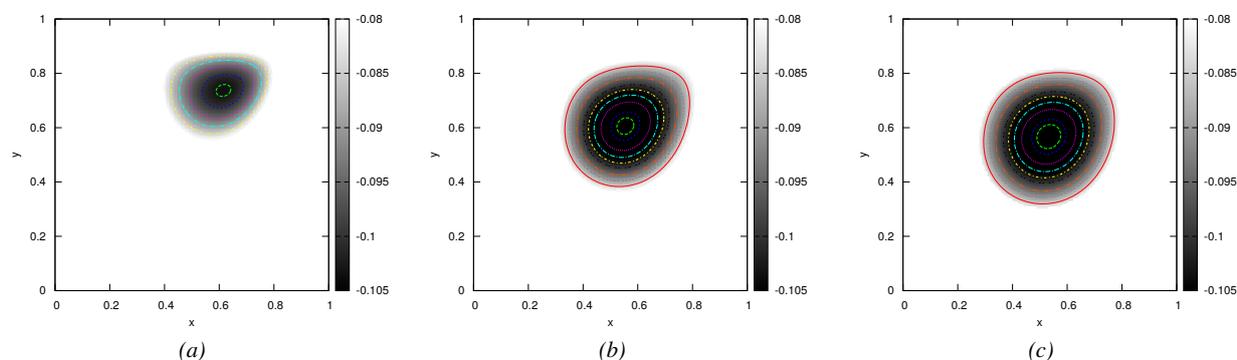


Figura 3.6: Mudança na localização do vórtice central para (a) $Re = 100$, (b) $Re = 400$ e (c) $Re = 1000$, respectivamente.

Portanto, nossos resultados estão validados, com o Problema Clássico da cavidade. Porém, no que segue não utilizamos este tipo de configuração, pelo fato de apresentar duas singularidade nas velocidades da parede superior, uma na quina das paredes superior e esquerda e outra na quina das paredes superior e direita. Para regularizar este problema, utilizamos a estratégia de [15], que é impor na placa móvel superior uma velocidade $u_x(x, 1) = \sin^2(\pi x)$, tornando todas as paredes contínuas.

A Figura (3.7), apresenta uma verificação dos perfis velocidades de u_x e de u_y , segundo [15]. Notamos pouca diferença com a mudança nas resoluções da malha.

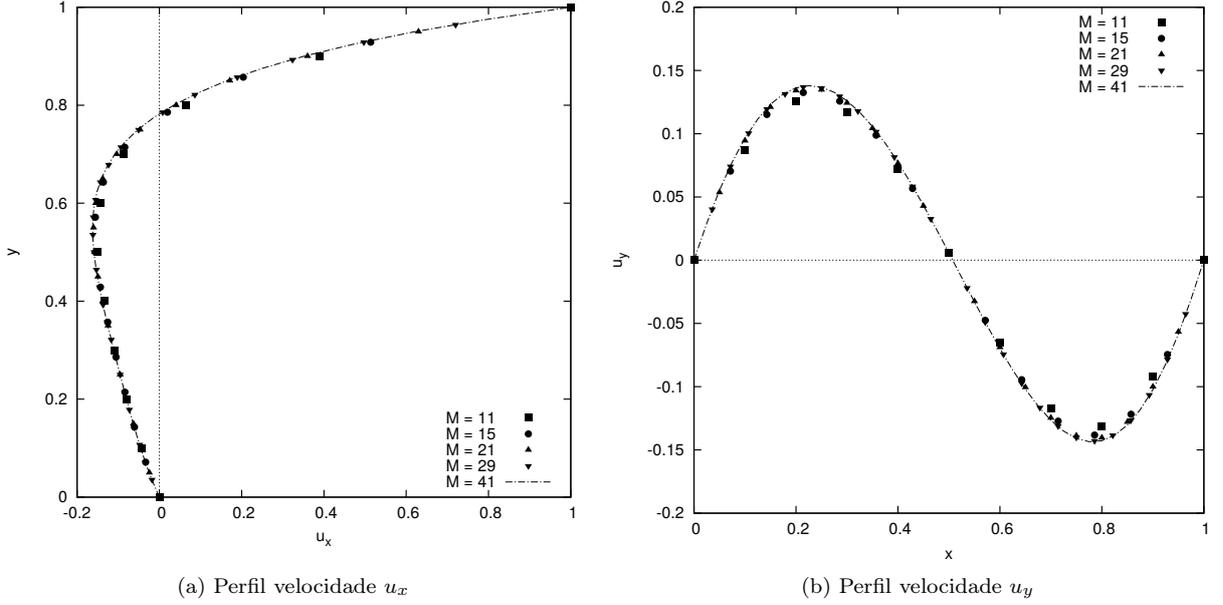


Figura 3.7: Perfis velocidade em $x = 0.5$, $Re = 10$ e $N = 11, 15, 21, 29, 41$.

Para calcular a força na placa superior, temos a seguinte expressão

$$F = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y} dA = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=1} dx \approx \sum_{i=0}^N \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{j=N} \Delta x. \quad (3.40)$$

Na última expressão da equação (3.40), temos uma derivada segunda, que pode ser discretizada por uma diferença finita atrasada de ordem $\mathcal{O}(\Delta y^2)$, isto é,

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{j=N} = \frac{2\psi_{i,N} - 5\psi_{i,N-1} + 4\psi_{i,N-2} - \psi_{i,N-3}}{\Delta y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2). \quad (3.41)$$

O resultado numérico para a força (3.40) é plotado na Figura (3.8) em função de Δx^2 , onde podemos ver um comportamento linear à medida em que Δx^2 tende para 0. Porém, para Δx^2 pequeno, o método perde seu comportamento $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. A força final no limite Δx^2 tendendo para 0 encontrada por [15], foi de $F = 3.905 \pm 0.002$.

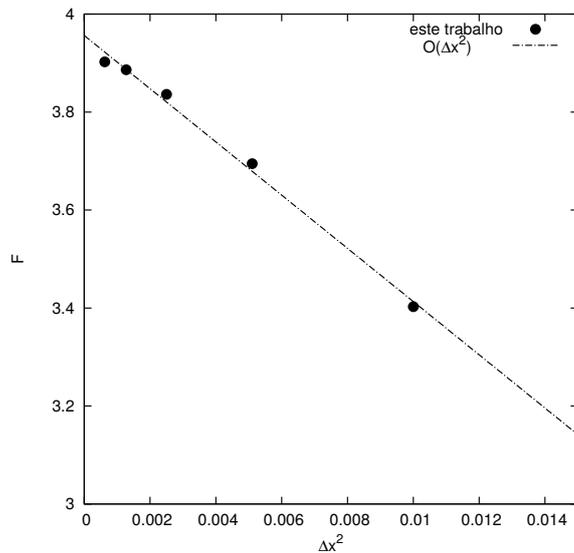


Figura 3.8: Regime permanente da força sobre a placa superior para $Re = 10$ e $N = 11, 15, 21, 29, 41, 57$.

Ainda no caso puramente hidrodinâmico, para verificar a convergência de malha e o teste de ordem do código, utilizamos em nossas simulações numéricas $Re = 500$ e malhas mais refinadas do que vimos anteriormente. O gráfico (3.9) mostra a convergência de malha para diferentes valores de malha N em relação ao valor conhecido da vorticidade no centro da cavidade quando $t = 30$, $\xi(0.5, 0.5, 30)$.

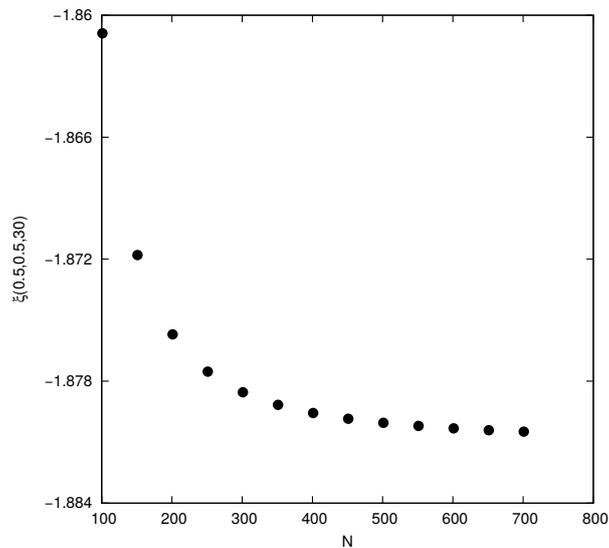


Figura 3.9: Convergência da malha para $Re = 500$ e diferentes valores de malha N .

O gráfico (3.10) mostra um comportamento linear entre a vorticidade $\xi(0.5, 0.5, 30)$ e Δx^2 , à medida em que Δx^2 tende para 0. Desta forma checamos que os erros espaciais do método numérico são $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. O gráfico (3.11) mostra a relação linear entre Δt e a vorticidade $\xi(0.5, 0.5, 100)$, implicando que os erros temporais são da ordem de $\mathcal{O}(\Delta t)$. Note que este código foi desenvolvido de forma a obtermos erros $\mathcal{O}(\Delta t)$ no tempo, e erros $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ no espaço. Entretanto determinamos o passo de tempo Δt de forma a conseguirmos compatibilizar os valores numéricos dos erros temporais de ordem $\mathcal{O}(\Delta t)$ com os erros

espaciais de ordem $\mathcal{O}(\Delta x^2)$.

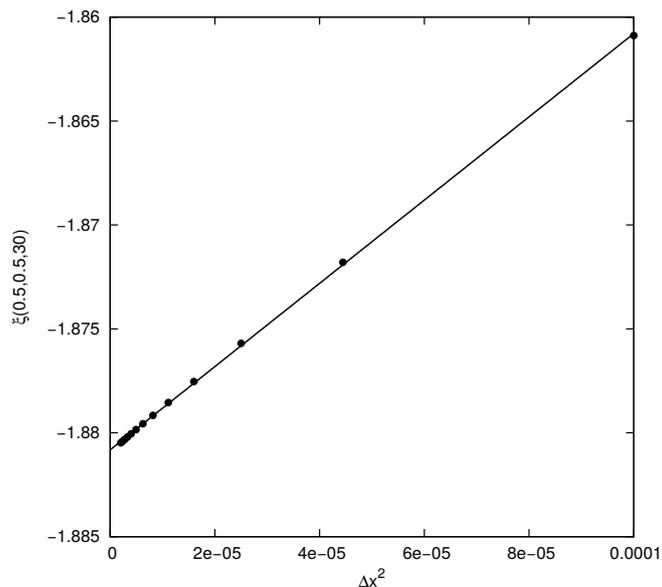


Figura 3.10: Teste para $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ em relação a vorticidade $\xi(0.5, 0.5, 30)$ para $Re = 500$.

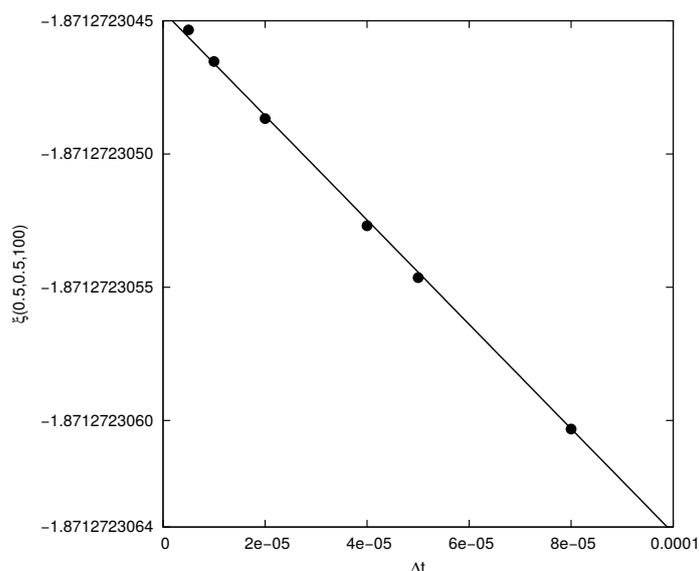


Figura 3.11: Teste para $\mathcal{O}(\Delta t)$ em relação a vorticidade $\xi(0.5, 0.5, 100)$ para $Re = 500$.

Para o caso de fluidos magnéticos, verificamos a convergência de malha e o teste de ordem do código para $Re = 500$ e $C_{pm} = 1000$. O gráfico (3.12) mostra a convergência de malha para diferentes valores de malha N em relação ao valor conhecido da componente y da magnetização calculada no centro da cavidade quando $t = 30$, $M_y(0.5, 0.5, 30)$.

O gráfico (3.13) mostra a relação linear entre Δt e a componente y da magnetização no centro da cavidade, $M_y(0.5, 0.5, 30)$. Podemos ver que os erros temporais são da ordem de $\mathcal{O}(\Delta t)$. O gráfico (3.14)

mostra o decaimento linear entre Δx^2 e $M_y(0.5, 0.5, 1)$, indicando que os erros espaciais do método numérico para o caso magnético respeita uma ordem $\mathcal{O}(\Delta x^2)$.

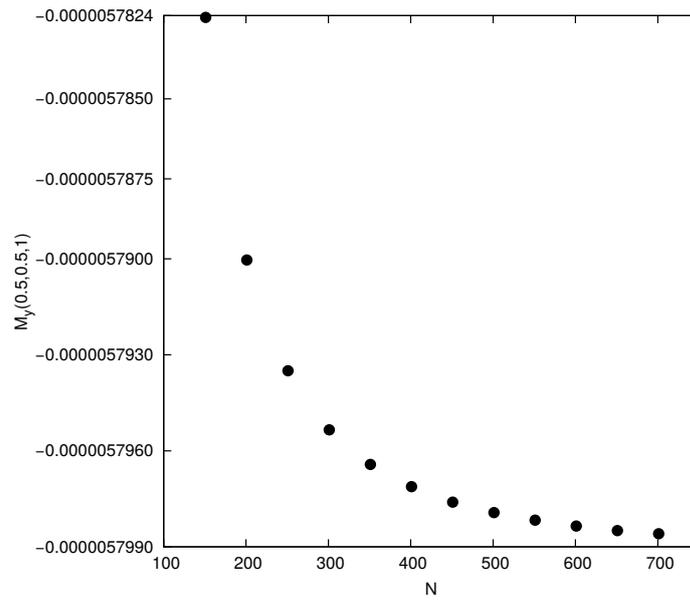


Figura 3.12: Convergência da malha para $Re = 500$, $C_{pm} = 1000$ e diferentes valores de malha N

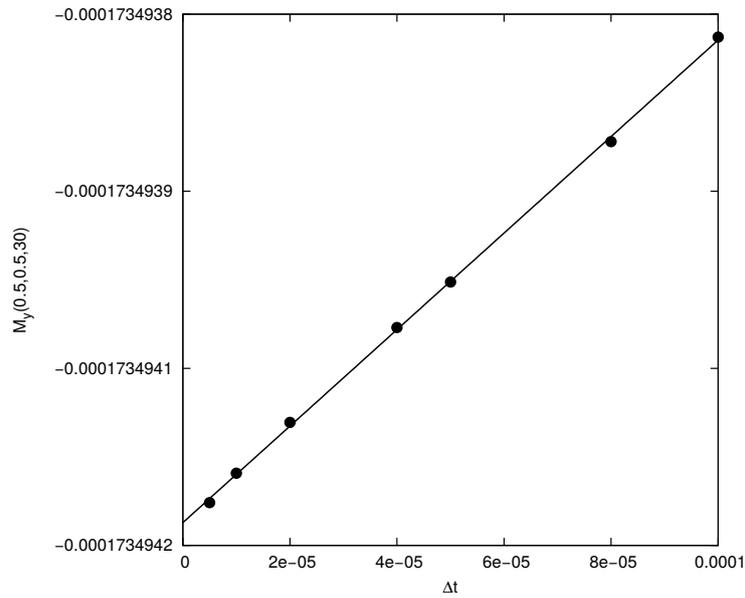


Figura 3.13: Teste para $\mathcal{O}(\Delta t)$ em relação a magnetização $M_y(0.5, 0.5, 30)$ para $Re = 500$ e $C_{pm} = 1000$.

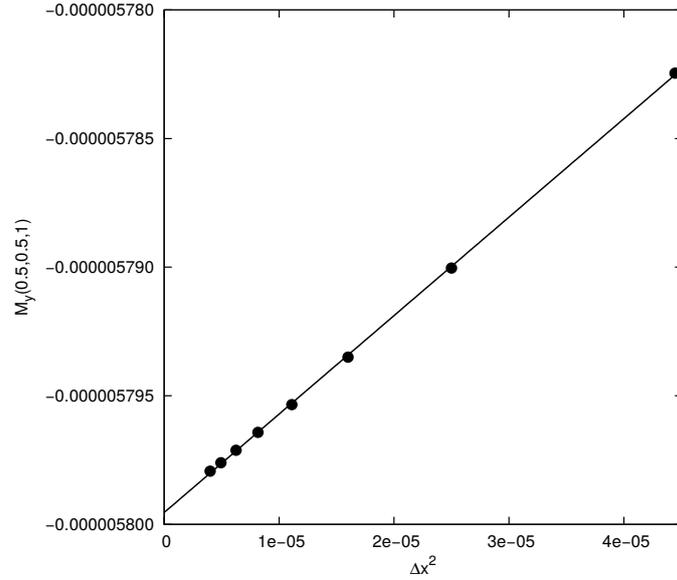


Figura 3.14: Teste para $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ em relação a magnetização $M_y(0.5, 0.5, 1)$ para $Re = 500$ e $C_{pm} = 1000$.

3.4 Parâmetros fixos de simulação

Salvo menção em contrário, a Tabela (3.1), apresenta os valores para os parâmetros fixos usados neste trabalho, em que a Figura (3.1)(a) são os parâmetros da Hidrodinâmica e a Figura (3.1)(b) os parâmetros para o magnetismo.

M	301
N	301
L_x	1,0
L_y	1,0
Δx	$3,33 \cdot 10^{-3}$
Δy	$3,33 \cdot 10^{-3}$
Δt	10^{-4}

(a) puramente hidrodinâmica

M	151
N	151
L_x	1,0
L_y	1,0
Δx	$6,66 \cdot 10^{-3}$
Δy	$6,66 \cdot 10^{-3}$
Δt	$5 \cdot 10^{-5}$
Re	500
α	1,0
ζ	10^{-2}
τ	0,5
ϕ	0,03
a	0,5
b	-2,0

(b) Hidrodinâmica com magnetismo

Tabela 3.1: Tabela de Parâmetros fixos.

A representação do campo magnético também é fixa para todos os casos, em que este se localiza perto da parede inferior, no ponto $H(0.5, -2)$. A Figura (3.15), mostra o sentido que o campo está orientado e além disso obtemos o seu valor em módulo em todo o escoamento. Notamos que perto da fonte magnética, o valor do campo é alto, porém decrescente a medida que afastamos do campo.

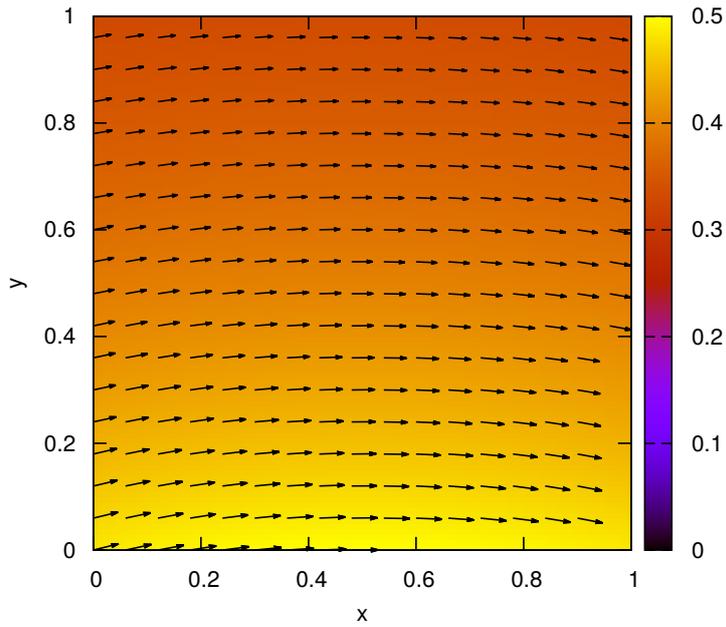


Figura 3.15: Campo magnético localizado em $H(0.5, -2)$.

A Figura (3.16) representa a magnetização de equilíbrio em todo o escoamento e observamos que os maiores valores estão localizados perto da fonte magnética. Note que a magnetização de equilíbrio é muito menor do que a magnetização de saturação ($\zeta = 10^{-2}$), pelo fato de escolhermos α (argumento da função de Langevin) pequeno. Os valores da magnetização de equilíbrio são diminuídos à medida que afastamos do campo.

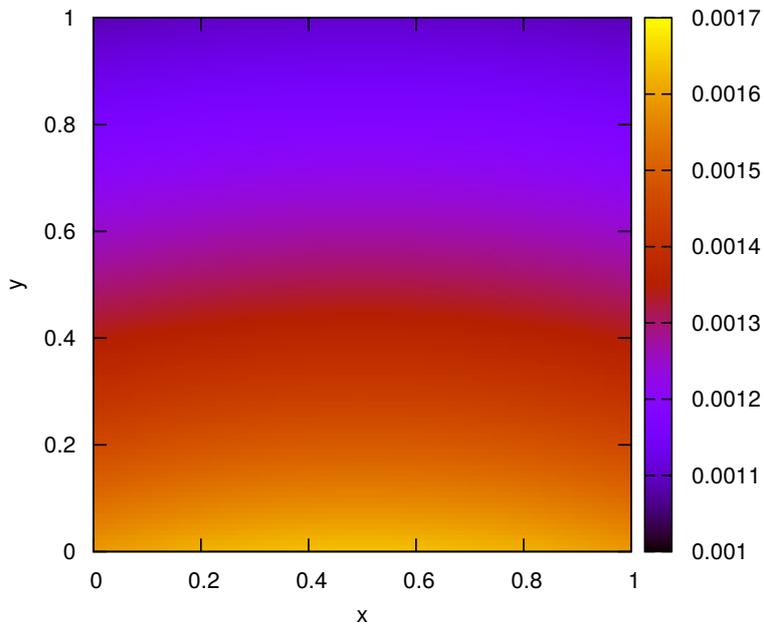


Figura 3.16: Módulo da Magnetização de equilíbrio.

CAPÍTULO 4

ESCOAMENTOS DE FLUIDOS NEWTONIANOS

Nesta seção, utilizaremos o Problema Modelo de [15] e apresentaremos os quatro tipos distintos de configuração de cavidade, conforme vimos na Figura (3.1), para um escoamento hidrodinâmico.

4.1 Cavidade com parede superior móvel

Para este caso específico, utilizamos uma malha $N \times N = 101 \times 101$. Na Figura (4.1), vemos as linhas de corrente para $Re = 10, 100, 300$ e 1000 . Podemos observar, até $Re = 10$, uma geometria bem simétrica do escoamento em relação a $x = 0.5$, e também uma grande região principal de recirculação, cujo vórtice principal está localizado perto da parede superior, e duas regiões secundárias nos cantos inferiores da cavidade. Quando $Re = 100$, já vemos uma pequena assimetria do escoamento, o centro do vórtice primário é transladado para a direita, pois o aumento de Re pode ser entendido como o aumento da velocidade na placa superior, fazendo com que o escoamento seja mais empurrado para a direita. Os vórtices secundários mantêm praticamente inalterados seus tamanhos.

Para $Re = 300$, fica mais evidente a translação do vórtice principal. Obtemos também o crescimento do vórtice secundário da parede direita, tornando-se uma região de recirculação considerável. Por fim para $Re = 1000$, temos um aumento nos vórtices inferiores da cavidade e uma mudança no centro do vórtice principal que se deslocou suavemente no sentido para o centro da cavidade. Devido a resolução da malha não é possível visualizar os vórtices dos cantos superiores direito e esquerdo.

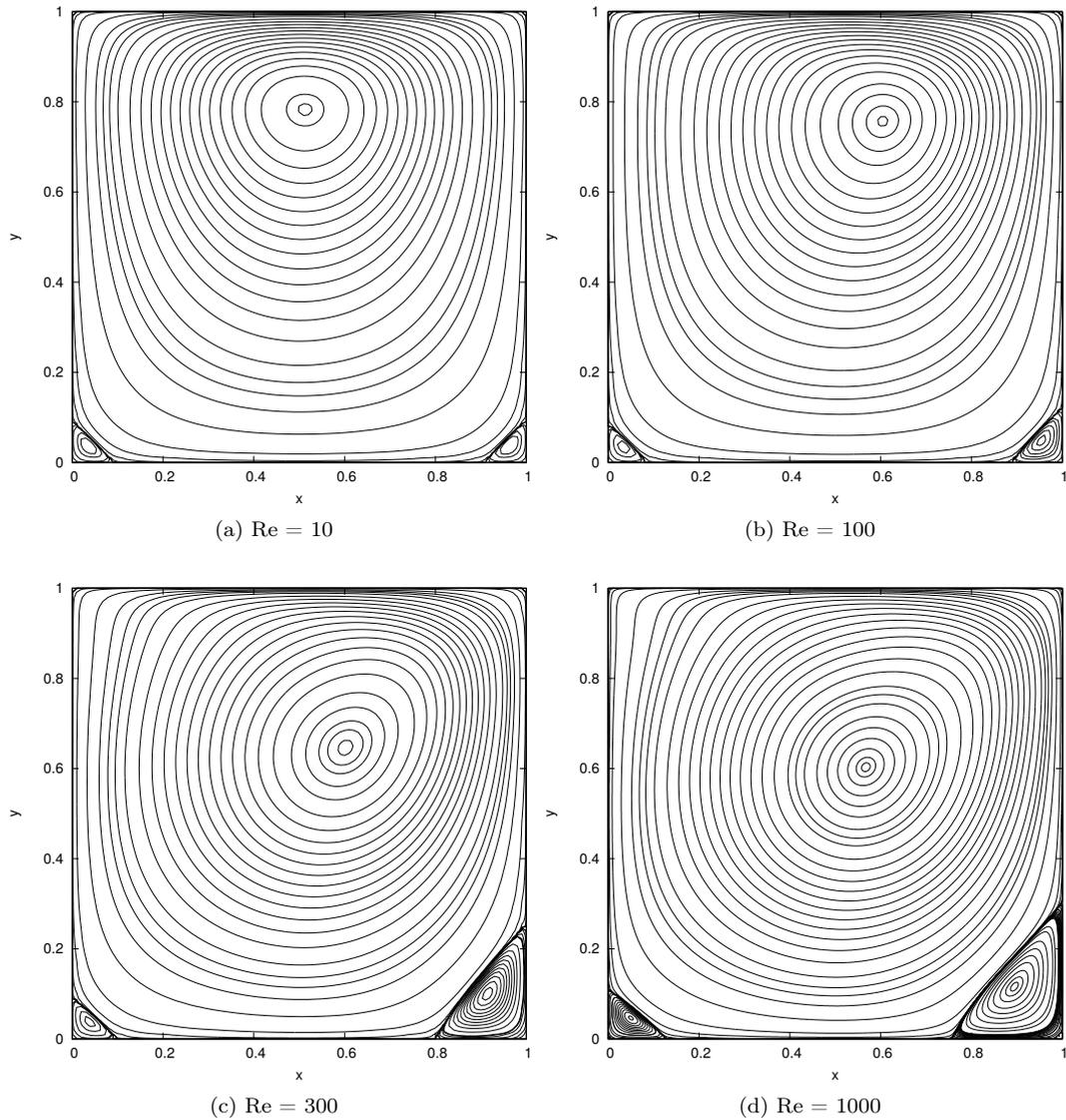


Figura 4.1: Linhas de Corrente para diferentes Re .

Na Figura (4.2), temos o perfil de velocidade de u_x ao longo de uma reta vertical que passa pelo centro da cavidade e o perfil de velocidade de u_y ao longo de uma reta horizontal que também passa pelo centro da cavidade. Observamos, na Figura (4.2)(a), que para valores de Re pequeno temos baixos gradientes de velocidade próximo a parede superior e uma alta difusão de vorticidade. À medida que afastamos dessa região observamos uma diminuição suave das velocidades.

Quando aumentamos Re , os gradientes de velocidade tornam-se maiores, próximo à parede móvel, e a vorticidade é confinada em uma região de camada limite, que tem sua espessura diminuída com o aumento de Re . Porém, notamos uma mudança brusca nos gradientes de velocidade em torno da região central do escoamento, e conforme aproximamos da parede inferior as velocidades aumentam quando Re também aumenta. Observamos que para $Re = 1000$, obtemos um perfil quase linear no núcleo da cavidade, o que é um indício de uma região do escoamento que se movimenta como um corpo rígido. Para o perfil de

velocidade de u_y , reparamos uma espessura de camada limite mais fina conforme Re aumenta, na região próximo as paredes, e as velocidades tornam-se maiores conforme Re aumenta.

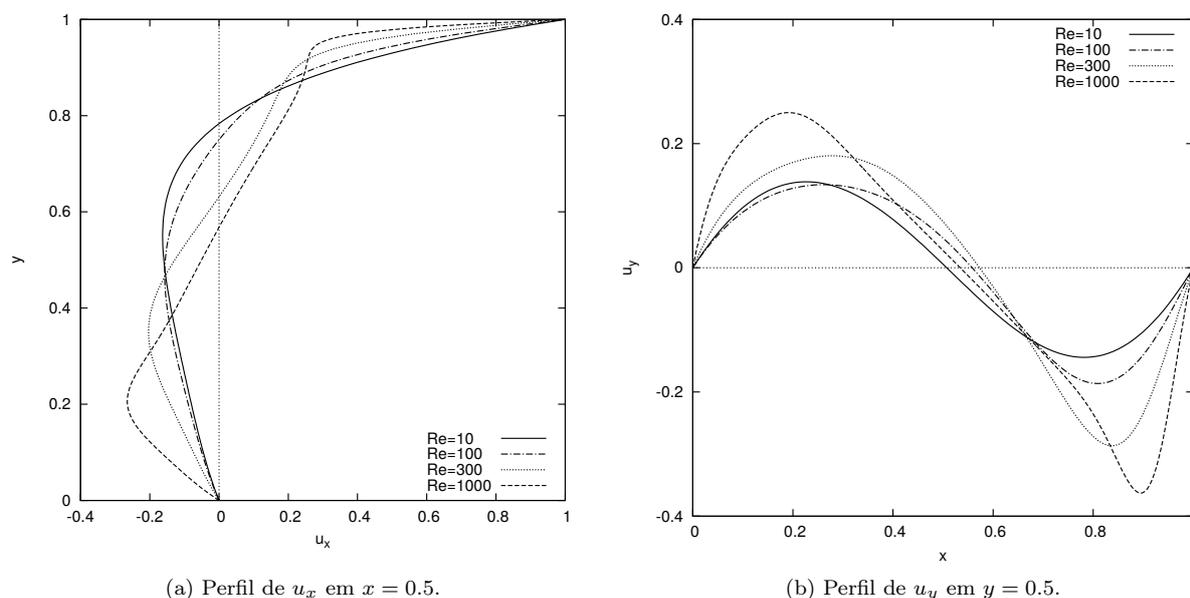


Figura 4.2: Perfis de Velocidade de u_x e u_y no centro da cavidade para $Re = 10, 100, 300$ e 1000 .

A Figura (4.3) mostra a evolução da vorticidade para o regime permanente no centro da cavidade para $Re = 300$ e $Re = 1000$. Notamos que para $Re = 300$, a vorticidade inicia seu regime permanente aproximadamente em $t = 28$, enquanto que para $Re = 1000$, leva mais tempo para atingir o regime permanente, aproximadamente $t = 50$. Em ambos os gráficos da Figura (4.3), notamos que a vorticidade demanda um tempo para atingir o centro da cavidade e se estabilizar no regime estacionário. Os picos observados em $Re = 1000$ é uma consequência do início instantâneo do movimento da cavidade.

Podemos considerar, em ambos os casos, que a vorticidade assume valores altos próximo a parede superior e tem um valor negativo, pois a placa superior está movendo com uma velocidade maior em relação ao fluido abaixo dela, tendo assim um sentido horário de rotação, porém nas outras paredes, a vorticidade torna-se positiva, pois o fluido está movendo mais rápido do que as paredes estacionárias, havendo uma inversão no sentido do seu movimento.

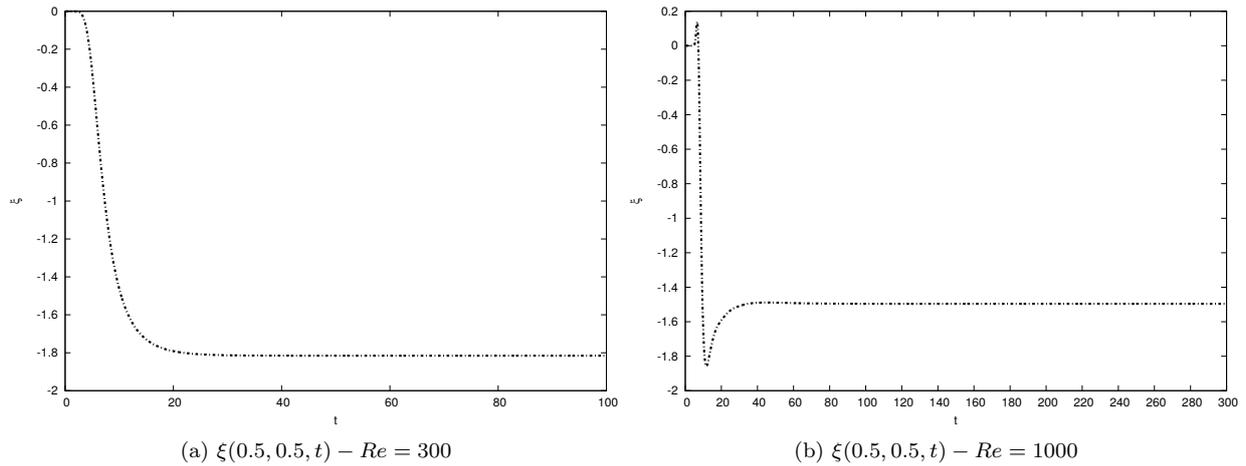


Figura 4.3: Evolução para o regime permanente da vorticidade no centro da cavidade, com $Re = 300$ e $Re = 1000$.

A Figura (4.4) é a evolução para o regime permanente da vorticidade para diferentes valores de Re . Observamos que quanto maior Re , mais tempo a vorticidade leva para chegar ao regime permanente. Isto quer dizer que Re é um fator dominante para a estabilização do escoamento.

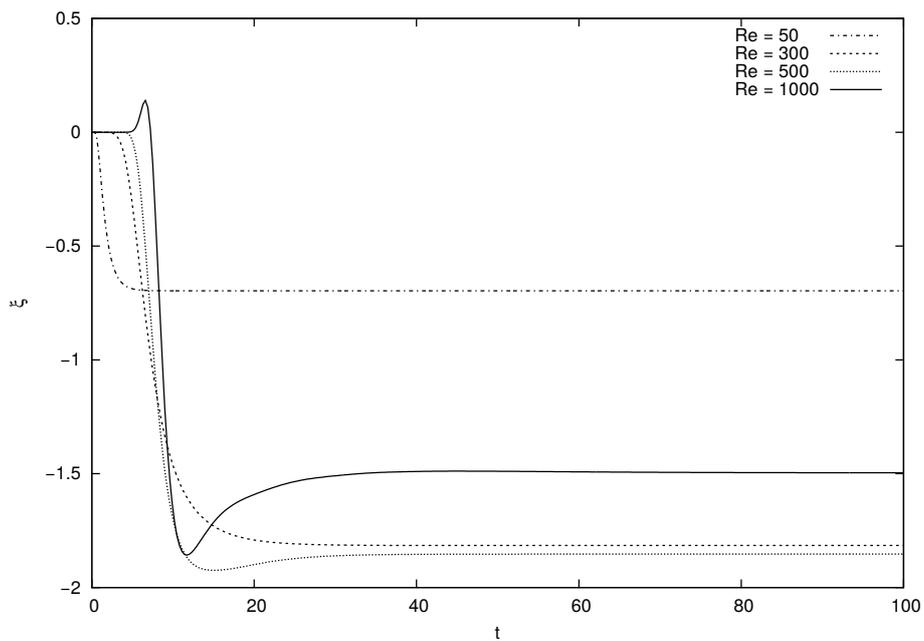


Figura 4.4: Evolução da vorticidade para o regime permanente com Re variando

A Figura (4.5) fornece a força de resistência da placa superior em função de Re , calculada de acordo com a expressão dada por (3.41). Notamos um aumento da força conforme Re cresce, devido o aumento das tensões cisalhantes na parede superior.

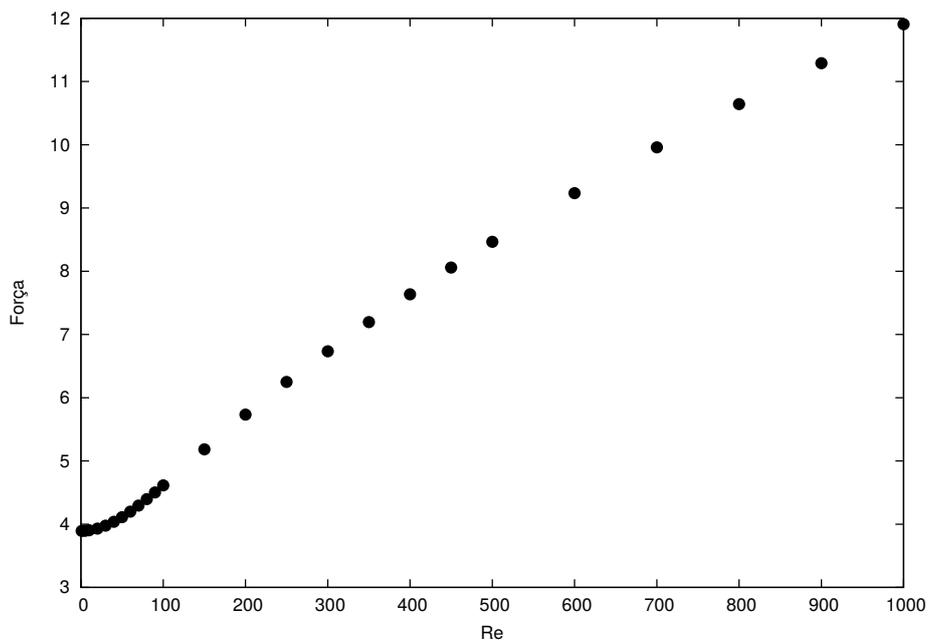


Figura 4.5: Evolução da Força para diferentes valores de Re .

A Figura (4.6) mostra a influência do número de Reynolds na localização dos vórtices principais. São apresentados, na Figura (4.6)(a), o vórtice central principal, na Figura (4.6)(b), o segundo vórtice principal, que é localizado no canto inferior direito e na Figura (4.6)(c), o terceiro vórtice principal do escoamento, que se localiza na parede inferior esquerda.

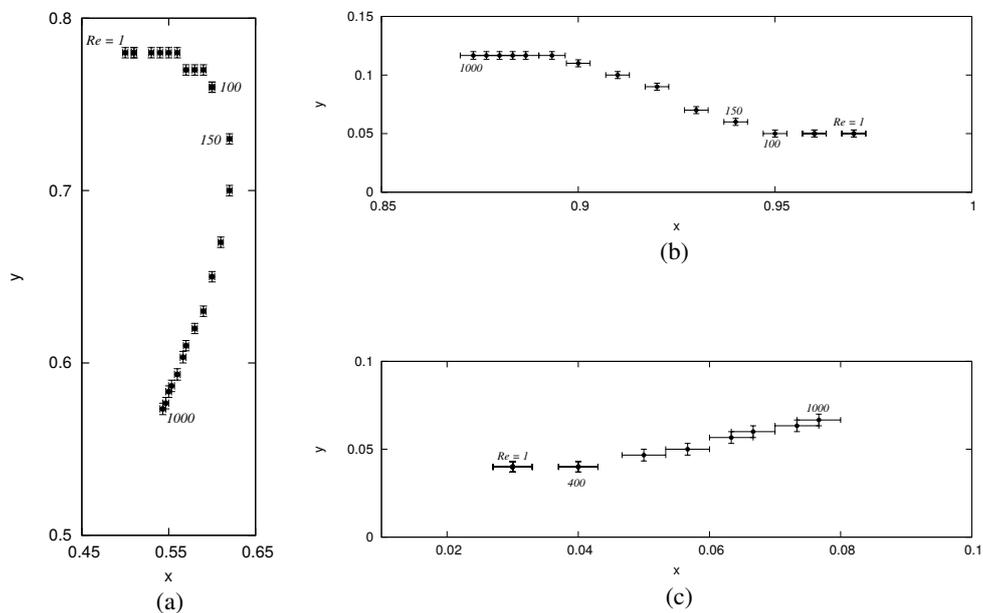


Figura 4.6: Efeito do número de Reynolds na localização dos (a) vórtice principal, (b) vórtice secundário e (c) vórtice terciário. As barras de erro correspondem ao tamanho da malha.

