Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Espaço BV e a Equação de Euler-Lagrange para 1-Laplaciano

Guillermo Arturo Villanueva Camac

Brasília

2018

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Espaço BV e a Equação de Euler-Lagrange para 1-Laplaciano

por

Guillermo Arturo Villanueva Camac

Orientador: Prof. Dr. **Carlos Alberto Pereira dos Santos**

Brasília

2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

VV718e

Villanueva Camac, Guillermo Arturo
Espaço BV e a Equação de Euler -Lagrange para 1-Laplaciano / Guillermo Arturo Villanueva Camac; orientador Carlos Alberto Pereira dos Santos. -- Brasília, 2018.
104 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Espaço de Variação Limitada. 2. Ponto crítico. 3. Operador 1-Laplaciano. 4. Equação de Euler-Lagrange. I. Pereira dos Santos, Carlos Alberto , orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Espaço BV e a Equação de Euler -Lagrange para 1-Laplaciano

por

Guillermo Arturo Villanueva Camac*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 20 de julho de 2018.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos - MAT/UnB (Orientador)

Jiazheng Zhou

Prof. Dr. Jiazheng Zhou – MAT/UnB (Membro)

Kaye O da S.

Prof. Dr. Kaye Oliveira da Silva – UFG (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Dedicatória

Ao meu querido pai Pepito, meu grande amigo.

Minha querida mãe Lucinda, minha vida.

“La vida está hecha de decisiones, depende de ti escoger una de ellas para ser feliz.”

Guillermo Arturo Villanueva Camac

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por todas as oportunidades que tem me proporcionado até aqui e por cuidar de mim todo esse tempo.

A minha família, que me apoiou e que sempre esteve ao meu lado nos momentos em que precisei. De forma especial à meu pai Guillermo (Pepian) pelos seus sábios conselhos nesta longa estrada e minha mãe Lucinda, um exemplo de mulher que não desiste nas adversidades da vida, a minha irmã Sindi que está sempre comigo me apoiando quando eu mais preciso dela. A ajuda de vocês foi essencial e determinante para essa conquista.

Aos meus queridos tios, pelo apoio e conselhos que sempre me ofereceram, especialmente minha tia Gladys Villanueva e Marcos Trujillo. Meu querido tio Gilmer Villanueva (tío Kena), seus conselhos sempre foi uma força para essa conquista, e também minha querida tia Jova Torres, uma mulher que não desiste das adversidades da vida.

A minha namorada Ingrit Maravi pela ajuda incondicional e por todos aqueles momentos difíceis que a vida nos deu, muito obrigado pelo seu apoio.

A todos os meus amigos do departamento de matemática da UnB, os quais me ajudaram incontáveis vezes e proporcionaram a cada dia um motivo para continuar. Aos demais colegas, Alancoc Santos (Alancoco), Fabian Muñoz, Filipe Kelmer, Felipe Quintino, Irving Ramirez, Manuel Argomedo, Matheus Diniz, Roberto Vila, Wállef Januário, Wilson Murillo, Wellinton Gimarez, levarei vocês em meu coração por toda a vida.

Agradeço aos professores Luis de Miranda, Noraí Rocco, Giovanny figueiredo, Ary Medino por seu papel fundamental na minha formação acadêmica.

Ao meu orientador Prof. Carlos Alberto Pereira dos Santos, por toda a disposição em me ajudar, pela amizade, paciência e pelas valiosas sugestões. Tenho muito orgulho de ter sido orientado por alguém tão qualificado.

A todos os funcionários do Departamento de Matemática da UnB. Em especial, aos porteiros das salas de mestrado: Dona Claudia, Dona Maria, seu Manoel e seu Milton, pela paciência e por prezar por nossa segurança.

À UnB, pela infraestrutura e recursos oferecidos para a realização deste trabalho.

À CNPQ pelo apoio financeiro.

Peço desculpas àqueles que injusta e involuntariamente tenham sido omitidos.

Meus sinceros agradecimentos a todos.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o Espaço de Variação Limitada $BV(\Omega)$ e entendemos o significado de um ponto crítico para o funcional de energia associado ao problema do operador 1-Laplaciano dado por $-\Delta u = f$ em Ω, onde Ω é limitado e $u \in BV(\Omega)$. Além disso, obtemos a equação de Euler-Lagrange para esse problema.

Palavras-chave: Espaço de Variação Limitada, Ponto crítico, Operador 1-Laplaciano e Equação de Euler-Lagrange.

Abstract

In this work, we study the Bounded Variation Space $BV(\Omega)$ and we understand the significance of a critical point for the energy functional associated with the problem of the 1-Laplacian operator given by $-\Delta u = f$ on Ω, where Ω is limited and $u \in BV(\Omega)$. In addition, we obtain the Euler-Lagrange equation for this problem.

Keywords: Space of bounded variation, Critical point, Operator 1-Laplacian and Euler-Lagrange equation.

Sumário

Introdução 1

1 Espaço das Medidas de Radon e suas propriedades 6

1.1 Sobre Medidas 6

1.2 Medidas de Radon 16

1.3 Propriedades das Medidas de Radon 35

2 Espaço de Variação Limitada 43

2.1 Definições e propriedades 43

2.2 Convêrgencia e imersões 52

3 Subdiferencial e o Gradiente de Clarke 60

3.1 Subdiferencial 60

3.2 O gradiente generalizado de Clarke 62

3.3 Propriedades do gradiente generalizado de Clarke 66

4 Equação de Euler-Lagrange para problemas com 1-Laplaciano 69

4.1 Resultados do espaço BV(Ω) e das medidas de Radon 70

4.2 Problema de torção 88

4.2.1 Funcional de energia 89

4.2.2 Ponto crítico 92

4.2.3 Equação de Euler-Lagrange 94

5 APÊNDICE 97

5.1 Propriedades dos espaços de Sobolev 99

Lista de Símbolos

$i.e.$	:	Isto é.
$\mathcal{M}^+(\Omega)$	:	Espaço das medidas de Radon positivas.
$\mathcal{M}(\Omega)$	:	Espaço das medidas de Radon real.
$C_c(\Omega)$	:	Espaço das funções contínuas com suporte compacto.
$C_0(\Omega)$	:	Espaço das funções contínuas que são nulas no infinito.
$\mathcal{H}^N$	:	Medida de Hausdorff N-dimensional.
X^*	:	Espaço dual topológico de X.
$\partial\psi(\Omega)$	:	Subdiferencial da função ψ.
$BV(\Omega)$	:	Espaço das funções de variação limitada.
$W^{1,1}(\Omega)$	:	Espaço das funções de Sobolev.
$\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$	:	Norma no espaço $BV(\Omega)$.
$\vert\cdot\vert_{BV(\Omega)}$	:	Seminorma no espaço $BV(\Omega)$.
$u_{\vert\partial\Omega}$	:	Traço da funçao u nos espaçõs $BV(\Omega)$ e $W^{1,1}(\Omega)$.

Introdução

Em 1881, as funções de variação limitada foram introduzidas pela primeira vez por C. Jordan em [2] para estudar a convergência pontual das séries de Fourier. Após da introdução por Jordan de funções de variação limitada de uma variável real, vários autores tentaram generalizar o conceito para funções de mais de uma variável. A primeira tentativa foi feita por Arzelà e Hardy em 1905, seguida por Vitali, Fréchet, Tonelli e Pierpont. No entanto, o ponto de vista que se tornou popular e hoje é aceito na literatura como a generalização mais eficiente da teoria unidimensional é devido a De Giorgi e Fichera. Embora com definições diferentes, as abordagens de De Giorgi e Fichera são equivalentes.

Em [2], as funções de variação limitada $BV(\Omega)$ tiveram um papel muito importante em vários problemas clássicos do cálculo de variações, por exemplo, na teoria de gráficos com área mínima ou no processamento de imagens. Enrico Giusti [15] dá o seguinte exemplo: dado $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função suave, então a área do seu gráfico é dado por

$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

e, portanto, u minimiza a área se, e somente se, é uma solução da equação de superfície mínima

$$DivT(u) = 0 \text{ onde } T(u) = \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$

Uma pergunta natural é a existência de soluções do problema de Dirichlet associado, i.e.,

$$\begin{cases} -DivT(u) &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde f é uma função dada. Jenkins e Serrin [16] provaram que o problema de Dirichlet tem solução no caso N-dimensional se a curvatura média de $\partial\Omega$ não for negativa em nenhum ponto. Assim, a equação (1) pode não ter solução dependendo das condições geométricas da fronteira $\partial\Omega$. Para evitar essa inconveniência, podemos generalizar levemente a noção da solução de (1). Mais precisamente, não impomos a condição de fronteira $u = \varphi$ mas, ao invés disso, a introduzimos no funcional de energia associado, o qual penalize funções que não sejam iguais $q.t.p$ em $\partial\Omega$, e procuramos um mínimo de

$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}dx + \int_{\partial\Omega} |u-\varphi| d\mathcal{H}^{N-1},\ u \in X,$$

onde X é um espaço de tal forma que a equação (1) é satisfeita e $\mathcal{H}^{N-1}$ é a medida de Hausdorff de dimensão $N-1$. Por outro lado, poderíamos pensar que o espaço das funções $W^{1,1}(\Omega)$ é adequado para o funcional A, mas acontece que A não é semi-contínuo inferiormente nesse espaço. Assim, seria muito difícil provar a existência de mínimos. Enrico Giusti [15], provou que o funcional A sempre tem um mínimo em $BV(\Omega)$, independentemente da curvatura média de $\partial\Omega$.

No caso do processamento de imagens, Rudin [21] apresenta um modelo de restauração de imagens: se u_0 é a função de intensidade observada, $u_0(x,y)$ denota os valores de pixel de uma imagem ruidosa para $x, y \in \Omega$ e $u(x,y)$ é a imagem limpa desejada, então

$$u_0(x,y) = u(x,y) + n(x,y), \tag{2}$$

onde n é o ruído aditivo. É claro que desejamos construir u a partir de u_0. O problema de minimização motivado pela equação (2) é dado por

$$\int_\Omega (u_{xx} + u_{yy})^2,$$

com condições

$$\int_\Omega u = \int_\Omega u_0 \text{ e } \int_\Omega (u-u_0)^2 = \sigma^2.$$

Neste modelo, sabe-se que o espaço das funções $BV(\Omega)$ é adequado para muitas tarefas básicas de processamento de imagens.

Chambolle [6], provou que os elementos de $W^{1,1}(\Omega)$ são muito regulares para mostrar imagens de forma eficiente, já que não podem conter descontinuidades através de uma linha (como bordas ou fronteiras de uma imagem) ou qualquer hipersuperfície em geral.