Analisamos, primeiramente, o vórtice central. De $Re = 1$ à $Re = 100$, temos que o centro do vórtice primário desloca-se no sentido da placa deslizante para o canto da parede direita. A partir de $Re = 150$, observa-se que o centro do vórtice translada-se para a região central da cavidade, gerando um grande núcleo na parte central da cavidade. Já no caso do vórtice secundário, notamos que de $Re = 1$ até $Re = 100$, não há mudanças significativas quanto à sua localização. A partir de $Re = 150$ que podemos ver lentamente o vórtice secundário sendo transladado para o centro da cavidade. O vórtice terciário, não tem deslocamento significativo para valores baixos de Re . A partir de $Re = 400$ que vemos lentamente a translação deste no sentido do centro da cavidade.

Com o intuito de gerar escoamentos com mais distribuições de velocidades e de vorticidades, apresentaremos a seguir alguns resultados básicos dos diferentes tipos de configurações de cavidade, pois como serão utilizados futuramente para entender problemas em ferrodinâmica, queremos identificá-los desde já.

4.2 Cavidade com paredes superior e inferior móveis

Para esta configuração utilizamos uma malha $N = 101$. A Figura (4.7) mostra as linhas de corrente para $Re = 1, 50, 100$ e 500 . Podemos ver uma mudança significativa na configuração do escoamento comparado com o caso de apenas uma parede se movendo. Para $Re = 1$ embora temos um escoamento simétrico em relação ao ponto $x = 0.5$, há duas regiões centrais de recirculação, uma localizada próximo a parede cisalhante superior e outra localizada próximo a parede cisalhante inferior. Conforme Re aumenta, temos que os vórtices se movem no sentido das placas cisalhantes e para o centro da cavidade.

Em aproximadamente $Re = 100$, temos que os vórtices principais se colapsam em um único vórtice central. Para $Re > 100$ temos um escoamento simétrico com apenas um vórtice central. Na Figura (4.7)(d), podemos ver uma nova configuração, um escoamento simétrico com um vórtice central grande e a formação de dois vórtices secundários, sendo um na região superior da parede esquerda e outro na região inferior da parede direita. Na Figura (4.7)(e), para $Re = 1000$, nota-se que as velocidades na região central circulam no sentido horário e as velocidades nos vórtices secundários circulam no sentido anti-horário.

Na Figura (4.8) temos uma comparação das forças na placa superior, com a configuração atual com duas paredes móveis e a configuração anterior com apenas a parede superior móvel. Notamos que coincidentemente para uma faixa de Re entre 200 e 800 as forças são aproximadamente iguais. Para o caso atual, não é necessário analisar a força que o escoamento exerce na placa inferior, pois é simétrica a força da placa superior.

Na Figura (4.9), rastreamos o centro dos vórtices principais para diferentes valores de Re . Notamos que para $Re = 1$ até aproximadamente 70 os centros dos vórtices são deslocados para o centro da cavidade. Em torno de $Re = 75$ até $Re = 1000$ ambos se colapsam no centro da cavidade e se tornam um único vórtice central.

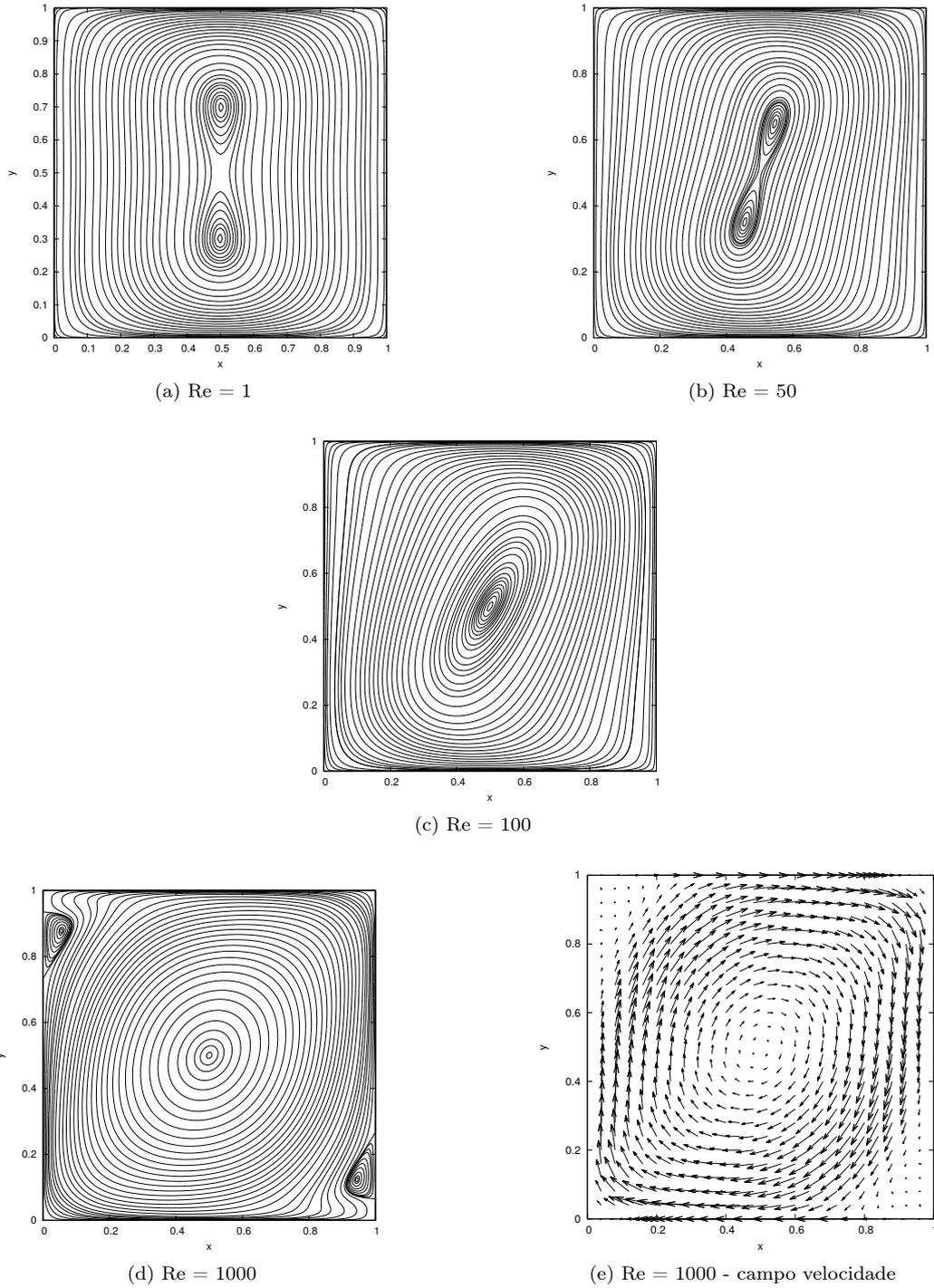


Figura 4.7: Linhas de Corrente para $Re = 1, 50, 100$ e 1000 e campo velocidade para $Re = 1000$.

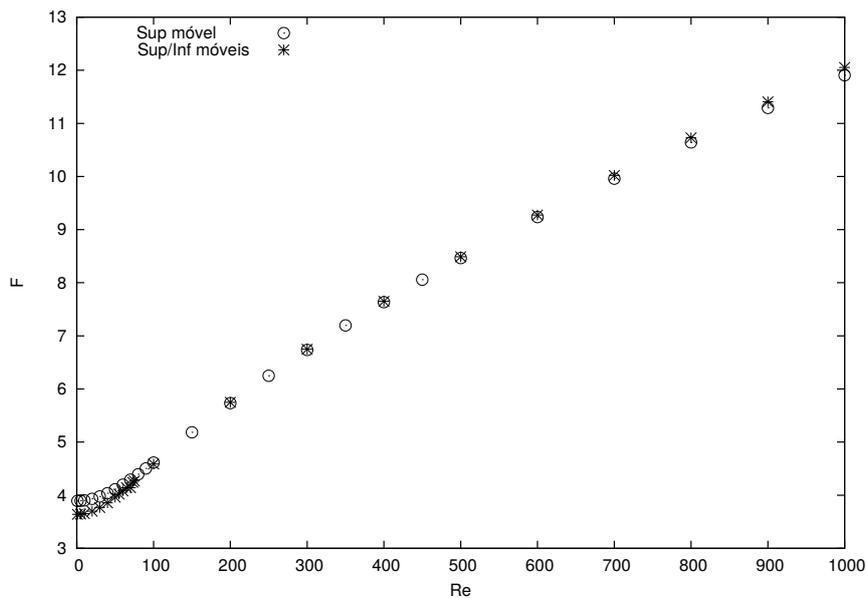


Figura 4.8: Comparação das Forças na placa superior para o caso da parede superior móvel, e, da parede superior e inferior móveis.

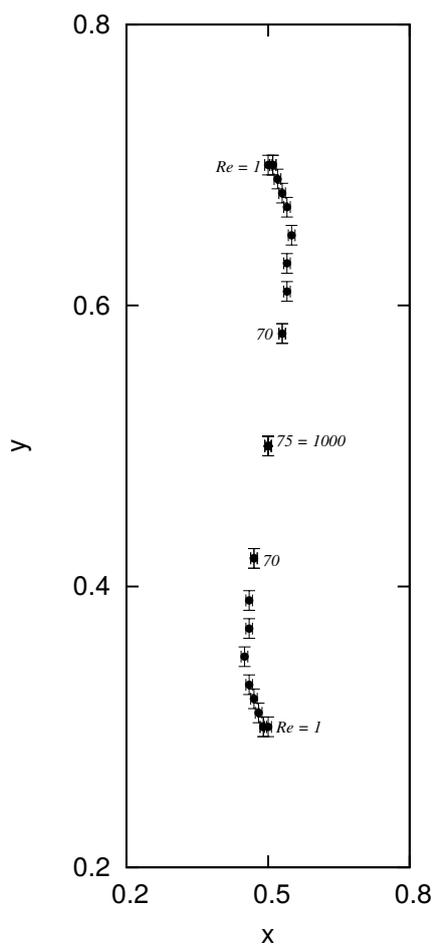


Figura 4.9: Localização dos vórtices principais para vários Re .

4.3 Cavidade com paredes superior e esquerda móveis

A Figura (4.10) mostra o comportamento do escoamento para diferentes valores de Re . Inicialmente notamos um escoamento simétrico com relação à diagonal principal da cavidade em todos os casos, porém as mudanças são significativas para maiores valores de Re .

Na Figura (4.10)(a) temos as linhas de corrente para $Re = 1$, observamos duas grandes zonas de recirculação, uma próxima a parede superior cujo o escoamento está rotacionando no sentido horário e outra perto da parede esquerda em que o escoamento está girando no sentido anti-horário. Além disso, temos dois vórtices pequenos localizados no canto inferior direito da cavidade, o vórtice mais próximo da parede direita tem sentido de rotação anti-horário, enquanto que o vórtice da parede inferior circula no sentido horário. À medida que aumentamos Re novas estruturas bem pequenas são formadas no canto inferior direito da cavidade. Notamos um aumento dos vórtices inferiores, mostrados na Figura (4.10)(a), fazendo com que os vórtices principais do escoamento tornem-se suavemente menores, a partir de $Re = 200$.

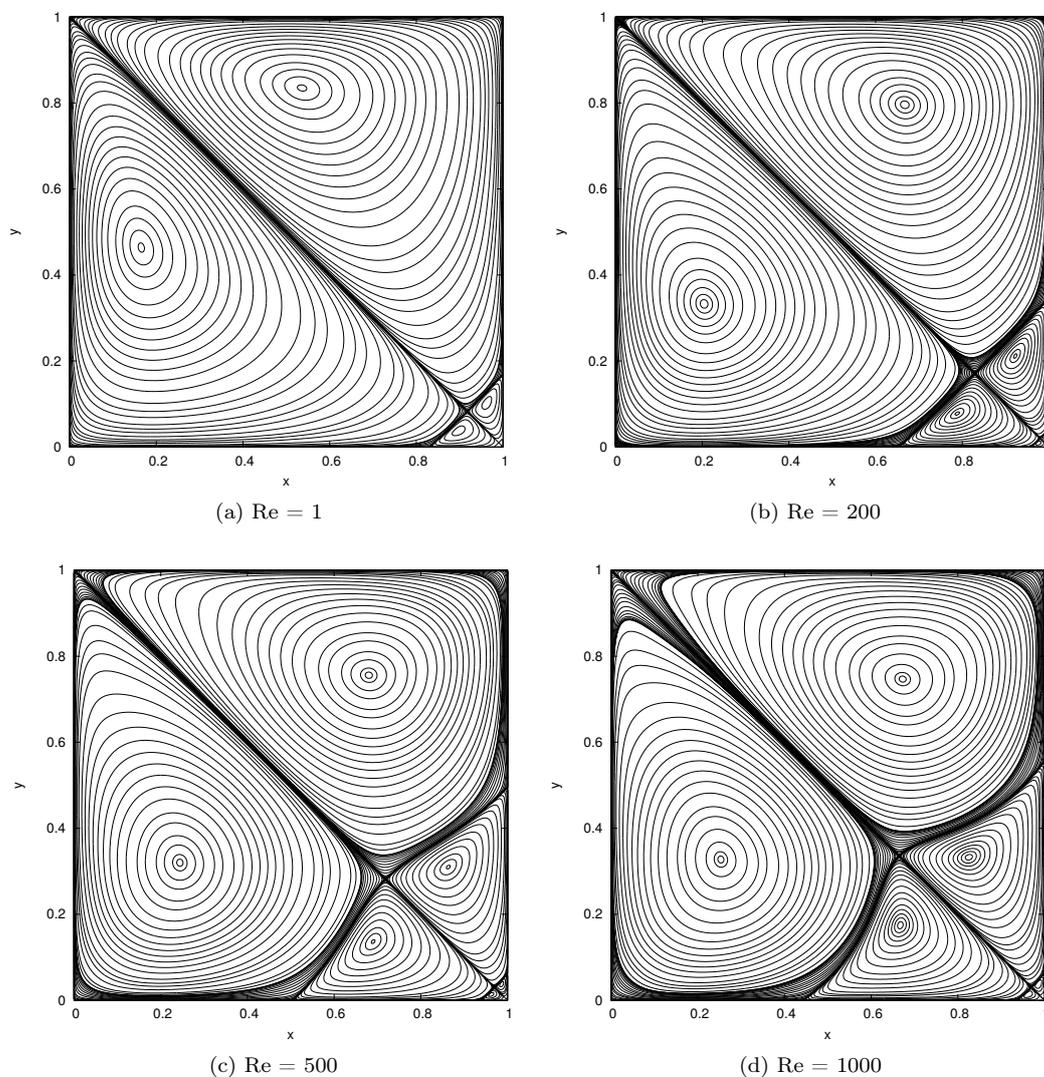


Figura 4.10: Linhas de Corrente para diferentes Re .

Escolhemos $Re = 500$ para analisar a evolução temporal do escoamento para o regime permanente, conforme ilustra a Figura (4.11). Notamos que na Figura (4.11)(a) temos dois vórtices grandes dominantes no escoamento e dois vórtices pequenos na região inferior direita. As Figuras (4.11)(b), (c) e (d) mostram a sequência da evolução dos vórtices inferiores à medida em que o tempo avança, até o escoamento chegar no estado estacionário.

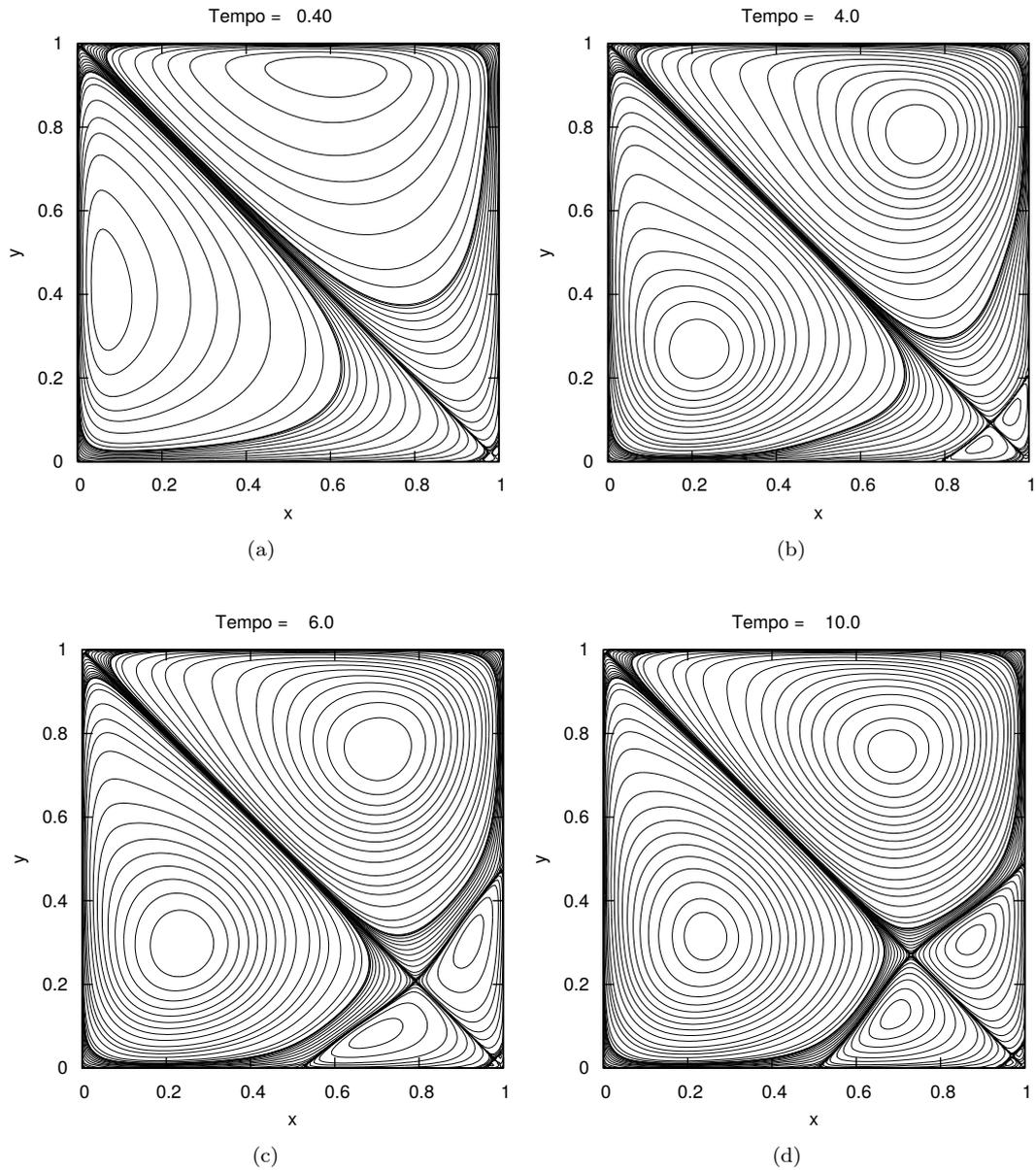


Figura 4.11: Evolução das linhas de corrente para $Re = 500$.

A Figura(4.12) mostra a força que o fluido exerce nas placas superior e esquerda para se movimentarem. Notamos que a força na placa superior é crescente com Re , já a força na parede esquerda, também aumenta com Re , porém tem sentido contrário a força da parede superior.

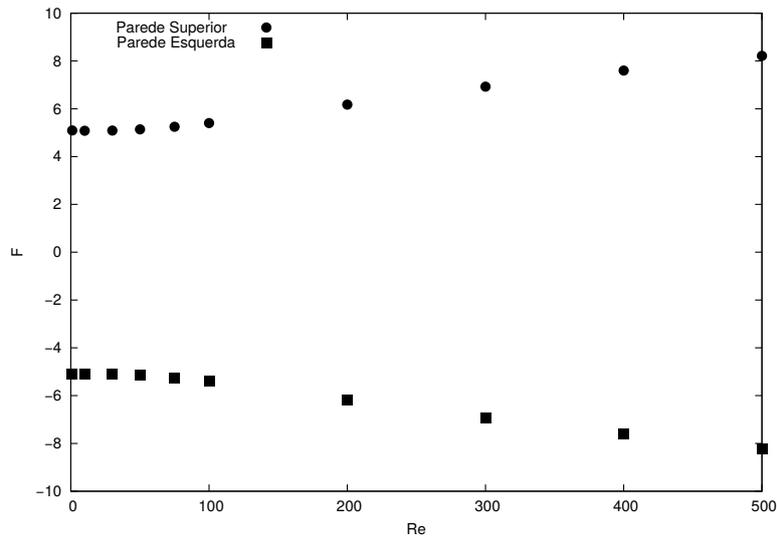


Figura 4.12: Força da placa superior, e, da placa esquerda, móveis.

A Figura (4.13) mostra a localização dos quatro vórtices principais encontrados nesse escoamento com o aumento de Re . Podemos ver que em $Re = 1$, o escoamento mantém os vórtices bem próximos às paredes, e conforme o Re vai aumentando, os vórtices tendem a ser levados na mesma direção que as placas móveis, porém para o sentido do centro da cavidade.

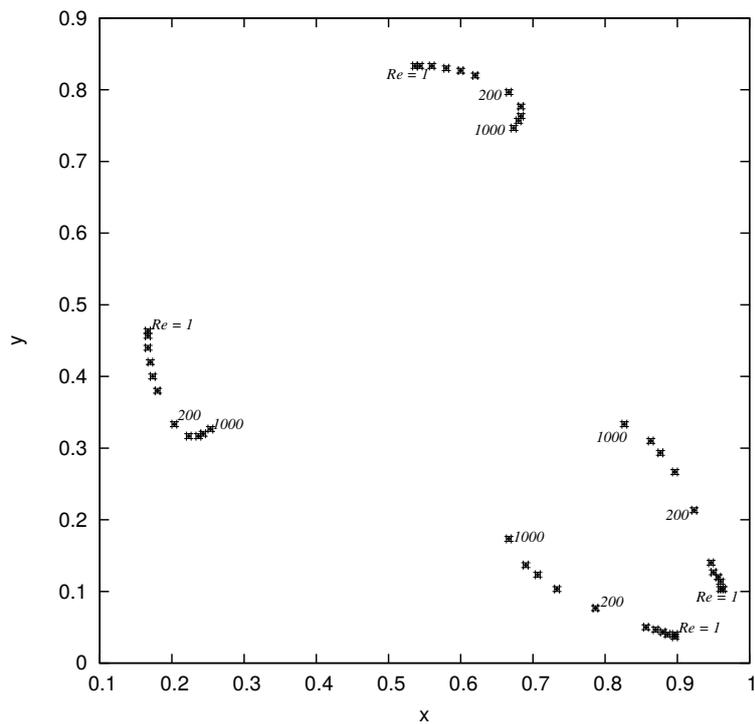


Figura 4.13: Localização dos vórtices principais para vários Re .

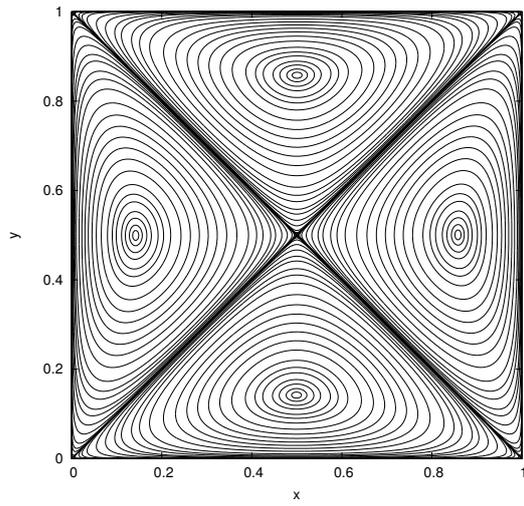
4.4 Cavidade com todas as paredes móveis

A Figura (4.14) mostra as linhas de corrente para as quatro paredes cisalhantes da cavidade, conforme descrito na Figura (3.1), da seção 3.1, em relação a diferentes Re . Na Figura (4.14)(a) temos um escoamento simétrico e quatro vórtices grandes principais, em que o escoamento delimitado pelo vórtice perto das paredes superior e inferior rotacionam no sentido horário, enquanto que o fluido localizado nos vórtices das paredes direita e esquerda giram no sentido anti-horário.

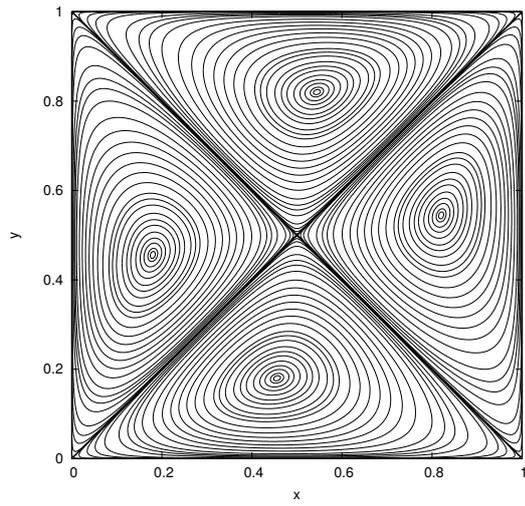
À medida em que aumentamos $Re = 300$ notamos uma suave mudança no escoamento no centro dos vórtices, pois estão sendo puxados no sentido das suas respectivas paredes cisalhantes. Observamos que os escoamentos com $Re = 1$ e 300 , nas Figuras (4.14)(a),(b) são soluções estáveis simétricas deste problema que podem ser encontradas somente para uma determinada faixa de Re , em função do tamanho da malha e da ordem do algoritmo de integração utilizado. De acordo com [43], as possíveis soluções assimétricas para valores de Re baixo são instáveis. Porém, quando Re aumenta, como é o caso de $Re = 500$ e 1000 , as soluções numéricas simétricas são instáveis para as configurações numéricas escolhidas no presente trabalho, e encontramos apenas as soluções assimétricas.

Entretanto, neste momento, não estamos interessados em estudar estas bifurcações e seguiremos nosso estudo da influência dos efeitos magnéticos do fluido nos capítulos à seguir, nos resultados apresentados aqui.

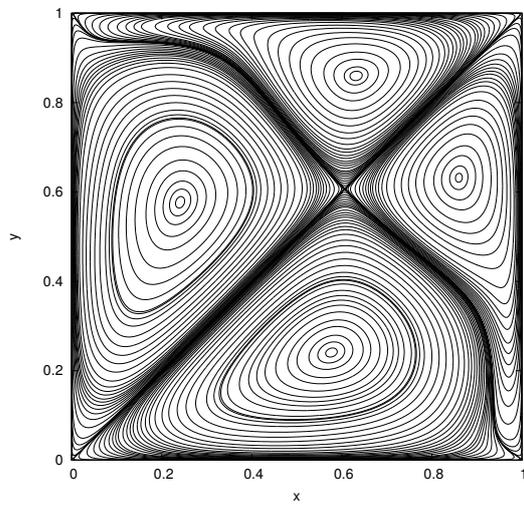
Na Figura (4.15), fizemos um estudo da localização do centro dos vórtices para diferentes Re . Inicialmente, o escoamento com $Re = 1$ temos que os quatro vórtices que localizam-se perto das suas respectivas paredes e então notamos um deslocamento significativo dos seus centros em $Re = 300$ e a partir deste Re crítico há uma bifurcação no escoamento, e os vórtices são movidos para o sentido das placas superior e direita cisalhantes.



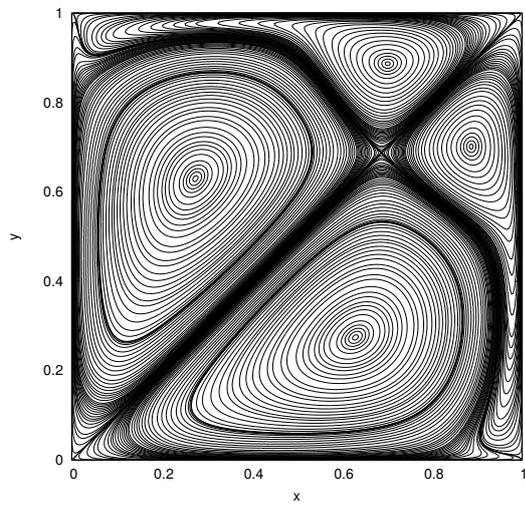
(a) $Re = 1$



(b) $Re = 300$



(c) $Re = 500$



(d) $Re = 1000$

Figura 4.14: Linhas de Corrente para diferentes Re .

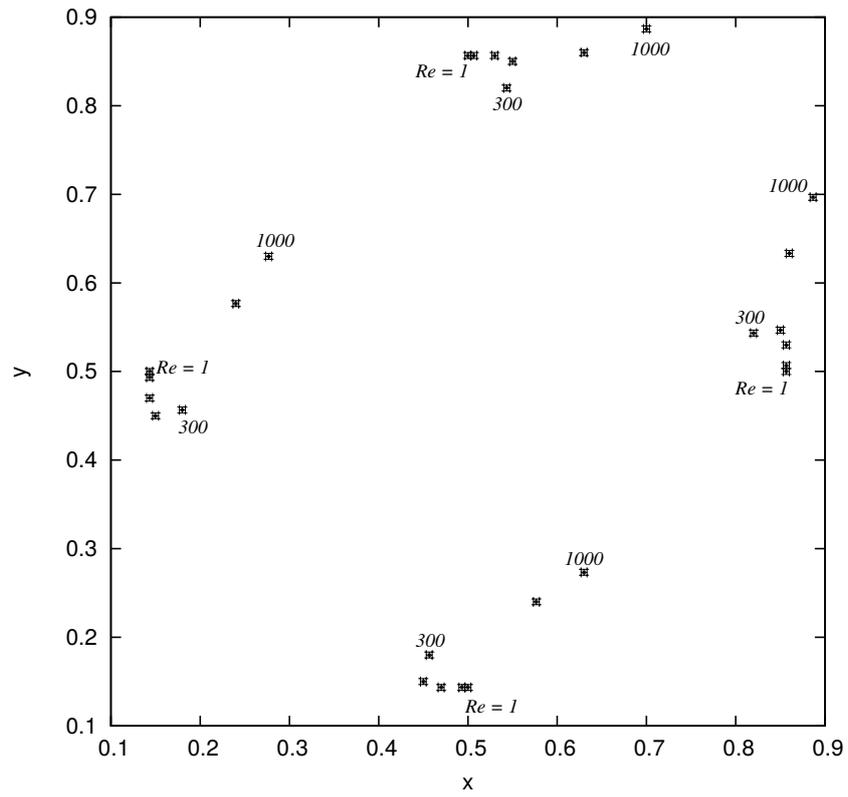


Figura 4.15: Localização dos vórtices principais para vários Re .

CAPÍTULO 5

ESCOAMENTOS DE FLUIDOS MAGNÉTICOS SIMÉTRICOS

No capítulo 4 vimos algumas estruturas das diversas configurações que o escoamento pode assumir quando o fluido não é magnético. Agora, vamos estudar o escoamento de fluidos magnéticos em condições semelhantes e identificar as estruturas resultantes. Pretendemos investigar com detalhes os efeitos que a interação da magnetização e da hidrodinâmica causam no regime permanente do escoamento na cavidade. Para tal, faremos um estudo construtivo, a fim de identificar os efeitos de cada um dos mecanismos representados por cada um dos termos da equação da magnetização (3.26).

5.1 Equação da magnetização com os termos de advecção e equilíbrio

Considere para a primeira análise a equação da magnetização apenas com o termo de equilíbrio e o termo convectivo, ou seja,

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = -\frac{1}{\tau}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0). \quad (5.1)$$

Os resultados a seguir foram obtidos para $Re = 500$ porque nestas condições as velocidades e as taxas de cisalhamento são mais intensas e veremos mudanças mais significativas na estrutura do escoamento.

5.1.1 Cavidade com parede superior móvel

Nesta configuração temos apenas a parede superior móvel com velocidade positiva (para a direita). A Figura (5.1) mostra algumas representações do escoamento para $Re = 10, 50, 100$ e 500 , com $C_{pm} = 10^4$, fixado. Notamos que para valores de $Re < 500$ o escoamento não tem diferenças significativas, implicando que os efeitos da advecção tornam-se notáveis para Re mais alto. Por este motivo, escolhemos $Re = 500$.

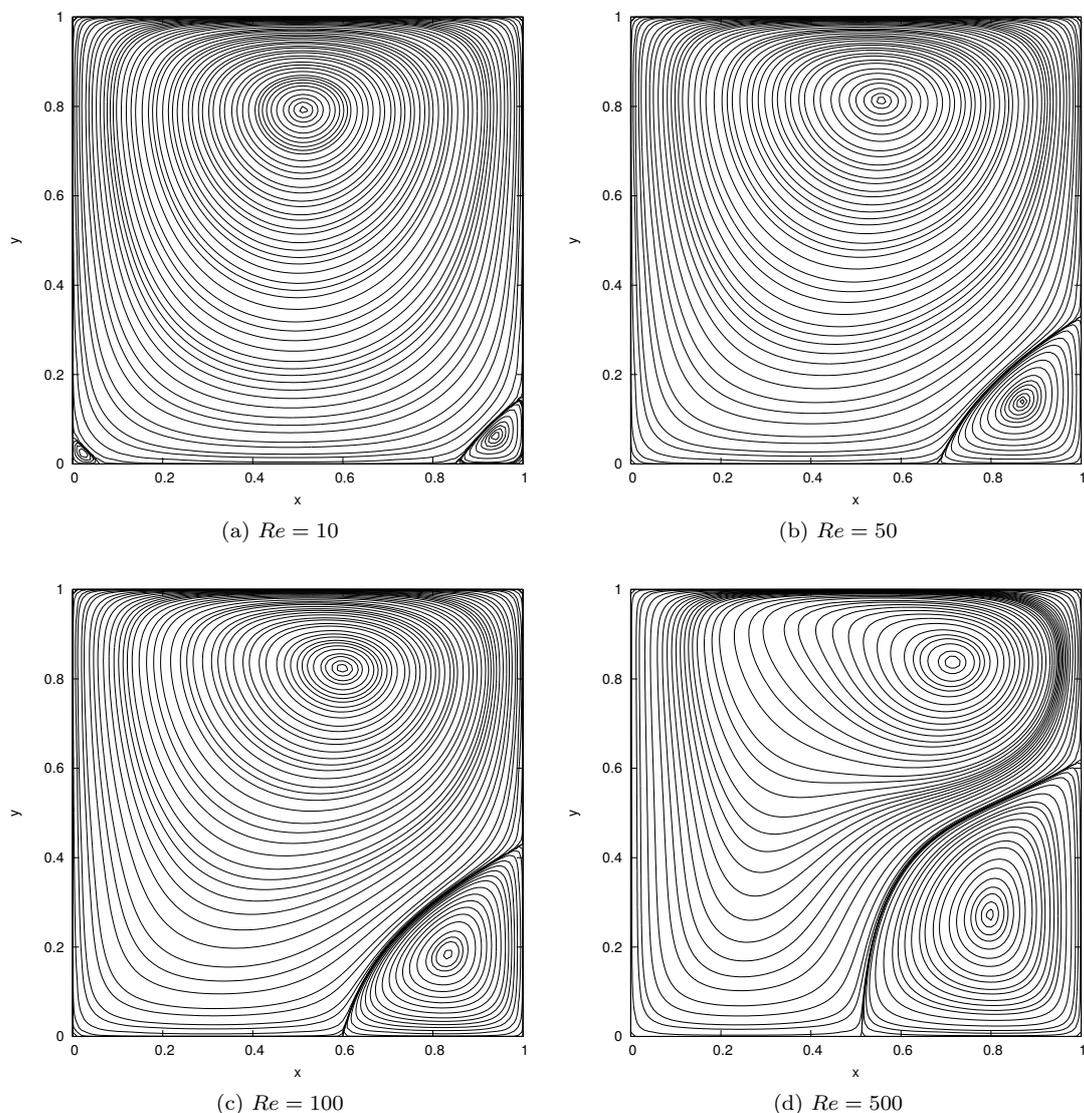


Figura 5.1: Linhas de corrente para $C_{pm} = 10000$ e alguns valores de Re .

A Figura (5.2), mostram as linhas de corrente para alguns valores de C_{pm} específicos. Notamos que no caso puramente hidrodinâmico, isto é, $C_{pm} = 0$, o escoamento apresenta três vórtices: o principal, o secundário, localizado próximo a parede direita, e um terceiro pequeno localizado próximo a parede esquerda. Quando aplicamos o campo magnético com $C_{pm} = 10^3$, vemos que o fluido que estava confinado na região do terceiro vórtice, é movido para se integrar ao escoamento principal. O segundo vórtice cresce no escoamento, porém o vórtice central ainda é o dominante, deslocando-se um pouco para perto da parede

direita. Quando aumentamos o valor de $C_{pm} = 10^4$, o segundo vórtice aumenta de tamanho tornando-se muito influente no escoamento, fazendo com que o vórtice central seja movido para próximo das paredes superior e direita.

Por fim, quando $C_{pm} = 3 \times 10^4$, a estrutura do escoamento é um pouco diferente da anterior, porque agora temos dois grandes e importantes vórtices que dominam o escoamento: o vórtice principal, que está confinado bem próximo à parede superior e à parede direita, e o outro vórtice secundário que, devido ao campo magnético estar localizado próximo a ele, e ter uma alta intensidade, cresceu bastante de tamanho, confinando mais fluido nesta região. Note que a divisão dos vórtices na parede inferior acontece aproximadamente em $x = 0.5$, que é o local onde o campo magnético é perfeitamente tangencial à parede. À sua direita, o campo aponta para baixo e se opõe ao escoamento, à sua esquerda, o campo está para cima, favorecendo o escoamento.

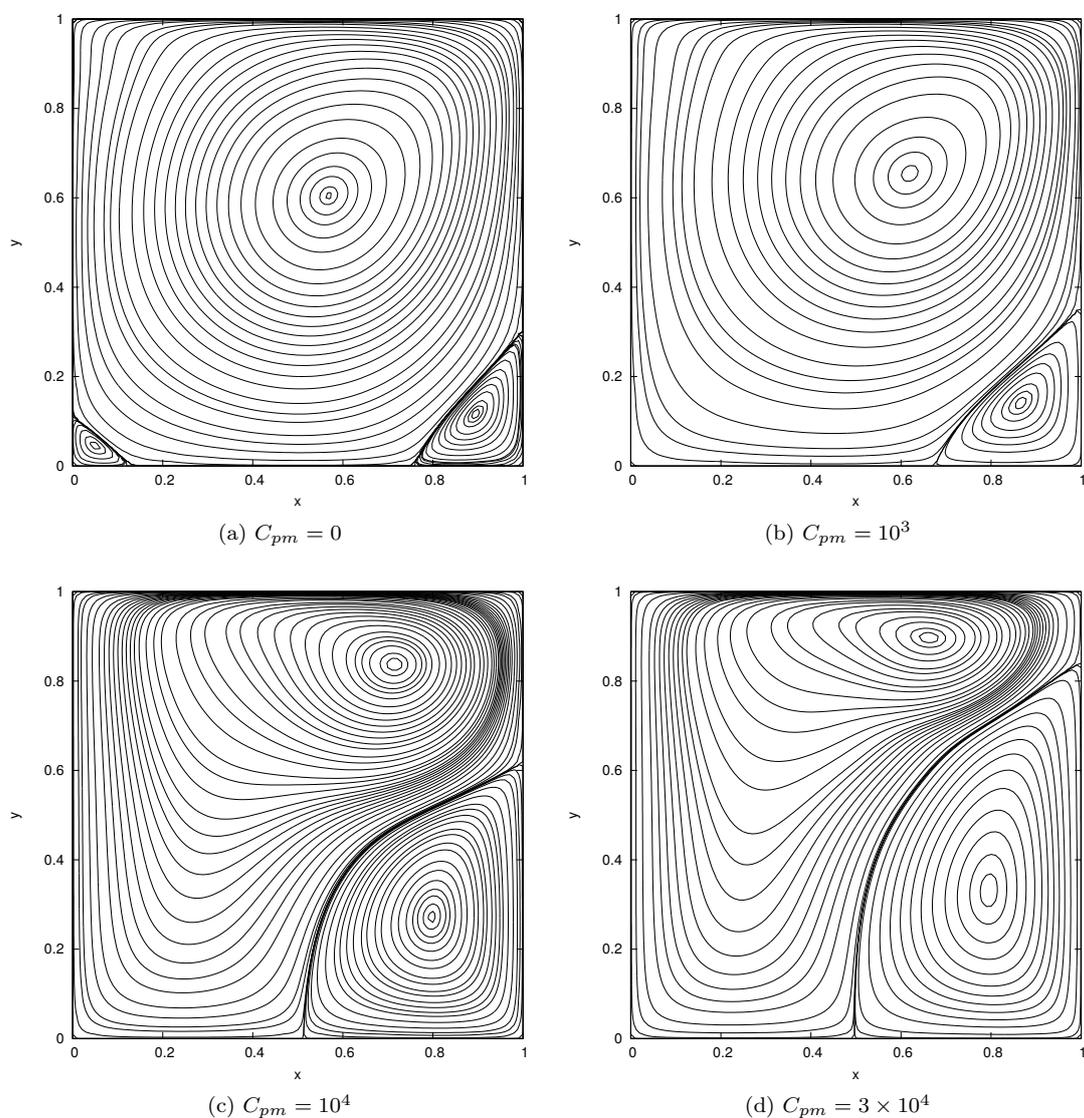


Figura 5.2: Linhas de corrente para $Re = 500$ e diversos valores de C_{pm} .