Bernand Kawhol [18], apresenta o problema de torção

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 1 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $-\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ com $p \in (1, \infty)$. A função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é chamada solução fraca de (3) se e só se

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \varphi dx, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Portanto, o funcional de energia associado ao problema (3) é

$$J_p(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega u dx,$$

com $p \in (1, \infty)$ e esse funcional está bem definido. Para o caso $p = 1$ obtemos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -div\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 1 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

Se tentamos minimizar sobre $W_0^{1,1}(\Omega)$, existem problemas com a existência de uma solução em $W_0^{1,1}(\Omega)$ pois esse espaço não é reflexivo. Uma maneira de superar essa dificuldade é trabalhar no espaço $BV(\Omega)$. Nesse caso, o funcional de energia associado a (4) é dado por

$$J_1(u) = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega u dx,$$

onde, pelo Teorema 4.2.9, existe $u \in BV(\Omega)$ solução de variação limitada (ponto crítico de J_1) que satisfaz

$$\begin{cases} \exists\, z \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } \|z\|_{\infty} \leq 1, Divz \in L^{p'}(\Omega), \\ -\displaystyle\int_{\Omega} uDivzdx = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1}, \\ -Divz = f \text{ q.t.p em } \Omega, \end{cases}$$

com $\frac{N}{N-1} \leq p < \infty$ e a última equação é chamada de Equação de Euler-Lagrange.

Os objetivos centrais do trabalho é o estudo detalhado do Espaço de Variação Limitada apresentados por [2, 3, 10]. Apresentaremos as propriedades desse espaço e mostraremos as condições necessárias para um minimizador de um funcional de energia associado ao problema

$$-div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = f \text{ em } \Omega,$$

onde Ω é um domínio limitado e $u \in BV(\Omega)$. Descreveremos agora a estrutura deste trabalho.

No capítulo 1, apresentaremos um breve resumo dos conceitos básicos de teoria da medida e integração com foco naqueles que serão mais relevantes para a construção dos capítulos posteriores. Alem disso, estabelecemos as notações que foram utilizadas durante todo o texto. Inicialmente, abordamos as medidas de Radon e as de Hausdorff. Por fim, fizemos um breve estudo sobre as propriedades das medidas de Radon que são necessárias nos capítulos 2 e 4.

No capítulo 2, apresentamos uma síntese da teoria do Espaço de Variação Limitada $BV(\Omega)$. Na primeira seção motivados pelo teorema de caracterização de $W^{1,p}(\Omega)$, definiremos naturalmente os Espaços de Variação Limitada e, em seguida, estudaremos um teorema de caracterização de $BV(\Omega)$ que será muito importante nas provas de vários resultados descritos no capítulo 4. Na segunda seção, estudaremos os principais resultados de imersão e mostraremos os teoremas generalizados de Green e Poincaré no espaço $BV(\Omega)$.

No capítulo 3, abordaremos o estudo do subdiferencial e o gradiente generalizado de Clarke, apresentando uma revisão dos principais resultados encontrados na literatura e que serão de muita importância para as provas dos teoremas do Capítulo

4.

No capítulo 4, apresentaremos o problema de torção que é modelado pelo o operador 1-Laplaciano onde esse operador não está bem definido em pontos $x \in \Omega$ tal que $\nabla u(x) = 0$. Mostraremos que os pontos críticos do funcional de energia associado satisfazem uma versão de (4.37), na qual aparece um campo vetorial que está bem definido.

Capítulo 1

Espaço das Medidas de Radon e suas propriedades

Neste capítulo, fixaremos as notações e estabeleceremos os principais resultados que serão utilizados na construção dos próximos capítulos. Inicialmente apresentaremos as definições de Medida de Radon e Hausdorff. No fim deste capítulo, faremos uma revisão das principais propriedades das medidas de Radon. As principais referências deste capítulo são Folland [14], Bogachev [4] e Brezis [5].

1.1 Sobre Medidas

Definição 1.1.1 (Álgebra) *Seja X um conjunto não vazio. Uma álgebra de subconjuntos de X é uma coleção não vazia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que é fechada pela união de quantidades finitas e complementares. Em outras palavras, $\mathcal{A} \subset P(X)$ - o conjunto das partes de X - e:*

(a) *se* $E_1, ..., E_n \in \mathcal{A},$ *então* $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A},$

(b) *se* $E \in \mathcal{A},$ *então* $E^c \in \mathcal{A}.$

Podemos generalizar a definição acima para a união de quantidade infinita.

Definição 1.1.2 (Sigma-álgebra) *Dizemos que uma σ-$álgebra$ de conjuntos de X é uma coleção não vazia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que é fechada pela união de quantidades enumeráveis e complementares, isso é,*

(a) *se* $E \in \mathcal{A},$ *então* $E^c \in \mathcal{A},$

(b) *se* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$, *então* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

Nesse sentido, estabelecemos e denotamos o que será o domínio de uma medida. Ou seja, se X é um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subset P(X)$ é uma σ-$\acute{a}lgebra$, então $X = (X, \mathcal{A})$ é chamado um espaço mensurável e os subconjuntos de X são chamados de conjuntos mensuráveis.

Sempre existe uma menor $\sigma - \acute{a}lgebra$ contendo um subconjunto de X.

Teorema 1.1.3 (σ-$\acute{a}lgebra$ gerada) *Seja X um conjunto não vazio e Θ um subconjunto de $P(X)$. Então existe uma única e menor σ-$\acute{a}lgebra$ $\mathcal{M}(\Theta)$ que contém Θ. Além disso, essa σ-$\acute{a}lgebra$ é dada pela interseção de todas as σ-$\acute{a}lgebras$ contendo Θ.*

Demostração: Ver [4], pág. 4.

Uma σ-$\acute{a}lgebra$ especial.

Definição 1.1.4 (σ-$\acute{a}lgebra$ de Borel) *Considere X um espaço topológico (em particular, se X for um espaço métrico). Dizemos que a σ-$\acute{a}lgebra$ gerada pela família de conjuntos abertos de X é a σ-$\acute{a}lgebra$ de Borel sobre X, e a denotamos por B_X ou $B(X)$. Além disso, seus elementos são chamados conjuntos de Borel ou Borelianos.*

Um exemplo de uma σ-$\acute{a}lgebra$ de Borel.

Proposição 1.1.5 *Seja $B_{\mathbb{R}}$ a σ-$\acute{a}lgebra$ de Borel sobre $\mathbb{R}$. Então $B_{\mathbb{R}}$ é gerada por qualquer um dos tipos de conjuntos abaixo:*

(a) *intervalos abertos da forma (a, b) com $a < b$,*

(b) *intervalos fechados da forma $[a, b]$ com $a < b$,*

(c) *intervalos semi-abertos $(a, b]$ com $a < b$ ou $[a, b)$ com $a < b$,*

(d) *intervalos abertos semi-infinitos (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ com $a \in \mathbb{R}$,*

(e) *intervalos fechados semi-infinitos $[a, \infty)$ ou $(-\infty, a]$ com $a \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Ver [4], pág. 7.

Definição 1.1.6 *Seja X um conjunto não vazio munido de uma σ-$\acute{a}lgebra$ $\mathcal{M}$. Dizemos que uma medida sobre $\mathcal{M}$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ que satisfaz:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) *se* $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ *é uma sequência de conjuntos disjuntos em* $\mathcal{M}$*, então*

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Como uma consequência imediata da definição de medida, temos que se $E_1, ..., E_n$ são subconjuntos disjuntos em $\mathcal{M}$, então $\mu(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$, pois $E_j = \emptyset$ para todo $j > n$.

Por todo este texto, adicionalmente, nos referiremos ao conjunto X munido de uma σ-$\acute{a}lgebra$ $\mathcal{M}$ e à medida μ sobre X, como sendo:

- o espaço de medida $(X, \mathcal{M}) := (X, \mathcal{M}, \mu)$,
- um espaço de medida finita se $\mu(X) < \infty$, isso é, $\mu(E) < \infty$ para todo $E \in \mathcal{M}$, pois $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c)$,
- uma medida $\sigma-$finita se $X = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j$ com $E_j \in \mathcal{M}$ e $\mu(E_j) < +\infty \; \forall j \in \mathbb{N}$,
- uma medida completa se $\mathcal{M}$ (o domínio da medida) contém todos os subconjuntos dos conjuntos de medida nula.

Um exemplo especial de medida.

Definição 1.1.7 ($Medida$ **de Borel)** *Considere* X *um espaço topológico. Dizemos que uma medida cujo domínio é* $B(X)$ *é uma medida de Borel.*

De forma mais geral, temos.

Definição 1.1.8 *Uma medida exterior sobre um conjunto não vazio* X *é uma função* $\mu^* : P(X) \longrightarrow [0, \infty]$ *que satisfaz:*

- $\mu^*(\emptyset) = 0,$
- $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ *se* $A \subset B,$
- $\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$

Um exemplo de medida exterior.

Proposição 1.1.9 *Sejam* $\Theta \subset P(X)$ *e* $\mu : \Theta \longrightarrow [0, +\infty]$ *tal que* $\emptyset, X \in \Theta$ *e* $\mu(\emptyset) = 0$. *Para cada* $A \subset X$ *defina*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j) : E_j \in \Theta \text{ e } A \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \right\},$$

então μ^* *é uma medida exterior.*

Demonstração: Ver [14], pág. 29.

É consequência imediata da definição acima que vale a desigualdade

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \text{ para todos } A \text{ e } E \text{ dados.}$$

Definição 1.1.10 *Dizemos que um conjunto* $A \subset X$ *é chamado* $\mu^* - mensurável$ *se*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \text{ para cada } E \subset X. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1.11 (Carathéodory) *Seja* μ^* *uma medida exterior sobre* X. *Então a coleção* $\mathcal{N}$ *de todos os conjuntos* $\mu^* - mensuráveis$ *é um* $\sigma - álgebra$. *Além disso, a restrição de* μ^* *à coleção* $\mathcal{N}$ *é uma medida completa.*

Demonstração: Ver [14], pág. 29.

Um caso especial de medida exterior sobre um espaço métrico. Considere $X := (X, \rho)$ um espaço métrico, onde $\rho(A, B) = \min\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$ para conjuntos $A, B \subset X$ dados. Para mais detalhes, veja Folland [14].

Definição 1.1.12 *Dizemos que* μ^* *é uma medida exterior métrica sobre* X *se* μ^* *é uma medida exterior e satisfaz*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \text{ para todos } A, B \subset X \text{ dados com } \rho(A, B) > 0.$$

A respeito de Borelianos, temos.

Proposição 1.1.13 *Seja* μ^* *uma medida exterior métrica sobre* X. *Então cada conjunto boreliano de* X *é* μ^**−mensurável.*

Demonstração: Ver [14], pág. 349.

No que segue, vamos denotar o diâmetro de um conjunto A por $diam(A)$, ou seja,

$$diam(A) = \max\{\rho(x, y) : x, y \in A\}.$$

Um caso especial de medida exterior métrica, e que desempenha um papel muito importante no contexto dos espaços de Variação Limitada, é a medida de Hausdorff. Para definirmos essa medida, observamos inicialmente que a Proposição 1.1.9 implica que $\mathcal{H}^{p,\delta} : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$, definido por

$$\mathcal{H}^{p,\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (diam(B_j))^p : \; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, \; diam(B_j) \leq \delta \right\},$$

é uma medida exterior para cada $p \geq 0$ e $\delta > 0$ dados, onde o ínfimo é tomado sobre todos as coberturas $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ de A pelos conjuntos $B_j \subset X$, com a convenção de que $\inf \varnothing = \infty$.

Quando passamos ao limite em $\delta \to 0$, obtemos.

Proposição 1.1.14 *Seja* $p \geq 0$*. Então a função* $\mathcal{H}^p : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$*, definida por*

$$\mathcal{H}^p(A) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} \mathcal{H}^{p,\delta}(A), \quad A \in P(X),$$

é uma medida exterior métrica.

Demonstração: Desde que $\mathcal{H}^{p,\delta}$ é uma medida exterior, segue da Proposição 1.1.9 que $\mathcal{H}^p$ é uma medida exterior também. No que segue, vamos concluir que $\mathcal{H}^p$ é uma medida exterior métrica. Considere $A, B \subset X$ tal que $\rho(A, B) > 0$. Seja $\{C_j\}$ uma cobertura de $A \cup B$ tal que

$$diam(C_j) \leq \delta \leq \rho(A, B), \; \forall j \in \mathbb{N}.$$

Então $C_j \cap B = \varnothing$ ou $C_j \cap A = \varnothing$ o que no leva a

$$\sum_{j=1}^{\infty} (diam(C_j))^p \geq \mathcal{H}^{p,\delta}(A) + \mathcal{H}^{p,\delta}(B)$$

após passar ao ínfimo em tais coberturas. Novamente passando ao ínfimo, obtemos

$$\mathcal{H}^{p,\delta}(A \cup B) \geq \mathcal{H}^{p,\delta}(A) + \mathcal{H}^{p,\delta}(B) \text{ para todo } \delta > 0.$$

Portanto, fazendo $\delta \longrightarrow 0$, obtemos

$$\mathcal{H}^p(A \cup B) \geq \mathcal{H}^p(A) + \mathcal{H}^p(B).$$

Agora, lembrando que $\mathcal{H}^p$ é uma medida exterior, temos a desigualdade contrária. Isso conclui a prova. ■

Uma consequência imediata das Proposições 1.1.13 e 1.1.14, temos que a restrição de $\mathcal{H}^p$ aos conjuntos Borelianos é uma medida, que ainda denotaremos por $\mathcal{H}^p$. Essa medida restrição é chamada de medida de Hausdorff p-dimensional.

De volta a uma medida geral.

Definição 1.1.15 *Considere $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $\mu, \nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ duas medidas. Dizemos que uma medida ν é absolutamente contínua com respeito à medida μ, e denotamos isso por $\nu \ll \mu$, se para cada $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) = 0$ tivermos $\nu(E) = 0$.*

Refinamos a definição de medida para incluir medidas com valores negativos.

Definição 1.1.16 ($Medida\ com$ sinal) *Considere $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Dizemos que uma medida com sinal é uma função $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ tal que:*

$i)$ $\mu(\varnothing) = 0$,

$ii)$ *μ assume no máximo um dos valores $+\infty$ ou $-\infty$,*

$iii)$ *para cada coleção enumerável $\{E_i\} \subset \mathcal{M}$ de conjuntos disjuntos dois a dois temos*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Adicionalmente, dizemos que μ é uma ***medida com sinal real ou medida real*** *se ela não assumir nenhum dos valores $\pm\infty$.*

Generalizando o conceito de medida real.

Definição 1.1.17 (Vetor $Medida$) *Considere $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Dizemos que um vetor medida é uma função $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que:*

$i)$ $\mu(\varnothing) = 0$,

$iii)$ para cada coleção enumerável $\{E_i\} \subset \mathcal{M}$ de conjuntos disjuntos dois a dois temos

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Como consequência imediata da definição (1.1.16), temos que toda medida é uma medida com sinal e para enfatizar as medidas, como definidas na Definição (1.24), vamos a referir a elas como medidas positivas.

Um exemplo de medida real.

Definição 1.1.18 *Considere X um espaço topológico. Dizemos que uma medida real cujo domínio é $B(X)$ é uma medida de Borel real.*

Assim, podemos definir "conjuntos com sinal".

Definição 1.1.19 *Dizemos que um conjunto $E \in \mathcal{M}$ é positivo (respectivamente negativo, nulo) para μ se*

$$\mu(F) \geq 0 \ (\leq 0, = 0) \ \forall F \in \mathcal{M} \text{ tal que } F \subset E.$$

Isso nos permite definir.

Definição 1.1.20 *Considere $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e μ, ν duas medidas com sinal. Dizemos que μ e ν são mutuamente singulares (ou ν é singular com respeito à μ), e denotamos isso por $\nu \perp \mu$, se existirem dois conjuntos $A, B \in \mathcal{M}$ tais que $X = A \cup B$, A é nulo com respeito à medida μ e B é nulo com respeito à ν.*

Definição 1.1.21 *Considere $(X, \mathcal{M})$ um espaço de medida. Dizemos que um enunciado é verdade em quase todos os pontos $x \in X$ ou para quase todos os pontos $(q.t.p)$ $x \in X$, se for verdadeira, exceto para x em algum conjunto de medida nula.*

Com o objetivo de definir integrabilidade de uma função, vamos definir função mensurável.

Definição 1.1.22 *Considere $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N}) - mensurável$ ou simplesmente mensurável, se*

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \text{ para todo } E \in \mathcal{N}.$$

Como uma consequência dessa definição, temos que uma função $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{M}$ – mensurável se ela for $(\mathcal{M}, B_{\overline{\mathbb{R}}})$ – mensurável, onde $B_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in B_{\mathbb{R}}\}$ é a σ-álgebra de Borel.

Um exemplo de função mensurável é a função característica $X_E : X \to \mathbb{R}$ de um conjunto $E \subset \mathcal{M}$,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in E, \\ 0 & se\ x \notin E. \end{cases}$$

Uma combinação linear finita de funções características de elementos de $\mathcal{M}$ é dita ser uma função simples (mensurável) em X.

No que segue, vamos considerar que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ seja um espaço de medida e denotar o espaço das funções não negativas mensuráveis por $L^+ = \{f : X \longrightarrow [0, +\infty] : f$ é $\mathcal{M}$ – mensurável$\}$.

Definição 1.1.23 *Seja $\phi \in L^+$ uma funçao simples tal que $\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ com $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$(união disjunta), definimos a integral de ϕ por*

$$\int \phi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$$

com a convenção de que $0.\infty = 0$.

Para funções $f \in L^+$.

Definição 1.1.24 *Para $f \in L^+$, definimos*

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \textit{ é simples} \right\}$$

E de forma geral.

Definição 1.1.25 *Dizemos que uma função f mensurável é integrável se pelo menos uma das integrais*

$$\int_X f^+ d\mu \textit{ ou } \int_X f^- d\mu$$

for finita. Nesse caso, a integral de f é dada por

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu,$$

onde

$$f^+(x) := \max(f(x), 0) \text{ e } f^-(x) := \max(-f(x), 0)$$

são as partes positiva e negativa de f, respectivamente.

Em particular, temos que f integrável se, e somente se, $\int |f| d\mu < +\infty$. Em consequência disso, denotaremos por

$$L^1(X, \mu) = L^1(\mu) = L^1(X) := \{f : X = (X, \mathcal{M}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ é integrável}\}$$

e observar que esse conjunto é um espaço vetorial real com as operações usuais sobre funções. Assim podemos definir as funções p integráveis.

Definição 1.1.26 *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$. Dizemos que uma função mensurável f é p-integrável se $|f|^p \in L^1(\mu)$. Em consequência disso, denotaremos*

$$L^p(X) := \{f \text{ é mensurável } : |f|^p \in L^1(X)\},$$

para $p = \infty$

$$L^\infty(X) := \{f \text{ é mensurável } : |f(x)| \leq C \text{ q.t.p em X, para alguma constante C}\}.$$

Estamos em condições de enunciar o Teorema de Radon-Nikodyn.

Teorema 1.1.27 (Teorema de Radon-Nikodyn) *Sejam ν uma medida com sinal σ-finita e μ uma medida positiva σ-finita sobre $(X, \mathcal{M})$. Então existem medidas positivas σ-finitas μ_1 e μ_2 em $(X, \mathcal{M})$ tais que*

$$\nu = \mu_1 + \mu_2 \quad com \quad \mu_1 \ll \mu, \quad \mu_2 \perp \nu.$$

Além disso, existe uma função integrável $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$\mu_1(E) = \int_E f d\mu_1 \text{ para todo } E \in \mathcal{M}$$

e esta decomposição é única, ou seja, se

$$\int_E f d\nu = \int_E g d\nu, \text{ então } f = g \ q.t.p$$

Demonstração: Ver [20], pág. 122, [14], pág. 90.

Uma consequência.

Corolário 1.1.28 *Sejam μ uma medida positiva sobre (X, M), $g \in L^1(\mu)$ e*

$$\mu_1(E) = \int_E g d\mu_1, \ E \in \mathcal{M}.$$

Então

$$|\mu_1|(E) = \int_E |g| d\mu_1, \ E \in \mathcal{M}.$$

Demonstração: Ver [20], pág. 125.

Para finalizar essa seção, vamos voltar às medidas com sinal para mostrar que elas podem ser escritas como a diferença de duas medidas positivas.

Teorema 1.1.29 *Seja μ uma medida real sobre um espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$. Então, existem conjuntos disjuntos $X^+, X^- \in \mathcal{M}$ tais que $X = X^+ \cup X^-$. Além disso, para todo $A \in \mathcal{M}$ temos*

$$\mu(A \cap X^-) \leq 0 \text{ e } \mu(A \cap X^+) \geq 0.$$

Demonstração: Ver [4], pág. 176.

Uma consequência.

Corolário 1.1.30 *Assume as hipóteses do teorema anterior e considere μ^+ e μ^- definidas por*

$$\mu^+(A) := \mu(A \cap X^+) \text{ e } \mu^-(A) := -\mu(A \cap X^-) \text{ para } A \in \mathcal{M}.$$

Então μ^+ e μ^- são medidas positivas. Além disso, $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

Demonstração: Ver [4], pág. 176.

Definição 1.1.31 *Definimos a variação total de uma medida real μ como sendo a medida $|\mu|$ dada por $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ e a variação de μ como $\|\mu\| = |\mu|(X)$.*

Generalizando o conceito de variação total para um vetor medida.

Definição 1.1.32 *Definimos a variação total de um vetor medida como sendo a medida $|\mu|$, dado por*

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| : E_i \in \mathcal{M} \text{ disjuntos}, \ E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\},$$

para cada $E \subset \mathcal{M}$.

Teorema 1.1.33 (Teorema de decomposição de Jordan) *Se μ é uma medida com sinal, então existem únicas medidas positivas μ^+ e μ^- tal que $\mu = \mu^+ - \mu^-$.*

Demonstração: Ver [14], pág. 87.