A Figura (5.3), é uma análise do campo de velocidade para $C_{pm} = 3 \times 10^4$, onde suas linhas de corrente foram apresentadas na Figura (5.2)(d). Observamos que as maiores velocidades encontram-se nas zonas próximas a parede superior móvel, já na parte inferior da cavidade as duas regiões de recirculação divididas em $x = 0.5$, assumem velocidades bem baixas.

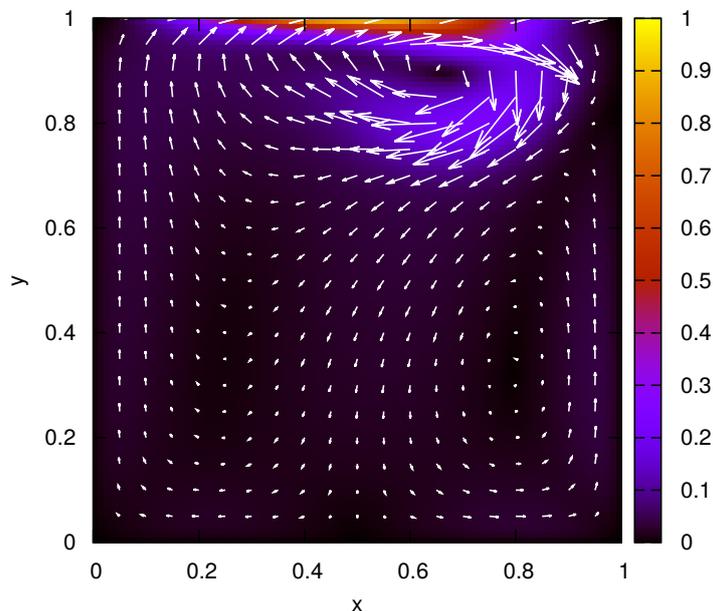


Figura 5.3: Módulo do campo velocidade para $C_{pm} = 3 \times 10^4$.

A Figura (5.4) apresenta os perfis de velocidades u_x e u_y , ambos para diferentes valores de C_{pm} . Na Figura (5.4)(a), para $C_{pm} = 0$, há uma inversão do sinal da velocidade em $y \approx 0.57$, ou seja, próximo a região central do escoamento e notamos maiores velocidades nas proximidades da parede superior. Podemos observar que, para $C_{pm} = 5 \times 10^3$ e 3×10^4 , os pontos de inversão de velocidade são alterados para $y \approx 0.8$ e $y \approx 0.9$, respectivamente, ou seja, a região de velocidades mais altas são movidas para mais perto da parede superior, de forma a gerar altos gradientes de velocidades nesta região.

Próximo à parede inferior, o perfil assume um formato afunilado, com baixas velocidades e baixos gradientes de velocidade, indicando que o fluido magnético está sendo atraído pela fonte magnética e não escoar livremente como quando $C_{pm} = 0$. De modo análogo, a Figura (5.4)(b), mostra o perfil velocidade de u_y . Quando $C_{pm} = 0$, temos velocidades positivas para $0 < x < 0.56$; em $x \approx 0.56$ há uma inversão no sentido da velocidade. Ao colocarmos a fonte de campo magnético, os perfis de velocidade são reduzidos significativamente, e então os pontos de mudança do sinal da velocidade são alterados.

Esta primeira análise mostra que a presença do campo magnético afeta significativamente o escoamento causando uma redução importante da velocidade do escoamento nas regiões onde o campo magnético é muito forte, isto é, nas regiões próximas à parede inferior. Nas regiões superiores, há uma concentração do escoamento com maiores velocidades e gradientes de velocidades relevantes.

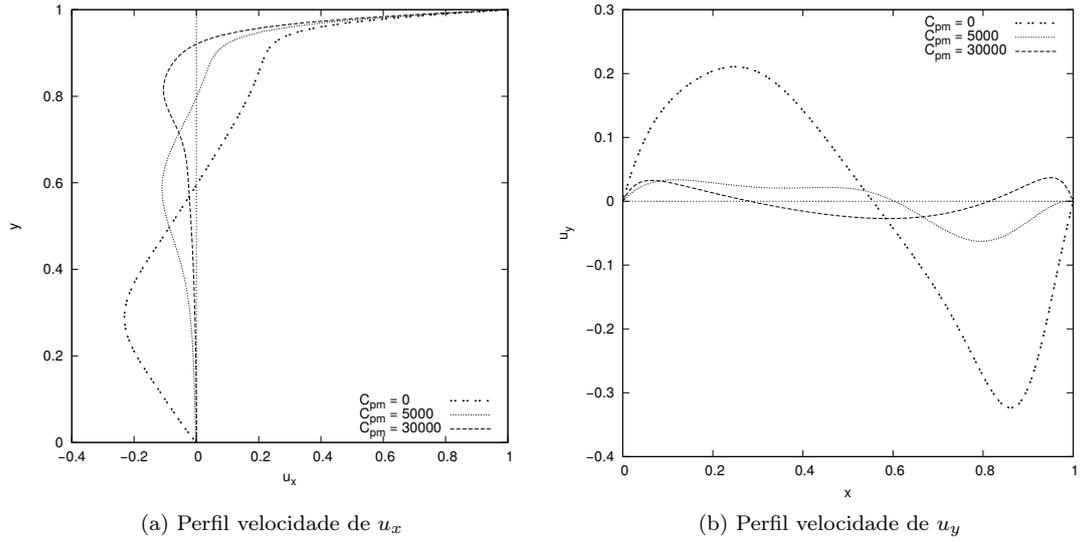


Figura 5.4: Perfil velocidade para $Re = 500$ e vários valores de C_{pm} .

O gráfico da Figura (5.5) confirma que apesar de não estarmos satisfazendo precisamente as equações de Maxwell no limite magnetostático, a hipótese de fracamente magnetizável nos leva a erros pequenos em $\nabla \cdot \mathbf{B}$. Neste exemplo, estamos cometendo um erro da ordem $\mathcal{O}(10^{-4})$, com $\zeta = 10^{-2}$ e $N = 201$.

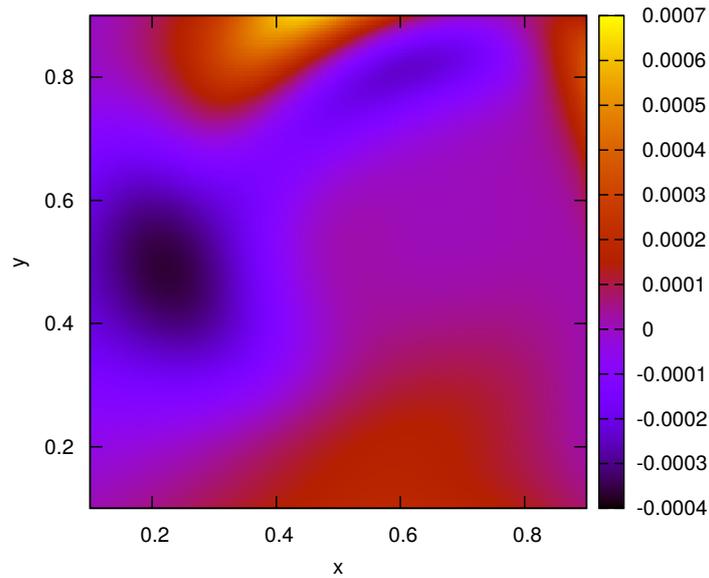


Figura 5.5: Cálculo do $\nabla \cdot \mathbf{B}$ para $N = 201$ e $\zeta = 10^{-2}$ quando $C_{pm} = 10^3$ e $Re = 500$.

A Figura (5.6) representa o percentual de mudança do módulo da magnetização no regime permanente em relação a magnetização de equilíbrio, isto é,

$$\frac{|\mathbf{M} - \mathbf{M}_0|}{|\mathbf{M}_0|} \quad (5.2)$$

Estes resultados medem quanto a magnetização local muda, em módulo, quando comparada com a magnetização de equilíbrio local. Na Figura (5.6)(a), para $C_{pm} = 50$, podemos observar que há uma mudança significativa da magnetização em cerca de 12% nas regiões de maiores gradientes de velocidade. Estas mudanças são devido ao mecanismo de transporte convectivo de magnetização através do escoamento. Por outro lado, notamos que, perto das quinas, e no centro do escoamento, a magnetização não se altera, pois nestas regiões as velocidades do escoamento são muito pequenas.

Na Figura (5.6)(b), para $C_{pm} = 3 \times 10^4$, podemos ver uma grande diferença nas regiões em que houve o aumento significativo da magnetização, passando a ser mais confinada na parede superior direita. Observe-se, na Figura (5.6)(a) e (b), que os aumentos significativos da magnetização ocorrem nas regiões próximas à parede superior do lado direito da cavidade. De fato, o escoamento transporta fluido magnetizado mais intensamente da região central ($x \approx 0.5$ e $y \approx 1$) para a região onde a magnetização é mais baixa ($x \approx 0.85$ e $y \approx 1$). Como as velocidades nestas regiões são altas, o transporte de fluido é feito de maneira eficiente, fazendo com que o fluido não tenha tempo suficiente de relaxar ao seu novo equilíbrio local. É este transporte que causa o aumento percentual da magnetização com relação à magnetização de equilíbrio local.

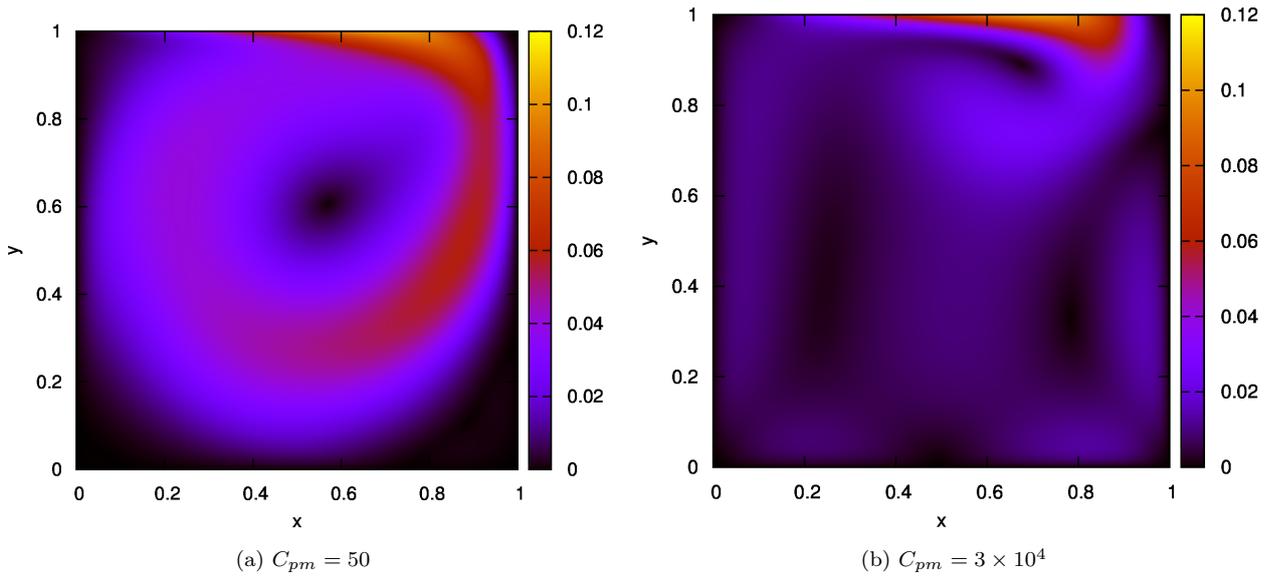


Figura 5.6: Mudança no módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local.

Depois de entendermos a mudança da magnetização do fluido no escoamento, fomos instigados a compreender o desvio angular da magnetização com relação à magnetização de equilíbrio local. Em princípio, gostaríamos de identificar as regiões de aumento significativo da magnetização, e se possível correlacionar com o aumento relativo da magnetização com a magnetização de equilíbrio local. Além disso, buscamos um valor de C_{pm} adequado que evidencie os desvios angulares.

A Figura (5.7) ilustra os desvios angulares da magnetização para valores de $C_{pm} = 50, 10^3$ e 3×10^4 . Notamos na Figura (5.7)(a), para $C_{pm} = 50$, os desvios angulares da magnetização local em relação a magnetização de equilíbrio local são significativos em uma grande região do escoamento, variando de -3°

a 6° . À medida que aumentamos C_{pm} , conforme as Figuras (5.7)(b) e (c), há poucos desvios angulares da magnetização com relação ao equilíbrio. Com C_{pm} alto há uma diminuição das velocidades no escoamento, fazendo com que o termo convectivo perca a sua influência nos desvios da magnetização, e por sua vez o termo de equilíbrio passa a ser dominante. Portanto, como queremos encontrar desvios significativos da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local, escolhemos $C_{pm} = 50$.

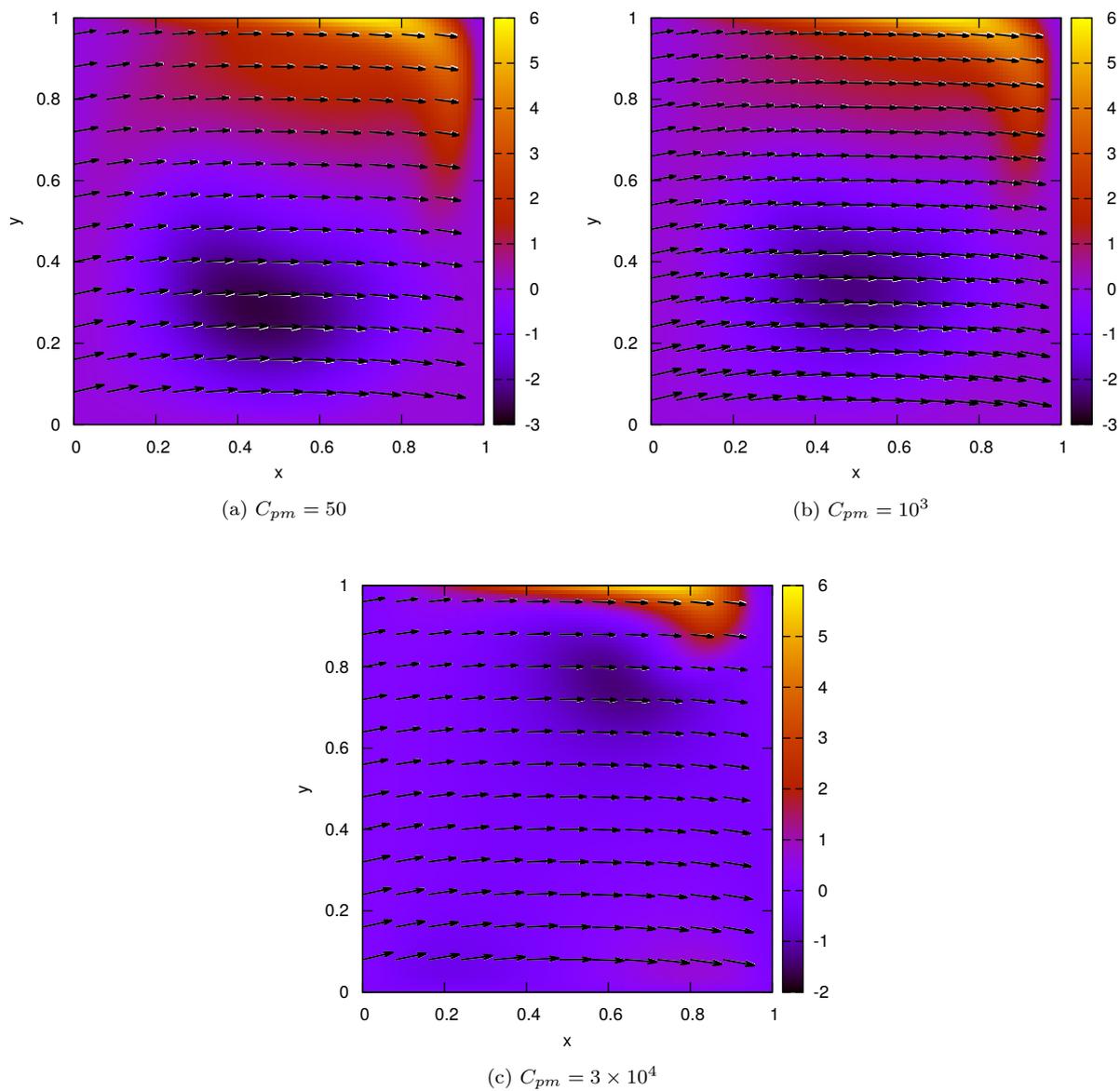
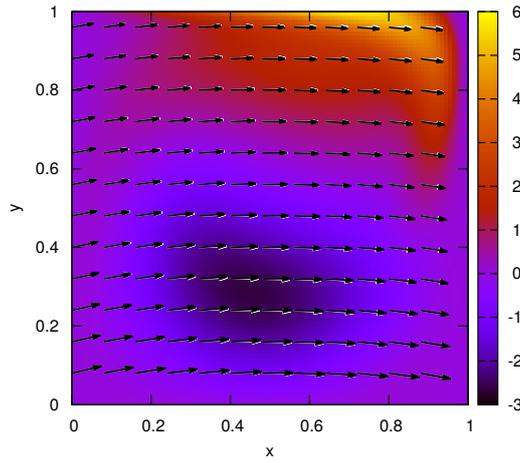


Figura 5.7: Desvio angular da magnetização, em graus, para alguns valores de C_{pm} . Os vetores brancos representam a magnetização local e os vetores pretos representam a magnetização de equilíbrio local.

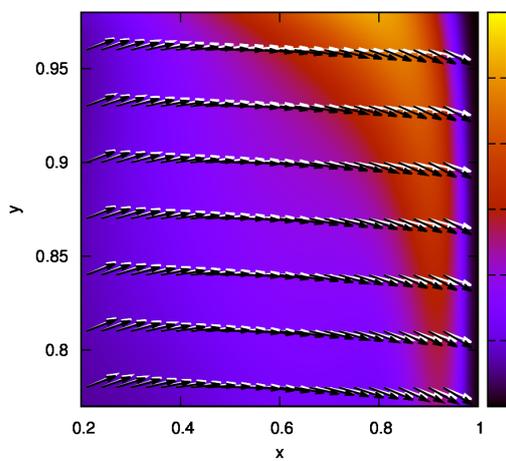
A Figura (5.8) ilustra o desvio angular da magnetização com relação à magnetização de equilíbrio para $C_{pm} = 50$ em toda a cavidade, no qual, os vetores de cor preta simbolizam a magnetização de equilíbrio local e os vetores na cor branca representam a magnetização local. Com o intuito de analisar melhor estes desvios, separamos a Figura (5.8)(a), em (5.8)(b) e (c). Podemos notar que, em algumas regiões do escoamento, há tanto um desvio no sentido horário quanto um desvio no sentido anti-horário da magnetização.

A Figura (5.8)(b) mostra a região em que se concentra os vetores cujos desvios ocorrem no sentido horário. Esta região está localizada próximo à parede superior. Em contrapartida, a Figura (5.8)(c) é o oposto da Figura (5.8)(b), porque nesta região se concentram os vetores magnetização com desvios no sentido anti-horário, que se localizam um pouco abaixo da parte central da cavidade, isto é, longe da parede superior e um pouco mais próximo da fonte magnética.

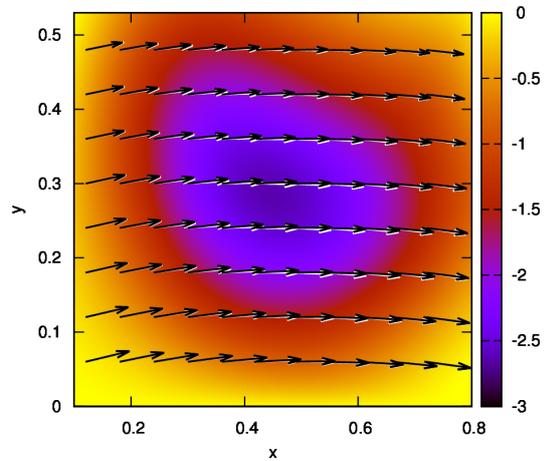
O termo convectivo $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M}$, que representa uma inércia da magnetização, é responsável pelos desalinhamentos do vetor magnetização com relação à magnetização de equilíbrio local. De fato, fazendo um link dos gráficos da Figura (5.6)(a) e da Figura (5.8)(a), os desvios dos vetores magnetização ocorrem nas mesmas regiões em que o percentual do módulo da magnetização aumenta. A região que não ocorre desvios é exatamente onde não há valor significativo de mudança da magnetização. Além disso, notamos que a taxa de variação dos desvios angulares assumem valores entre -3° e 6° e o sentido desse desalinhamento é dado pela combinação da velocidade local do escoamento e do gradiente local de magnetização.



(a) Desvio da Magnetização em todo o domínio.



(b) Desvio positivo da Magnetização



(c) Desvio negativo da Magnetização

Figura 5.8: Desvio da magnetização dado em graus para $C_{pm} = 50$. Os vetores brancos representam a magnetização local e os vetores pretos representam a magnetização de equilíbrio local.

Os gráficos que vimos acima são todos para um tempo de relaxação magnética $\tau = 0.5$. Diminuindo o tempo de relaxação magnética para $\tau = 10^{-3}$ obtemos o gráfico da Figura (5.9). Analisando as Figuras (5.9)(a) e (b) utilizando as mesmas escalas, ou seja, variações da mudança do módulo da magnetização entre 0 e 0.12, podemos ver que não há mudanças no módulo da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio, pois de acordo com a Figura (5.9)(a) notamos que a magnetização em todo o escoamento encontra-se no equilíbrio.

Entretanto se ampliarmos a Figura (5.9)(a), notamos uma pequena mudança no módulo da magnetização, ou seja, observando a Figura (5.9)(c), agora com escalas diferentes, podemos ver que existe uma mudança da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio local, porém é muito pequena comparada com a Figura (5.9)(b). Além disso, as pequenas mudanças do módulo da magnetização ocorrem principalmente perto dos maiores gradientes de velocidade. Portanto, notamos que τ muito pequeno causa um efeito menor ou desprezível da variação do módulo da magnetização.

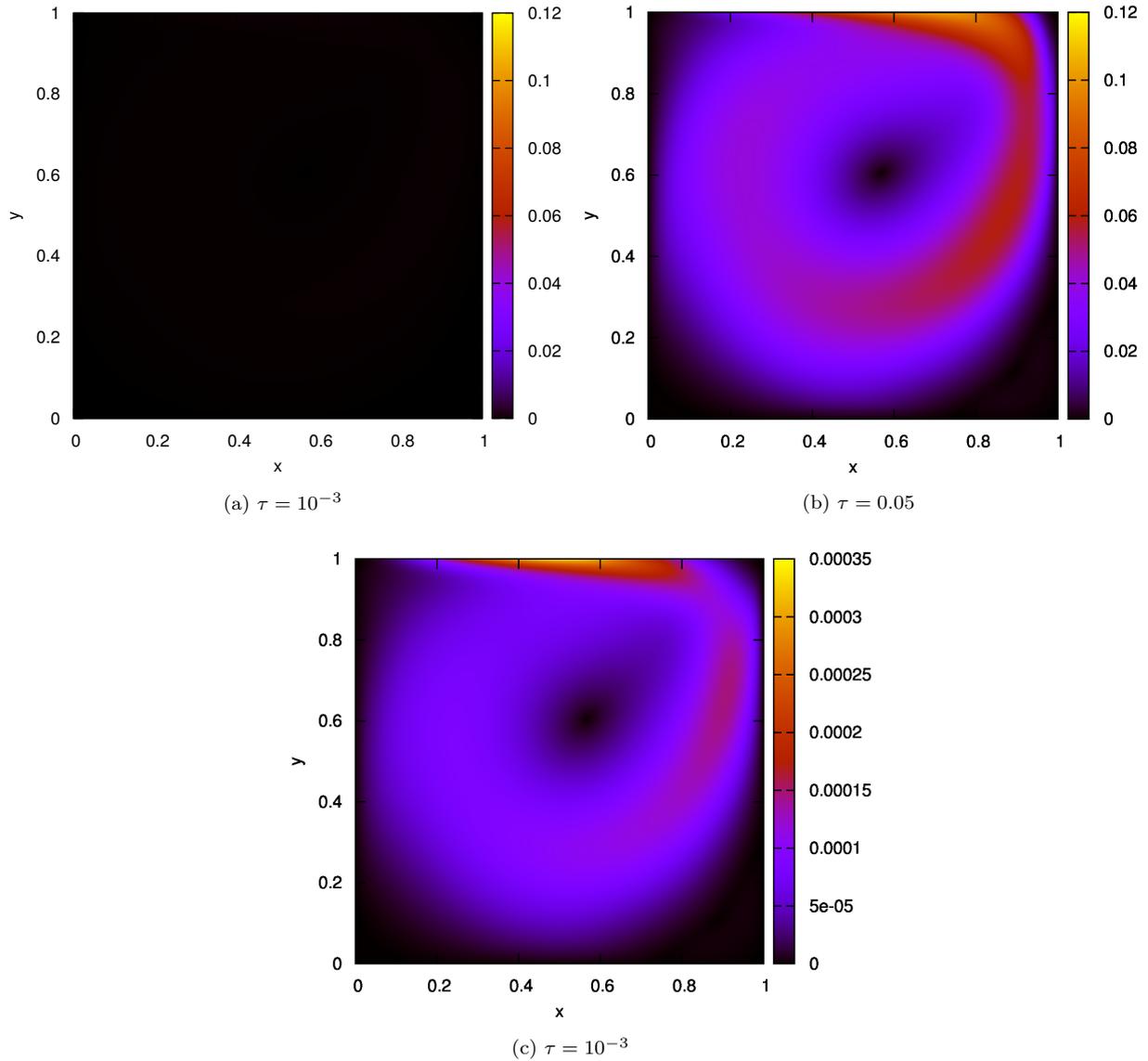


Figura 5.9: Mudança do módulo da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio para $C_{pm} = 50$ com $\tau = 10^{-3}$ e $\tau = 0.5$.

Agora, para o parâmetro de magnetização de saturação adimensional $\zeta = 10^{-2}$, temos que ao analisarmos o parâmetro adimensional α notamos que na Figura (5.10)(a), para $\alpha = 100$ a magnetização de equilíbrio encontra-se praticamente toda saturada, enquanto que na Figura (5.10)(b), para $\alpha = 1$, a magnetização de equilíbrio está bem longe de alcançar a saturação.

A Figura (5.11) mostra a mudança percentual no módulo da magnetização local em relação a magnetização de equilíbrio local para dois valores de α diferentes. No caso da Figura (5.11)(a), em que $\alpha = 100$ as mudanças são significativas quando comparadas com (5.11)(b), em que $\alpha = 1$. Na Figura (5.11)(a), vemos que a região superior da cavidade continua concentrando as maiores mudanças no módulo da magnetização, devido ao forte termo advectivo. Porém as mudanças significativas estão restritas a uma menor região, pois neste caso as menores velocidades do escoamento causam uma menor influência do termo advectivo.

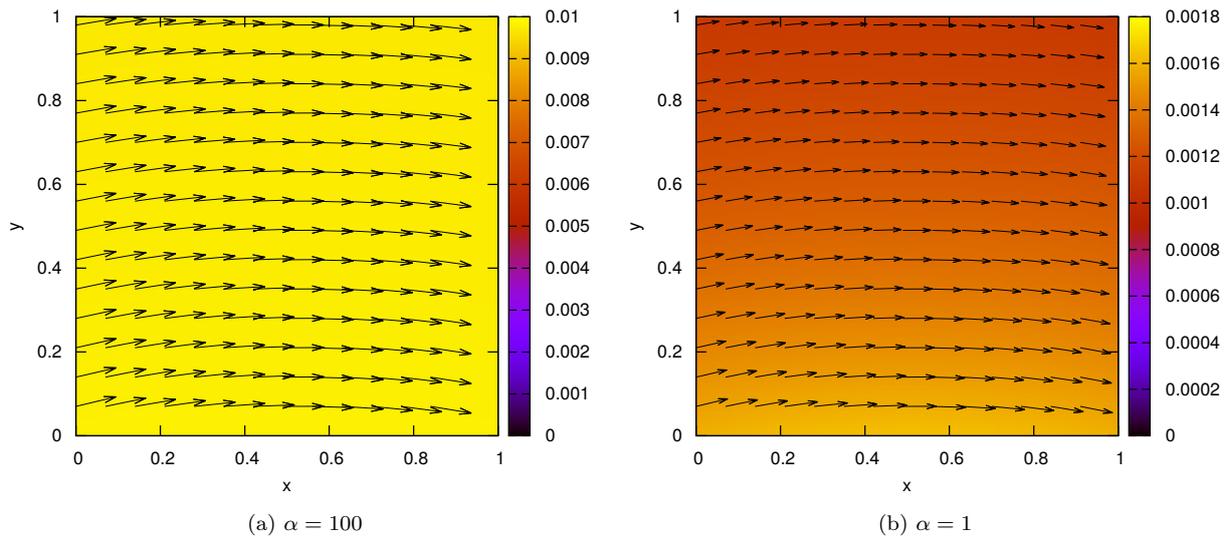


Figura 5.10: Saturação da magnetização de equilíbrio para $C_{pm} = 50$, $\alpha = 100$, $\alpha = 1$ e $\zeta = 10^{-2}$.

Desta forma, o fluido tem tempo suficiente para relaxar, tornando o mecanismo de advecção ineficiente para modificar a magnetização. Por isto, notamos uma faixa preta abaixo da parede superior, que não existe na Figura (5.11)(b). Na região de retorno do escoamento, localizado próximo a parede inferior, vemos algumas atividades da advecção da magnetização, porém novamente estas mudanças são menores quando comparamos com a Figura (5.11)(b).

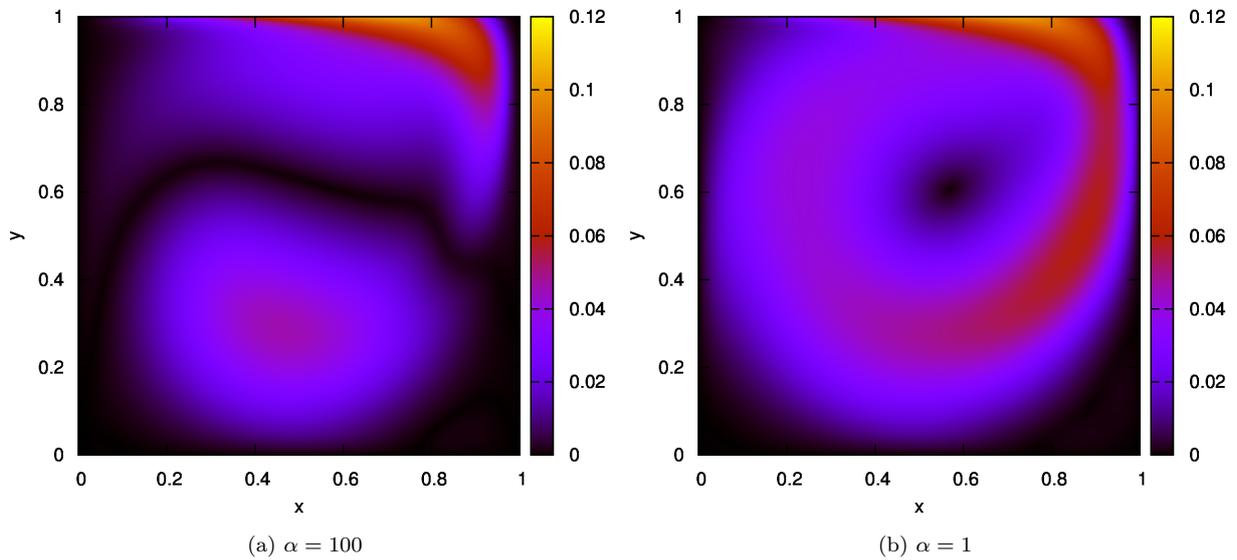


Figura 5.11: Mudança no módulo da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 50$, $\alpha = 100$, $\alpha = 1$ e $\zeta = 10^{-2}$.

A Figura (5.12), mostra o comportamento da força cisalhante da parede superior para diferentes valores de C_{pm} . Notamos que a força aumenta quando aumentamos C_{pm} , pois à medida em que C_{pm} aumenta, observamos um maior cisalhamento nas regiões próximas à parede superior. Os aumentos percentuais da força para $C_{pm} = 3 \times 10^4$ em relação à $C_{pm} = 0$ é de aproximadamente 47%.

No encarte, temos o quanto Re influencia no aumento da força da placa cisalhante, com valores moderados de C_{pm} . Constatamos que quanto maior o Re maior a força aplicada na placa superior.

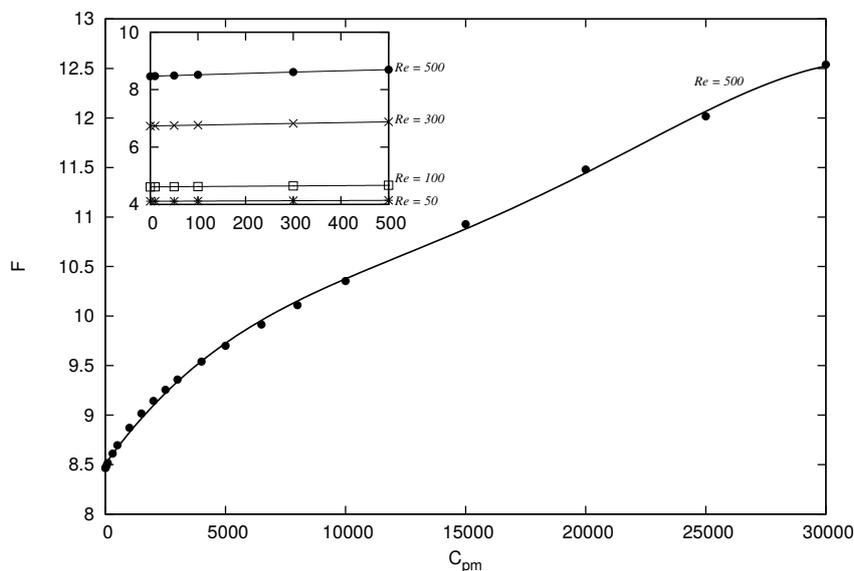


Figura 5.12: Comportamento da força na parede superior para $Re = 500$ em função de C_{pm} . No encarte temos a influência de Re para valores moderados de C_{pm} .

5.1.2 Cavidade com paredes superior e inferior móveis

Os próximos gráficos mostram uma outra configuração de cavidade, em que, as paredes superior se move no sentido positivo (para a direita) e a inferior se move no sentido negativo (para a esquerda).

A Figura (5.13) mostra imagens do campo velocidade e das linhas de corrente para diversos valores de C_{pm} com $Re = 500$ fixado. Na Figura (5.13)(a) para $C_{pm} = 0$, temos um escoamento bem simétrico, puramente hidrodinâmico, em que os maiores gradientes de velocidade se encontram próximo as paredes em movimento, e temos apenas um vórtice principal central. A medida em que aumentamos o parâmetro C_{pm} , observamos a geração de um novo vórtice secundário, que pode ser visto para $C_{pm} = 5 \times 10^3$. Esta estrutura vem do fato de termos uma força magnética atraindo estas linhas de corrente para baixo. O vórtice primário, localizado na parte superior da cavidade, ainda é dominante em termos de tamanho e é prioritariamente influenciado pela parede superior. Podemos notar, os altos gradientes de velocidade nestas regiões, enquanto que nos centros dos vórtices os vetores velocidades são baixos. Na Figura (5.13)(c), para $C_{pm} = 10^4$, segue que ao aumentarmos o valor de C_{pm} , aumentamos também o tamanho do vórtice localizado próximo a região inferior, o que indica que maiores quantidades de fluido estão sendo confinados nesta região interna do vórtice. Há uma mudança no formato do vórtice perto da parede superior, pois

além de seu centro deslocar para mais próximo da parede superior, ele adquire uma forma mais circular. Na Figura (5.13)(d), em que $C_{pm} = 3 \times 10^4$, vemos que os dois vórtices adquirem formatos semelhantes e mais centralizados com relação a $x = 0.5$. Observa-se que o fluido escoava quase verticalmente nas regiões esquerda e direita da cavidade, passando de um lado para o outro por finas camadas de altas velocidades e gradientes de velocidade entre os vórtices e as paredes.

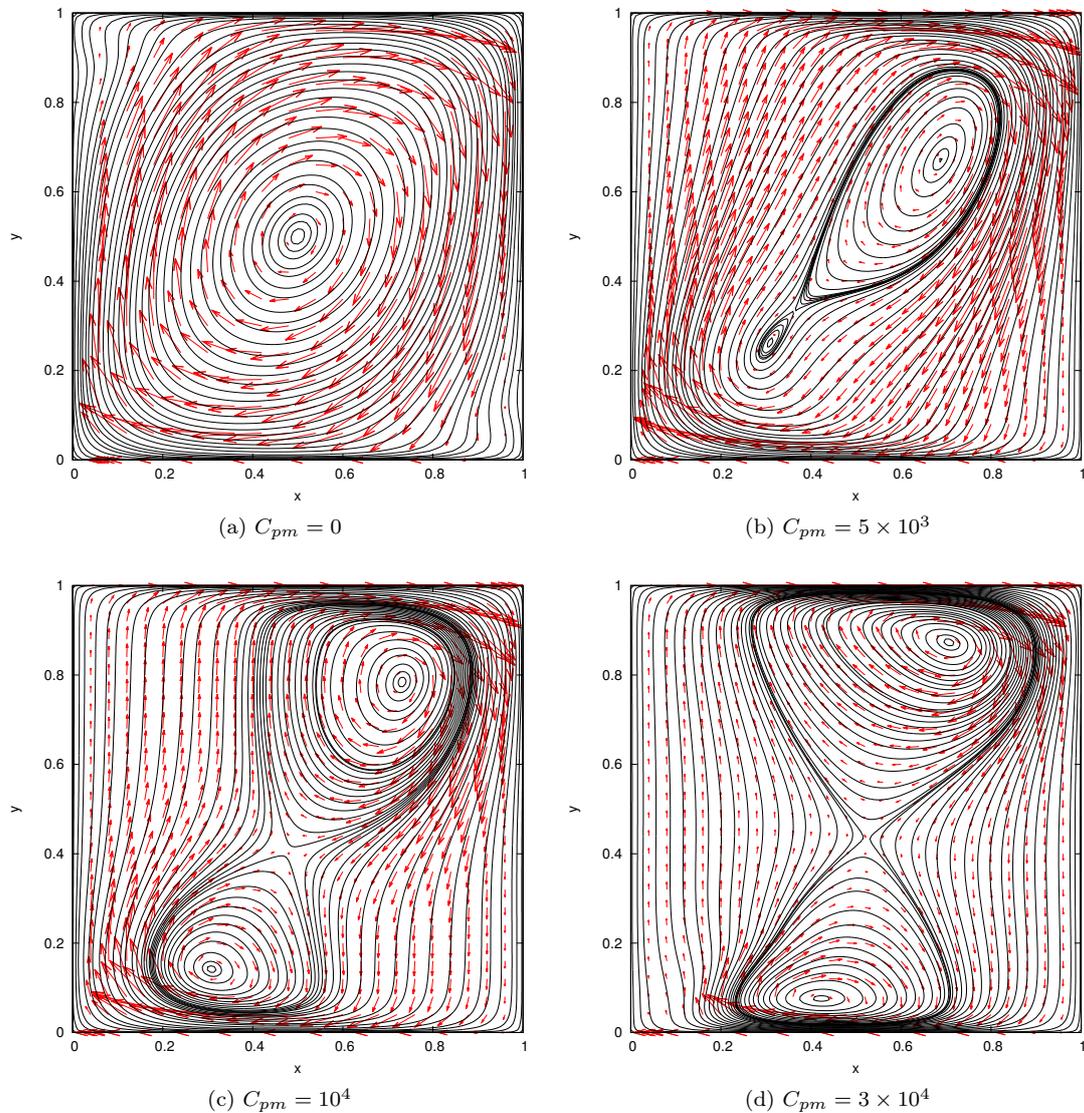


Figura 5.13: Campo velocidade e linhas de corrente para $Re = 500$ e diversos c_{pm} .

Apresentamos na Figura (5.13)(d) as linhas de corrente e o campo velocidade para $C_{pm} = 3 \times 10^4$. A fim de quantificar os vetores do campo velocidade, traçamos a Figura (5.14). Observamos que o escoamento possui altas velocidades, e gradientes de velocidade, em módulo, perto das paredes móveis, no entanto, no interior da cavidade, o fluido escoava com velocidades bem baixas.