1.2 Medidas de Radon

Nesta seção, vamos definir uma medida de Borel especial, a medida de Radon, e após rever e apresentar vários resultados, vamos enunciar o Teorema Riesz-Alexandroff que mostra um isomorfismo isométrico entre tais medidas e o dual topológico do $C_0(\Omega)$. Nesse sentido, vamos considerar em toda essa seção X como sendo um espaço de Hausdorff localmente compacto, a menos que se faz necessário condicões adicionais que serão enunciadas.

Inciamos com alguns fatos básicos de Análise.

Definição 1.2.1 (Espaço $C_0(X)$) *Dizemos que f é nula no infinito se para cada $\epsilon > 0$ o conjunto $\{x : |f(x)| \geq \epsilon\}$ é compacto e denotamos o conjunto de tais funções por*

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : f \text{ é nula no infinito}\}.$$

Um outro conjunto importante.

Definição 1.2.2 *Considere $f : X \longmapsto \mathbb{R}$ sendo uma função contínua. O suporte de f, que será denotado por $supp(f)$, é definido como*

$$supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

e

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : supp(f) \text{ é compacto}\}.$$

É bem conhecido que tanto $C_0(X)$ e $C_c(X)$ são espaços de Banach com as operações usuais de funções e normas uniformes.

Teorema 1.2.3 *Para $1 \leq p < \infty$, o espaço $C_c(X)$ é denso em $L^p(\mu)$ na norma de $L^p(\mu)$.*

Demonstração: Ver [20], pág. 68.

O lema importante.

Lema 1.2.4 (Lema de Urysohn) *Seja $K \subset U \subset X$, onde K é um compacto e U é um conjunto aberto. Então existe uma função $f \in C(X, [0,1])$ tal que $f = 1$ em K e $f = 0$ fora de um subconjunto compacto de U.*

Usando esse Teorema clássico, podemos provar a próxima Proposição.

Proposição 1.2.5 *O espaço $C_c(X)$ é denso em $C_0(X)$.*

Demonstração: Vamos mostrar inicialmente que $\overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty} \subset C_0(X)$. Seja $f \in \overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty}$. Então existe $(f_n) \subset C_c(X)$ tal que f_n converge uniformemente a $f \in C(X)$, isso é, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$ for all $n \geq n_0$. Daí, $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin supp(f_n)$ e portanto $f \in C_0(X)$.

Por outro lado, se $f \in C_0(X)$, vamos construir uma sequência $(f_n) \in C_c(X)$ tal que $f_n \to f$ uniformemente. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ dado, o conjunto

$$K_n = \{x : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\} \subset X$$

é compacto. Assim, pelo Teorema de Urysohn 1.2.4, existe $g_n \in C_c(X)$ satisfazendo $0 \leq g_n \leq 1$ e $g_n = 1$ sobre K_n.

Definindo $f_n = g_n f,\ n \in \mathbb{N}$, temos que $f_n \in C_c(X)$, pois g_n e f são contínuos, e

$$supp(f_n) = supp(g_n f) \subset supp(g_n) \cap supp(f) \subset supp(g_n).$$

Assim,

$$\|f_n - f\|_\infty = \|g_n f - f\|_\infty \leq \|g_n - 1\|_\infty \|f\|_\infty < 1/n$$

o que mostra que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em X. ■

Definição 1.2.6 *Considere X um espaço topológico e $E \subset X$. Uma partição da unidade sobre E é uma coleção $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de funções em $C(X, [0,1])$ tal que:*

- *cada $x \in X$ tem uma vizinhança na qual, exceto uma quantidade finita, todas as demais funções h'_α são identicamente zero.*
- *$\sum_{\alpha \in A} h_\alpha(x) = 1$ para cada $x \in E$.*

Ainda dizemos que a partição da unidade $\{h_\alpha\}$ está subordinada a uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de E se para cada $\alpha \in A$ existir um conjunto $U \in \mathcal{U}$ com $supp(h_\alpha) \subset U$.

Um exemplo importante de Partição da Unidade subordinada a uma cobertura aberta.

Proposição 1.2.7 *Sejam K um subconjunto compacto de X e $\{U_j\}_1^n$ uma cobertura aberta de K. Então existe uma partição da unidade em K subordinada à cobertura $\{U_j\}_1^n$ consistindo de funções com suporte compacto.*

Demonstração: Ver [14], pág. 134.

Agora estamos em condição de definir e apresentar algumas fatos sobre Medidas de Radon.

Definição 1.2.8 (Medida Regular) *Considere E um conjunto boreliano em X. Dizemos que μ é uma medida regular se ela é regular exterior e interior, isso é, para cada E vale:*

(i) *(regular exterior)*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E,\ U \text{ é aberto } \}$$

(ii) *(regular interior)*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ é compacto } \}.$$

Essa definição nos permite definir.

Definição 1.2.9 (Medida de Radon) *Dizemos que uma medida de Borel sobre X que é finita sobre todo compacto, regular exterior sobre todo boreliano e regular interior sobre todo conjunto aberto é uma medida de Radon.*

Uma aproximação por função contínua de suporte compacto de uma função mensurável.

Teorema 1.2.10 (Lusin) *Sejam μ uma medida de Radon sobre X e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $\{x : f(x) \neq 0\}$ tem medida finita. Então, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe $\phi_\epsilon \in C_c(X)$ tal que*

$$\{x : \phi_\epsilon(x) \neq f(x)\} \text{ tem medida menor que } \epsilon.$$

Adicionalmente, se f é limitada podemos escolher ϕ_ϵ tal que

$$\|\phi\| \leq \|f\|$$

Demonstração: Ver [4], pág. 115.

Como uma consequência do Teorema da Decomposição de Jordam, podemos definir.

Definição 1.2.11 (Medidas de Radon real) *Considere $B(X)$ uma $\sigma - álgebra$ de Borel. Dizemos que uma medida de Radon real é uma medida de Borel real cujas variações positiva e negativa (ou seja, medidas positivas) são medidas de Radon.*

Com o objetivo de enfatizar as propriedades das medidas de Radon sobre X, dependendo da estrutura topológica de X, vamos denotar por:

- $\mathcal{M}(X)$ o espaço das medidas de Radon real quando X é um espaço de Hausdorff localmente compacto,
- $M(X)$ o espaço das medidas de Radon real quando X é compacto.

Para enunciarmos o próximo Teorema, vamos considerar um funcional linear positivo I sobre $C_c(X)$, isso é, $\langle I, f\rangle \geq 0$ para todo $f \geq 0$. Denotaremos o conjunto de tais funcionais por $\big(C_c(X)\big)^*_+$. Além disso, vamos denotar por $\mathcal{M}^+(X)$ o conjunto das medidas de Radon positivas.

Assim, defina a aplicação

$$\begin{aligned} S\colon \mathcal{M}^+(X) &\to \big(C_c(X)\big)^*_+ \\ \mu &\to S(\mu) := I\colon C_c(X) \to \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad f \to \langle I, f\rangle = \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

O próximo Teorema mostra que a aplicação S está bem definida.

Teorema 1.2.12 *Seja I um funcional linear positivo sobre $C_c(X)$. Então existe uma única medida de Radon μ ($\mu \in \mathcal{M}^+(X)$) tal que*

$$\langle I, f\rangle = \int_X f d\mu \text{ para cada } f \in C_c(X). \tag{1.2}$$

Além disso, μ satisfaz:

i) $\mu(U) = \sup\{\langle I, f\rangle : f \in C_c(X),\ f \prec U\}$ *para cada aberto $U \subset X$.*

ii) $\mu(K) = \inf\{\langle I, f\rangle : f \in C_c(X),\ f \geq \chi_K\}$ *para cada compacto $K \subset X$,* *onde χ_K denota a função característica em K e $f \prec U$ denota o conjunto das funções $0 \leq f \leq 1$ com $supp(f) \subset U$ sempre que U for um aberto em X e $f \in C_c(X)$.*

Demonstração: Vamos provar inicialmente a unicidade. Sejam μ uma medida de Radon tal que (1.2) valha e $U \subset X$ um aberto. Então

$$\langle I, f\rangle \leq \mu(U) \text{ para toda } f \prec U. \tag{1.3}$$

Por outro lado, se $K \subset U$ é um compacto, então pelo Lema de Urysohn (1.2.4), existe $f \in C_c(X)$ tal que $f \prec U$ e $f = 1$ sobre K, ou seja,

$$\int_K \chi_K = \mu(K) \leq \int_X f d\mu = \langle I, f\rangle. \tag{1.4}$$

Desde que μ é uma medida de Radon, então μ é regular interior sobre U. Assim, tomando o supremo sobre todos os compactos $K \subset U$ e usando (1.4), obtemos $\mu(U) \leq \langle I, f\rangle$ o que junto com (1.3) nos leva a obter

$$\mu(U) = \sup\{\langle I, f\rangle : f \in C_c(X),\ f \prec U\}, \tag{1.5}$$

para cada aberto $U \subset X$. Deste modo, μ é determinada por I sobre todos os conjuntos abertos e, portanto, sobre todos os conjuntos de Borel, devido à regularidade externa, i.e., para cada subconjunto Boreliano $E \subset X$

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E, U \text{ é aberto}\}. \tag{1.6}$$

Agora, assuma que existam duas medidas $\mu, \lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$ com $\mu \neq \lambda$ tal que

$$\langle I, f\rangle = \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f d\eta.$$

Daí, tomando o supremo para as funções $f \in C_c(X)$ tal que $f \prec U$, segue de (1.5),

$$\begin{aligned}\mu(U) &= \left\{\int_\Omega f d\mu : f \in C_c(X), f \prec U\right\} \\ &= \left\{\int_\Omega f d\eta : f \in C_c(X), f \prec U\right\} \\ &= \eta(U).\end{aligned}$$

Logo, pela regularidade exterior de μ, isso é, da propriedade (1.6), obtemos que

$$\mu(E) = \eta(E),\ \forall E \in X,$$

ou equivalentemente, $\mu = \eta$ o que é um absurdo.

No que segue provaremos a existência de μ. Defina

$$\mu(U) = \sup\{\langle I, f\rangle : f \in C_c(X),\ f \prec U\} \tag{1.7}$$

para cada conjunto aberto U dado e μ^* por

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E,\ U \text{ é aberto}\} \tag{1.8}$$

para cada $E \in X$ arbitrário. Assim, segue das definições que $\mu(U) \leq \mu(V)$ se $U \subset V$ e $\mu^*(U) = \mu(U)$ se U é aberto.