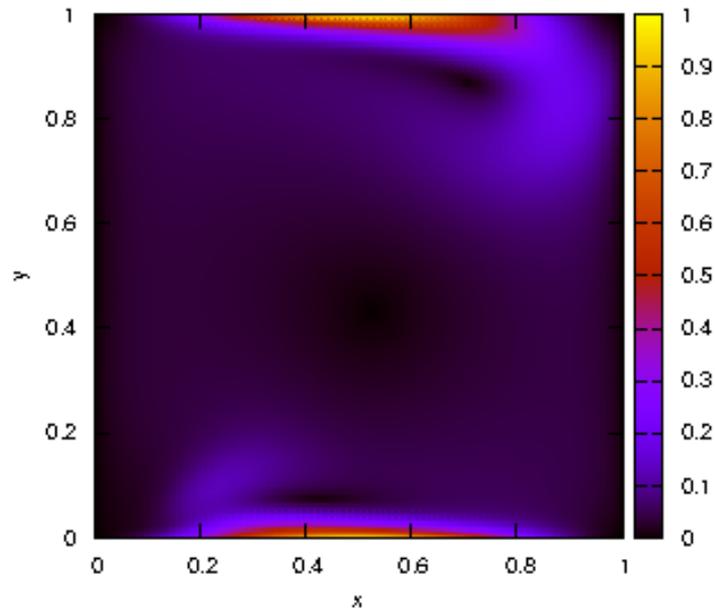


Figura 5.14: Módulo do campo velocidade para $Re = 500$ e $c_{pm} = 3 \times 10^4$.

Depois de analisarmos as linhas de corrente, e vermos a influência de C_{pm} no escoamento, buscamos entender as mudanças na magnetização, de forma análoga ao que vimos na Figura (5.6) da seção (5.1.1).

A Figura (5.15) mostra a mudança do módulo da magnetização local com a magnetização de equilíbrio local. Observamos alterações nas regiões onde o aumento relativo da magnetização é alto. De fato, na Figura (5.15)(a), para $C_{pm} = 50$ temos uma região na parte inferior da cavidade, que se espalha ao longo da parede esquerda, e outra na parede superior da cavidade, que se prolonga levemente ao longo da parede direita, onde a magnetização aumentou em relação a magnetização de equilíbrio local.

Note que, no primeiro local, há altos gradientes vindos da velocidade da parede inferior e do campo magnético, e no segundo local, há elevados gradiente de velocidade, que por transporte são espalhados para o escoamento, causando um aumento da magnetização, conforme discutido anteriormente. Há uma grande região mais central do escoamento, onde o aumento em módulo da diferença entre magnetização e a magnetização de equilíbrio é pequena. E, por fim, há uma região onde não há aumento percentual, pois as velocidades são desprezíveis.

Claramente, podemos ver que a mudança significativa da magnetização ocorre apenas em uma pequena região concentrada próximo aos locais de maiores velocidades e vemos uma grande região com percentuais pequenos ou desprezíveis.

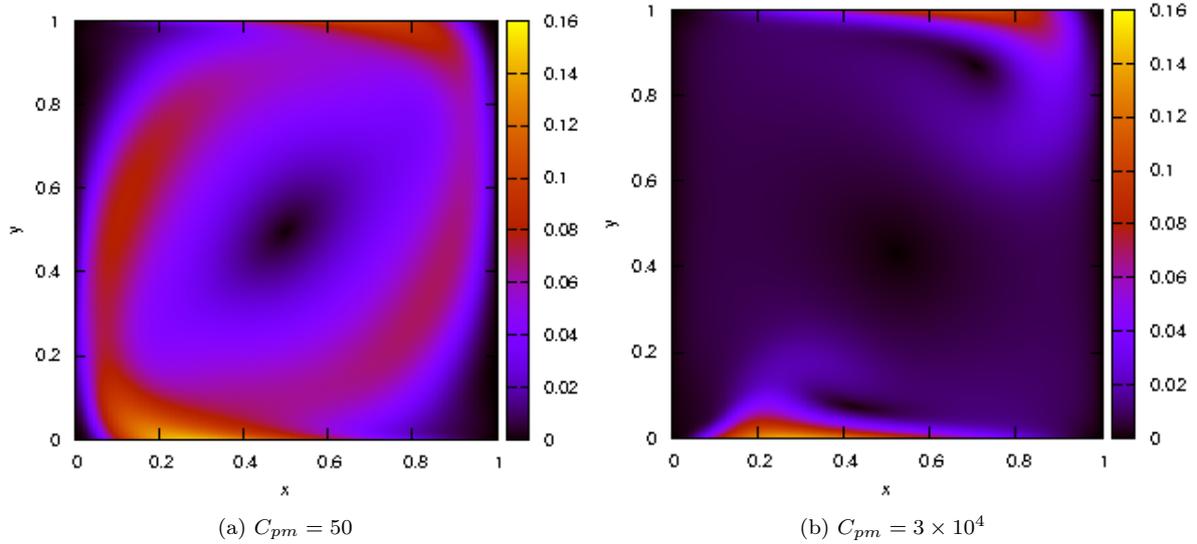


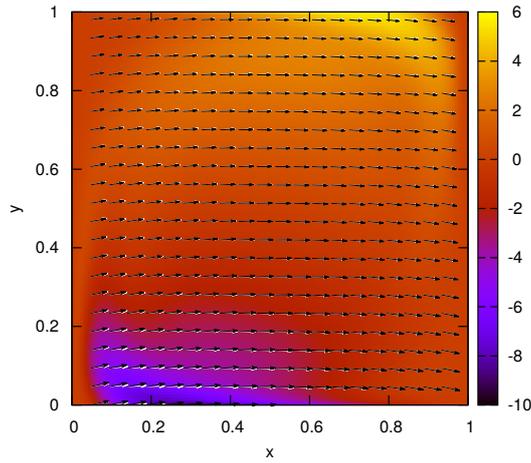
Figura 5.15: Mudança do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local.

A Figura (5.16) mostra os desvios da magnetização sob a influência do cisalhamento das paredes e do campo. Podemos notar que a Figura (5.16) em comparação com a Figura (5.8), tem desvios mais evidentes na parte inferior da cavidade e menos evidentes na parte superior da cavidade. A Figura (5.16)(a) nos mostra o desvio da magnetização em todo o domínio de escoamento que variam na faixa de 6° a -10° e são concentrados em pequenas regiões do escoamento. Veremos cada caso separadamente.

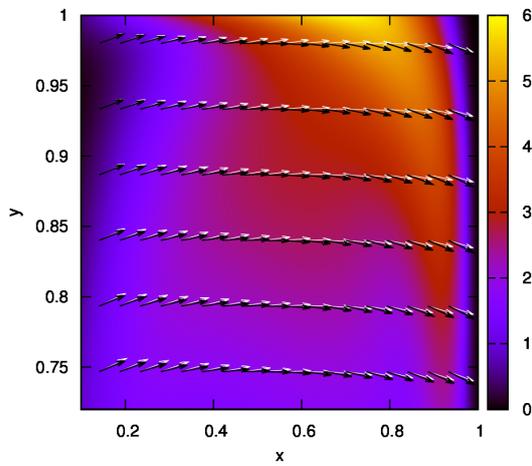
A Figura (5.16)(b) mostra a região em que a magnetização tem desvios positivos. Nas regiões, mais próximas ao fio que gera o campo magnético, conforme pode ser vista na na Figura (5.16)(c), os desvios são mais intensos do que na parte superior da cavidade pois o termo $\nabla \mathbf{M}$ é dominante nestas regiões, os notórios desvios chegam até 10° no sentido horário. Com os últimos gráficos, vimos que colocando uma parede a mais se movimentando temos várias alterações no escoamento, como: formações de novos vórtices, mudanças no campo velocidade, na magnetização, entre outros.

Portanto, agora veremos as mudanças causadas no perfil velocidade de u_x e u_y da Figura (5.17). A Figura (5.17)(a), mostra o perfil velocidade de $u_x(0.5, y)$, ao longo de uma reta horizontal no meio da cavidade. Em consoante ao caso puramente hidrodinâmico, $C_{pm} = 0$ exibe um perfil quase linear, mostrando que o escoamento tem uma rotação praticamente de corpo rígido.

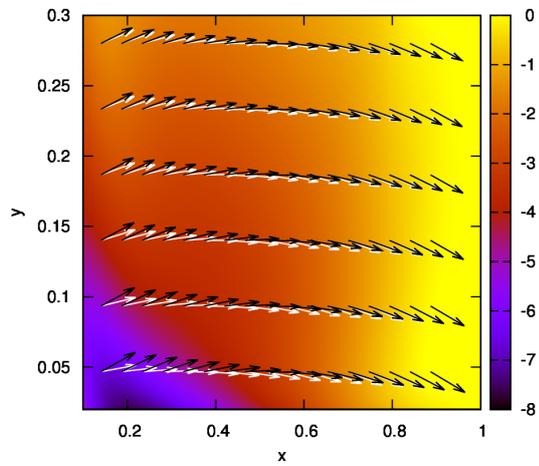
À medida que aumentamos o C_{pm} , a velocidade na região central diminuem gradativamente, evidenciando a quebra de rotação de corpo rígido. E a partir de $C_{pm} = 10^4$, observamos uma inversão do sentido da rotação da velocidade em alguns trechos do eixo central, este fato é justificado pois os dois vórtices se separam e se reorganizam com relação ao eixo central. Além disso, as maiores velocidades se concentram próximo às paredes que se movem. A Figura (5.17)(b), temos um perfil velocidade de $u_y(x, 0.5)$, ao longo de uma reta vertical no meio da cavidade $y = 0.5$. Para $C_{pm} = 0$ temos altos gradientes de velocidade que rotacionam como um corpo rígido. Quando aumentando o valor do C_{pm} , observamos que o escoamento perde a propriedade de rotação de corpo rígido, e, têm suas velocidades valores diminuídas gradativamente.



(a) Desvio da Magnetização em toda a cavidade

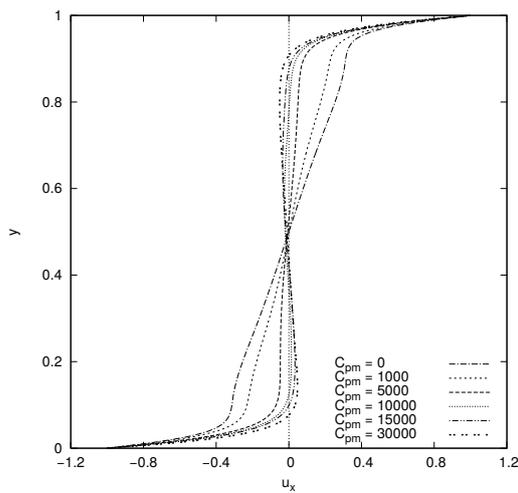


(b) Desvio positivo da Magnetização

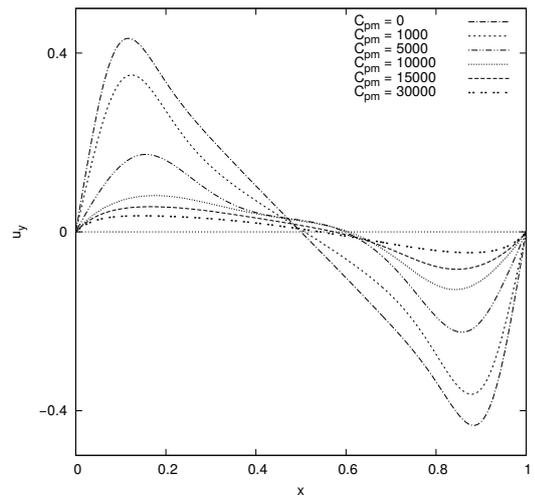


(c) Desvio negativo da Magnetização

Figura 5.16: Desalinhamento da magnetização dado em graus para $C_{pm} = 50$. Os vetores brancos representam a magnetização local e os vetores pretos representam a magnetização de equilíbrio local



(a) Perfil velocidade de u_x



(b) Perfil velocidade de u_y

Figura 5.17: Perfil velocidade para $Re = 500$ e diversos C_{pm} .

A Figura (5.18) mostra a força cisalhante das paredes superior e inferior para diferentes valores de C_{pm} . Notamos que a parede inferior, por estar cisalhando o escoamento próximo à fonte magnética, sofre uma força cujo valor absoluto é maior do que a força da parede superior.

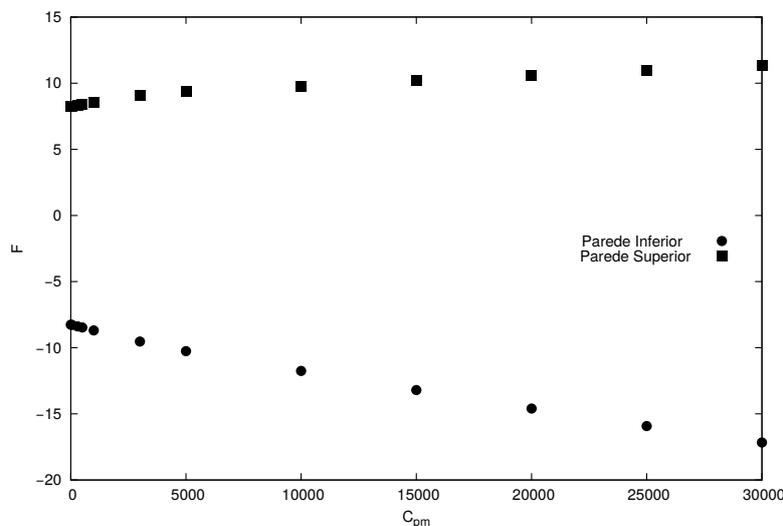


Figura 5.18: Comportamento da Força na parede superior e inferior para $Re = 500$ e diferentes valores de C_{pm} .

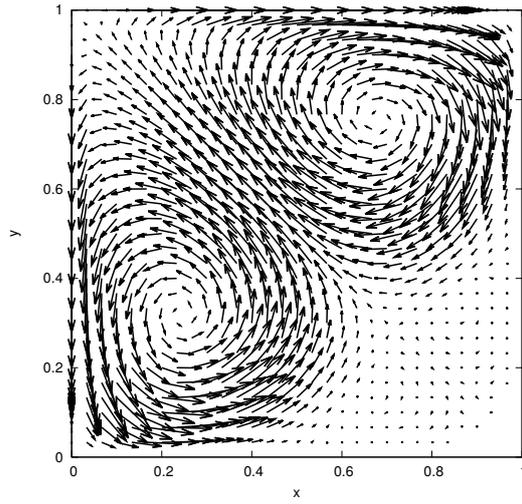
5.1.3 Cavidade com paredes superior e esquerda móveis

Nesta seção, discutiremos uma nova configuração da cavidade em que temos as paredes superior e esquerda móveis. Para uma melhor visualização do sentido do campo velocidade desse escoamento apresentamos a Figura (5.19).

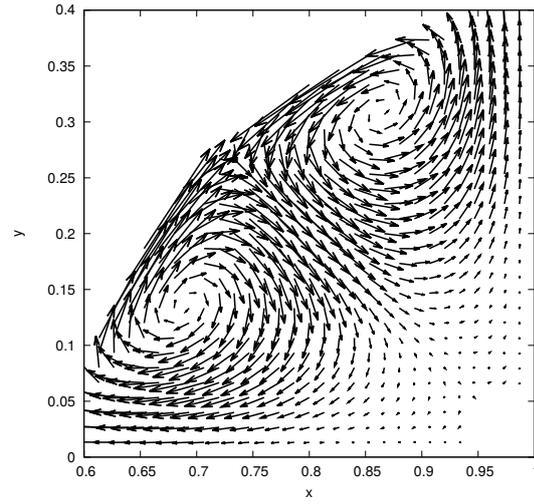
As Figuras (5.19)(a) e (b), mostram o sentido do campo velocidade para o caso em que $C_{pm} = 0$. Como a placa superior se move com velocidade positiva, para a direita, todo o fluido concentrado nesta região rotaciona no sentido horário. Já a parede esquerda se move com velocidade negativa, para baixo, e então a porção fluida desta região circula no sentido anti-horário. E conseqüentemente obtemos duas regiões menores na parte inferior direita no qual o fluido rotaciona no sentido anti-horário e na região inferior esquerda em que o fluido circula no sentido horário. A medida que aumentamos o campo magnético, as zonas de recirculação localizadas na parte inferior direita, são atraídas pelo campo magnético, e esta região integra-se ao escoamento principal das paredes superior e esquerda, e então, o escoamento passa a ser dividido em duas grandes regiões com sentidos opostos de velocidade, conforme podemos ver na Figura (5.19)(b) à (f).

A Figura (5.20) mostra as linhas e corrente para alguns valores de C_{pm} . Observamos que na Figura (5.20)(a), no caso puramente hidrodinâmico, temos um escoamento bem simétrico com seis zonas de recirculação, cujo os vórtices dominantes nesse escoamento encontram-se próximos das paredes cisalhantes, e o sentido de rotação de cada um deles pode ser visto na Figura (5.19)(a) e (b). Escolhemos valores

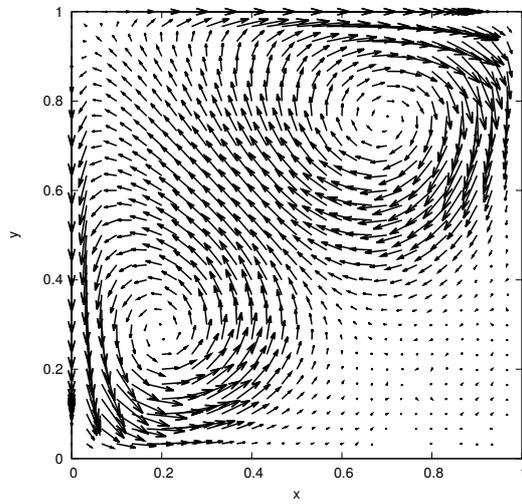
específicos de C_{pm} , a medida que vemos mudanças significativas nas configurações do escoamento. Desta forma, quando introduzimos o campo magnético, notamos a total assimetria do escoamento, e a diminuição de algumas estruturas que não causam mais influência efetiva para o escoamento, conforme podemos ver nas Figuras (5.20)(b) e (c). Por este motivo desprezamos estas regiões. Porém, este fato, torna-se ainda mais evidentes, para C_{pm} maiores, como mostra a Figura (5.20)(d) e (e), em que o campo magnético tem total influência sobre os vórtices localizados mais inferiormente, de forma a atraí-los, e então o escoamento passa a ser governado por dois grandes vórtices tal que o fluido que o compõem rotacionam em sentidos opostos.



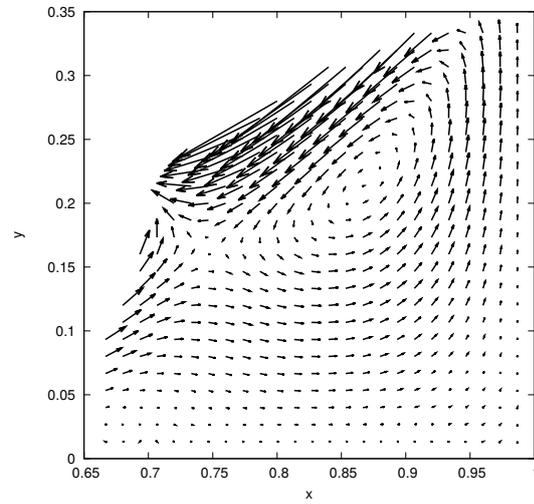
(a) $C_{pm} = 0$ - Vórtices Superiores



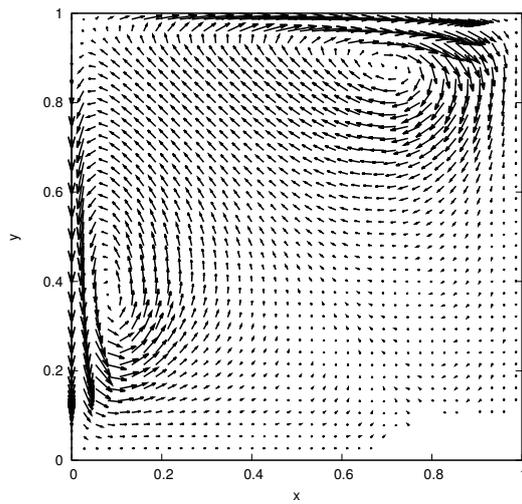
(b) $C_{pm} = 0$ - Vórtices Inferiores



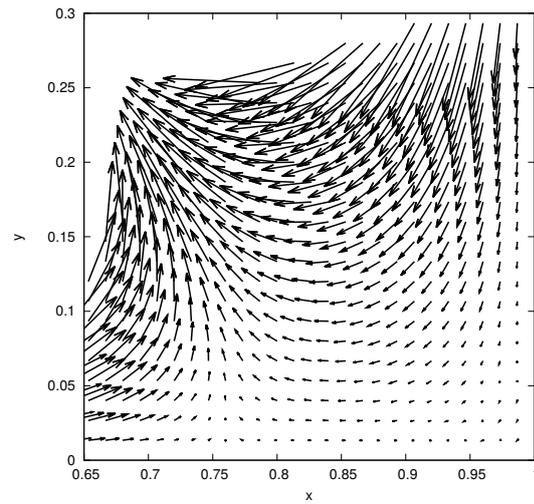
(c) $C_{pm} = 3 \times 10^3$ - Vórtices Superiores



(d) $C_{pm} = 3 \times 10^3$ - Vórtice Inferior

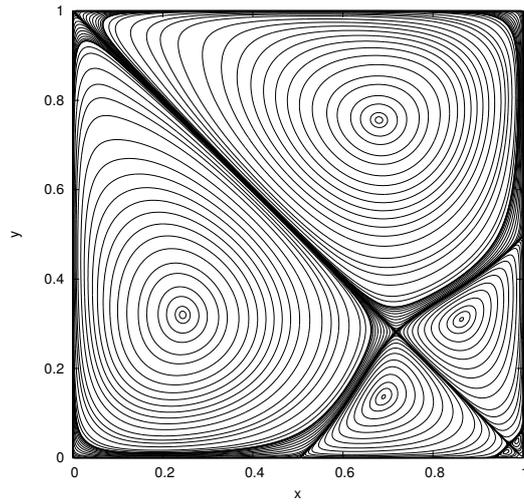


(e) $C_{pm} = 3 \times 10^4$ - Vórtices Superiores

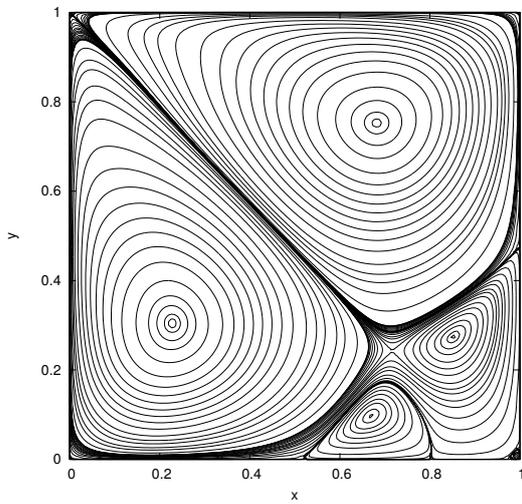


(f) $C_{pm} = 3 \times 10^4$ - Ausência de Vórtices

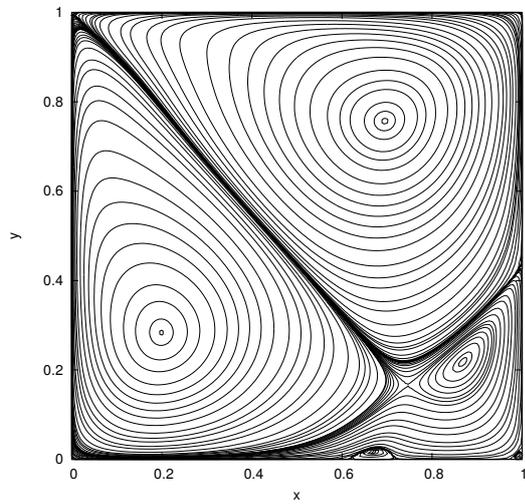
Figura 5.19: Campo velocidade para $Re = 500$ e alguns valores de C_{pm} .



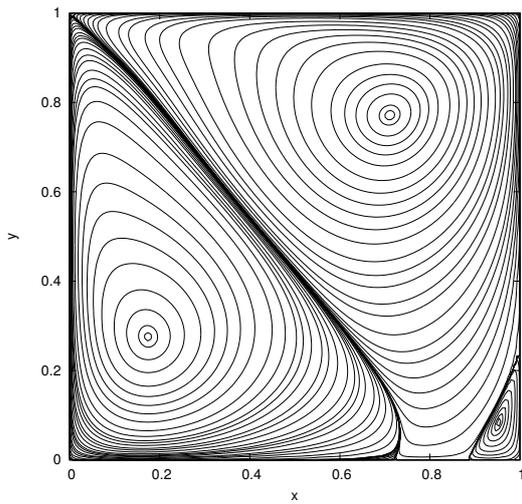
(a) $C_{pm} = 0$



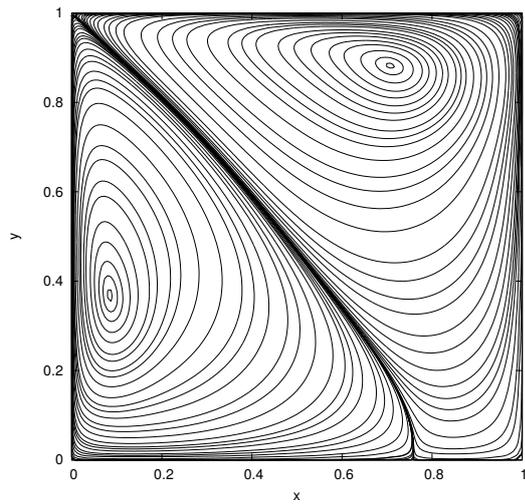
(b) $C_{pm} = 10^3$



(c) $C_{pm} = 3 \times 10^3$



(d) $C_{pm} = 5 \times 10^3$



(e) $C_{pm} = 3 \times 10^4$

Figura 5.20: Linhas de corrente para $Re = 500$ e diversos valores de C_{pm} .

A Figura (5.21) mostra o aumento ou decaimento percentual da magnetização com relação a magnetização de equilíbrio local para esta configuração. A Figura (5.21)(a), mostram as evidentes regiões próximas as paredes superior e esquerda, que são exatamente os locais com maiores velocidades, com maiores percentuais de magnetização. As regiões localizados na parede inferior direita e nos centros dos vórtices indicam regiões com velocidades muito baixas, e, portanto, há pouca advecção de magnetização, fazendo com que o escoamento não altera seu tamanho nestes locais. Quando aumentamos o valor de C_{pm} , o escoamento sofre uma grande reorganização que vem acompanhado de reduções significativas de velocidades do escoamento, principalmente na região inferior da cavidade, fazendo com que o termo de advecção perca importância em relação ao termo de equilíbrio, conforme podemos ver na Figura (5.21)(b).

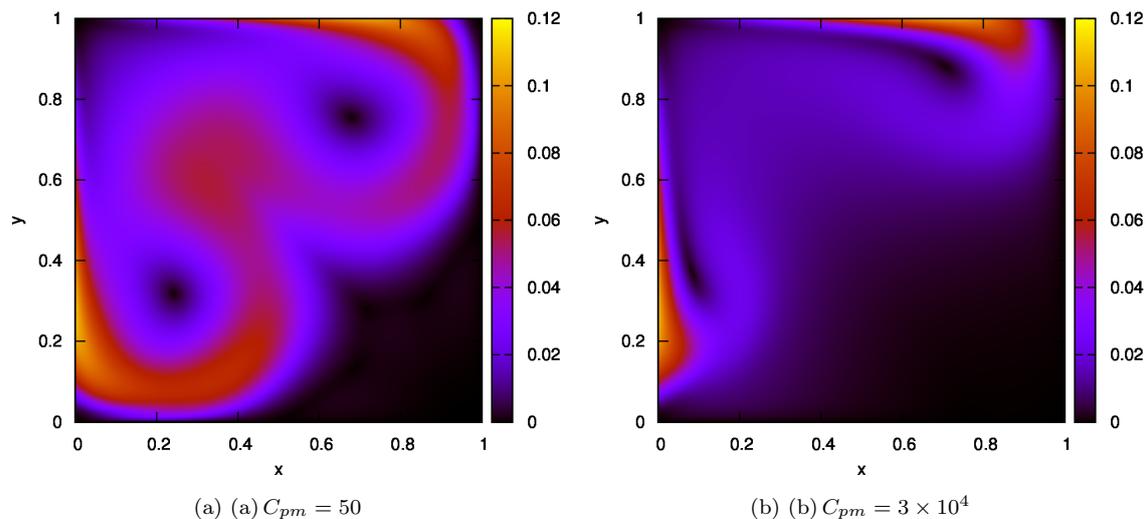


Figura 5.21: Mudança percentual do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local.

A Figura (5.22) mostra os desvios angulares da magnetização para este tipo de configuração de cavidade. A Figura (5.22)(a), são os desvios angulares para todo o domínio da cavidade. (5.22)(b) e (c) mostram uma foto ampliada do escoamento, em que podemos identificar os maiores desvios no sentido positivo da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio local, em duas regiões distintas do escoamento, uma inicia-se perto da parede superior e se espalha ao longo desta e a outra inicia-se perto da parede esquerda e estende ao longo dela, respectivamente, evidenciando a influência do mecanismo de convecção da magnetização. Embora a Figura (5.22)(c) seja uma região próxima a fonte de campo magnético, que tenta conservar a magnetização do fluido no equilíbrio, a translação que a parede esquerda impõe nessa localidade é dominante, e faz com que o desvio angular rotacione no sentido oposto ao seu equilíbrio. A Figura (5.22)(d) mostra a região central do escoamento, em que há a predominância de desvios negativos bem moderados em relação a Figura (5.22)(b) e (c), pois o termo de convecção é importante apenas em duas regiões pontuais do escoamento, parede superior e a parede esquerda.

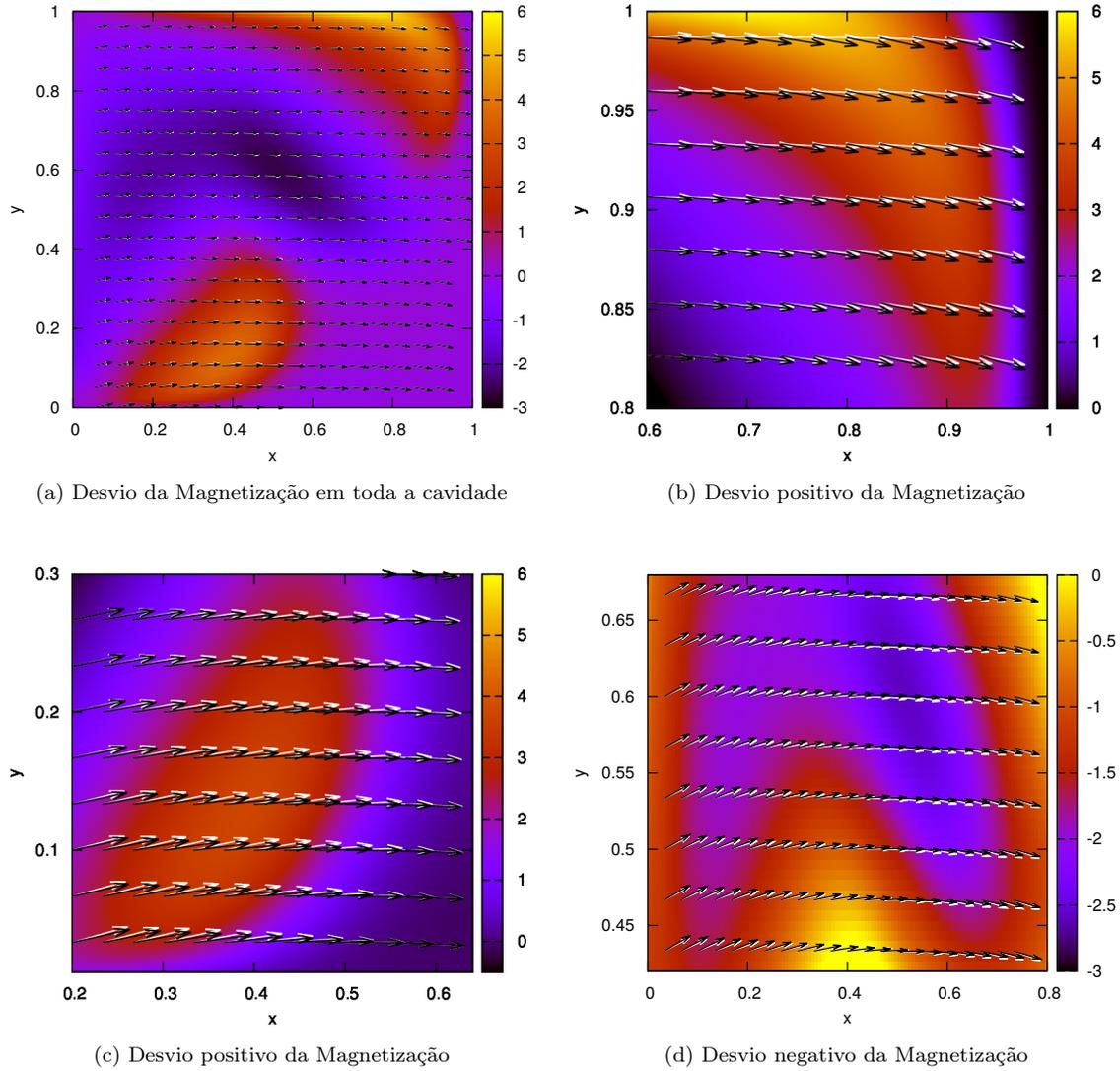


Figura 5.22: Desalinhamento da magnetização dado em graus para $C_{pm} = 50$. Os vetores brancos representam a magnetização local e os vetores pretos representam a magnetização de equilíbrio local.

A Figura (5.23) representa os perfis velocidade de u_x e u_y . Na figura (5.23)(a) observamos que a medida que C_{pm} aumenta as maiores velocidades dominam significativamente o escoamento, concentrando-se perto da parede superior, além disso a camada limite nesta região, torna-se cada vez mais fina com C_{pm} . Nas regiões mais próximas ao campo magnético, o fluido é atraído na direção do campo magnético e suas velocidades são diminuídas.

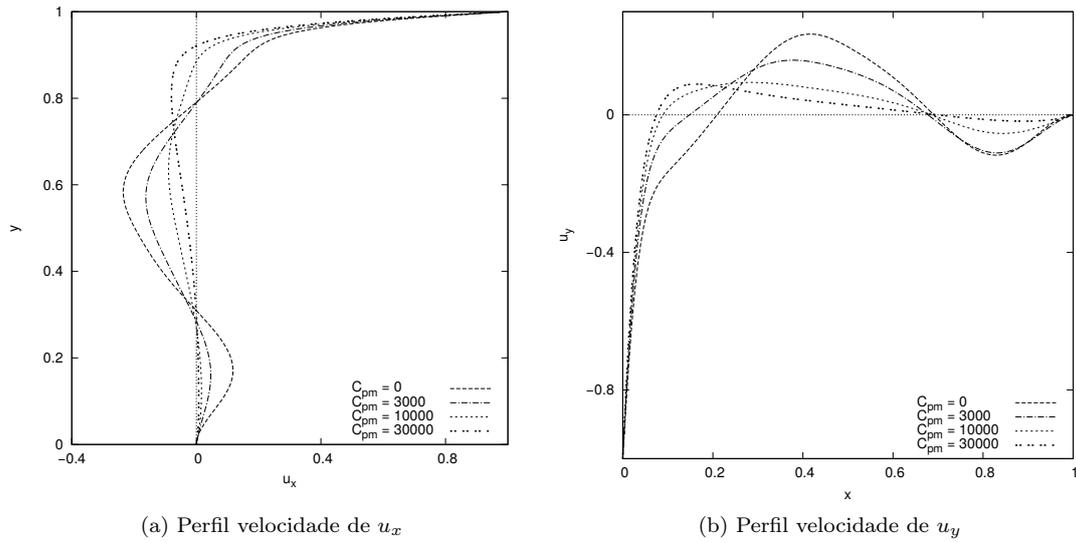


Figura 5.23: Perfil velocidade para $Re = 500$ e diversos C_{pm} .

A Figura (5.24) nos mostra o valor da força nas paredes superior e esquerda. Notamos um lento crescimento das forças, à medida que C_{pm} cresce. A assimetria do escoamento faz-se evidente ao vermos que a força na parede esquerda, tem um suave crescimento maior do que a força na parede superior, uma vez que esta encontra-se mais perto da fonte magnética e sente mais intensamente as mudanças no escoamento causadas pelo campo.

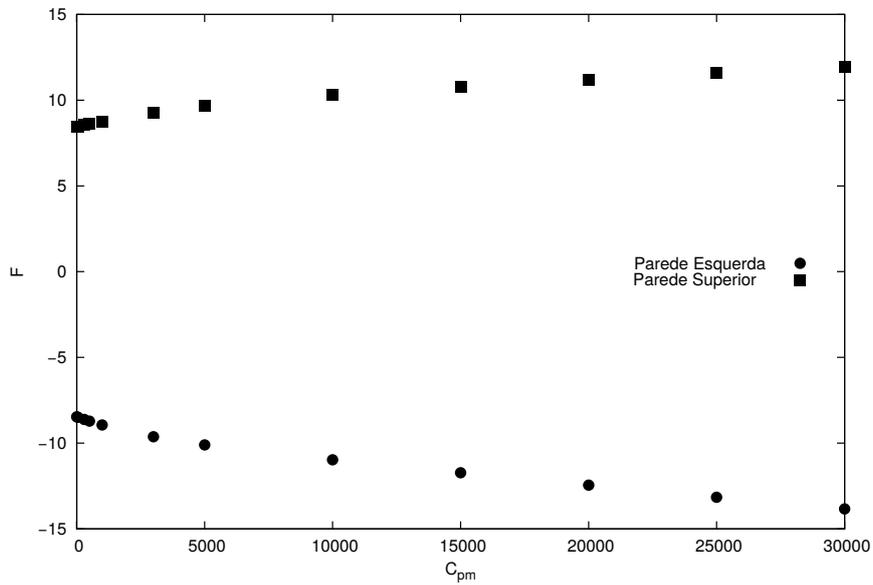


Figura 5.24: Comportamento da força da parede superior e esquerda para $Re = 500$ e diferentes valores de C_{pm} .

5.1.4 Cavidade com todas as paredes móveis

Esta última configuração são as quatro paredes móveis, em que, a parede superior se movimenta para a direita, a parede inferior para esquerda, a parede direita para cima e a parede esquerda para baixo. A fim de que o sentido desse escoamento fique claro, apresentamos na Figura (5.25) o campo velocidade para $Re = 500$ e alguns valores de C_{pm} .

A Figura (5.25)(a), mostra que para $C_{pm} = 0$, temos quatro regiões de recirculação no escoamento, cujos sentidos de rotação acompanham o movimento da placa próxima a respectiva região. A medida que C_{pm} aumenta, a zona de recirculação perto da parede inferior se une a região de recirculação próxima da parede superior, tornando-se uma grande região fluida na parte central da cavidade com dois vórtices que obedecem os mesmos sentidos de velocidade, este fato está ilustrado na Figura (5.25)(b) e (c). A Figura (5.25)(d) mostra que aumentando C_{pm} , o campo velocidade volta a ter uma configuração similar ao da Figura (5.25)(a), porém com velocidades e gradientes de velocidade bem reduzidos em quase todo o escoamento, exceto nas regiões de altas taxas de cisalhamento próximas as quinas $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

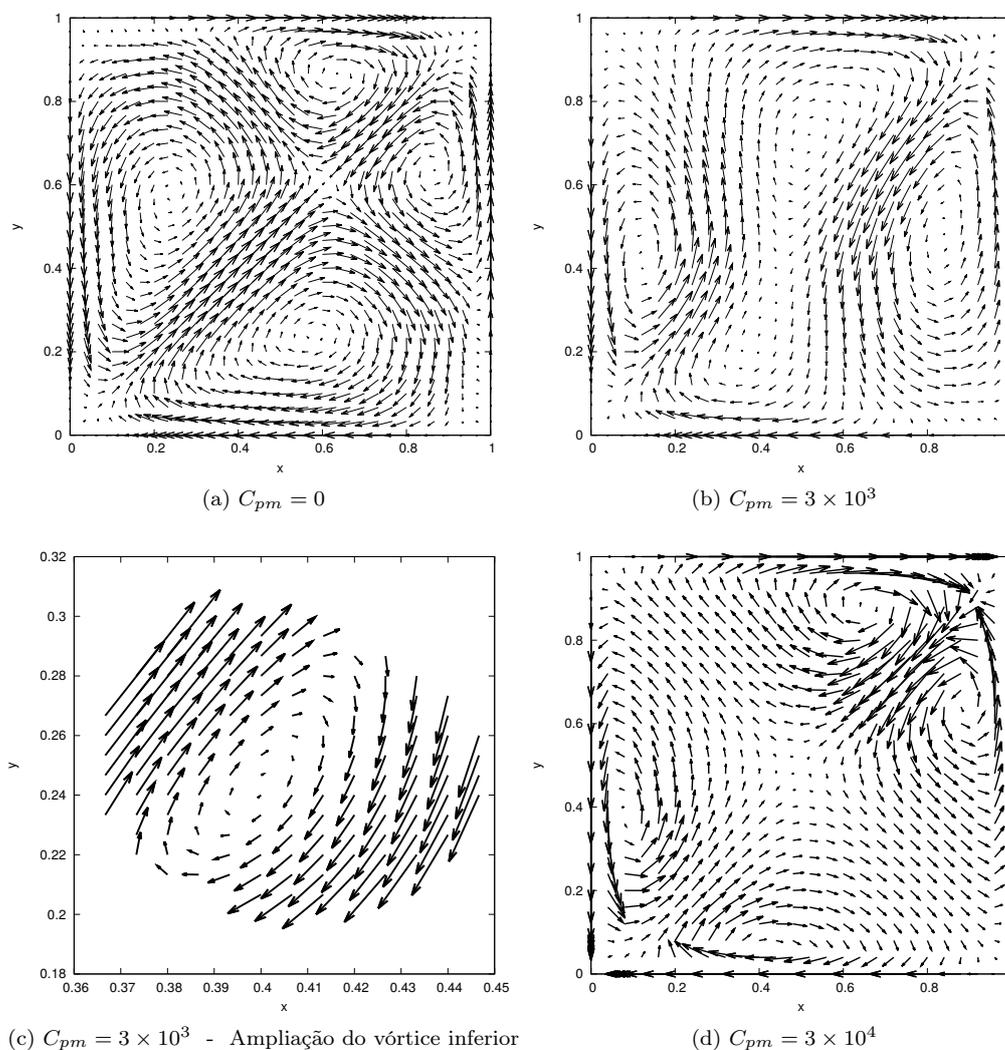


Figura 5.25: Campo velocidade para $Re = 500$ e vários valores de C_{pm} .