A estratégia para o resto da prova da existência é mostrar as três afirmações abaixo:

(a) μ^* é uma medida exterior. De fato, mostraremos primeiro que se $\{U_j\}$ é uma sequência de abertos e $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$, então

$$\mu(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j)$$

Sejam $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j,\ f \in C_c(X),\ f \prec U$ e $K = supp(f)$. Desde que K é compacto, temos

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j, \quad \text{para algum } n \text{ finito},$$

e assim pela Proposição 1.2.7, existem $g_1, \cdots, g_n \in C_c(X)$ com $g_j \prec U_j$ e $\sum_{j=1}^n g_j = 1$ sobre K.

Portanto, temos que $f = \sum_{j=1}^n fg_j,\ fg_j \prec U_j$. Assim, segue da definição de μ (ver 1.7) que

$$\langle I, f\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle I, fg_j\rangle \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(U_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j),$$

vale para toda $f \prec U$, ou seja,

$$\mu(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j),$$

isso é,

$$\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) : U_j \text{ é aberto e } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right\} \geq \inf\left\{\mu(U) : U \text{ é aberto e } E \subset U\right\}, \tag{1.9}$$

para todo $E \subset X$.

Por outro lado, desde que $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$, então $U_j \subset U$ e assim $\mu(U_j) \leq \mu(U), \forall j \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) \leq \mu(U)$$

o que nos leva a

$$\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) : U_j \text{ é aberto e } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right\} \leq \inf\left\{\mu(U) : U \text{ é aberto e } E \subset U\right\}, \tag{1.10}$$

para os conjuntos $U \supset E$.

Assim, das desigualdades (1.9) e (1.10) temos

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \inf\{\mu(U) : U \supset E,\ U \text{ é aberto}\} \\ &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) : U_j \text{ é aberto e } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right\}\end{aligned}$$

o que define uma medida exterior por (1.1.9).

(b) Todo conjunto aberto é μ^*-mensurável. Em particular, μ é regular exterior

e satisfaz (i). É suficiente mostrarmos que para cada conjunto aberto U dado vale

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c)$$

para todo subconjunto $E \subset X$ com $\mu^*(E) < \infty$.

Primeiro suponha que E é aberto, então $E \cap U$ é aberto. Assim, segue pela definição de μ dado em (1.8) que para cada $\epsilon > 0$ dado existe um $f \in C_c(X)$ tal que

$$f \prec E \cap U \text{ e } \langle I, f \rangle > \mu(E \cap U) - \epsilon.$$

Além disso, $E \setminus (supp(f)$ é aberto e portanto existe um g tal que

$$g \prec E \setminus supp(f) \; e \; \langle I, g \rangle > \mu(E \setminus supp(f)) - \epsilon.$$

Daí, obtemos que

$$0 \leq f + g \leq 1 \text{ e } supp(f+g) \subset supp(f) \cap supp(g) \subset E,$$

isso é, $f + g \prec E$. Como uma consequência desse fato e de $supp(f) \subset U \cap E$, obtemos que

$$\begin{aligned}\mu^*(E) = \mu(E) \geq I(f) + I(g) &> \mu(E \cap U) + \mu(E \setminus supp(f)) - 2\epsilon \\ &\geq \mu(E \cap U) + \mu(E \setminus U) - 2\epsilon \\ &\geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U) - 2\epsilon\end{aligned}$$

para cada $\epsilon > 0$ dado. Isso nos leva à desigualdade desejada, fazendo $\epsilon \to 0$.

Para o caso geral, dados um conjunto arbitrário $E \subset X$ com $\mu^*(E) < \infty$ e $\epsilon > 0$, segue de (1.8) que existe um aberto $V \supset E$ tal que $\mu(V) < \mu^*(E) + \epsilon$. Assim, aplicando o primeiro caso ao aberto V, segue

$$\begin{aligned}\mu^*(E) + \epsilon > \mu(V) = \mu^*(V) &\geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c)\end{aligned}$$

o nos leva à desigualdade afirmado, fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$. Isso completa a prova da afirmação.

Como qualquer aberto $U \subset X$ é μ^*-mensurável, concluímos pelo teorema de Carathéodory (1.1.11), todo conjunto de Borel é μ^*-mensurável e que $\mu = \mu^*|_{B_X}$ é uma medida de Borel (a notação é consistente porque $\mu^*(U) = \mu(U)$ para cada U aberto). Como consequência disso, temos que a medida μ é regular exterior e μ satisfaz (i), devido a sua definição dada em (1.7).

Para finalizar a prova do Teorema, resta apenas mostrar que a medida μ é finita para todo conjunto compacto $K \subset X$ e regular interior sobre conjuntos abertos. Para mostrar isso, vamos provar as duas afirmações abaixo.

(c) A medida μ satisfaz (ii). Considere $K \subset X$ um conjunto compacto e f uma função em $C_c(X, [0,1])$ tal que $f \geq \chi_K$. Assim, dado $\epsilon > 0$, segue que o aberto $U_\epsilon = \{x : f(x) > 1 - \epsilon\}$ é tal que $U_\epsilon \supset K$. Portanto, dado $g \prec U_\epsilon$, segue que $\frac{f}{1-\epsilon} - g \geq 0$ em X o que implica

$$\langle I, g\rangle \leq \frac{\langle I, f\rangle}{1-\epsilon}$$

devido à linearidade positiva de I.

Então, pela arbitraridade de $g \prec U_\epsilon$ e a definição de $\mu(U_\epsilon)$, temos

$$\mu(U_\epsilon) \leq \frac{\langle I, f\rangle}{1-\epsilon}$$

e devido a inclusão $K \subset U_\epsilon$, segue $\mu(K) \leq \mu(U_\epsilon)$ e portanto

$$\mu(K) \leq \frac{\langle I, f\rangle}{1-\epsilon},$$

isso é, fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos

$$\mu(K) \leq \langle I, f\rangle \text{ para toda } f \in C_c(X;[0,1]) \text{ com } f \geq \chi_K. \tag{1.11}$$

Por outro lado, dado um conjunto aberto arbitrário $U \supset K$, segue pelo lema de Urysohn que existe $g \in C_c(X, [0,1])$ tal que $g \geq \chi_K$ e $g \prec U$. Assim, segue de (1.11) e da definição de $\mu(U)$ que

$$\mu(K) \leq \langle I, g\rangle \leq \mu(U) \text{ para toda } f \in C_c(X;[0,1]) \text{ com } f \geq \chi_K.$$

Desde que μ é regular exterior (veja item (b) acima), segue das desigualdades acima que

$$\begin{aligned} \mu(K) &\leq \inf\{\langle I, f\rangle : f \in C_c(X;[0,1]) \text{ e } f \geq \chi_K\} \\ &= \inf\{\mu(U) : U \text{ é aberto e } U \supset K\} = \mu(K) \end{aligned}$$

o que mostra a afirmação (ii). Isso completa a prova da afirmação.

Consequências da afirmação provada, isso é, da validade do item ii):

- a medida μ é finita sobre conjuntos compactos. De fato, dado um compacto $K \subset X$, segue Lema de Urysohn que existe uma $\phi \in C_c(X,[0,1])$ tal que $\phi|_K = 1$, isso é, $\phi \geq \chi_K$ o que nos leva a $\mu(K) \leq \langle I, \phi\rangle < \infty$,

- a medida μ é regular interior sobre conjuntos abertos. De fato, seja U um subconjunto aberto de X e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \mu(U)$. Portanto, segue da definição de μ que existe uma $f \prec U$ tal que $\langle I, f\rangle > \alpha$, ou seja, existe f é tal que $K = supp(f) \subset U$, $\chi_K \geq f$ e $\langle I, f\rangle > \alpha$.

  Dado $g \in C_c(X)$ tal que $g \geq \chi_K$, segue da escolha de f que $g - f \geq 0$, isso é, $\langle I, g\rangle \geq \langle I, f\rangle > \alpha$. Assim, passando ao ínfimo sobre tais g, segue da desigualdade acima e de ii) que

  $$\mu(K) > \alpha. \tag{1.12}$$

  Pelo Lema de Urysohn existe $h \prec U$ tal que $h|_K = 1$, isso é, $\langle I, h\rangle \geq \mu(K)$. Assim, segue dessa desigualdade, usando o item (i) já provado, que

  $$\mu(U) \geq \langle I, h\rangle \geq \mu(K).$$

  Portanto, isso juntamente com (1.12), nos leva a obter que $\alpha < \mu(K) \leq \mu(U)$, ou seja, μ é medida regular interior sobre U.

Finalmente, falta apenas provarmos que

(d) $\langle I, f\rangle = \int_X f d\mu$ para cada $f \in C_c(X)$. É suficiente demostrarmos que

$$\langle I, f\rangle = \int_X f d\mu \text{ para todo } f \in C_c(X, [0,1]).$$

Considere $f \in C_c(X, [0,1])$. Dado $N \in \mathbb{N}$, defina

$$K_j = \{x : f(x) \geq \frac{j}{N}\} \; e \; K_0 = supp(f)$$

para $1 \leq j \leq N$. Assim, temos que $K_N \subset \cdots \subset K_j \subset K_{j-1} \subset \cdots \subset K_1 \subset K_0$. Agora, definindo $f_1, \cdots, f_N \in C_c(X)$ por

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & se \; x \notin K_{j-1}, \\ f(x) - \frac{j-1}{N} & se \; x \in K_{j-1} \backslash K_j, \\ N^{-1} & se \; x \in K_j, \end{cases}$$

observamos que

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \frac{1}{N} \geq \frac{\chi_{K_j}}{N} \text{ se } x \in K_j, \\ f_j(x) &= f(x) - \frac{j-1}{N} \leq 1 - \frac{j-1}{N} \leq \frac{\chi_{K_{j-1}}}{N} \text{ se } x \in K_{j-1} \setminus K_j. \end{aligned}$$

o que nos leva às desigualdades

$$\frac{\chi_{K_j}}{N} \leq f_j \leq \frac{\chi_{K_{j-1}}}{N}, \tag{1.13}$$

isso é,

$$\frac{1}{N}\mu(\chi_{K_j}) \leq \int_X f_j d\mu \leq \mu(\chi_{K_{j-1}}).$$

A seguir, relacionamos as medidas dos compactos K_j e K_{j-1} com $\langle I, f_j\rangle$. Desde que $Nf_j \in C(X, [0,1])$, segue de (1.13) que

$$\chi_{K_j} \leq Nf_j \leq \chi_{K_{j-1}}.$$

Quanto ao compacto K_j, segue de $ii)$ que

$$\mu(K_j) \leq \langle I, Nf_j\rangle, \tag{1.14}$$

para todo $Nf_j \in C_c(X)$ com $Nf_j \geq \chi_{k_j}$. Quando ao compacto K_{j-1}, dado um conjunto aberto $U \supset K_{j-1}$ temos $Nf_j \prec U$, e assim segue de $i)$ que

$$\langle I, Nf_j\rangle \leq \mu(U),$$

para todo $Nf_j \in C_c(X)$ com $Nf_j \prec U$. Logo, tomando o ínfimo na desigualdade anterior, segue da regularidade exterior de μ em K_{j-1} que

$$\langle I, Nf_j\rangle \leq \mu(K_{j-1}). \tag{1.15}$$

Portanto das desigualdades (1.14) e (1.15) segue que

$$\frac{1}{N}\chi_{K_j} \leq \langle I, f_j\rangle \leq \frac{1}{N}\chi_{K_{j-1}}. \tag{1.16}$$

Desde que

$$f = \sum_{j=1}^{N} f_j,$$

segue (1.16) que

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(K_j) \leq \int_X f d\mu \leq \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mu(K_j),$$

e

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(K_j) \leq \langle I, f\rangle \leq \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mu(K_j),$$

valem. Ou seja,

$$|\langle I, f\rangle - \int_X f d\mu| \leq \frac{\mu(K_0) - \mu(K_N)}{N} \leq \frac{\mu(supp(f))}{N} \text{ para todo } N \in \mathbb{N}$$

o que nos leva a concluir a prova do Teorema. ∎

No que segue, vamos estender o Teorema anterior para o caso de funcionais e medidas reais. Para isso, primeiramente, vamos definir as operações soma e produto em $\mathcal{M}(X)$ por

(i) soma: $(\mu_1 + \mu_2)(E) := \mu_1(E) + \mu_2(E), \forall E \in B(X)$,

(ii) produto: $(\lambda\mu)(E) = \lambda\mu(E), \forall E \in B(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nesse caso, temos.

Teorema 1.2.13 *$\mathcal{M}(X)$, com a soma e produto acima, é um espaço vetorial. Além disso, $\|\mu\| = |\mu|(X)$ é uma norma sobre $\mathcal{M}(X)$, onde $|\mu|(X)$ é a variação total da medida.*

Demonstração: Ver [14], pág. 222.

O Próximo Lema mostra que podemos escrever um funcional com a diferença de dois funcionais positivos.

Lema 1.2.14 *Seja $I \in \big(C_0(X)\big)^*$. Então existem funcionais positivos $I^+, I^- \in \big(C_0(X)\big)^*$ tal que $I = I^+ - I^-$.*

Demonstração: Dado $I \in \big(C_0(X)\big)^*$, defina

$$\langle I^+, f\rangle = \sup\{\langle I, g\rangle : g \in C_0(X, \mathbb{R}), 0 \leq g \leq f\} \text{ para cada } f \in C_0(X, [0, +\infty))$$

que está bem-definido, pois $|\langle I, g\rangle| \leq \|I\|\|g\| \leq \|I\|\|f\|$ para todo $0 \leq g \leq f$ e é positivo, pois $\langle I^+, f\rangle \geq \langle I, 0\rangle = 0$.

No que segue mostraremos que I^+ é "linear" para $f \geq 0$. Primeiro, observamos que segue diretamente da definição que $\langle I^+, cf\rangle = c\langle I^+, f\rangle$ se $c \geq 0$. Além disso, dados $f_1, f_2 \in C_0(X, [0, +\infty))$, segue novamente da definição de I^+ que

$$\langle I^+, f_1 + f_2\rangle \geq \langle I^+ f_1\rangle + \langle I^+, f_2\rangle. \tag{1.17}$$

Por outro lado, dado $g \in C_0(X, [0, +\infty))$ com $0 \leq g \leq f_1 + f_2$, seque que $g_1 := \min\{g, f_1\}$ e $g_2 := g - g_1$ satisfazem $0 \leq g_1 \leq f_1$ e $0 \leq g_2 \leq f_2$ e assim obtemos da definição de I^+ que

$$\langle I, g\rangle = \langle I, g_1\rangle + \langle I, g_2\rangle \leq \langle I^+, f_1\rangle + \langle I^+, f_2\rangle.$$

o que nos leva, após passar ao supremo, à desigualdade

$$\langle I^+, f_1 + f_2\rangle \leq \langle I^+, f_1\rangle + \langle I^+, f_2\rangle. \tag{1.18}$$

Portanto, das desigualdades (1.17) e (1.18) concluímos que

$$\langle I^+, f_1 + f_2\rangle = \langle I^+, f_1\rangle + \langle I^+, f_2\rangle.$$

Para finalizar a definição de I^+, considere $f \in C_0(X, \mathbb{R})$ tal que

$$\langle I^+, f\rangle := \langle I^+, f^+\rangle - \langle I^+, f^-\rangle,$$

onde as funções partes positiva e negativa $f^+, f^- \in C_0(X, [0, \infty))$. Provemos agora que I^+ é linear.

- **A linearidade de I^+.** De fato, sejam $f_1, f_2 \in C_0(X, \mathbb{R})$ e $f = f_1 + f_2$, então

$$f^+ - f^- = f_1^+ - f_1^- + f_2^+ - f_2^-,$$

isso é,

$$\langle I^+, f^+\rangle + \langle I^+, f_1^-\rangle + \langle I^+, f_2^-\rangle = \langle I^+, f^-\rangle + \langle I^+, f_1^+\rangle + \langle I^+, f_2^+\rangle,$$

e portanto

$$\langle I^+, f^+\rangle - \langle I^+, f^-\rangle = \langle I^+, f_1^+\rangle - \langle I^+, f_1^-\rangle + \langle I^+, f_2^+\rangle - \langle I^+, f_2^-\rangle,$$

que nos à prova da afirmação.

- **A continuidade de I^+.** Segue de

$$|\langle I^+, f\rangle| \leq \max\{\langle I^+, f^+\rangle, \langle I^+, f^-\rangle\} \leq \|I\| \max\{\|f^+\|, \|f^-\|\} = \|I\|\|f\|$$

e, em particular, $\|I^+\| \leq \|I\|$.

Finalmente, definindo $I^- = I^+ - I$, obtemos que $I^- \in \big(C_0(X)\big)^*$ e é positivo também. Isso termina a prova do Lema. ■

Para enunciarmos o próximo Teorema, vamos definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} T\colon \mathcal{M}(X) &\to \big(C_0(X)\big)^* \\ \mu &\to T(\mu) := I\colon C_0(X) \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad f \to \langle I, f\rangle = \int_X f d\mu. \end{aligned} \tag{1.19}$$

O próximo Teorema mostra em particular que essa aplicação está bem definida.

Teorema 1.2.15 (Teorema de Representação de Riesz-Alexandroff) *A aplicação T dada acima é um isomorfismo e $\|T(\mu)\| = \|I\| = \|\mu\|$ para cada $\mu \in \mathcal{M}(X)$.*

Demonstração: Para prova desse teorema vamos a seguir as seguintes etapas

Afirmação 1: A aplicação T está bem definida, ou seja, para cada $\mu \in \mathcal{M}(X)$ dado, a aplicação $T(\mu) \in \big(C_0(X)\big)^*$. De fato, dado $\mu \in \mathcal{M}(X)$ defina

$$\langle J, f\rangle = \int_X f d\mu, \ \forall f \in C_c(X).$$

Assim, J é linear pela linearidade da integral. Em seguida, vamos mostrar que J é contínuo se, e somente se, μ é uma medida finita. De fato, segue do Teorema (1.2.12-i), que

$$\mu(X) = \sup\left\{\int_X f d\mu : f \in C_c(X),\ 0 \le f \le 1\right\},$$

e desde que

$$\left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f| d\mu \le \|f\|_\infty \int_X d\mu \text{ para toda } f \in C_c(X),$$

obtemos dessas informações que

$$\mu(X) \le \sup\left\{\left|\int_X f d\mu\right| : \|f\| = 1\right\} \le \mu(X),$$

isso é

$$\|J\| = \mu(X).$$

Portanto, $|\langle J, f\rangle| = \left|\int_X f d\mu\right| \leq \|f\|\mu(X)$ é satisfeito se, e somente se, X tem medida finita. Concluindo que J é um funcional linear contínuo sobre $C_c(X)$ se μ é uma medida finita.

Do Teorema 1.2.5, temos que $C_c(X)$ é denso em $C_0(X)$ na norma do supremo. Assim, o operador J é densamente definido $\left(\overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(X)\right)$. Então existe um operador $\tilde{J} \in \left(C_0(X)\right)^*$ tal que

$$\langle \tilde{J}, f\rangle = \int_X f d\mu, \forall f \in C_c(X).$$

Novamente, da densidade do espaço $C_c(X)$ em $C_0(X)$, dado $f \in C_0(X)$ existe $(f_n) \subset C_c(X)$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ e da desigualdade

$$|\langle \tilde{J}, f_n\rangle - \langle \tilde{J}, f\rangle| = |\langle \tilde{J}, f_n - f\rangle| \leq \|\tilde{J}\|\|f_n - f\|_\infty,$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \langle \tilde{J}, f_n\rangle = \langle \tilde{J}, f\rangle,$$

isso é

$$\langle \tilde{J}, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Agora vejamos que $(f_n) \subset C_c(X)$ satisfaz as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada. Com efeito, $f_n \subset L^1(\mu)$ converge a $f \in C_0(X)$ q.t.p em X e

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \|f_n\|_\infty \mu(X) \leq C\mu(X),$$

para alguma constante $C > 0$, pois $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Portanto,

$$\langle \tilde{J}, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu = \langle T(\mu), f\rangle,$$

isso é $T(\mu) = \tilde{J} \in \left(C_0(X)\right)^*$ o que mostra a afirmação 1.

Afirmação 2: A aplicação T é sobrejetiva, ou seja, dado $I \in \left(C_0(X)\right)^*$, existe $\mu \in$

$\mathcal{M}(X)$ tal que $I = T(\mu)$, ou seja,

$$\langle I, f\rangle = \int_X f d\mu, \forall f \in C_0(X).$$

Vamos considerar 2 casos:

Caso 1: O funcional linear I é positivo sobre $C_0(X)$. Nesse caso, a restrição $J_1 := I|_{C_c(X)}$ também é um funcional linear positivo em $C_c(X)$. Assim, existe pelo Teorema 1.2.12 uma única medida Radon μ tal que

$$\langle J_1, f\rangle = \int_X f d\mu,\ \forall f \in C_c(X).$$

Portanto, segue da prova da Afirmação 1 que $I = T(\mu)$. Isso mostra que T é sobrejetiva.

Caso 2: O funcional linear $I \in \big(C_0(X)\big)^*$ é não-necessariamente positivo. Nesse caso, desde que I é um funcional linear limitado sobre $C_0(X)$, segue do Lema 1.2.14 que existem funcionais lineares positivos I^+ e I^- sobre $C_0(X)$ tais que $I = I^+ - I^-$. Assim pelo Caso 1 acima, existem medidas de Radon μ_1 e μ_2 tais que

$$\begin{aligned}\langle I, f\rangle &= \langle I^+, f\rangle - \langle I^-, f\rangle\\ &= \int_X f d\mu_1 - \int_X f d\mu_2\\ &= \int_X f d(\mu_1 - \mu_2)\\ &= \int_X f d\mu = \langle T(\mu), f\rangle,\ \forall f \in C_0(X),\end{aligned}$$

onde $\mu := \mu_1 - \mu_2$ é uma medida de Radon. Isso termina a prova da Afirmação 2.