Conforme visto na seção 4.4, para $C_{pm} = 0$ e $Re = 500$, temos uma solução estável assimétrica para este caso. A fim de estudar o comportamento do escoamento conforme C_{pm} aumenta, escolhemos essa solução assimétrica como referência. Portanto, todas as configurações apresentadas na Figura (5.26), são soluções estáveis assimétricas para esse problema. Podemos ver na Figura (5.26)(a), que o escoamento está sendo movido para o mesmo sentido que as placas superior e inferior se movimentam.

Entretanto, quando aumentamos a força de campo magnético, que quer puxar o escoamento para baixo, há uma ruptura do ponto de estagnação da Figura (5.26)(a), fazendo com que os vórtices localizados nas regiões superior e inferior se colapsam formando uma grande zona de recirculação na parte central do escoamento, porém, para um C_{pm} crítico, esta região central, se divide em duas zonas de recirculação, uma na parte inferior menor, com o mesmo sentido de rotação, conforme podemos ver na Figuras (5.26)(b) e (c).

A Figura (5.26)(d), para $C_{pm} = 3 \times 10^4$, mostra que a fonte magnética é tão influente que consegue arrastar uma porção considerável de fluido para perto da parede inferior, fazendo com que o escoamento volte a ser dividido em quatro zonas de recirculação separadas por um ponto de estagnação. Esta configuração é similar ao da Figura (5.26)(a), com a diferença de que os vórtices estão acompanhando o sentido das suas respectivas placas cisalhantes.

Na Figura (5.27)(a), para $C_{pm} = 50$, notamos que os efeitos significativos da magnetização ocorrem nas regiões da parede superior do lado direito, da parede inferior, do lado esquerdo, da parede direita, para cima, e da parede esquerda, para baixo, que são os locais de maiores velocidades e gradientes de velocidades, e são essas regiões que transportam, de forma eficiente, o fluido magnetizado para os locais entre, aproximadamente as faixas $0.2 < x < 0.4$ e $0.25 < y < 0.9$, e, $0.5 < x < 0.75$ e $0.1 < y < 0.5$, nos quais temos efeitos relevantes do aumento da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio local. As regiões onde as velocidades são pequenas o termo $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M}$ não tem influência sobre o escoamento e então o termo de equilíbrio é dominante.

Na Figura (5.27)(b), para $C_{pm} = 3 \times 10^4$, notamos que o termo de equilíbrio é dominante em quase todo o domínio de escoamento, exceto nas regiões próximas das paredes, indicadas na Figura (5.27)(a), que tem uma pequena influência do aumento da magnetização.

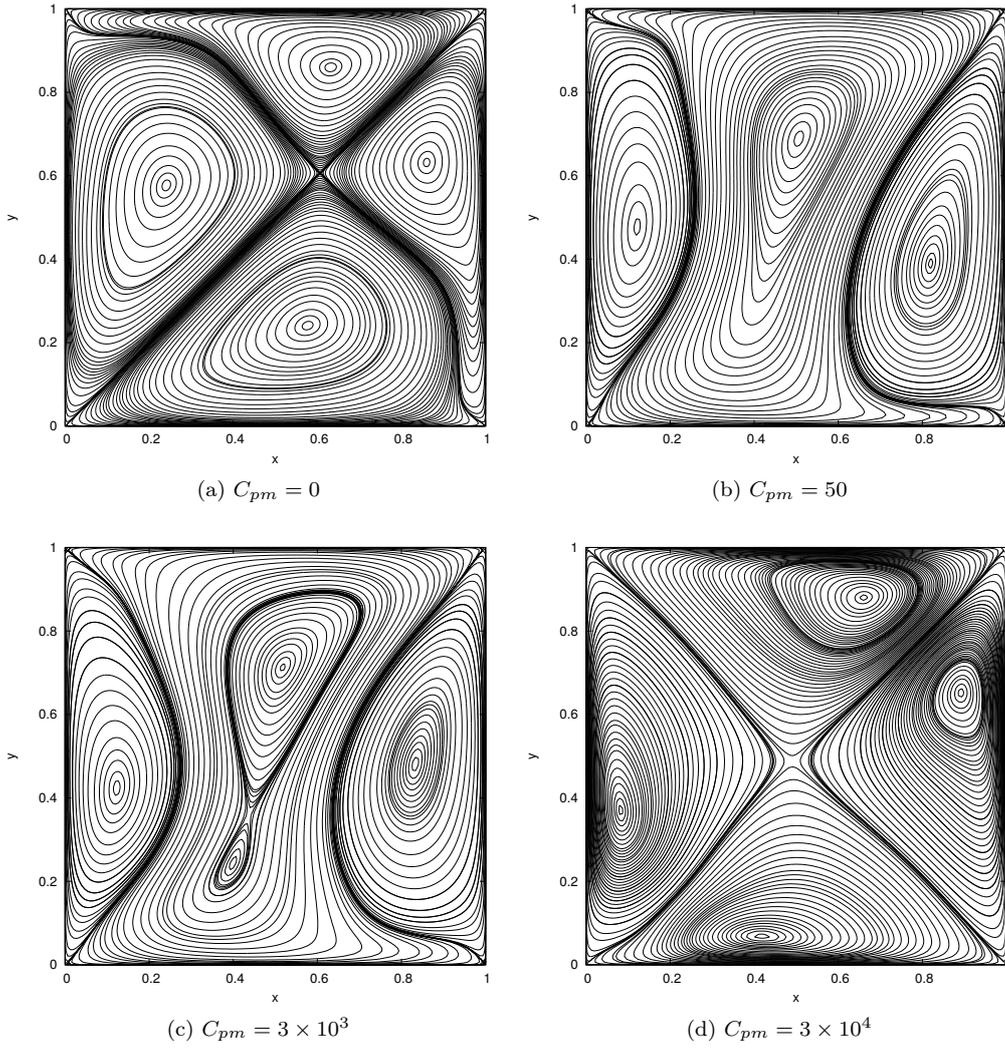


Figura 5.26: Linhas de corrente para $Re = 500$ e diversos c_{pm} .

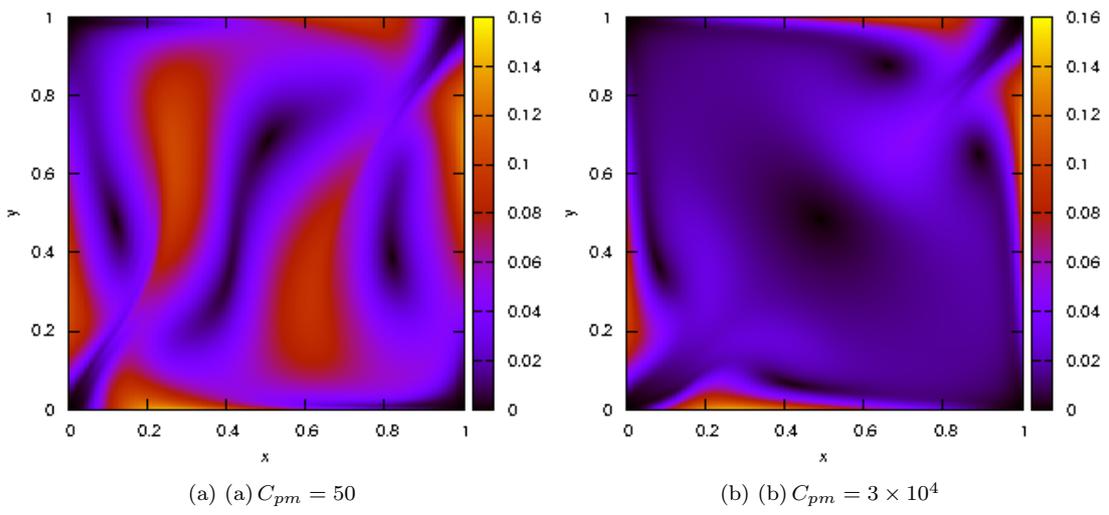
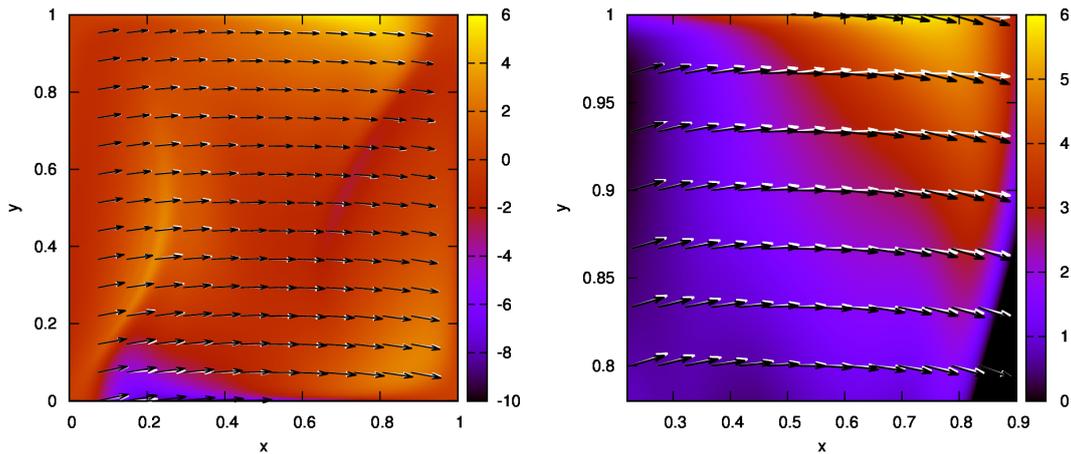


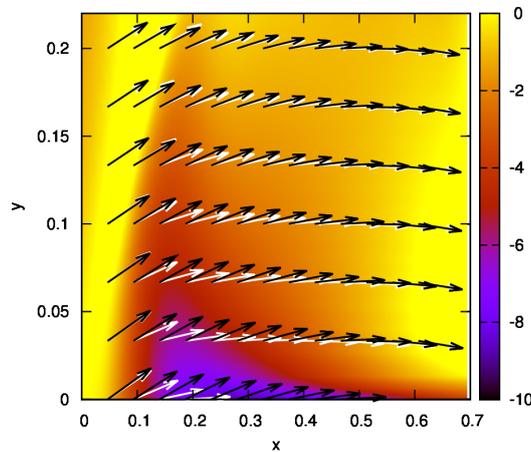
Figura 5.27: Mudança percentual do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local.

A Figura (5.28)(a) mostra os desvios da magnetização em todo o domínio de escoamento. A fim de investigar melhor os desvios, ampliamos as regiões de desvio positivo e negativo na Figura (5.28)(b) e (c). Notamos que os desalinhamentos mais efetivos ocorrem nas mesmas regiões em que temos aumentos percentuais favoráveis da magnetização, porém devido a grande contribuição de $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, em particular, na região inferior do escoamento, em que temos altos gradiente de campo magnético e altas taxas de cisalhamento das paredes, temos que, para este caso, ocorrem os maiores desalinhamentos da magnetização com relação a magnetização de equilíbrio local, comparando com os casos das configurações de cavidade das subseções 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3, chegando a até -10° .



(a) Desvio da Magnetização em toda a cavidade

(b) Desvio positivo da Magnetização



(c) Desvio negativo da Magnetização

Figura 5.28: Desalinhamento angular da magnetização dado em graus para $C_{pm} = 50$. Os vetores Brancos representam a magnetização local e vetores pretos representam a magnetização de equilíbrio local.

A Figura (5.29)(a) mostra os perfis de velocidades u_x no meio da cavidade para vários valores de C_{pm} . Observamos formas bem assimétricas e não lineares. Para $C_{pm} = 0$ o perfil assume quatro inversões no sentido do escoamento com altas velocidades nas paredes superior e esquerda. Para $C_{pm} = 50$ há apenas uma inversão no sentido da velocidade do escoamento, que ocorre em $x \approx 0.5$. A medida que aumentamos

C_{pm} o perfil volta a ter quatro inversões no sentido do escoamento e velocidades e gradientes de velocidades elevados nas paredes superior e inferior da cavidade. Na região inferior, o perfil tem o formato afunilado, devido a intensa atração do campo magnético.

Analogamente temos a Figura (5.29)(b), que mostra o perfil velocidade de u_y , analisado ao longo de uma reta vertical no meio da cavidade.

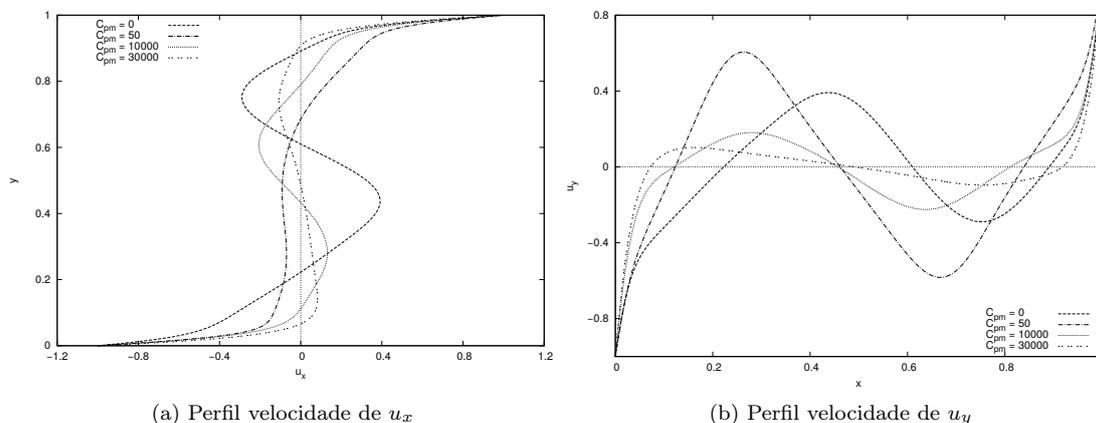


Figura 5.29: Perfil velocidade para $Re = 500$ e diversos C_{pm} .

Na Figura (5.30) obtemos as forças nas quatro paredes móveis do escoamento em relação a C_{pm} , tais que, elas crescem no mesmo sentido da velocidade da sua placa, porém notamos que a placa inferior é que possui a maior força, pois é a mais afetada nas mudanças do escoamento causadas pelo campo magnético. A que tem força menor, é a placa superior, pois está mais distante do campo e não sofre tanto as alterações que o campo causa no escoamento.

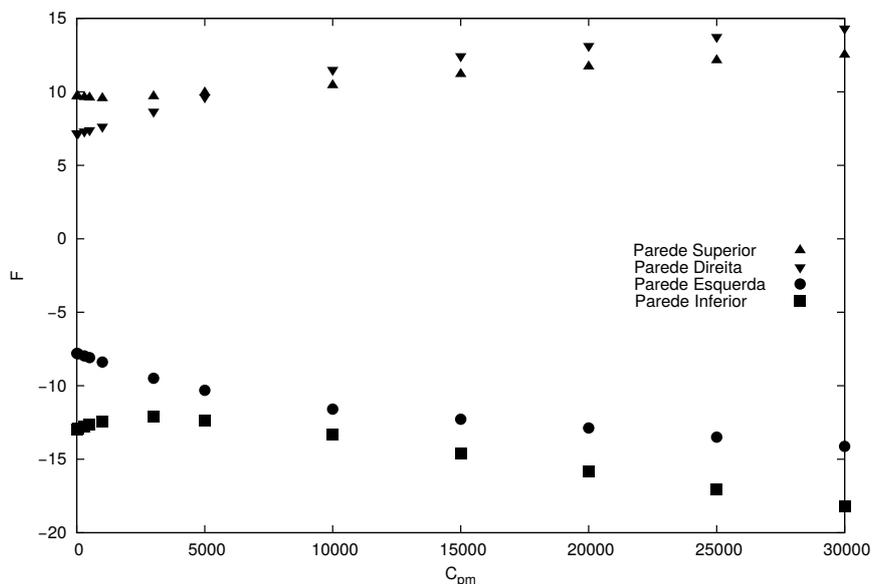


Figura 5.30: comportamento da Força de cada placa móvel para $Re = 500$ e diferentes valores de C_{pm} .

5.2 Equação da magnetização com os termos de advecção, equilíbrio e vorticidade

Como já foi dito, temos como objetivo analisar a influência de cada termo da equação da magnetização de Shliomis, em [35]. Nesta seção, vamos explorar os efeitos da equação da magnetização com os termos de equilíbrio, convectivo e vorticidade, isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = -\frac{1}{\tau}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) + \frac{1}{2}\xi \times \mathbf{M}. \quad (5.3)$$

Queremos pontuar as principais mudanças no escoamento em relação ao que foi visto na seção 5.1 com a equação (5.1), pois quando adicionamos o termo de vorticidade na equação da magnetização (5.3) teremos um desalinhamento da magnetização com a vorticidade. Todos os resultados desta seção foram plotados para um valor fixo de $Re = 500$, e foram analisados para cada uma das paredes cisalhantes, conforme a Figura (3.1).

5.2.1 Cavidade com parede superior móvel

A Figura (5.31), mostra as linhas de corrente para $C_{pm} = 0$ e para $C_{pm} = 10^3$. Comparando os escoamentos das Figuras (5.31)(a) e (b), vemos que com a nova equação da magnetização, não obtemos a geração de novas estruturas vorticiais, como na Figura (5.2), porém notamos que o vórtice principal move-se para o lado direito da cavidade, no sentido da placa móvel.

O que ocorre na Figura (5.31)(b) é explicado pela Figura (5.31)(c), onde podemos ver as linhas da força magnética agindo no escoamento. Observamos que, a partir de $x = 0.6$, as linhas de força estão sendo apontadas para a direita, indicando que a força está puxando uma porção fluida considerável nesta região e conseqüentemente comprimindo o vórtice localizado na parte inferior direita. Por outro lado, olhando a região em que $0 < x < 0.6$ notamos que a força está apontando quase que verticalmente para baixo, o que explica a Figura(5.31)(b) o fato do fluido está movendo-se para baixo da cavidade.

Em correspondência aos resultados das Figuras (5.31)(a) e (b), o campo de velocidade para estes escoamentos, nos mostram as regiões de altos e baixos gradientes de velocidades. Na Figura (5.32) podemos observar uma mudança no comportamento do campo velocidade entre $C_{pm} = 0$ e $C_{pm} = 10^3$, pois como vemos em (5.32)(b), o fluido em alta velocidade concentrado perto das paredes superior e direita escoam em uma região mais próxima a parede inferior do que a da Figura (5.32)(a), indicando a compatibilidade com as linhas de força atrativas, que vimos na Figura (5.31)(c). Igualmente podemos ver na Figura (5.32)(b) as velocidades menos intensas nas regiões em que o fluido é contido pela força magnética. Concluimos, então, que a distribuição de fluido escoando a altas e baixas velocidade na cavidade são alteradas devido a força de campo magnético.

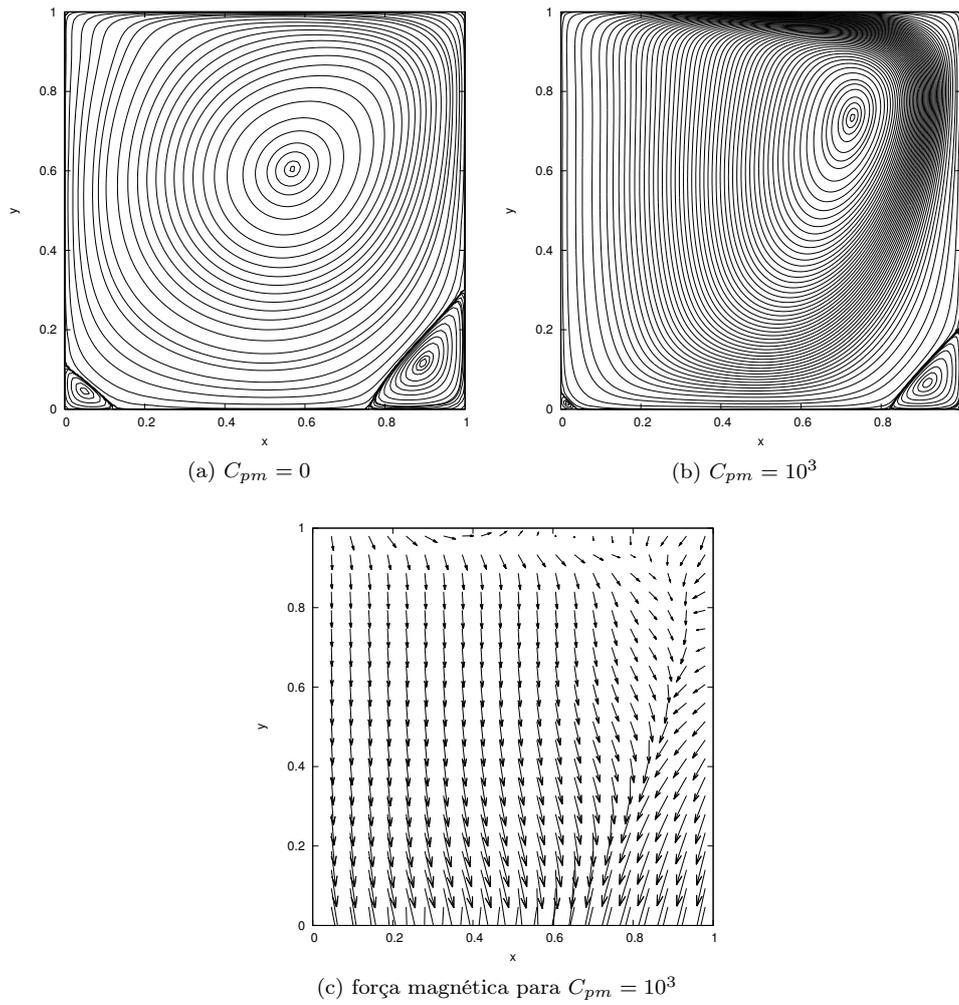


Figura 5.31: Linhas de corrente para $Re = 500$, $C_{pm} = 0$, $C_{pm} = 10^3$ e a força magnética para $C_{pm} = 10^3$.

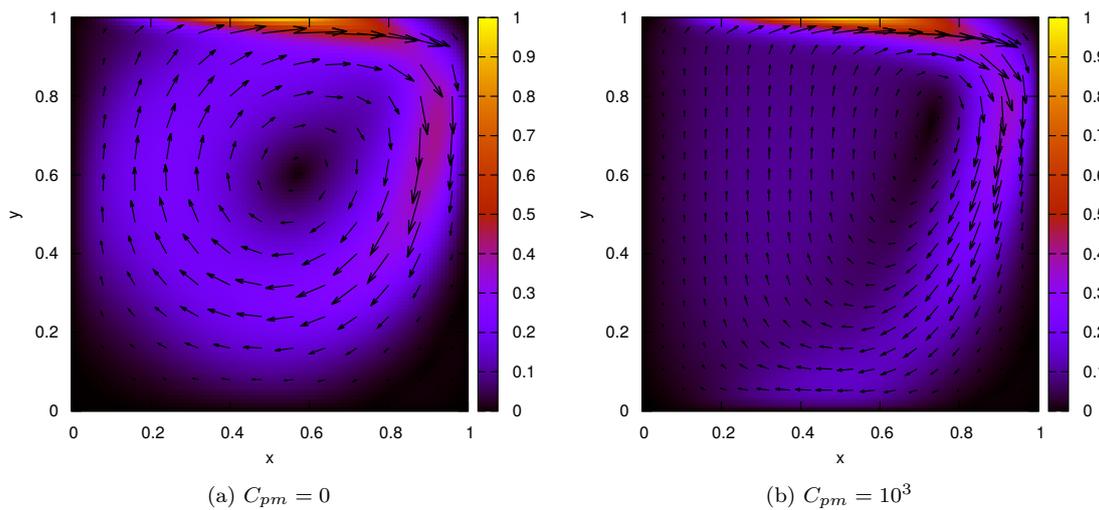


Figura 5.32: Módulo do campo velocidade para (a) $C_{pm} = 0$ e (b) $C_{pm} = 10^3$.

A Figura (5.33) mostra o desvio angular da magnetização com relação a magnetização de equilíbrio, para $C_{pm} = 10^3$. Estes resultados são apresentados em duas perspectivas: a primeira mostra os vetores da magnetização sobrepostos ao campo de sinal da vorticidade e a segunda quantifica os desvios observados.

Percebe-se claramente uma correlação entre a mudança de orientação da magnetização e o sinal da vorticidade. Notemos que na Figura (5.33)(a), temos o campo de sinal da vorticidade em todo o escoamento agindo sobre a variação da magnetização. Analisamos que nas regiões adjacentes às paredes laterais, a vorticidade possui sinal positivo, indicando que o fluido nesta área está sendo rotacionado no sentido anti-horário, e conseqüentemente, forçando a variação da magnetização assumir um desalinhamento na mesma orientação, de acordo com a regra da mão direita. Analogamente, a região central possui sinal da vorticidade negativo, portanto o fluido nesta região é rotacionado no sentido horário, fazendo com que a variação da magnetização seja desalinhada neste sentido.

Na Figura (5.33)(b), apresentamos o desvio angular da magnetização sobre a influência do termo $\xi \times \mathbf{M}$ na equação da magnetização, e concluímos que os maiores desvios angulares, tanto no sentido horário quanto no anti-horário, ocorrem nas regiões de maior valor absoluto da vorticidade. Os locais em que o valor da vorticidade é baixo, os desvios angulares são bem menores, indicando, provavelmente, que essa contribuição é da ordem dos termos da advecção.

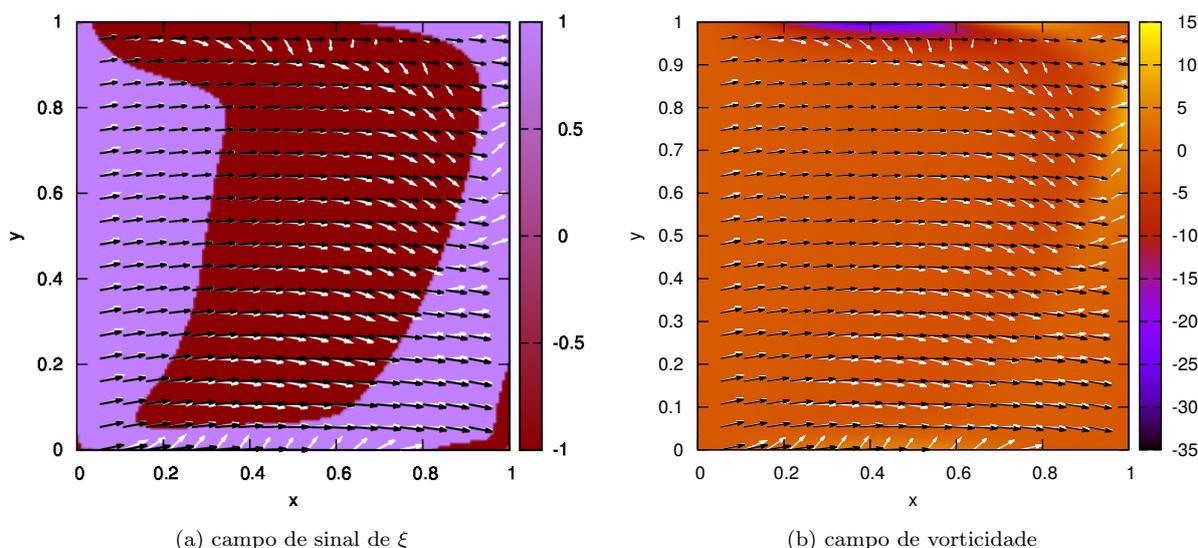


Figura 5.33: Representação do desvio angular da magnetização para $C_{pm} = 10^3$, em que, (a) desvio da magnetização sobreposto ao campo de sinal de ξ e (b) desvio da magnetização sobreposto ao campo de vorticidade do escoamento

A Figura (5.34) compara o desvio angular da magnetização, quando tomamos a equação da magnetização com os termos da advecção e de equilíbrio, conforme a equação (5.1), e com a equação com os termos da advecção, equilíbrio e vorticidade, conforme a equação (5.3). É evidente que os principais desvios são causados pela interação da vorticidade na magnetização, podendo alcançar um desvio angular até 200° . O termo convectivo tem uma contribuição pequena no escoamento, apenas próximo a parede superior.

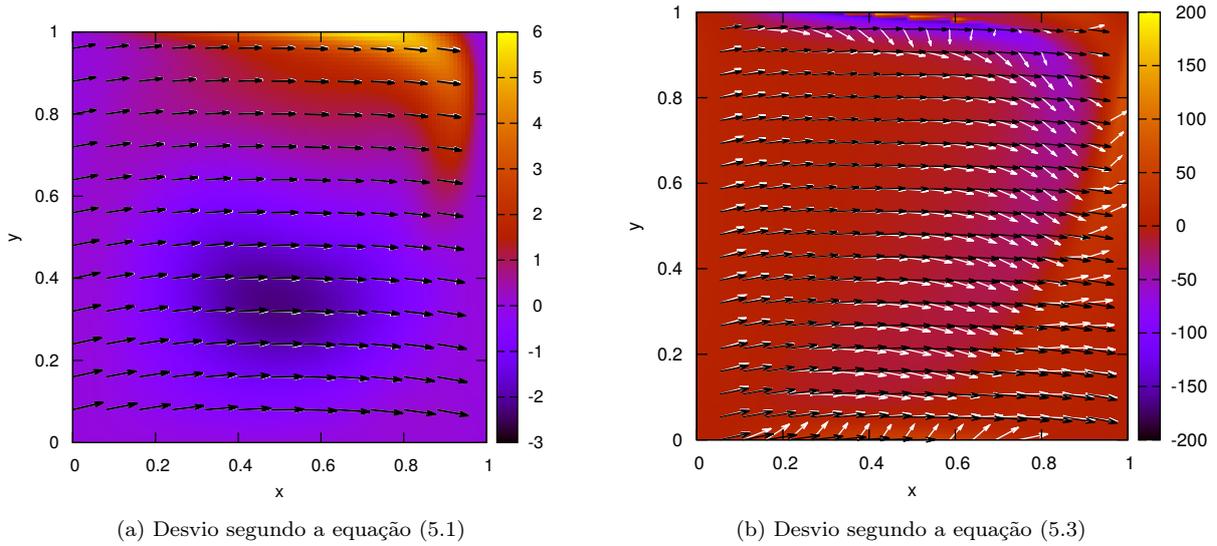
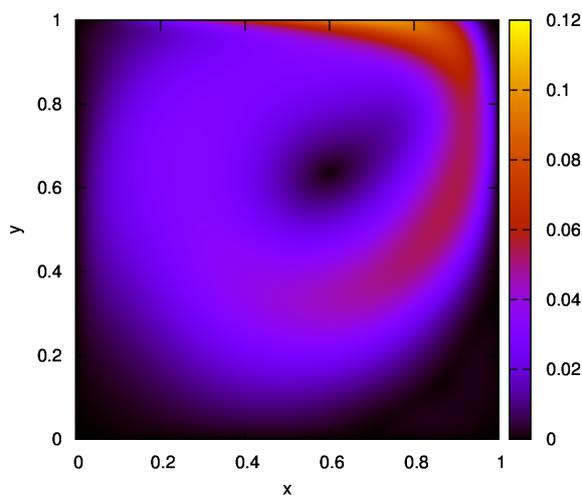


Figura 5.34: Desvio da magnetização, dado em graus para $C_{pm} = 10^3$. Os vetores brancos representam à magnetização local e os vetores preto representam à magnetização de equilíbrio local.

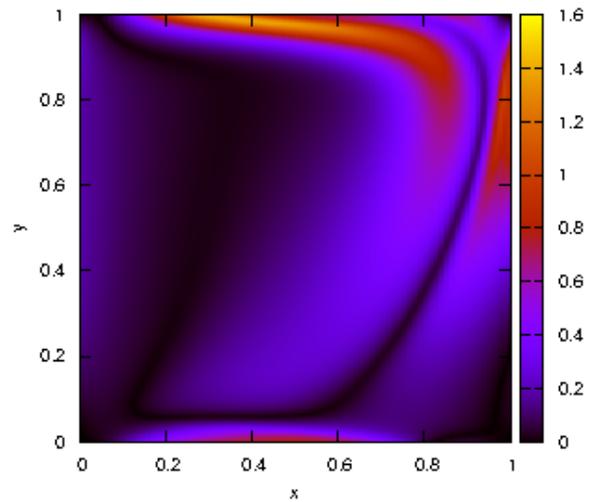
É importante ressaltar que a variação da magnetização não se dá apenas na orientação dos desvios angulares da magnetização, mas também há uma alteração do seu módulo, cujos responsáveis são os termos de advecção, como visto na seção 5.1, e agora, a vorticidade. Portanto, na Figura (5.35)(a), estamos considerando essencialmente os aumentos causados pelo termo convectivo, que se concentram nas regiões de maiores velocidades. Já a Figura (5.35)(b), em que estamos incluindo o termo de vorticidade na equação da magnetização, nota-se um aumento 13 vez maior do que na Figura (5.35)(a), porém em uma região mais concisa. Estes aumentos foram causados devido a alta vorticidade da parede superior, e dos altos gradientes de campo, próximo a parede inferior. Afastando-se dessas regiões o termo de equilíbrio torna-se dominante.

A Figura (5.36) representa o perfil das componentes x e y da magnetização no centro da cavidade para $C_{pm} = 50$ e para $C_{pm} = 1,5 \times 10^3$. Na Figura (5.36)(a) observamos que próximo à parede superior temos a primeira mudança de orientação da magnetização, onde observamos que a componente x da magnetização torna-se negativa em uma pequena região do escoamento, devido ao grande desalinhamento da magnetização causada pela vorticidade. Posteriormente temos a segunda mudança de orientação, tornando a componente x da magnetização positiva na maior parte do escoamento e mantendo-a na mesma direção do campo magnético.

Na Figura (5.36)(b) próxima à parede esquerda temos que a componente y da magnetização é positiva. Posteriormente temos a primeira inversão de orientação da magnetização, tornando sua componente y negativa. Próximo a parede direita temos a segunda inversão de orientação da magnetização, tornando-se a componente positiva novamente. Note que a mudança de C_{pm} não altera qualitativamente o descrito acima.

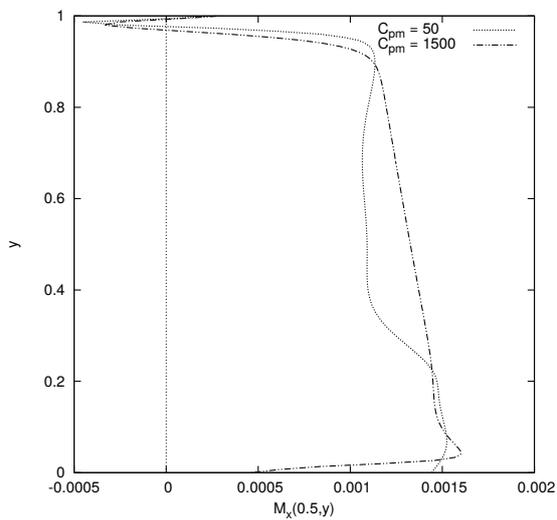


(a) Segundo a equação (5.1)

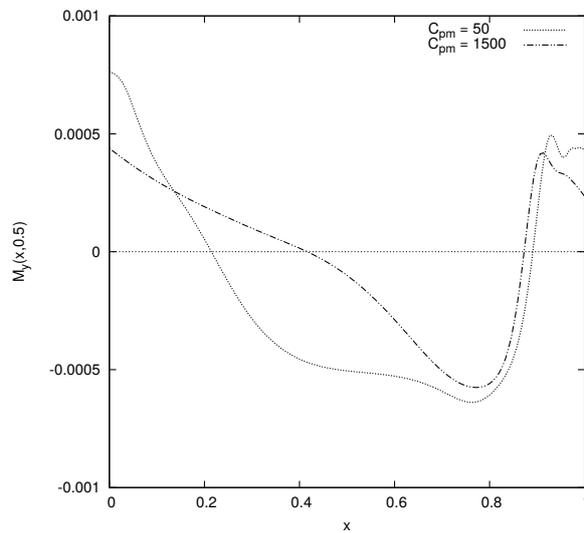


(b) Segundo a equação (5.3)

Figura 5.35: Mudança percentual do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 10^3$.



(a) Perfil da magnetização M_x



(b) Perfil da magnetização M_y

Figura 5.36: Perfil da magnetização para $Re = 500$ e alguns valores de C_{pm} .

A Figura (5.37) mostra o perfil vorticidade no centro da cavidade para alguns valores de C_{pm} . Nas Figuras (5.37)(a) e (b) notamos que as paredes são responsáveis pela geração de vorticidade no escoamento, pois nestas regiões se encontram as maiores velocidades. Note também que a influência dos efeitos magnéticos nestes perfis é limitada.

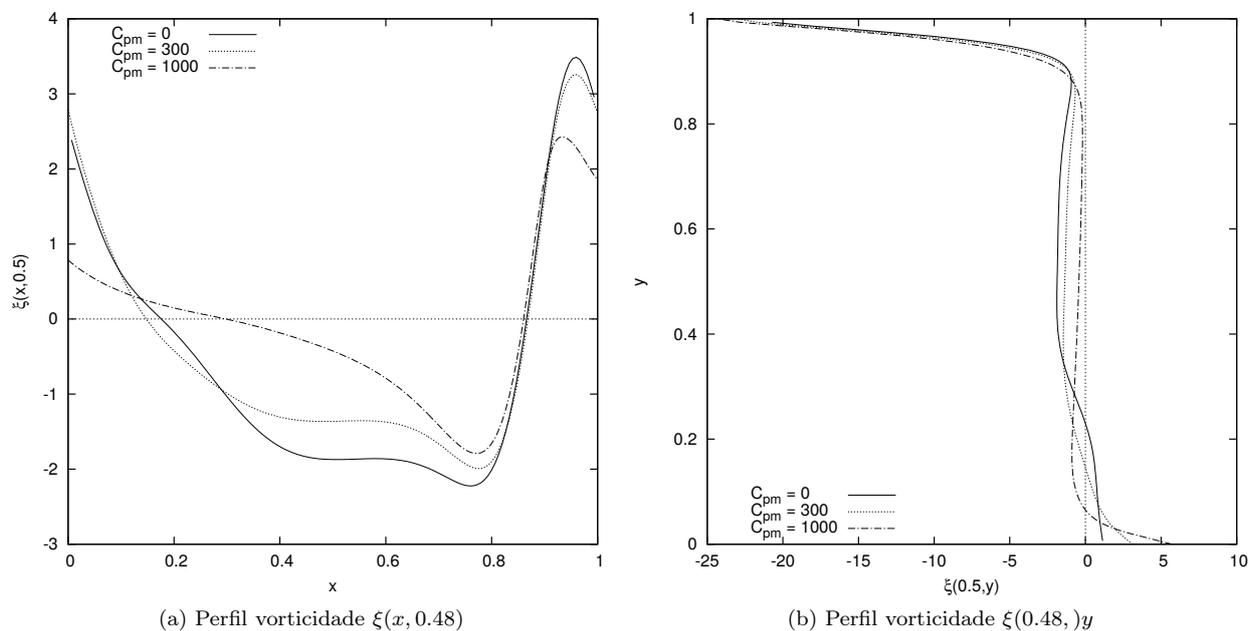


Figura 5.37: Perfil vorticidade para $Re = 500$ e alguns valores de C_{pm} .

5.2.2 Cavidade com paredes superior e esquerda móveis

A Figura (5.38) mostra a evolução das linhas de corrente para o regime permanente, considerando $Re = 500$ e $C_{pm} = 50$. Na Figura (5.38)(a) temos dois grandes vórtices no início do escoamento. Nas Figuras (5.38)(b) e (c) há uma mudança na configuração do escoamento no canto inferior direito da cavidade. À medida em que o tempo avança, há uma formação de duas estruturas que evoluem e permanecem nesta região até atingir o regime permanente, conforme a Figura (5.38)(f).

Um outro exemplo que demonstra a evolução das linhas de corrente, pode ser visto na Figura (5.39) para $Re = 500$ e $C_{pm} = 5 \times 10^2$. A Figura (5.39)(a) mostra que inicialmente o escoamento tinha apenas duas zonas grandes de recirculação. Na Figura (5.39)(b) temos a formação de uma pequeno vórtice localizado perto da parede inferior direita. A Figura (5.39)(c) e (d) ilustram o desaparecimento do vórtice da Figura(5.39)(b) e um avanço do escoamento na parte inferior da cavidade, até que para tempos maiores as Figuras (5.39)(e) e (f) mostram a formação de uma nova estrutura perto da parede inferior.