Afirmação 3: A aplicação T é uma isometria (em particular, T é injetiva). De fato, primeiro temos que

$$\left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f| d\mu \le \|f\|_\infty |\mu(X)| \le \|f\|_\infty |\mu|(X) = \|f\|_\infty \|\mu\|,$$

para todo $f \in C_0(X)$ e assim, obtemos

$$\|I\| = \sup_{f \in C_0(X)} \frac{|\langle I, f\rangle|}{\|f\|} \le \|\mu\|.$$

Por outro lado, considerando $h = d\mu/d|\mu|$ então $h \equiv 1$, segue que pelo Teorema de Lusin 1.2.10 que para cada $\epsilon > 0$ dado existe $f \in C_c(X)$ tal que $\|f\| = 1$ e $f = h$ exceto em um conjunto $E \subset X$ com $|\mu|(E) < \epsilon/2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\mu\| = \int_X h d|\mu| &\leq \left|\int_X f d\mu\right| + \left|\int_X (f-h) d\mu\right| \\
&\leq \left|\int_X f d\mu\right| + \left|\int_{X\setminus E} (f-h) d\mu\right| + \left|\int_E (f-h) d\mu\right| \\
&\leq \left|\int_X f d\mu\right| + 2|\mu|(E) \\
&\leq \|I\| + \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto das desigualdades anteriores, obtemos $\|\mu\| = \|I\|$, mostrando assim a afirmação 3. Portanto das afirmações $1, 2$ e 3 concluímos que a aplicação T é uma isomorfismo isométrico. ∎

Como uma consequência do Teorema de Riesz-Alexandroff para o caso escalar, obtemos uma versão para o caso vetorial.

Corolário 1.2.16 *Nas condições anteriores do Teorema de Riesz-Alexandroff, temos que T acima é um isomorfo isométrico, onde T é definido como*

$$\begin{aligned}
T\colon \mathcal{M}(X,\mathbb{R}^N) &\to C_0\big(X,\mathbb{R}^N\big)^* \\
\mu \to T(\mu) &:= I\colon C_0(X,\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R} \\
&\qquad f \to \langle I, f\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_X f_i d\mu_i
\end{aligned} \tag{1.20}$$

e denotamos:

- $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N) \in \mathcal{M}(X,\mathbb{R}^N)$ *e* $\mu_i \in \mathcal{M}(X)$.
- $f = (f_1, f_2, \cdots, f_N) \in C_0\big(X,\mathbb{R}^N\big)'$ *e* $f_i \in C_0(X)$.

onde a normas dos espaços $\mathcal{M}(X,\mathbb{R}^N)$, $C_0\big(X,\mathbb{R}^N\big)^*$ são $\|\mu\| = |\mu|(X)$ e $\|f\|_\infty$ respectivamente.

Demonstração: A bijetividade é mostrada pelo teorema anterior e para mostrar que eles preservam normas ver [2], pág. 28. ∎

Ainda no contexto de $\mathcal{M}(X)$, temos.

Definição 1.2.17 (Convergência em $\mathcal{M}(X)$) *Considere uma sequência $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(X)$ e $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Dizemos que*

(i) (μ_n) *converge fracamente a μ ($\mu_n \rightharpoonup \mu$) se*

$$\int_\Omega \varphi d\mu_n \longrightarrow \int_\Omega \varphi d\mu \ \text{ para cada } \varphi \in C_c(X)$$

(ii) (μ_n) *converge fracamente* a μ ($\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$) (ou converge vagamente) se*

$$\int_\Omega \varphi d\mu_n \longrightarrow \int_\Omega \varphi d\mu \ \text{ para cada } \varphi \in C_0(X).$$

A relação entre esses dois conceitos é dado pelo seguinte resultado.

Proposição 1.2.18 *Sejam (μ_n) uma sequência em $\mathcal{M}(X)$ e $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Então*

$$\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \Longleftrightarrow \mu_n \rightharpoonup \mu \text{ e } \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|(X) < \infty.$$

Demonstração: Ver [3], pág. 62.

Como uma consequência do Teorema 1.2.15, temos.

Corolário 1.2.19 *Seja Ω subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$. Então*

$$T\colon M(\Omega) \to (C(\Omega))^*$$

definido como em (1.19) é um isomorfismo isométrico, isso é, para cada $F \in (C(\Omega))^*$ existe uma única $\mu \in M(\Omega)$ tal que

$$\langle F, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi d\mu,$$

$M(\Omega)$ está definido após a definição (1.2.11). Demonstração: Ver [19], pág. 310.

Observação 1.2.20 *Pelo corolário anterior indentificamos o dual topológico de $C(\Omega)$ com as medidas de Radon real $M(\Omega)$, i.e. $M(\Omega) = (C(\Omega))^*$.*

A partir dos resultados acima, quando dissermos que μ é uma medida de Radon real, então estaremos identificando μ como um funcional linear e contínuo definido sobre $C(\Omega)$ se Ω é compacto, isto é, $\mu \in (C(\Omega))^*$ e $\mu \in (C_0(\Omega))^*$ se Ω é Hausdorff localmente compacto.

1.3 Propriedades das Medidas de Radon

Nesse seção, vamos considerar Ω como sendo um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, a menos que se faça necessário condicões adicionais que serão enunciadas. Apresentaremos propriedades do espaço das medidas $M(\overline{\Omega})$, enunciaremos um Teorema que mostra uma identificação de $L^1(\Omega)$ como um subespaço de $M(\overline{\Omega})$ e a partir dele obtemos um resultado muito importante de compacidade em $L^1(\Omega)$. As principais referências utilizadas neste capítulo são : Folland [14], Brezis [5].

Definamos agora as funções p integráveis.

Definição 1.3.1 *Considere Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, não necessariamente limitado. Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções $u : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, simbolicamente:*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longmapsto \mathbb{R} : \int_K |u|^p dx < +\infty, \forall K \subset \Omega \right\}.$$

O seguinte teorema é muito importante para nossos próximos seções.

Teorema 1.3.2 *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então*

1. $f \in L^1(\Omega) \Longleftrightarrow A = \sup\left\{\int f\varphi;\ \varphi \in C_c(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\} < \infty$,
2. $A = \|f\|_{L^1(\Omega)}$ *se* $f \in L^1(\Omega)$.

Demonstração: Sejam $f \in L^1(\Omega)$ e $\varphi \in C_c(\Omega)$ com $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Então tomando o supremo para tais funções φ na desigualdade

$$\int_\Omega f\varphi dx \leq \left|\int_\Omega f\varphi dx\right| \leq \|\varphi\|_\infty \int_K |f| dx \leq \|f\|_{L^1(\Omega)},$$

obtemos

$$A = sup\left\{\int_\Omega f\varphi :\ \varphi \in C_c(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Por outro lado suponha que $A < \infty$. Mostraremos que $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq A$. De fato, dado $\dfrac{\varphi}{\|\varphi\|_\infty} \in C_c(\Omega)$ segue direitamente da definição de A que

$$\left|\int_\Omega f\frac{\varphi}{\|\varphi\|_\infty} dx\right| \leq A, \tag{1.21}$$

isso é,

$$\left|\int_\Omega f\varphi dx\right| \leq A\|\varphi\|_\infty,\ \forall\varphi \in C_c(\Omega). \tag{1.22}$$

Seja $K \subset \Omega$ qualquer subconjunto compacto e $\psi \in C_c(\Omega)$ uma função tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi = 1$ em K.

Dada uma função $u \in L^\infty(\Omega)$ arbitrária, segue do Exercício 4.25 (Ver [5]) que existe uma sequência $(u_n) \subset C_c(\Omega)$ tal que

$$\|u_n\|_\infty \leq \|u\|_\infty \; e \; u_n \longrightarrow u \; q.t.p \; em \; \Omega.$$

Assim, tomando $u = \psi Sign(f)$, segue do afirmado acima e (1.22) que

$$\left|\int_\Omega f\psi u_n dx\right| \leq \left|\int_K f u_n dx\right| \leq A\|u_n\|_\infty \leq A, \text{ para todo } n,$$

ou seja, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int_K |f|dx \leq A \text{ para cada subconjunto } K \subset \Omega.$$

Desde que Ω é limitado, dado $\epsilon > 0$ existe um conjunto compacto $K_\epsilon \subset \Omega$ tal que $\mu(\Omega \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ (ver Teorema 1.4.8 [4]). Em consequência dessas desigualdades e da densidade do espaço $C_c^\infty(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|f - \varphi_n\|_{L^1(\Omega)} + \|\varphi_n\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon + \|\varphi_n\|_{L^1(K)} + \|\varphi_n\|_{L^1(\Omega\setminus K)} \\ &< \epsilon + A + \int_{\Omega\setminus K} |\varphi_n|dx < \epsilon + A + \|\varphi_n\|_\infty \mu(\Omega \setminus K)\end{aligned}$$

e fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$, obtemos

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq A \; e \; f \in L^1(\Omega).$$

Isso prova o Teorema. ■

O seguinte teorema é importante para mostrar um resultado de compacidade em $L^1(\Omega)$. Para fazermos isso, defina

$$\begin{aligned} T\colon L^1(\Omega) &\to M(\overline{\Omega}) \\ u \to T(u)\colon C(\overline{\Omega}) &\to \mathbb{R} \\ f \to \langle T(u), f\rangle &= \int_\Omega uf dx. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Assim, temos.