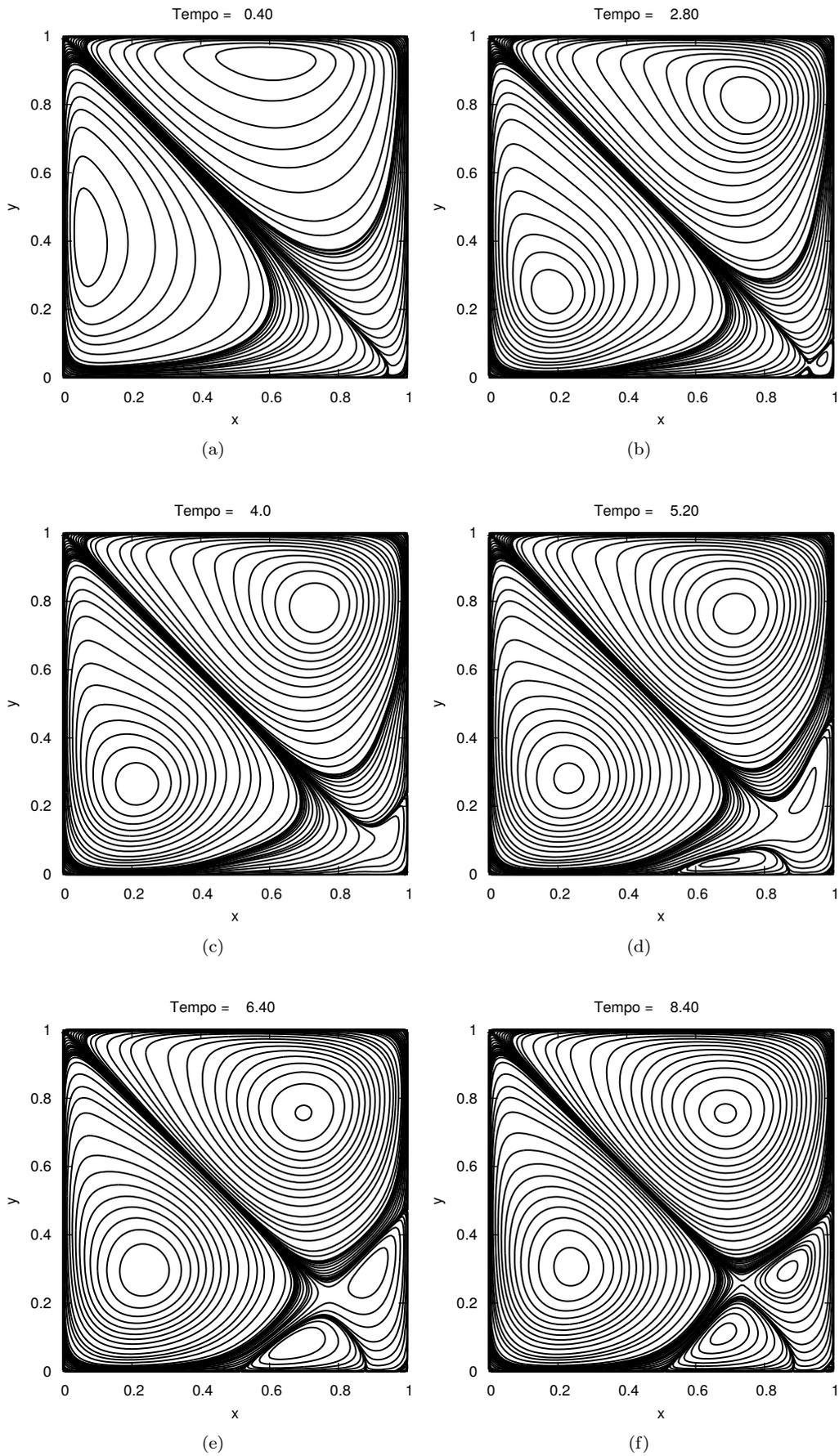


Figura 5.38: Evolução das linhas de corrente para $Re = 500$, $C_{pm} = 50$.

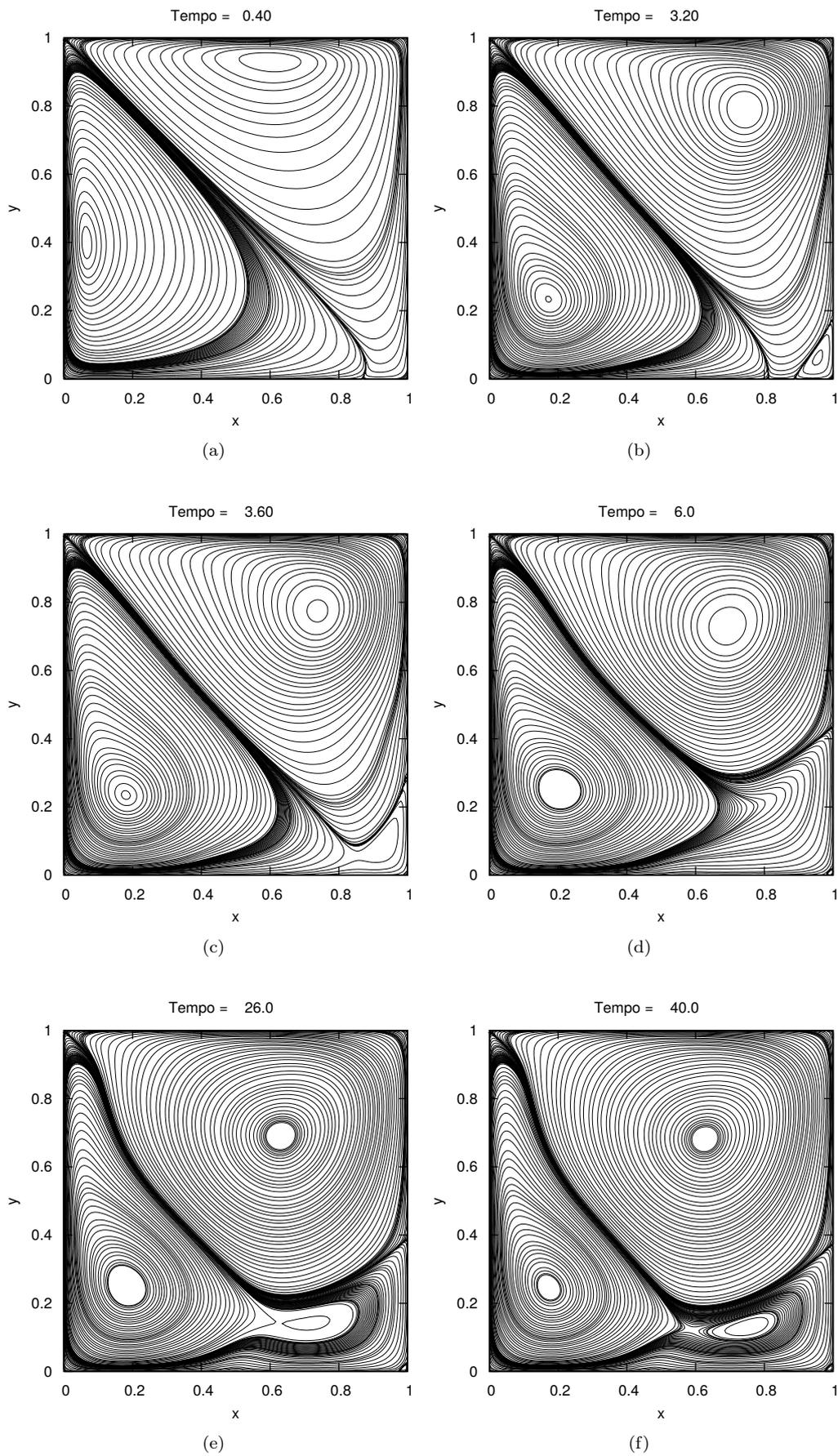


Figura 5.39: Evolução das linhas de corrente para $Re = 500$, $C_{pm} = 5 \times 10^2$.

A Figura (5.38) e a Figura (5.39) mostraram como o escoamento se comporta no regime transiente, para os valores de $C_{pm} = 50$ e $C_{pm} = 5 \times 10^2$. Agora, a fim de analisar o regime permanente do escoamento, plotamos na Figura (5.40) suas linhas de corrente para os principais valores de $C_{pm} = 0, 50, 2 \times 10^2, 5 \times 10^2$ e 10^4 em que notamos as diversas formas de como o escoamento reage com o aumento de C_{pm} . Além disso, observamos a força magnética para $C_{pm} = 10^3$.

Na Figura (5.40)(a), temos a presença de seis vórtices e dois pontos de estagnação. O primeiro ponto está localizado entre os quatro vórtices principais e o segundo ponto está localizados entre os dois vórtices pequenos, próximo a quina inferior direita. Quando analisamos $C_{pm} = 50$ estes dois pontos de estagnação deixam de existir, de forma que o escoamento passa a transitar na região que existia o primeiro ponto de estagnação, aumentando assim o tamanho do vórtice mediano próximo à parede direita.

Conforme aumentamos a força magnética, os dois principais vórtices são atraídos pelo campo e ocupam praticamente todo o escoamento, a menos de um vórtice pequeno na região inferior da cavidade. Aumentando C_{pm} de 2×10^2 para 5×10^2 , vemos que o vórtice central inferior desaparece e o vórtice do canto direito ganhou volume e achatou-se próxima a fonte magnética.

Aumentando ainda mais o valor de C_{pm} , o campo magnético atrai o escoamento mais intensamente para baixo, permanecendo um grande vórtice principal, que agora se estende entre as duas paredes horizontais, ou seja, um vórtice grande na parede esquerda e um pequeno na parede inferior direita.

A Figura (5.40)(f) mostra como a força magnética se comporta no escoamento e podemos ver a correlação da força com o observado na Figura (5.40)(e). De fato, para aproximadamente $x > 0.3$, as linhas de força estão sendo atraídas para a direita, indicando que há uma grande porção fluida sendo arrastada para o lado direito da cavidade, e em aproximadamente $x < 0.3$ as linhas são puxadas para a esquerda, pois temos a força da parede atraindo o fluido, e então há uma concentração do fluido nesta região.

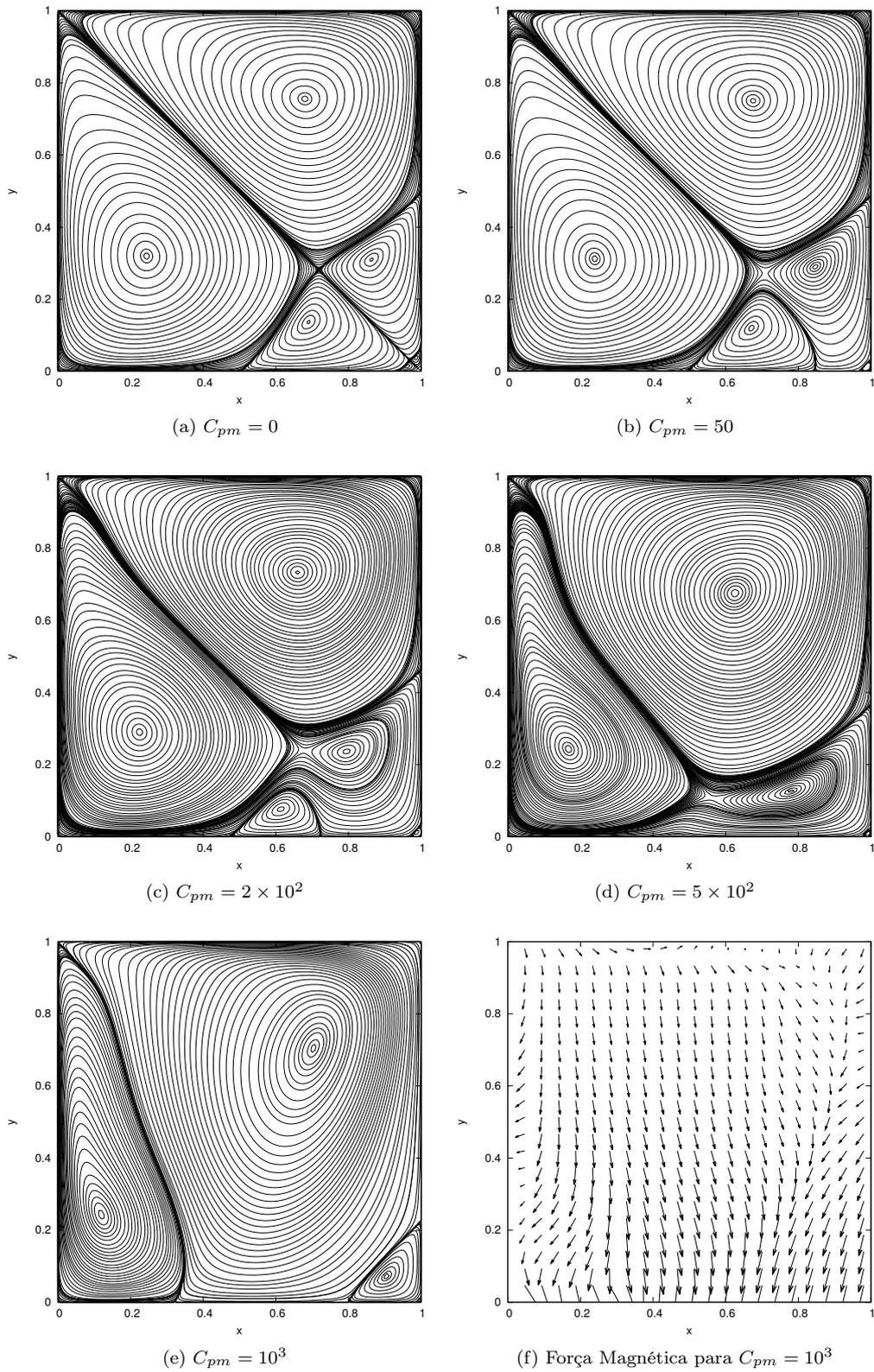


Figura 5.40: Linhas de corrente para $Re = 500$, $C_{pm} = 0, 50, 2 \times 10^2, 5 \times 10^2$ e 10^3 e a força magnética para $C_{pm} = 10^3$.

A Figura (5.41) mostra a diferença entre os campos velocidade para $C_{pm} = 0$ e $C_{pm} = 10^3$. Podemos ver que a Figura (5.41)(b) é condizente com as linhas de força que vimos na Figura (5.40)(f), pois a partir de $x > 0.3$, observamos que a porção fluida é arrastada para cima e para o lado direito da cavidade, as maiores velocidades são concentradas próximo a parede superior direita. Entretanto, do lado oposto, há uma região menor tal que o centro do vórtice é puxado para baixo e perto da parede esquerda, que também é um local de altas velocidades.

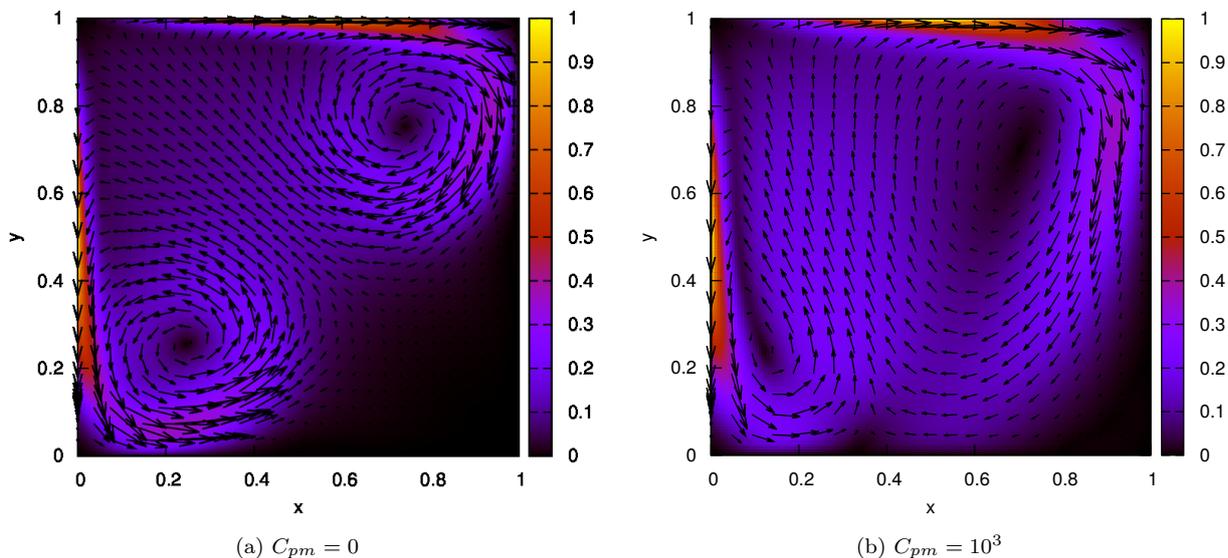


Figura 5.41: módulo do campo velocidade para $C_{pm} = 0$ e $C_{pm} = 10^3$.

A Figura (5.42) mostra os desvios angulares da magnetização na atual configuração com mais uma parede móvel. Na Figura (5.42)(a), temos que as regiões adjacentes às paredes laterais, indicam que a vorticidade possui sinal positivo e por consequência o desvio da magnetização se dá no sentido anti-horário, e por outro lado, a região central, tem vorticidade com sinal negativo e portanto o desvio angular desalinha no sentido horário.

Notamos uma suave diferença da Figura (5.42)(a) em relação a Figura (5.33)(a), pois a região cuja a magnetização desalinha no sentido horário foi amplificada devido ao cisalhamento adicional da parede esquerda. Analisando a Figura (5.42)(b), observamos que, para a situação atual, além de obtermos um aumento importante no valor da vorticidade, em relação ao da Figura (5.33)(b), a influência do termo da vorticidade atinge mais regiões do escoamento.

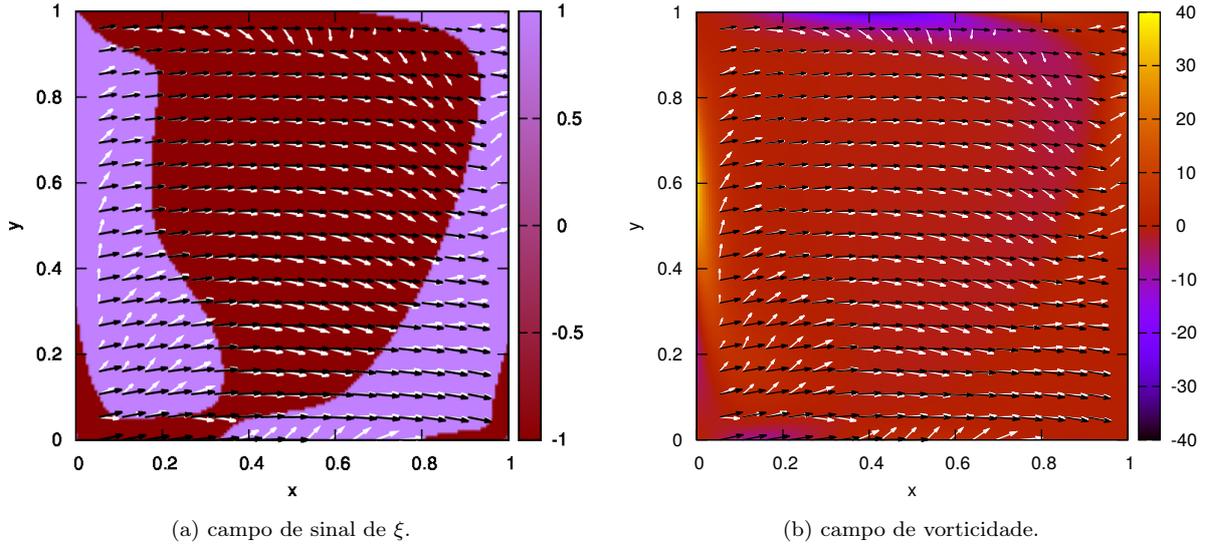


Figura 5.42: Representação do desvio angular da magnetização para $C_{pm} = 10^3$, em que, (a) desvio da magnetização sobreposto ao campo de sinal de ξ e (b) desvio da magnetização sobreposto ao campo de vorticidade do escoamento.

Na Figura (5.43) podemos ver o aumento percentual da magnetização e notamos que, com o termo da vorticidade imposto na equação, os aumentos são aproximadamente 13 vezes maiores do que os aumentos com apenas o termo convectivo, implicando que o termo da vorticidade é bem mais eficiente. As regiões de aumento são aquelas de maiores gradientes de velocidades.

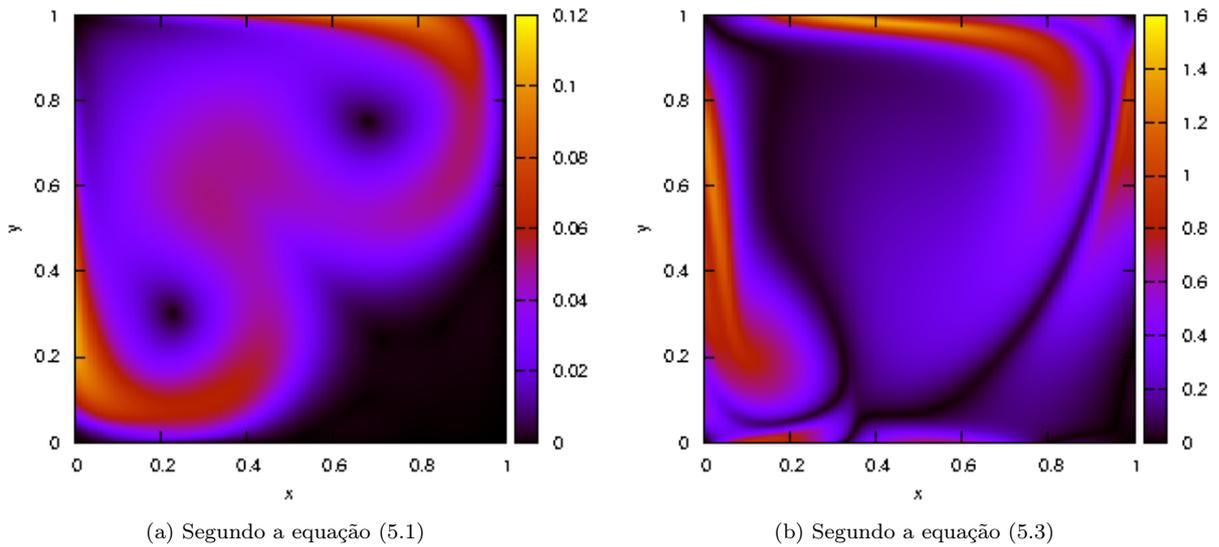


Figura 5.43: Mudança percentual do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 10^3$.

Na Figura (5.44), temos dois desvios angulares e seus respectivos valores em graus, em que a Figura (5.44)(a) é sem o termo da vorticidade na equação da magnetização e a Figura (5.44)(b) é com o termo da vorticidade na equação da magnetização. Na Figura (5.44)(a), observamos desvios menores, em graus, comparados a Figura (5.34)(a), quando provia apenas uma placa se movendo, porém, a região em que se encontram os desvios máximos, paredes superior direita e inferior esquerda, é maior. Na Figura (5.44)(b), temos que os valores de referência dos desvios angulares são similares ao da Figura (5.34)(b), entretanto são consideravelmente mais evidentes em uma porção maior da cavidade.

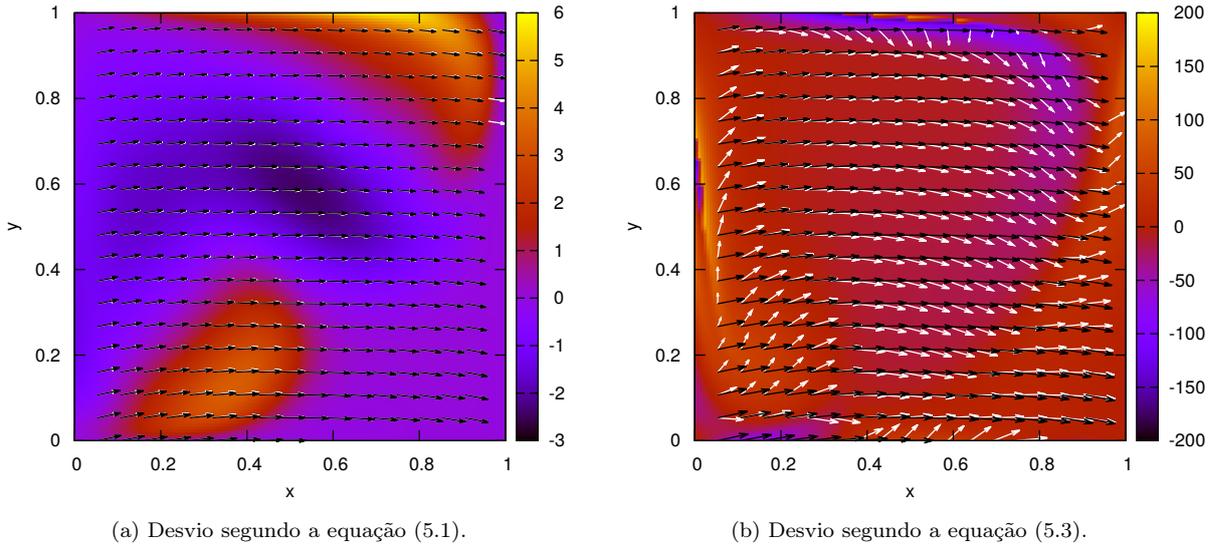


Figura 5.44: Representação do desvio angular da magnetização para $C_{pm} = 10^3$. Os vetores brancos representam à magnetização local e os vetores pretos representam à magnetização de equilíbrio local.

Na Figura (5.45)(a) observamos que na fase inicial do movimento há uma grande desorientação da magnetização local com relação a magnetização de equilíbrio local, chegando a um pico de quase -25 graus, porém o escoamento passa por uma reorganização das suas estruturas durante à qual a magnetização tende à se realinhar um pouco com o equilíbrio. Durante este período o desalinhamento máximo ocorre em torno de -15 graus. A partir desse ponto o desalinhamento da magnetização com relação a magnetização de equilíbrio evolui suavemente para o seu valor final de regime permanente, que é aproximadamente -28 graus. Similarmente vemos um comportamento análogo da Figura (5.45)(b) com uma diferença de que estamos analisando os desvios angulares da magnetização para um ponto positivo. Note que por uma coincidência escolhemos pontos que tem um comportamento anti-simétrico.

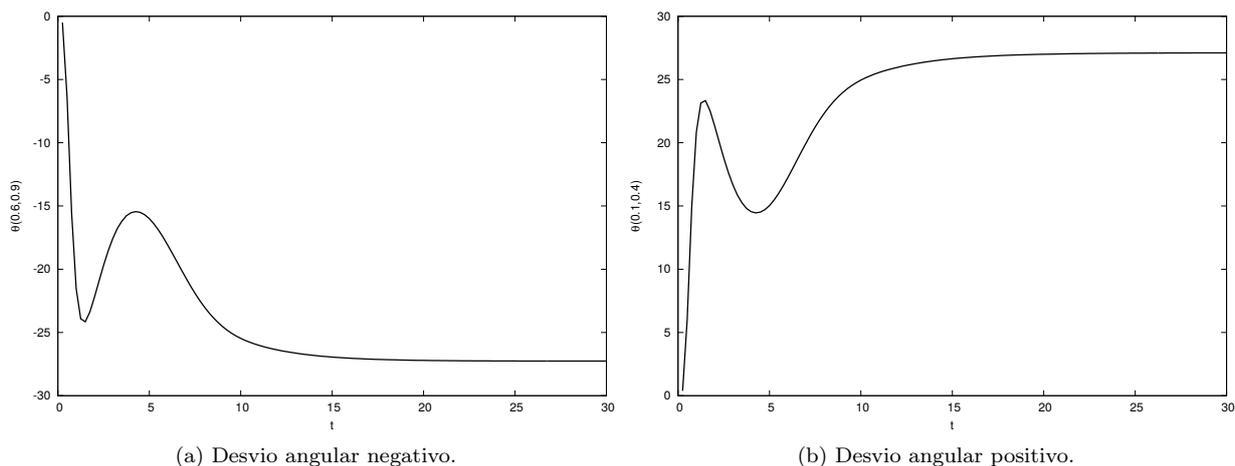


Figura 5.45: Evolução temporal do desvio angular, em graus, da magnetização local em relação à magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 50$.

A Figura (5.46) mostra a evolução temporal da mudança percentual do módulo da magnetização local em relação a magnetização de equilíbrio local $|M_p(0.6, 0.9)|$, neste caso dado em percentagem, segundo a equação (5.2). Note que a mudança percentual do módulo da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio está totalmente correlacionada ao seu desalinhamento angular, conforme vimos nas Figuras (5.45)(a) e (b).

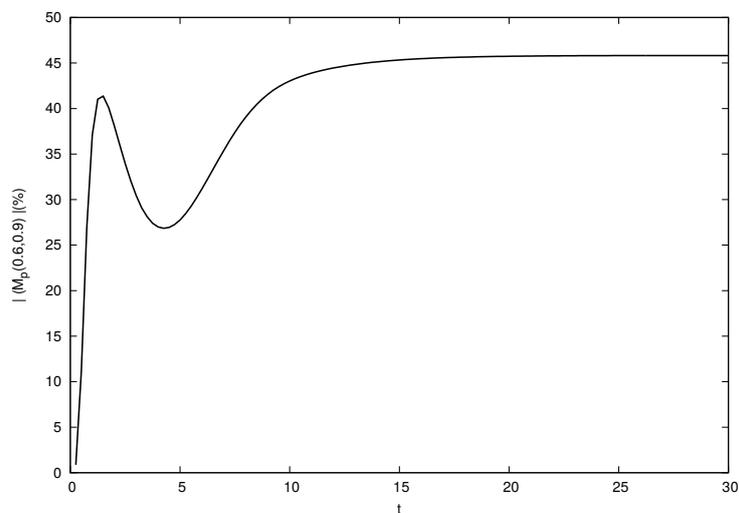


Figura 5.46: Evolução temporal da mudança percentual do módulo da magnetização local, para $C_{pm} = 50$.

As Figuras (5.47)(a) e (b) mostram uma comparação dos desvios angulares para $C_{pm} = 50$ e para $C_{pm} = 10^3$. Notamos que no regime permanente há uma diminuição dos desvios angulares de aproximadamente 10 graus e de 5 graus com o aumento de C_{pm} , conforme mostra as Figuras (5.47)(a) e (b), respectivamente. Entretanto isto não altera qualitativamente os resultados obtidos até agora.

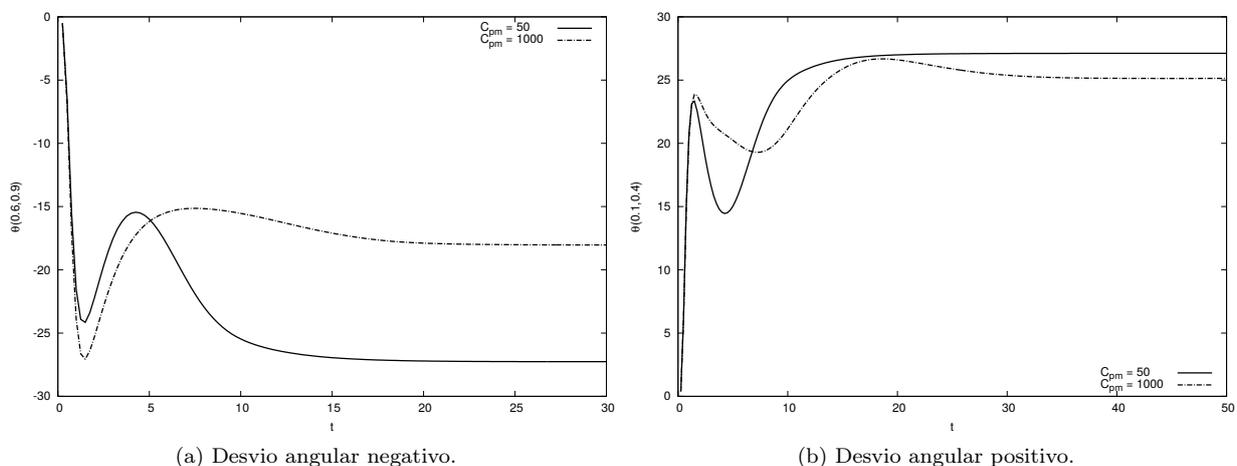


Figura 5.47: Evolução temporal do desvio angular, dado em graus, da magnetização local em relação à magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 50$ e $C_{pm} = 10^3$.

Na Figura (5.48) temos uma comparação da evolução temporal da mudança percentual do módulo da magnetização para $C_{pm} = 50$ e para $C_{pm} = 10^3$, dado em graus. Notamos que, assim como a Figura (5.47), há uma diminuição das mudanças do módulo da magnetização com o aumento de C_{pm} . No regime permanente houve uma redução de 15% de $C_{pm} = 10^3$ em relação à $C_{pm} = 50$.

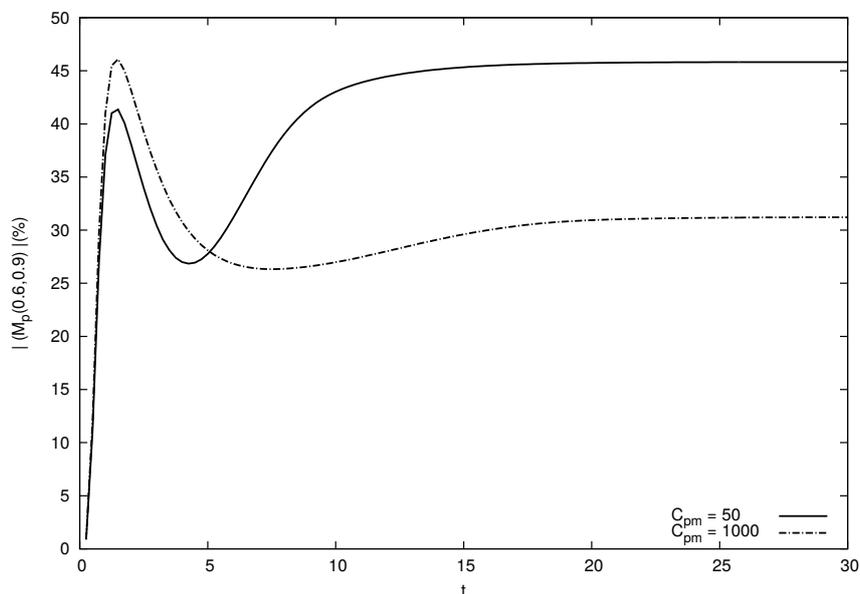


Figura 5.48: Evolução temporal da mudança percentual do módulo da magnetização local, para $C_{pm} = 50$ e $C_{pm} = 10^3$.

5.2.3 Cavidade com todas as paredes móveis

Nesta seção, continuamos abordando as soluções estáveis assimétricas, conforme vimos na seção 4.4, a fim de investigar sua presença com o campo magnético para este modelo e seus efeitos nas estruturas do escoamento. A Figura (5.49) mostra as mais diversas configurações do escoamento assimétricas que encontramos para C_{pm} específicos. Em $C_{pm} = 5$, que é relativamente baixo, podemos ver uma grande mudança na configuração do escoamento. Vemos a união de duas estruturas se transformando em um único vórtice, no meio da cavidade.

Em $C_{pm} = 0$, estas estruturas estavam separadas por um ponto de estagnação. Quanto ao sentido dessa nova estrutura, temos que o vórtice principal comprimido entre dois vórtices rotaciona no sentido anti-horário, e os vórtices superior e inferior rotacionam no sentido horário. Conforme aumentamos a força magnética, que é atrativa devido ao fio, a estrutura inferior é reduzida de tamanho e as outras duas aumentam de volume.

Constatamos também que o vórtice do meio é carregado para o lado direito e o vórtice superior é puxado para baixo, e as regiões perto das paredes e entre estes vórtices, tem uma concentração grande de linhas de corrente, que denotam os altos gradientes de velocidade, conforme podemos ver na Figura (5.49)(b) e (c).

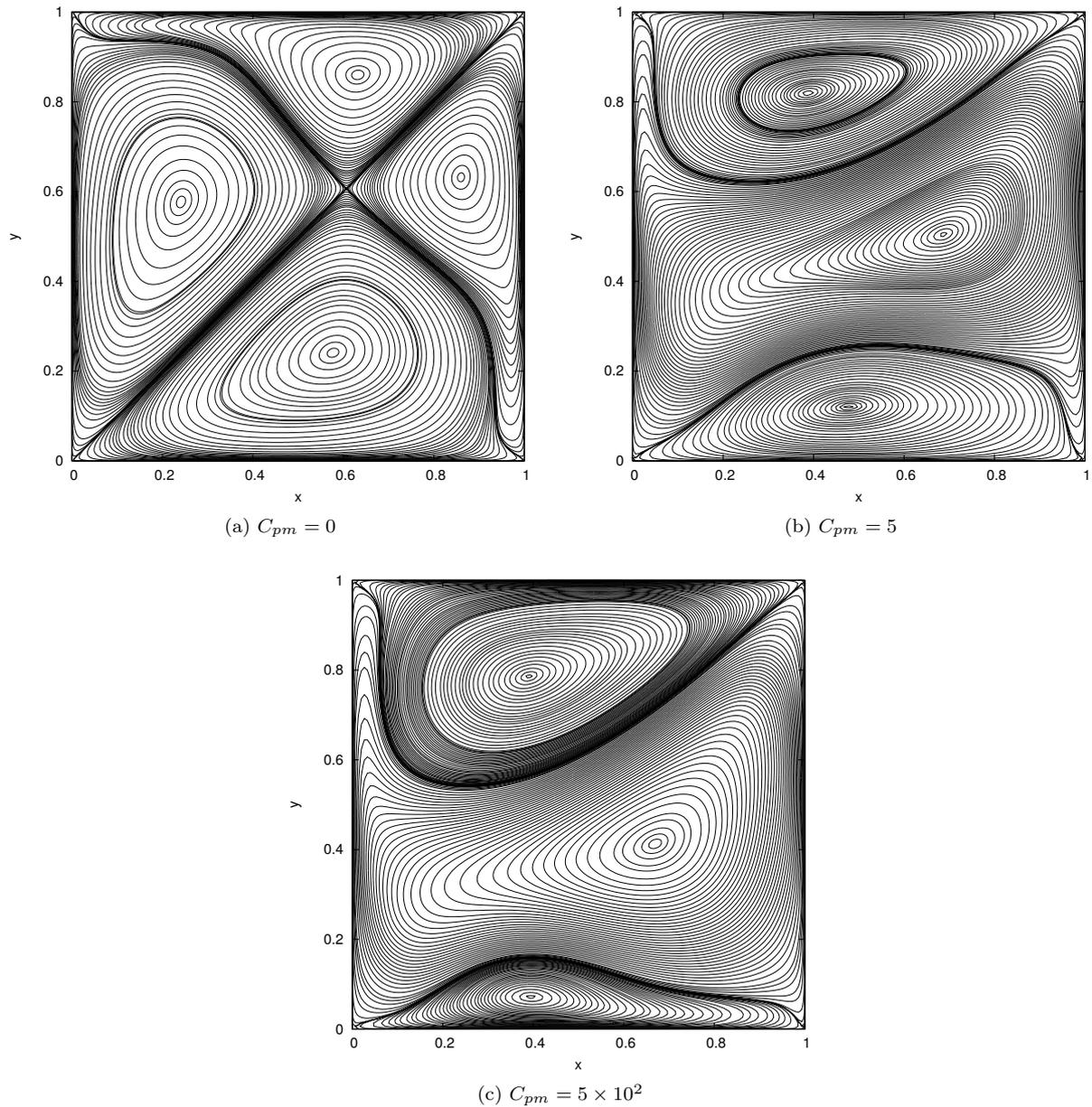


Figura 5.49: Linhas de corrente para $Re = 500$, $C_{pm} = 0, 5$ e 5×10^2

A Figura (5.50) especifica claramente as mudanças no campo velocidade para $C_{pm} = 0$ e $C_{pm} = 5 \times 10^2$. Primeiramente, observamos que todas as paredes da Figura (5.50)(a) e (b) são mantidas como regiões de alta velocidade, devido ao forte cisalhamento neste local, as mudanças no campo velocidade ocorrem no interior do escoamento em que no caso hidrodinâmico tínhamos que as regiões vizinhas aos quatro vórtices, possuíam altos gradientes de velocidade, mas como esta estrutura sofreu alterações com a intrusão de vorticidade temos que as porções fluidas com gradientes elevados verificam-se no encontro do escoamento entre as paredes superior e direita, e, as paredes esquerda e inferior, diferentemente da Figura (5.50)(a).

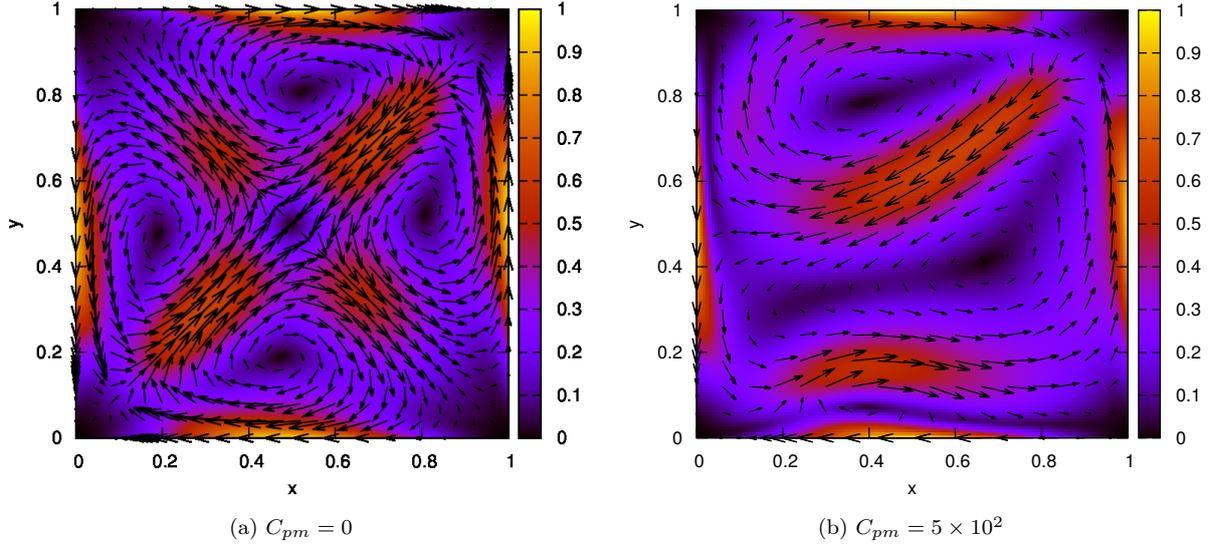


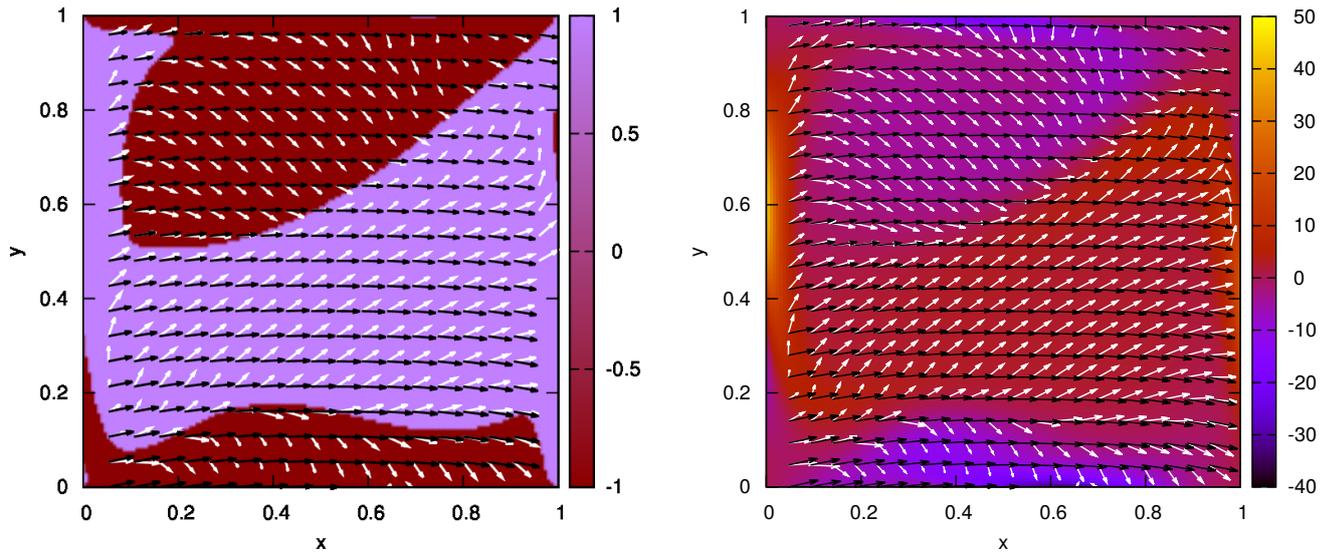
Figura 5.50: Módulo do campo velocidade para $C_{pm} = 0$ e $C_{pm} = 5 \times 10^2$.

A Figura (5.51)(a), representa o desvio angular para as quatro paredes móveis, e obtemos uma ordenação do campo de sinal de $\xi \times \mathbf{M}$ diferente das anteriores. Observamos uma estrutura totalmente coerente com a que vimos nas linhas de corrente da Figura (5.49)(c), uma vez que, a parte superior e inferior, denominam o termo $\xi \times \mathbf{M}$ com sinal negativo e portanto a magnetização sofre um desvio no sentido horário, e nestas mesmas regiões estão localizados os vórtices superior e inferior, respectivamente, ambos rotacionando no mesmo sentido que a magnetização.

Analogamente, a parte central indica que o termo da vorticidade é positivo e portanto a magnetização é rotacionada no sentido anti-horário, contudo esta região é a localização do vórtice principal da cavidade que está sendo rotacionado no sentido anti-horário. Desta forma, encontramos uma ligação entre as linhas de corrente e o desvio da magnetização sobre a investigação do campo sinal de $\xi \times \mathbf{M}$ para $C_{pm} = 5 \times 10^2$.

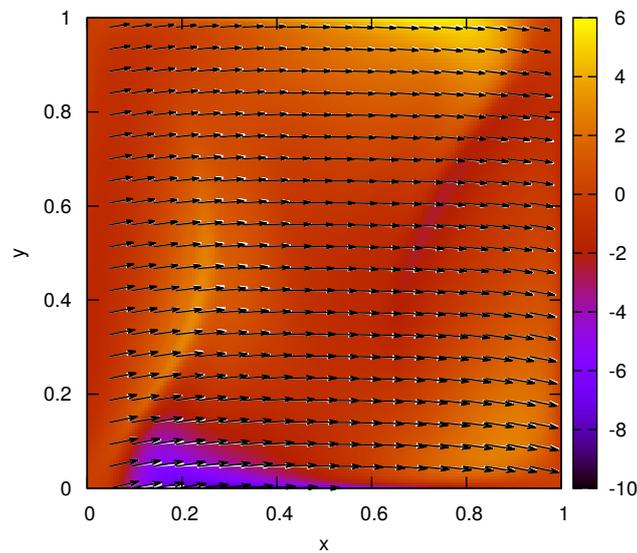
A Figura (5.51)(b), mostra o desvio angular salvo a alusão do valor da vorticidade em todo o domínio, cujo os valores estão ilustrados ao lado do gráfico, e observamos alterações melhoradas no valor da vorticidade quando comparado aos números da configuração anterior. A Figura (5.51)(c), apresenta o desalinamento da magnetização sem o efeito da vorticidade e obtemos que neste caso, o desvio, em graus, é baixo, as colaborações, para tal fato, são da ordem dos termos de advecção e equilíbrio, no qual os ângulos variam de -10° à 6° .

Notoriamente olhando os desvios da Figura (5.51)(b) e (c), podemos ver a grande ascensão do termo $\xi \times \mathbf{M}$ em dominar a maior porção do escoamento, mas lembrando que a junção dos termos de equilíbrio e de advecção tendem a compensar o influente termo de vorticidade. Checamos esse balanço numericamente e vimos que ele é da ordem $\mathcal{O}(10)^{-15}$, ou seja, nosso regime permanente está sendo bem resolvido. Além disso, segue que o desvio angular, no caso atual, tem um limite de até 200° , nos sentidos horário e anti-horário.



(a) campo de sinal de ξ

(b) campo de vorticidade



(c) desvios angulares segundo a equação (5.1)

Figura 5.51: Representação do desvio angular da magnetização para $C_{pm} = 5 \times 10^2$, em que, (a) desvio da magnetização sobreposto ao campo de sinal de ξ , (b) desvio da magnetização sobreposto ao campo de vorticidade do escoamento e (c) desvio angular da magnetização segundo a equação (5.1), dado em graus.

A Figura (5.52) ilustra o percentual da magnetização, em que, com o termo da vorticidade, os aumentos do módulo da magnetização são consideravelmente efetivos, nas regiões de altas vorticidades, próximo às paredes móveis. As regiões com módulo zero, mantém a magnetização da ordem do termo de equilíbrio.

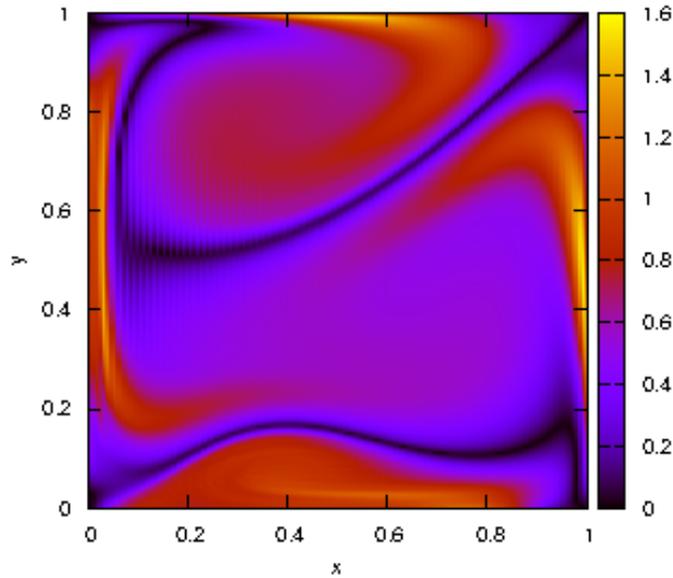


Figura 5.52: Mudança do percentual do módulo da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 5 \times 10^2$.

5.2.4 Cavidade com paredes superior e inferior móveis

A Figura (5.53), mostra o comportamento do escoamento, junto com os gradientes de velocidade, em que as Figuras (5.53) (a), (c) e (e) mostram as linhas de corrente e as Figuras (5.53)(b), (d) e (f), denotam o campo velocidade. Para $C_{pm} = 0$ temos apenas um vórtice grande central, e, analisando seu campo velocidade, temos que o escoamento assume maiores velocidades perto das paredes móveis e com uma intensidade um pouco menor, nas laterais da cavidade. Em aproximadamente $C_{pm} = 1,3 \times 10^3$ acontece a primeira mudança da estrutura da cavidade.

Temos o surgimento de mais um vórtice, sendo o maior perto da parede inferior e o menor próximo à parede superior. No campo de velocidade associado, vemos uma grande zona de recirculação com altos gradientes de velocidade perto da parede inferior cisalhante. Por outro lado, para o campo velocidade, temos que nas regiões próximas as paredes superior e inferior, o fluido possui altas velocidades, enquanto que próximo a parede esquerda, na região superior, e, na parede direita, na região inferior, e também, no centro dos vórtices, as velocidades são diminuídas. Além disso, o fluido concentrado nas duas zonas de recirculação é orientado no sentido horário.

Quando $C_{pm} = 2 \times 10^3$, podemos observar um aumento do vórtice superior, e devido a alta intensidade de campo magnético, notamos uma diminuição do vórtice inferior. Ambos os vórtices estão sendo puxados na direção das suas respectivas placas móveis. Contudo o fluido escoava com altas velocidades próximos as paredes superior direita, e, inferior esquerda, sendo esta última com velocidades ainda maiores, já que este vórtice inferior encontra-se nas vizinhanças do campo magnético. Afastado dessas regiões o fluido escoava com velocidades bem pequenas, em uma porção considerável do escoamento. As duas zonas de recirculação rotacionam o fluido no mesmo sentido horário.

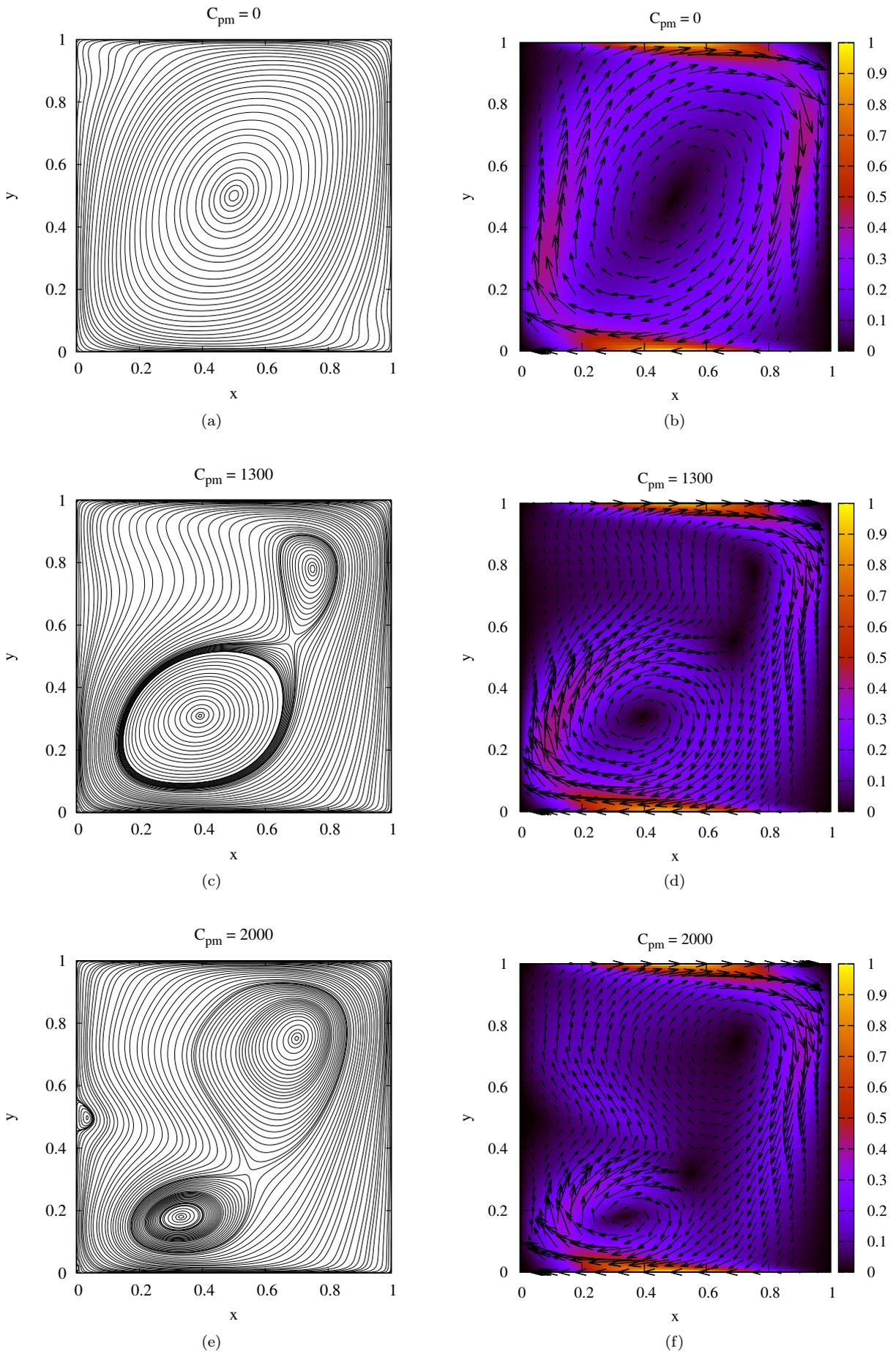


Figura 5.53: A esquerda - Linhas de corrente e a direita - Campo Velocidade, para $Re = 500$.

A Figura (5.54), segundo já vimos em outros casos, exibe o percentual do aumento da magnetização, nos quais os maiores valores ocorrem na região onde o escoamento está sendo puxado e também devido a fonte magnética na parede inferior, porém neste caso, o que difere em relação aos casos das subseções 5.2.1, 5.2.2 e 5.2.3 é que este tipo de estrutura assume o maior valor do crescimento percentual da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local.

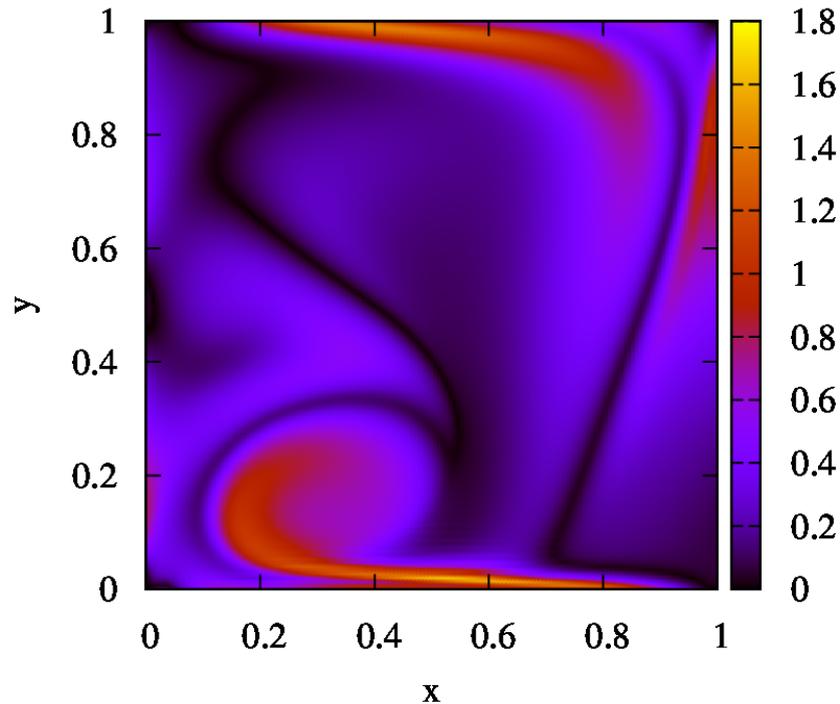


Figura 5.54: Mudança percentual do módulo da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio local para $C_{pm} = 2 \times 10^3$.

Na Figura (5.55)(a), observamos que nas proximidades da placa superior a magnetização tem um desvio angular com relação a magnetização de equilíbrio no sentido horário, devido aos altos gradientes de velocidade da placa, também perto da placa inferior temos que os desalinhamentos da magnetização se dá no sentido horário, devido a ação de dois mecanismos, que são os gradientes de velocidade da placa móvel e a atração da fonte magnética. Por outro lado nas regiões adjacentes as paredes esquerda e direita, temos que a vorticidade tem sinal positivo, e portanto os desvios angular da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio obedecem um sentido anti-horário.

A Figura (5.55)(b), esclarece o quanto a vorticidade afeta no desvio, pois o local onde seu valor absoluto é alto a magnetização está sendo predominada pelo termo da vorticidade, e, o local cujo os valores da vorticidade são praticamente zero, segue que a magnetização está sendo dominada pelos termos da ordem da advecção e de equilíbrio.

Além disso, a Figura (5.55)(c), mostra um outro fator do efeito da vorticidade, que são os valores angulares do desalinhamento, em que, sem o termo $\xi \times \mathbf{M}$ temos desvios extremamente baixos, numa faixa

de -10° à 6° , em alternativa, os valores dos desvios angulares da magnetização em relação à magnetização de equilíbrio, com o termo adicional da vorticidade, variam entre -200° à 200° .

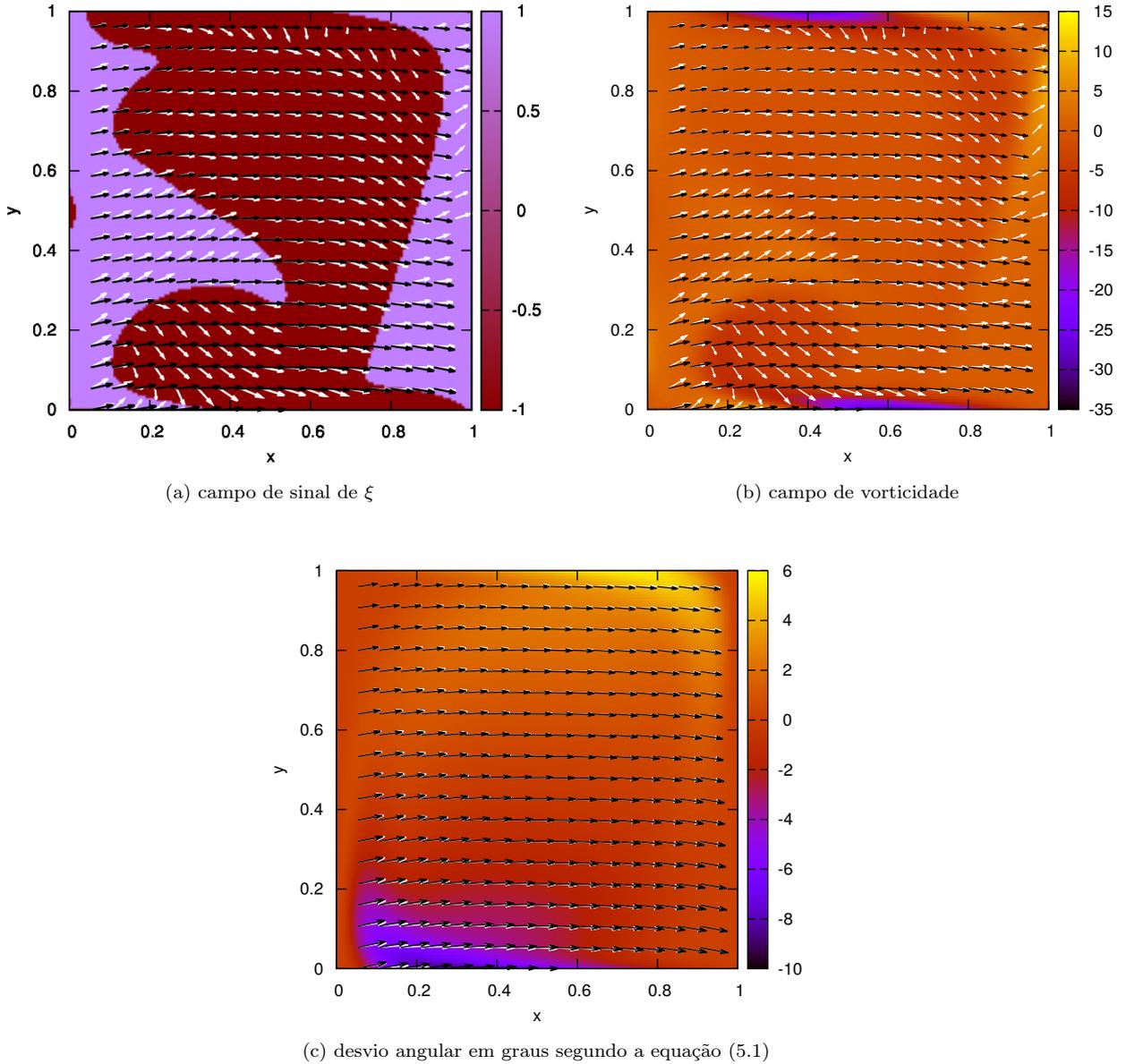


Figura 5.55: Representação do desvio angular da magnetização para $C_{pm} = 2 \times 10^3$, em que, (a) desvio da magnetização sobreposto ao campo de sinal de ξ , (b) desvio angular da magnetização sobreposto ao campo de vorticidade do escoamento e (c) desvio angular da magnetização segundo a equação (5.1) dado em graus.

A Figura (5.56) mostra a evolução temporal do desvio angular da magnetização no centro da cavidade no sentido horário para $C_{pm} = 50$ e para $C_{pm} = 10^3$. Notamos que inicialmente que a magnetização encontra-se em equilíbrio. Notamos que em até $t = 12$ temos que os desvios são crescentes para $C_{pm} = 10^3$ mais do que para $C_{pm} = 50$, porém após $t = 12$, os desvios angulares são reduzidos. E então acima de $t = 23$, observamos que os aumentos dos desvios angulares para $C_{pm} = 50$ são maiores do que para $C_{pm} = 10^3$.

A Figura (5.57) ilustra a evolução no tempo da mudança percentual do módulo da magnetização local

no centro da cavidade para $C_{pm} = 50$ e para $C_{pm} = 10^3$. Conforme vimos na Figura (5.56), neste caso também temos uma diminuição da mudança do módulo da magnetização para $C_{pm} = 10^3$ em relação à $C_{pm} = 50$ quando atingimos o regime permanente, em cerca de quase 10%.

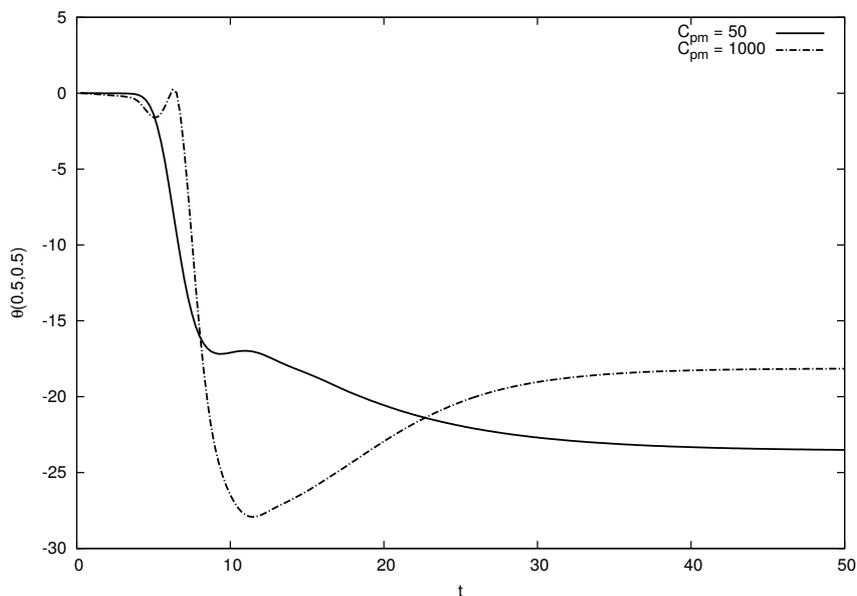


Figura 5.56: Evolução temporal do desvio angular da magnetização local, para $C_{pm} = 50$.

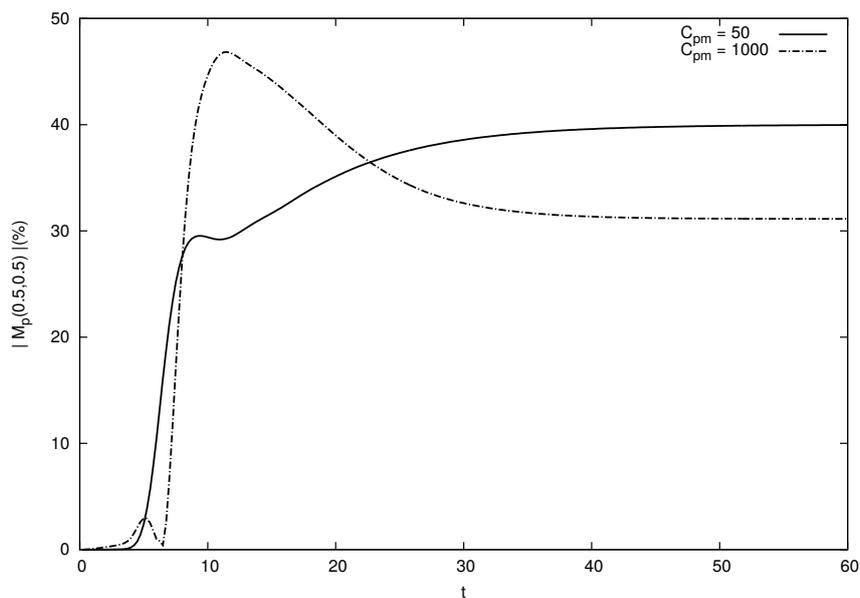


Figura 5.57: Evolução temporal da mudança percentual do módulo da magnetização local, para $C_{pm} = 50$ e para $C_{pm} = 10^3$.

5.2.5 Regime permanente periódico

Vimos na seção 5.2.4 que temos um valor de C_{pm} bem limitado superiormente. De fato, acima de $C_{pm} = 2 \times 10^3$ não temos mais uma solução convergente para um regime permanente estacionário. Porém, encontramos um outro tipo de solução, à saber, uma solução para um regime permanente periódico não estacionário.

A Figura (5.58) mostra a evolução do regime permanente para o regime não estacionário. Na Figura (5.58)(a) notamos que até em aproximadamente $C_{pm} = 10^3$ temos um regime permanente estacionário. Porém, a Figura (5.58)(b) mostra que para uma faixa de $C_{pm} = 2,3 \times 10^3$ à $C_{pm} = 3 \times 10^3$ deixamos de ter um regime permanente estacionário para um novo regime, chamado de regime periódico. Já na Figura (5.58)(c) notamos que o regime deixa de ser periódico e encontra-se em transição para o estado aperiódico e portanto na Figura (5.58)(d) temos um regime aperiódico.

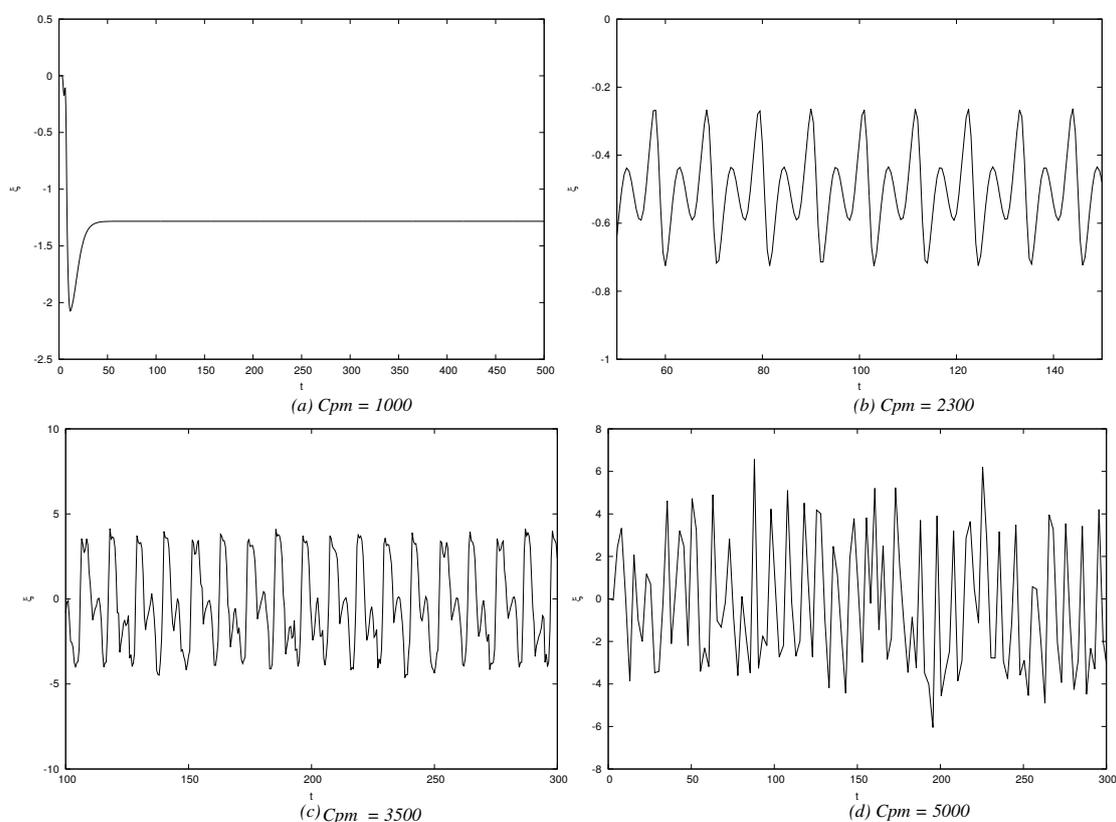


Figura 5.58: Evolução do regime permanente para o regime não estacionário.

A Figura (5.59), mostra a evolução da vorticidade para um regime permanente periódico. Podemos notar que até $t = 27$, aproximadamente, temos um regime transiente, a partir deste, inicia-se um regime periódico, cujo o período é em torno de 12 tempos adimensionais.

O gráfico da Figura (5.60), é um teste de convergência temporal da nova solução periódica estacionária. Tomamos quatro passos de tempo distintos, $dt_1 = 5 \cdot 10^{-5}$, $dt_2 = 10^{-5}$, $dt_3 = 5 \cdot 10^{-6}$ e $dt_4 = 10^{-6}$, e, verificamos que as soluções para cada dt vão se sobrepondo, mostrando que nossas simulações estão bem

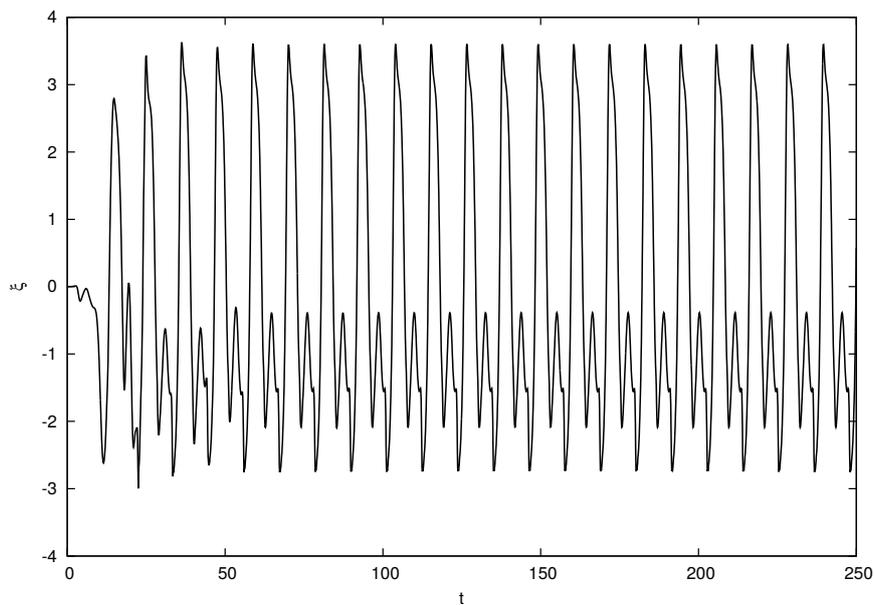


Figura 5.59: Evolução da vorticidade para o regime permanente periódico não estacionário para $C_{pm} = 3 \times 10^3$ e $Re = 5 \times 10^2$.

convergadas.

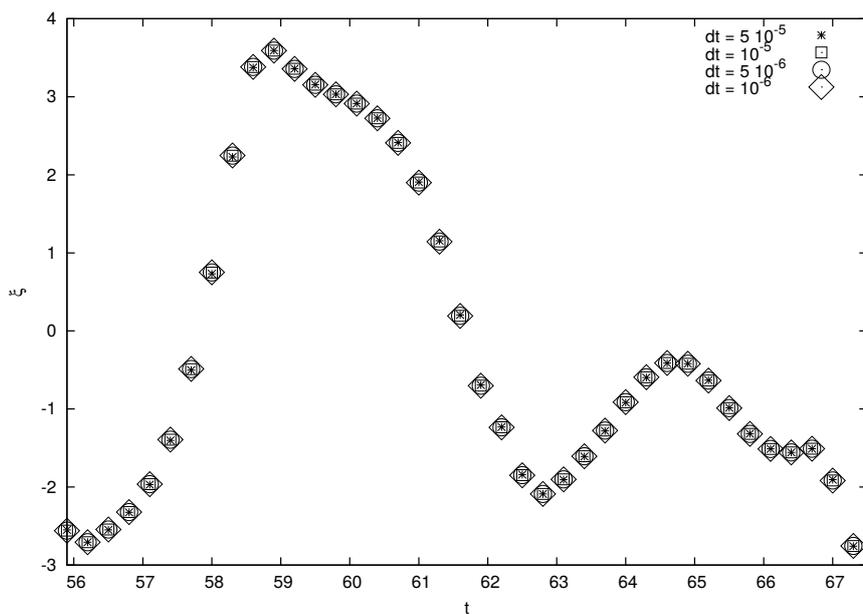


Figura 5.60: Convergência temporal para o regime permanente periódico não estacionário para $C_{pm} = 3 \times 10^3$ e $Re = 500$.

A próxima sequência de imagens são figuras de seis instantes representativos ao longo do período. Nestas figuras, o lado esquerdo são as fotos que caracterizam as linhas de corrente enquanto que o lado direito reproduz seus respectivos campos de velocidades.

Observamos nos três primeiros pares de imagens que aparecem na Figura (5.61), segue que, no item (a) temos um grande vórtice central predominante e um menor perto da parede esquerda, segue ao lado desta

imagem, as regiões de maior concentração de velocidade.

À medida em que avançamos o tempo, vemos na Figura (5.61)(c) o rompimento do vórtice central em duas estruturas e o crescimento do vórtice da parede esquerda, e então em um curto espaço de tempo obtemos uma nova forma, que pode ser vista na Figura (5.61)(e), em que os vórtices tornam-se mais volumosos, havendo nestas duas últimas imagens uma grande alteração no sentido do escoamento, mostradas na Figura (5.61)(d) e (f).

Na Figura (5.62)(a) temos o resultado da ruptura do vórtice inferior, da Figura (5.61)(e), em duas estruturas pequenas, e um aumento significativa da área de recirculação do vórtice da parede esquerda, e também uma considerável porção fluida no vórtice superior. Analisando a Figura (5.62)(c), temos que a estrutura modifica bastante, pois houve o desaparecimento das duas estruturas inferiores, bem próximas ao campo magnético, na Figura (5.62)(a), e ainda na Figura (5.62)(a), observamos que o vórtice superior e o vórtice do meio se juntam em uma estrutura, dominando a parte parte do escoamento, porém aparecem uns vórtices menores na parede direita, na parede esquerda e na parede inferior. Na Figura (5.62)(e), em aproximadamente $t = 67$, fechamos o ciclo de um período, e voltamos a ter as configurações similares.

As Figuras (5.62)(b), (d) e (f) determinam o campo velocidade, das respectivas linhas de corrente das Figuras (5.62)(a), (c) e (e), podemos perceber a repentina mudança no sentido do escoamento em um prazo curto de tempo, e também a localização das regiões nos quais as velocidades são mais acentuadas.

Portanto, estas Figuras mostraram a riqueza do escoamento para um regime periódico. Continuaremos os estudos destas soluções transientes mais pra frente.

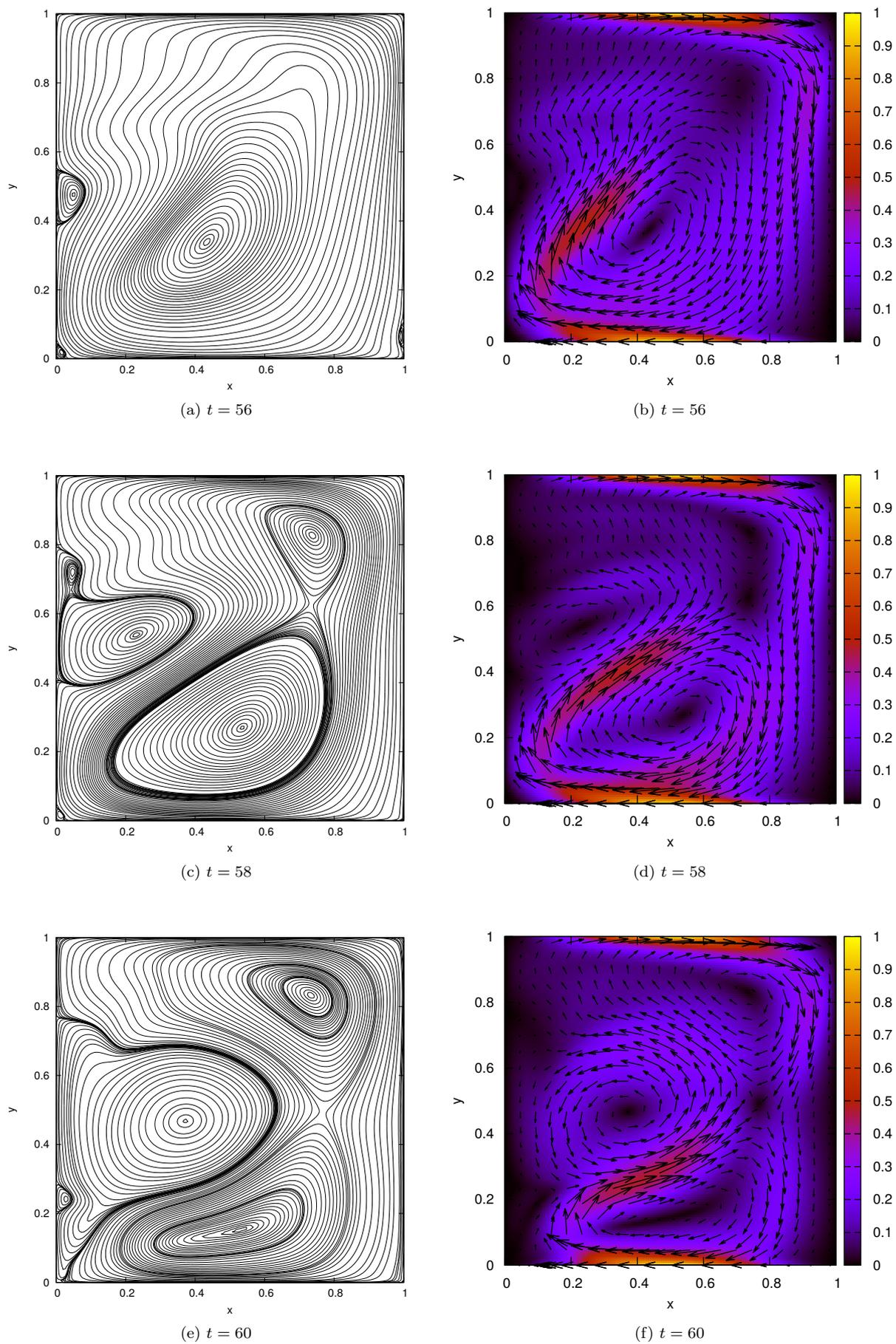


Figura 5.61: A esquerda - Linhas de corrente e a direita - Campo Velocidade, para $Re = 500$ e $C_{pm} = 3 \times 10^3$.

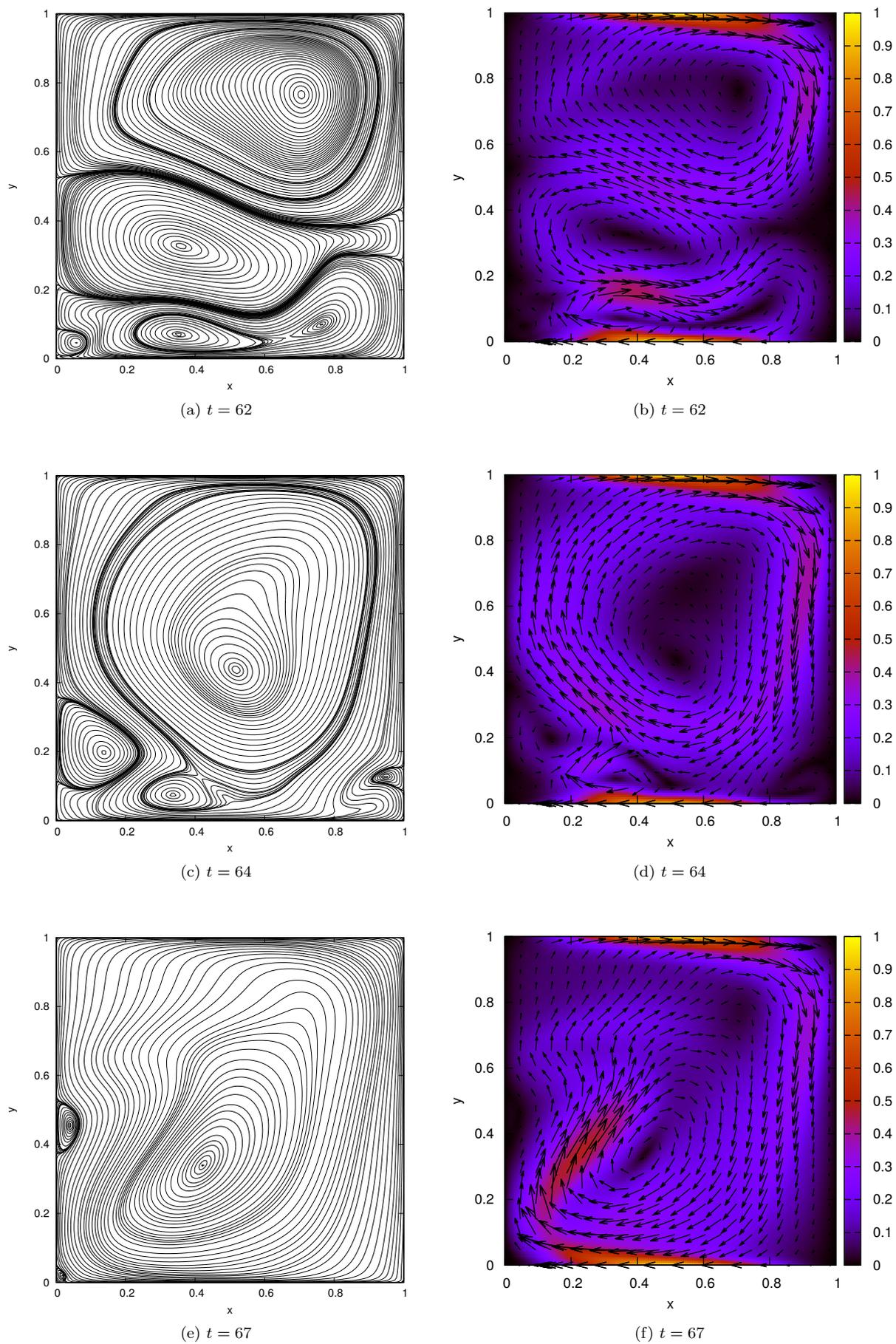


Figura 5.62: A esquerda - Linhas de corrente e a direita - Campo Velocidade, para $Re = 500$ e $C_{pm} = 3 \times 10^3$.

Para caracterizar os regimes não estacionários, apresentamos no gráfico da Figura (5.63) o espectro de frequências dos sinais da vorticidade no centro da cavidade e observamos que à medida em que aumentamos o valor de C_{pm} vemos que mais modos têm amplitudes cada vez maiores. Além disso, notamos que quando C_{pm} se aproxima de 10^4 , vemos que uma ampla faixa de frequências têm amplitudes consideráveis, caracterizando um regime quase aperiódico.

Este tema ainda é um objeto de estudo, pois acreditamos que é possível gerar um escoamento totalmente aleatório apenas por efeitos magnéticos. Isto não foi documentado ainda na literatura.

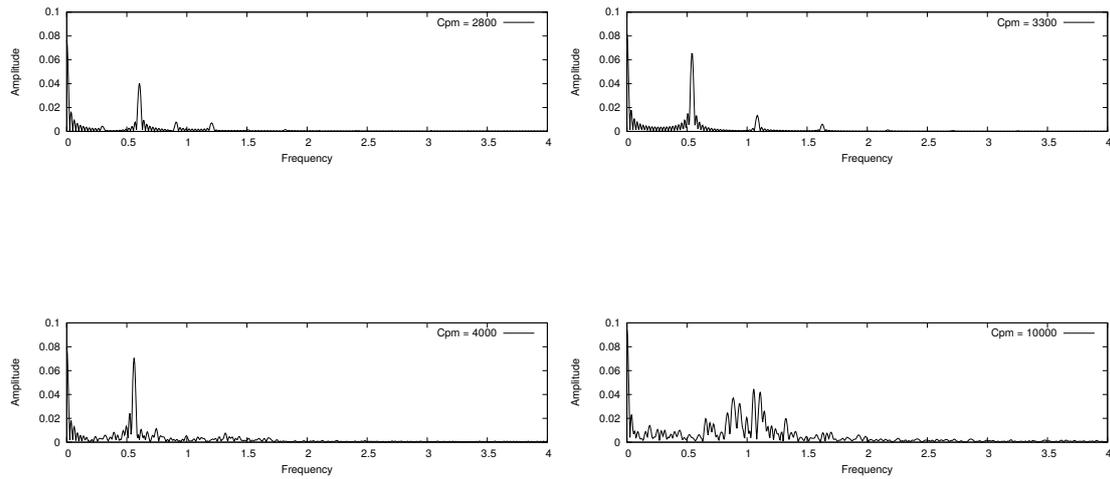


Figura 5.63: Espectro de frequências.

CAPÍTULO 6

ESCOAMENTOS DE FLUIDOS MAGNÉTICOS ASSIMÉTRICOS

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados preliminares de fluidos assimétricos. Para isso, introduziremos na equação da vorticidade-função de corrente à força de torque, e para à equação da magnetização, introduziremos o termo precessional. Ou seja,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \frac{1}{Re} \nabla^2 \xi + C_{pm} \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) + \frac{1}{2} C_{pm} \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})], \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) + \frac{1}{2} \xi \times \mathbf{M} + \frac{C_{pm} Re}{6\phi} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}, \quad (6.2)$$

conforme já foram apresentadas na seção 3.2.

6.1 Campo gerado por um fio

Consideramos para este caso, uma cavidade com a placa superior móvel com velocidade positiva, para um fluido assimétrico, isto é, $\mathbf{M} \times \mathbf{H} \neq 0$, e o campo magnético \mathbf{H} gerado por um fio, conforme vimos na equação (3.31). Para esta simulação, utilizamos $Re = 500$ e $C_{pm} = 10^3$. Desta forma, teremos duas forças magnéticas atuantes no escoamento, a força de Kelvin e a força de torque, e quanto a equação da magnetização, teremos o termo precessional, o que completa a equação de Shliomis, em [35].

A Figura (6.1) mostra como as forças de Kelvin e de torque, agem no escoamento. Vemos que o valor máximo da força de Kelvin é 29% maior do que o valor máximo da força de torque. Porém a força de torque é nula ou desprezível em toda região escura da Figura (6.1)(b), indicando que não há grandes desvios da magnetização local em relação a magnetização de equilíbrio local em grande parte do escoamento.

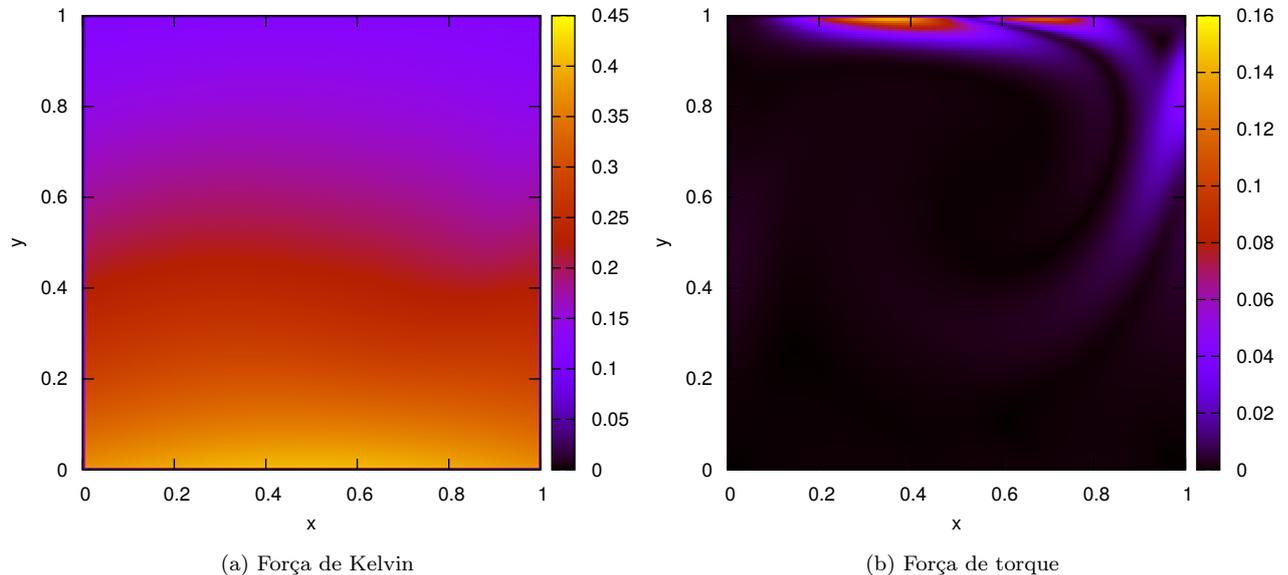


Figura 6.1: Módulo das forças magnéticas

Entretanto, de acordo com [19], verificamos que a nossa escolha de adimensionalização do termo precessional, fez com que ele se sobressaísse em relação aos outros termos da equação da magnetização. É por este motivo que não obtivemos mudanças significativas no comportamento do escoamento, bem como, nos desalinhamentos da magnetização.

Portanto, para explorarmos melhor os efeitos da força de torque no escoamento precisamos de uma configuração em que a força de Kelvin seja nula ou consideravelmente menor do que a força de torque. Desta forma, apresentamos a seção posterior em que o campo magnético \mathbf{H} é constante.

6.2 Campo uniforme

Uma outra maneira de investigarmos o escoamento de fluidos assimétricos, foi colocando um campo magnético homogêneo vertical à cavidade, conforme mostra a Figura (6.2). Isto resulta em uma força de Kelvin, $\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$, nula, e então buscamos analisar o escoamento influenciado apenas pela força torque. Porém, novamente nos deparamos com o problema da adimensionalização inadequada no termo precessional, que conseqüentemente não vemos muitas alterações no comportamento do escoamento.

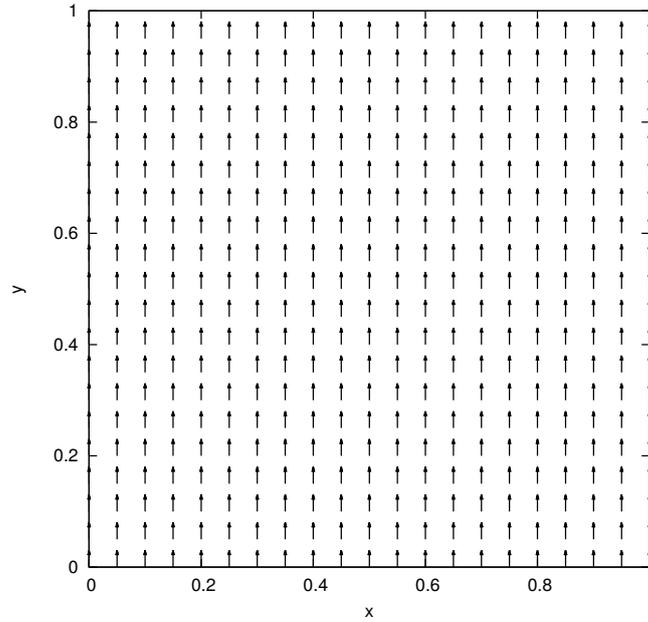


Figura 6.2: Campo vertical aplicado.

A Figura (6.3), mostra o escoamento para $Re = 50$, $C_{pm} = 5$, $\phi = 3\%$ e $\tau = 0.5$. Estes valores foram escolhidos a fim de deixarmos um pouco evidente o desalinhamento da magnetização, pois o papel do termo restaurador precessional é de alinhar a magnetização com o campo magnético. Notamos que, na Figura (6.3)(a), mostra que a força de torque não altera a estrutura do escoamento e então obtemos uma aparência similar ao escoamento hidrodinâmico, conforme vimos na seção (4.1). Na Figura (6.3)(b) temos uma zona de recirculação central grande, rotacionando no sentido horário com velocidades altas perto da parede móvel, e nos dois vórtices pequenos localizados no canto inferior da cavidade temos que o escoamento está praticamente estagnado.

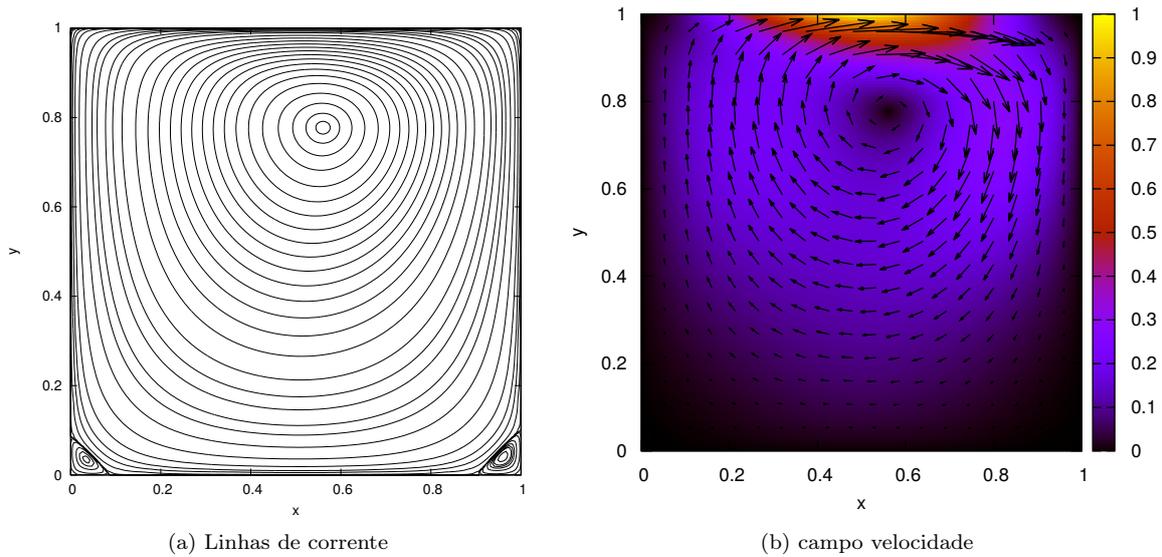


Figura 6.3: Linhas de corrente e campo velocidade com o termo precessional para $Re = 50$ e $C_{pm} = 5$.

A Figura (6.4)(a), mostra os desalinhamentos da magnetização, notamos que são mais visíveis perto da parede superior, nos quais variam de -50° a 20° . Claramente, os desvios tornam-se menos intensos a medida que nos aproximamos da fonte magnética, onde o termo precessional domina.

Na Figura (6.4)(b) obtemos os aumentos percentuais da magnetização com relação à magnetização de equilíbrio local, os maiores aumentos da magnetização ocorrem nas mesmas regiões de desvios angulares significativos, que são causados pelos termos da vorticidade e convectivo. O termo precessional não tem muita influência nas mudanças do módulo da magnetização.

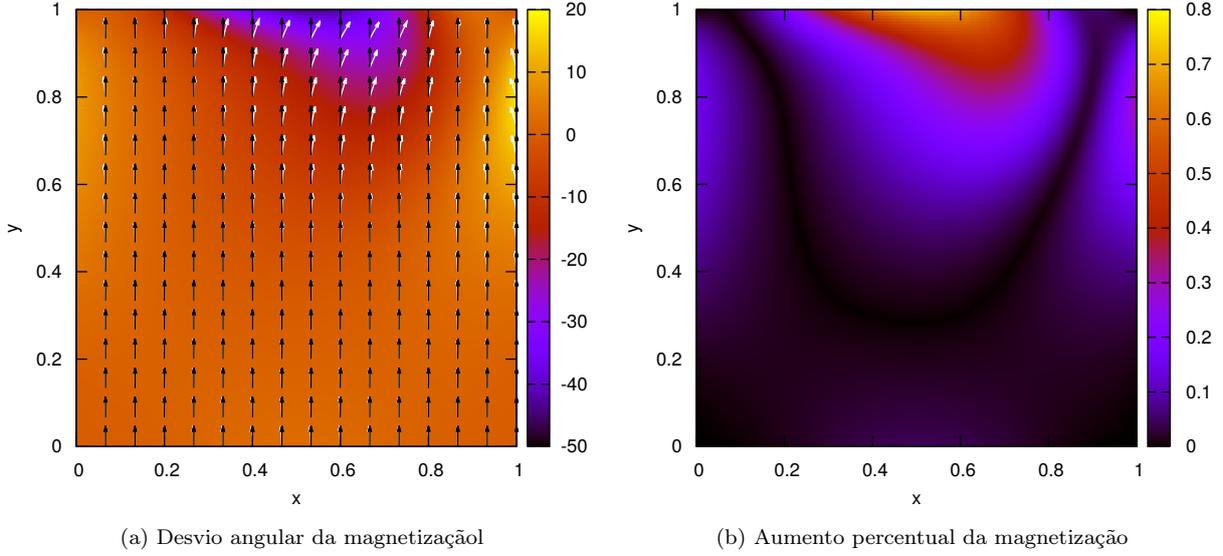


Figura 6.4: Desvio angular e mudança do módulo da magnetização local em relação à magnetização de equilíbrio, para $Re = 50$ e $C_{pm}^* = 5$.

6.3 Nova proposta de adimensionalização

Como foi mencionado na seção 6.1, a adimensionalização utilizada para a equação da magnetização de Shliomis, [35], faz com que o termo restaurador seja dominante. Uma outra possível adimensionalização para corrigir este efeito é a seguinte:

$$\nabla^2 \psi = -\xi \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \frac{1}{Re} \nabla^2 \xi + \phi C_{pm}^* \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) + \frac{1}{2} \phi C_{pm}^* \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})], \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} + \frac{1}{2} \xi \times \mathbf{M} + \frac{C_{pm}^* Re}{6} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}, \quad (6.5)$$

em que $\mathbf{M}_0 = \phi \zeta \mathcal{L}(\alpha)$.

Os parâmetros adimensionais são dados por

$$Re = \frac{\bar{L}_x \bar{\rho} U}{\bar{\mu}}, \quad \text{número de Reynolds} \quad (6.6)$$

$$C_{pm}^* = \frac{1}{\phi} \frac{\bar{\mu}_0 \bar{H}_0^2}{\bar{\rho} U^2}, \quad \text{coeficiente de pressão magnética modificado} \quad (6.7)$$

$$\tau = \frac{\bar{\tau} U}{\bar{L}_x}, \quad \text{tempo de relaxação magnética,} \quad (6.8)$$

$$\zeta = \frac{\bar{M}_d}{\bar{H}_0}, \quad \text{magnetização de saturação das partículas magnéticas,} \quad (6.9)$$

$$\alpha = \frac{\mu_0 \bar{m} \bar{H}}{\bar{k} \bar{T}}, \quad \text{intensidade adimensional do campo aplicado.} \quad (6.10)$$

Com essa nova adimensionalização nas equações que regem esse problema podemos controlar ϕ , C_{pm} e τ para obtermos desvios angulares mais significativos. Entretanto, essa nova abordagem ficará para uma próxima etapa.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, simulamos escoamentos de fluidos magnéticos usando uma geometria simples e bem conhecida. Resolvemos o escoamento bidimensional usando a formulação vorticidade-função de corrente na presença das forças magnéticas de Kelvin e de torque. Para entender o mecanismo da interação da magnetização no escoamento, buscamos a equação mais clássica da evolução da magnetização, qual seja, a equação de magnetização de Shliomis [35].

Realizamos este estudo de forma separada, ou seja, fragmentamos a equação da magnetização em vários termos para entendermos a contribuição que cada um deles trás para o escoamento. Primeiramente analisamos a equação da magnetização com os termos de equilíbrio e advecção. Observamos que as mudanças do módulo da magnetização são causados por transporte de fluido magnetizado em regiões de altas velocidades para tempos de relaxação grande. Além disso, os desalinhamentos da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio mais evidentes ocorrem nos mesmos locais que a mudança do seu módulo.

Quando adicionamos a vorticidade, vimos uma grande diferença na dinâmica da magnetização, pois as mudanças nos seus módulos aumentam em aproximadamente 13 vezes mais do que as mudanças restritas aos termos convectivos, e quanto aos desalinhamentos, vimos que são mais intensos, chegando a ser 20 vezes maiores do que o caso anterior. Além disso, existe uma correlação entre o sinal da vorticidade e a orientação do desalinhamento da magnetização e também quanto maior a vorticidade mais efetivo é esse desvio.

Vimos que para os dois modelos da equação da magnetização, o escoamento pode assumir estruturas bem diferentes, especialmente para valores de Re e C_{pm} altos. Além disso, quanto mais paredes móveis, maior é a influência dos termos da equação da magnetização na formação de novas estruturas. Porém, para o modelo da equação da magnetização com os termos da advecção e do equilíbrio, temos um valor de C_{pm}

limitado para soluções estacionárias permanentes, pois considerando altos valores de C_{pm} , encontramos um regime não estacionário. Caracterizamos estes regimes apresentando o espectro de frequências e vimos que em aproximadamente $C_{pm} = 3 \times 10^3$ temos um regime periódico. Entretanto, para valores acima de 3000 obtemos uma transição para o regime aperiódico e em cerca de $C_{pm} = 10^4$ alcançamos regimes aperiódicos.

Enfim, para o modelo completo de magnetização, com o termo precessional na equação da magnetização e a força de torque na equação do movimento, percebemos uma considerável dominância desse termo em manter a magnetização alinhada ao campo em quase todo o escoamento e, portanto, não há alterações interessantes no escoamento, e no módulo da magnetização. Colocamos um campo magnético homogêneo a fim de eliminar a força de Kelvin e identificar a importância da força de torque no escoamento, porém devido a grande influência do termo precessional na magnetização, não captamos novas configurações de escoamentos. Contudo, percebemos no trabalho de [19], que adimensionalizamos de forma não efetiva o termo precessional da equação da magnetização. Propusemos uma nova adimensionalização que será tratada posteriormente. Esta linha de fluido magnéticos ainda tem muito trabalho a ser realizado.

Embora nossos erros no cálculo do $\nabla \cdot \mathbf{B}$, para o campo permanente, sejam pequenos, estamos limitados à hipótese de fluido magnético fracamente magnetizável.

Os próximos passos serão:

- Implementar o cálculo do campo magnético local, para que possamos considerar fluidos cada vez mais próximos dos ferrofluidos comerciais, que são aqueles de forte magnetização;
- Estudar as bifurcações dos escoamentos de fluidos magnéticos no regime permanente, ou seja, pretendemos quantificar e localizar cada um dos vórtices;
- Utilizar a formulação primitiva para resolver o escoamento;
- Resolver problemas com cavidades não isotérmicas, em que a temperatura é importante na caracterização da magnetização;
- Realizar um estudo comparativo de outras equações da magnetização e comparar seus resultados;
- Caracterizar o regime não estacionário e verificar a possibilidade de turbulência induzida pelo campo magnético;
- Melhorar nossos métodos numéricos, discretizações e utilizar uma malha não homogênea a fim de captar melhor os gradientes de campo que aparecem na simulação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. C. Bacri, R. Perzynski, M. I. Shliomis, and G. I. Burde, *Negative-viscosity effect in a magnetic fluid*, Physical review letters **75** (1995), no. 11, 2128.
- [2] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge university press, 2000.
- [3] O. Botella and R. Peyret, *Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow*, Computers & Fluids **27** (1998), no. 4, 421–433.
- [4] A. A. R. Campos, *Solução numérica de problemas parabólicos e elípticos em ferrodinâmica*, Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 1–86.
- [5] F. R. Cunha, *Fundamentos da hidrodinâmica de fluidos magnéticos*, Anais da 8^a Escola de Primavera de Transição e Turbulência - EPTT **8** (2012), 1–83.
- [6] ———, *Comunicação pessoal*, (2018).
- [7] F. R. Cunha, A. P. Rosa, and N. J. Dias, *Rheology of a very dilute magnetic suspension with microstructures of nanoparticles*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials **397** (2016), 266–274.
- [8] F. R. Cunha and Y. D. Sobral, *Characterization of the physical parameters in a process of magnetic separation and pressure-driven flow of a magnetic fluid*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **343** (2004), 36–64.
- [9] E. Erturk, *Lid driven cavity flow*, disponíveis em <http://www.cavityflow.com/cavityflow.htm>.
- [10] E. Erturk, T. C. Corke, and C. Gökçöl, *Numerical solutions of 2-d steady incompressible driven cavity flow at high reynolds numbers*, Gebze Institute of Technology, Energy Systems Engineering Department, Gebze, Kocaeli 41400, Turkey **48** (2005), no. 7, 747–774.
- [11] B. U. Felderhof, *Magnetoviscosity and relaxation in ferrofluids*, Physical Review E **62** (2000), no. 3, 3848.

- [12] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin, *High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method*, Journal of computational physics **48** (1982), no. 3, 387–411.
- [13] R. G. Gontijo and F. R. Cunha, *Numerical simulations of magnetic suspensions with hydrodynamic and dipole-dipole magnetic interactions*, Physics of Fluids **29** (2017), no. 6, 062004.
- [14] R. G. Gontijo, S. Malvar, Y. D. Sobral, and F. R. Cunha, *The influence of a magnetic field on the mechanical behavior of a fluid interface*, Meccanica **52** (2017), no. 6, 1309–1327.
- [15] J. Hinch, *Notas de aula*, disponíveis em <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/hinch/teaching/>, DAMTP, University of Cambridge.
- [16] C. M. Hurd, *Varieties of magnetic order in solids*, Contemporary Physics **23** (1982), no. 5, 469–493.
- [17] A. Iserles, *A first course in the numerical analysis of differential equations*, no. 44, Cambridge university press, 2009.
- [18] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, 2012.
- [19] G. M. Luz, *Modelagem contínua do escoamento de um ferrofluido assimétrico na presença de campo magnético homogêneo*, Projeto final, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 1–88.
- [20] C. H. Marchi, R. Suero, and L. K. Araki, *The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024×1024 grid*, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering **31** (2009), no. 3, 186–198.
- [21] M. A. Martsenyuk, Y. L. Raikher, and M. I. Shliomis, *On the kinetics of magnetization of suspensions of ferromagnetic particles*, Zh. Eksp. Teor. Fiz **65** (1973), 834–841.
- [22] H. W. Müller and M. Liu, *Structure of ferrofluid dynamics*, Physical Review E **64** (2001), no. 6, 061405.
- [23] J. L. Neuringer and R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, The Physics of Fluids **7** (1964), no. 12, 1927–1937.
- [24] R. H. F. Pao, *Fluid dynamics*, Charles e. Merrill Books, Inc., Columbus, Ohio, 1967.
- [25] R. Patel, R. V. Upadhyay, and R. V. Mehta, *Viscosity measurements of a ferrofluid: comparison with various hydrodynamic equations*, Journal of colloid and interface science **263** (2003), no. 2, 661–664.
- [26] D. A. Perumal and A. K. Dass, *Multiplicity of steady solutions in two-dimensional lid-driven cavity flows by lattice boltzmann method*, Computers & Mathematics with Applications **61** (2011), no. 12, 3711–3721.
- [27] A. P. Rosa, G. C. Abade, and F. R. Cunha, *Computer simulations of equilibrium magnetization and microstructure in magnetic fluids*, Physics of Fluids **29** (2017), no. 9, 092006.

- [28] A. P. Rosa and F. R. da Cunha, *Calculation of the flow of a magnetic fluid in capillaries tubes with varying magnetization by vorticity*, Proceedings of International Congress of Mechanical Engineering **1** (2013), 1–11.
- [29] A. P. Rosa, R. G. Gontijo, and F. R. Cunha, *Laminar pipe flow with drag reduction induced by a magnetic field gradient*, Applied Mathematical Modelling **40** (2016), no. 5-6, 3907–3918.
- [30] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, Courier Corporation, 2013.
- [31] A. Rutherford, *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*, London; printed in USA, 1962.
- [32] K. R. Schumacher, I. Sellien, G. S. Knoke, T. Cader, and B. A. Finlayson, *Experiment and simulation of laminar and turbulent ferrofluid pipe flow in an oscillating magnetic field*, Physical Review E **67** (2003), no. 2, 026308.
- [33] P.N. Shankar and M.D. Deshpande, *Fluid mechanics in the driven cavity*, Annual review of fluid mechanics **32** (2000), no. 1, 93–136.
- [34] J. P. Shen and M. Doi, *Effective viscosity of magnetic fluids*, Journal of the Physical Society of Japan **59** (1990), no. 1, 111–117.
- [35] M. I. Shliomis, *Effective viscosity of magnetic suspensions*, Zh. Eksp. Teor. Fiz **61** (1971), no. 2411, s1971d.
- [36] ———, *Magnetic fluids*, Physics-Uspekhi **17** (1974), no. 2, 153–169.
- [37] C. Singh, A. K. Das, and P. K. Das, *Flow restrictive and shear reducing effect of magnetization relaxation in ferrofluid cavity flow*, Physics of Fluids **28** (2016), no. 8, 087103.
- [38] A. J. M. Spencer, *Continuum mechanics*, Courier Corporation, 2004.
- [39] P. S. Stephen, *Low viscosity magnetic fluid obtained by the colloidal suspension of magnetic particles*, **2** 1965.
- [40] E. E. Tzirtzilakis, *A simple numerical methodology for bfd problems using stream function vorticity formulation*, Communications in Numerical Methods in Engineering **24** (2008), no. 8, 683–700.
- [41] ———, *Biomagnetic fluid flow in an aneurysm using ferrohydrodynamics principles*, Physics of Fluids **27** (2015), no. 6, 061–902.
- [42] E. E. Tzirtzilakis and M. A. Xenos, *Biomagnetic fluid flow in a driven cavity*, Meccanica **48** (2013), no. 1, 187–200.
- [43] C. Zhuo, C. Zhong, X. Guo, and J. Cao, *Mrt-lbm simulation of four-lid-driven cavity flow bifurcation*, Procedia Engineering **61** (2013), 100–107.

APÊNDICE

APÊNDICE I

O ROTACIONAL DA FORÇA DE KELVIN

Neste apêndice vamos explicar o fato de $\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) = 0$, quando $\mathbf{M} = \chi(H) \mathbf{H}$.

De fato, considere uma decomposição de Helmholtz, como pode ser visto em [31], tal que um campo vetorial \mathbf{a} , pode ser decomposto em uma parte irrotacional e uma parte solenoidal, dado por,

$$\mathbf{a} = \nabla \times \beta + \nabla \phi = \mathbf{v} + \nabla \phi, \quad (\text{I.1})$$

em que ϕ é uma função escalar e β é um campo vetorial solenoidal, e $\mathbf{v} = \nabla \times \beta$ um vetor. Substituindo a equação (I.1) na equação do movimento para fluido magnético (2.68), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v} + \nabla \phi) + (\mathbf{v} + \nabla \phi) \cdot \nabla(\mathbf{v} + \nabla \phi) &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2(\mathbf{v} + \nabla \phi) \\ &+ C_{pm} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Tirando o rotacional da equação (I.2), temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v} + \nabla \phi) \right) + \nabla \times \left((\mathbf{v} + \nabla \phi) \cdot \nabla(\mathbf{v} + \nabla \phi) \right) &= -\nabla \times \nabla p \\ + \frac{1}{Re} \nabla \times \left(\nabla^2(\mathbf{v} + \nabla \phi) \right) + C_{pm} \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Analisando termo a termo, segue que,

$$\nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v} + \nabla \phi) \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \nabla \phi) = \frac{\partial \xi}{\partial t}; \quad (\text{I.4})$$

$$\nabla \times \nabla p = 0; \quad (\text{I.5})$$

$$\nabla \times \left(\nabla^2(\mathbf{v} + \nabla\phi) \right) = \nabla \times \nabla^2\mathbf{v} + \nabla^2(\nabla \times \nabla\phi) = \nabla^2\xi \quad (\text{I.6})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \left((\mathbf{v} + \nabla\phi) \cdot \nabla(\mathbf{v} + \nabla\phi) \right) &= (\nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times \nabla\phi) \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla^2\phi) \\ &+ (\mathbf{v} + \nabla\phi) \cdot \nabla(\nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times \nabla\phi) - (\nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times \nabla\phi) \cdot (\nabla\mathbf{v} + \nabla\nabla\phi) \\ &- (\mathbf{v} + \nabla\phi)\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times \nabla\phi) = \mathbf{v} \cdot \nabla\xi \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

os termos da equação (I.7) se anulam devido à ausência de estiramento de vórtices em um escoamento bidimensional, e também por β ser uma função escalar e harmônica. Portanto a equação (I.3) se reduz à,

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\xi = \frac{1}{Re} \nabla^2\xi + C_{pm} \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H}). \quad (\text{I.8})$$

Porém, se fizermos a decomposição do campo velocidade em uma parte solenoidal e uma parte irrotacional, a equação da vorticidade dada pela equação (I.8), pode ser escrita apenas em termos da parte solenoidal, ou seja,

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\xi = \frac{1}{Re} \nabla^2\xi; \quad \text{com} \quad \xi = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (\text{I.9})$$

Portanto, se a força magnética for irrotacional, ela não aparecerá na formulação vorticidade-função de corrente, isto é, na nossa formulação apenas serão vistas mudanças no campo velocidade \mathbf{v} .

Contudo, mostraremos que $\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H}) = 0$, se consideramos a hipótese de superparamagnetismo. De fato, primeiramente, note que no limite magnetostático, temos que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0. \quad (\text{I.10})$$

Agora, calculando a expressão abaixo, temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H} &= (M_x\partial_x + M_y\partial_y + 0)(H_x, H_y, 0) \\ &= \left(M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_x}{\partial y}; M_x \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial y}; 0 \right). \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Portanto, tirando o rotacional de (I.11), obtemos:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(M_x \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y} + M_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_y}{\partial y} \right) \\
&\quad - \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x} - M_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} - M_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} \\
&\quad + \underbrace{M_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)}_{\nabla \times \mathbf{H} = 0} + \underbrace{M_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)}_{\nabla \times \mathbf{H} = 0} \\
&= \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y}. \tag{I.12}
\end{aligned}$$

Faremos duas hipóteses sobre a magnetização \mathbf{M} . A primeira é:

- $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ tal que χ é uma constante real, chamada de susceptibilidade magnética. Então, temos que

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = \chi \frac{\partial H_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} = \chi \frac{\partial H_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial M_x}{\partial y} = \chi \frac{\partial H_x}{\partial y}; \quad \frac{\partial M_y}{\partial x} = \chi \frac{\partial H_y}{\partial x}. \tag{I.13}$$

Substituindo as equações em (I.13) na expressão (I.12), obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) &= \chi \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \chi \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y} - \chi \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x} - \chi \frac{\partial H_y}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} \\
&= \chi \frac{\partial H_x}{\partial x} \underbrace{\left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right]}_{\nabla \times \mathbf{H} = 0} + \chi \frac{\partial H_y}{\partial y} \underbrace{\left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right]}_{\nabla \times \mathbf{H} = 0} \\
&= 0. \tag{I.14}
\end{aligned}$$

A segunda hipótese um pouco mais geral do que a primeira, é dada por:

- $\mathbf{M} = \chi(H) \mathbf{H}$. em que

$$H(x, y) = (H_x(x, y), H_y(x, y)) = \sqrt{H_x(x, y)^2 + H_y(x, y)^2},$$

em que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{H} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{H} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} \right).$$

Calculemos os termos separadamente da expressão (I.12)

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\chi(H)H_x) = \frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial x} H_x + \chi(H) \frac{\partial H_x}{\partial x} \\ &= \frac{\partial\chi}{\partial H} H_x \frac{1}{H} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \chi(H) \frac{\partial H_x}{\partial x}\end{aligned}\quad (\text{I.15})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(\chi(H)H_y) = \frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial x} H_y + \chi(H) \frac{\partial H_y}{\partial x} \\ &= \frac{\partial\chi}{\partial H} H_y \frac{1}{H} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \chi(H) \frac{\partial H_y}{\partial x}\end{aligned}\quad (\text{I.16})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\chi(H)H_x) = \frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial y} H_x + \chi(H) \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ &= \frac{\partial\chi}{\partial H} H_x \frac{1}{H} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + \chi(H) \frac{\partial H_x}{\partial y}\end{aligned}\quad (\text{I.17})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\chi(H)H_y) = \frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial y} H_y + \chi(H) \frac{\partial H_y}{\partial y} \\ &= \frac{\partial\chi}{\partial H} H_y \frac{1}{H} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + \chi(H) \frac{\partial H_y}{\partial y}\end{aligned}\quad (\text{I.18})$$

Assim, substituindo (I.15), (I.16), (I.17) e (I.18) em (I.12), obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) &= \left[\frac{\partial\chi}{\partial H} H_x \frac{1}{H} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \chi(H) \frac{\partial H_x}{\partial x} \right] \frac{\partial H_y}{\partial x} \\ &+ \left[\frac{\partial\chi}{\partial H} H_y \frac{1}{H} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \chi(H) \frac{\partial H_y}{\partial x} \right] \frac{\partial H_y}{\partial y} \\ &- \left[\frac{\partial\chi}{\partial H} H_x \frac{1}{H} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + \chi(H) \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] \frac{\partial H_x}{\partial x} \\ &- \left[\frac{\partial\chi}{\partial H} H_y \frac{1}{H} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + \chi(H) \frac{\partial H_y}{\partial y} \right] \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ &= \underbrace{\frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{H_x^2}{H} \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x}}_{\text{termo1}} + \underbrace{\frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{H_x H_y}{H} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2}_{\text{termo4}} + \underbrace{\chi \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x}}_{\text{termo5}} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{H_y H_x}{H} \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y}}_{\text{termo3}} + \underbrace{\frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{H_y^2}{H} \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y}}_{\text{termo2}} + \underbrace{\chi \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y}}_{\text{termo5}} \\ &- \underbrace{\frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{H_x^2}{H} \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x}}_{\text{termo1}} - \underbrace{\frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{H_x H_y}{H} \frac{\partial H_y}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x}}_{\text{termo3}} - \underbrace{\chi \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x}}_{\text{termo4}} \\ &- \underbrace{\frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{H_y H_x}{H} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} \right)^2}_{\text{termo5}} - \underbrace{\frac{\partial\chi}{\partial H} \frac{H_y^2}{H} \frac{\partial H_y}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y}}_{\text{termo2}} - \underbrace{\chi \frac{\partial H_y}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y}}_{\text{termo5}}.\end{aligned}\quad (\text{I.19})$$

Agrupando os termos, e usando a equação (I.10), reduzimos a equação (I.19) por

$$\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) = \frac{\partial \chi}{\partial H} \frac{H_x H_y}{H} \left[\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (\text{I.20})$$

utilizando diferença de quadrados na equação (I.20), obtemos

$$\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) = \frac{\partial \chi}{\partial H} \frac{H_x H_y}{H} \left[\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \right], \quad (\text{I.21})$$

novamente, pela equação (I.10), obtemos o resultado desejado,

$$\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) = 0, \quad (\text{I.22})$$

quando, $\mathbf{M} = \chi(H)\mathbf{H}$.