Teorema 1.3.3 *A aplicação T é uma isometria. Em particular, o espaço das funções integráveis $L^1(\Omega)$ pode ser identificado a um subespaço fechado de $M(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Basta provar que a seguinte aplicação é injetora Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \|T(u)\|_{M(\overline{\Omega})} &= \sup_{\substack{f\in C(\overline{\Omega})\\ f\neq 0}} \frac{|\langle T(u), f\rangle|}{||f||_\infty} \\ &\geq \sup_{f\in C_c(\overline{\Omega}) f\neq 0} \frac{|\langle T(u), f\rangle|}{\|f\|_\infty} = \|u\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Por outro lado, dado $u \in L^1(\Omega)$ temos que

$$|\langle T(u), f\rangle| = \left|\int_\Omega uf dx\right| \leq \|f\|_\infty \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Portanto, segue da desigualdade acima que

$$\|T(u)\|_{M(\overline{\Omega})} = \sup_{f\in C(\overline{\Omega})} \frac{|\langle T(u), f\rangle|}{\|f\|_\infty} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}, \tag{1.25}$$

e assim das desigualdades (1.24) e (1.25), obtemos

$$\|T(u)\|_{M(\overline{\Omega})} = \|u\|_{L^1(\Omega)}, \forall u \in L^1(\Omega).$$

Agora mostremos que a aplicação T é injetora. Sejam $u, v \in L^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} u = v &\Longleftrightarrow u - v = 0, \forall u, v \in L^1(\Omega) \\ &\Longleftrightarrow \|u - v\|_{L^1(\Omega)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \|T(u) - T(v)\|_{M(\overline{\Omega})} = 0 \\ &\Longleftrightarrow T(u) = T(v). \end{aligned}$$

Mostraremos agora que $T(L^1(\Omega))$ é fechado em $M(\overline{\Omega})$, isto é, dado $(u_n) \subset T(L^1(\Omega))$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $M(\overline{\Omega})$ então existe $v \in L^1(\Omega)$ tal que $T(v) = u$. De fato, como a sequência $(u_n) \subset T(L^1(\Omega))$ então existe $(v_n) \subset L^1(\Omega)$ tal que $T(v_n) = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Além disso (v_n) é uma sequência de Cauchy, pois

$$\|v_n - v_m\|_{L^1(\Omega)} = \|T(v_n) - T(v_m)\|_{M(\overline{\Omega})} = \|u_n - u_m\|_{M(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0,$$

e isso implica que existe um $v \in L^1(\Omega)$ tal que $v_n \longrightarrow v$. Por outro lado

$$\begin{aligned} \|u - T(v)\|_{M(\overline{\Omega})} &= \|u - u_n + u_n - u_m + u_m - T(v)\|_{M(\overline{\Omega})} \\ &\leq \|u - u_n\|_{M(\overline{\Omega})} + \|u_n - u_m\|_{M(\overline{\Omega})} + \|T(v_m) - T(v)\|_{M(\overline{\Omega})} \\ &= \|u - u_n\|_{M(\overline{\Omega})} + \|u_n - u_m\|_{M(\overline{\Omega})} + \|v_m - v\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

e fazendo $m, n \longrightarrow \infty$, obtemos $u = T(v)$. Concluindo assim que $T(L^1(\Omega))$ é fechado. Portanto, identificaremos de agora em diante $L^1(\Omega)$ como sendo um subespaço vetorial fechado de $M(\overline{\Omega})$. ■

Uma consequência imediata do último Teorema e do fato de $C(\overline{\Omega})$.

Corolário 1.3.4 *Seja (f_n) é uma sequência limitada em $L^1(\Omega)$. Então existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma medida de Radon μ tal que $f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$, i.e.,*

$$\int_\Omega f_{n_k} u \longrightarrow \langle \mu, u \rangle, \ \forall u \in C(\overline{\Omega}).$$

Vejamos algumas propriedades topológicas do espaço $M(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.3.5 *O espaço das medidas de Radon $M(\overline{\Omega})$ não é reflexivo e não é separável.*

Demonstração: Desde que $L^1(\Omega)$ não é reflexivo e é um subespaço fechado de $M(\overline{\Omega})$, segue do Teorema 5.0.1 que $M(\overline{\Omega})$ não é reflexivo.
Agora, vamos mostrar que $M(\overline{\Omega})$ não é separável. Seja

$$\begin{aligned} \delta_a \colon C(\overline{\Omega}) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\to \langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a), \end{aligned}$$

onde $a \in \Omega$. Defina o conjunto

$$\Theta_a = \{f \in M(\overline{\Omega}) : \ \|f - \delta_a\|_{M(\overline{\Omega})} < 1/2\},$$

o qual é não vazio pois se $f = \delta_a \Rightarrow 0 = ||f - \delta_a||_{M(\overline{\Omega})} < 1/2$. Assim, temos que $\Theta_a \subset M(\overline{\Omega})$.
Afirmação: $\Theta_a \cap \Theta_b = \varnothing$ se $a \neq b$. Suponha por contradição que $\Theta_a \cap \Theta_b \neq \varnothing$. Então existe $f \in M(\overline{\Omega})$ tal que $f \in \Theta_a$ e $f \in \Theta_b$, isso é,

$$\|f - \delta_a\|_{M(\overline{\Omega})} < 1/2 \text{ e } \|f - \delta_b\|_{M(\overline{\Omega})} < 1/2.$$

o que nos leva a

$$\|\delta_a - \delta_b\|_{M(\overline{\Omega})} \leq \|f - \delta_a\|_{M(\overline{\Omega})} + \|f - \delta_b\|_{M(\overline{\Omega})} < 1. \tag{1.26}$$

Por outro lado, temos

$$\|\delta_a - \delta_b\|_{M(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{\varphi \in C(\overline{\Omega}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\langle \delta_a - \delta_b, \varphi\rangle|}{||\varphi||_\infty} = \sup_{\substack{\varphi \in C(\overline{\Omega}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\varphi(a) - \varphi(b)|}{\|\varphi\|_\infty}$$

o que implica, por (1.26) e (1.27), que

$$2 \leq \|\delta_a - \delta_b\|_{M(\overline{\Omega})} < 1,$$

por uma escolha de uma função φ com suporte compacto tal que $\varphi(a) = 1$ e $\varphi(b) = -1$.

Portanto, $\Theta_a \cap \Theta_b = \varnothing$ e assim as hipóteses do Teorema 5.0.2 são satisfeitas.

Daí, concluímos que $M(\overline{\Omega})$ não é separável, o que prova o Teorema. ■

No que segue vamos mostrar a densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ na Topologia fraca* em $M(\overline{\Omega})$.

Definição 1.3.6 *O conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ é definido pelas funções $\varphi : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes condições:*

(i) $\varphi \in C^\infty(\Omega)$,

(ii) φ *é de suporte compacto.*

Teorema 1.3.7 *O fecho do conjunto $C_c^\infty(\Omega)$, na norma de $L^1(\Omega)$, é um conjunto próprio em $M(\overline{\Omega})$, isso é, $\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1} \subsetneq M(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Suponha por contradição que $\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1} = M(\overline{\Omega})$. Portanto, seguiria do Teorema 1.2.3, isso é, $\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1} = L^1(\Omega)$, que dado $\mu \in M(\overline{\Omega})$ existiria uma sequência $(f_n) \subset C_c^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $\|f_n - \mu\|_{M(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0$, isso é,

$$\|f_n - \mu\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \Rightarrow f_n \to \mu \text{ em } L^1(\Omega)$$

e, em particular, teríamos que $\mu \in L^1(\Omega)$. No entanto, se considerarmos $\mu = \delta_a$, com $a \in \Omega$ definido por

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \varphi \in C(\Omega),$$

a informação acima implicaria que $\delta_a \in L^1(\Omega)$.

Isso não pode ocorrer. De fato, se existisse uma função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{1.27}$$

então, tomando $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ definida por

$$\psi(x) = \xi(x)\|x - a\|^2, \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{1.28}$$

obteríamos de (1.27) que

$$\int_\Omega f(x)\xi(x)\|x - a\|^2 = \xi(a)\|a - a\|^2 = 0, \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Daí, aplicando o Lema de Du Bois Raymond, teríamos $f(x)\|x-a\|^2 = 0$ q.t.p em Ω, mostrando que $f(x) = 0$ q.t.p em Ω. Mas de (1.27) resultaria que $\varphi(a) = 0$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, o que é um absurdo. ■

Abaixo, apresentamos uma noção de convergência.

Teorema 1.3.8 *Dado um $\mu \in M(\overline{\Omega})$, existe uma sequência $(u_n) \subset C_c^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$, isso é,*

$$\int_\Omega u_n f \longrightarrow \langle \mu, f \rangle,\ \forall f \in C(\overline{\Omega}).$$

Demonstração: Inicialmente, vamos denotar por E o espaço $C(\Omega)$ com a norma do supremo e observar que a afirmação $\overline{A}^{\sigma(E^*,E)} \subset B_{E^*}$ é via identicação pela aplicação (1.23). Seja $A = \{u \in C_c^\infty(\Omega) : \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq 1\} \subset L^1(\Omega)$. Então $T(\overline{A}^{\sigma(E^*,E)}) \subset M(\overline{\Omega})$. Suponha por contradição que exista um $\mu_0 \notin T(\overline{A}^{\sigma(E^*,E)})$ tal que $T(\overline{A}^{\sigma(E^*,E)}) \cap B_{\mu_0} = \emptyset$.

Desde que $T(\overline{A}^{\sigma(E^*,E)})$ e B_{μ_0} são convexos e fechados na topologia $\sigma(E^*,E)$, segue da segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach 5.0.3 que existem um $f_0 \in C(\overline{\Omega})$ com $f_0 \neq 0$ e um $\alpha > 0$ tal que

$$\langle \mu, f_0 \rangle < \alpha < \langle \mu_0, f_0 \rangle,\ \forall \mu \in T(\overline{A}^{\sigma(E^*,E)}).$$

Em particular, segue de (1.23) que para cada $\mu \in T(\overline{A}^{\sigma(E^*,E)}) \subset T(A)$, existe um único $u \in A$ tal que $\mu = T(u)$, isso é,

$$\int_\Omega u f_0 dx < \alpha < \langle \mu_0, f_0 \rangle,\ \forall u \in A. \tag{1.29}$$

Por outro lado, pelo Teorema 5.0.5, temos que A é denso na bola unitária de $L^1(\Omega)$, isso é

$$\overline{A}^{\|\cdot\|_{L^1}} = B_{L^1(\Omega)} := \{u \in L^1(\Omega) : \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq 1\},$$

o que implica que $T(B_{L^1(\Omega)}) \subset M(\overline{\Omega})$. Assim, pelo Corolário 5.0.4 e (1.23), temos

$$\begin{aligned} \|f_0\| &= \sup\left\{|\langle \mu, f_0 \rangle| : \mu \in T(B_{L^1(\Omega)})\right\} \\ &= \sup\left\{\int_\Omega u f_0 dx : u \in B_{L^1(\Omega)}\right\} \end{aligned}$$

e assim tomando o supremo sobre tais $u \in A$ em (1.29), obtemos

$$\|f_0\|_\infty < \alpha < \langle \mu_0, f_0 \rangle \leq \|f_0\|_\infty,$$

o que é um absurdo. Mostrando que $\mu_0 \in T(\overline{A}^{\sigma(E^*,E)})$, isso é

$$M(\overline{\Omega}) \subset T(\overline{A}^{\sigma(E^*,E)}).$$

Além disso, desde que $E = C(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach separável, segue do Teorema 5.0.11 que a bola unitária B_{E^*} é metrizável. Portanto, de

$$\mu_0 \in T(\overline{A}^{\sigma(E^*,E)}) \subset B_{E^*}$$

logo existe $(u_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $T(u_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \mu_0 = T(u_0)$. Assim, pela Proposição 5.0.9, obtemos

$$\langle T(u_n), f \rangle \longrightarrow \langle T(u_0), f \rangle, \forall f \in C(\overline{\Omega}).$$

isso é,

$$\int_\Omega u_n f dx \longrightarrow \langle \mu_0, f \rangle, \forall f \in C(\overline{\Omega}).$$

■

Agora estamos aptos a introduzir os Espaços de Variação Limitada.

Capítulo 2

Espaço de Variação Limitada

Neste capítulo, vamos aproveitar a Proposição 5.1.6 para definir o espaço de variação limitada que será denotado por $BV(\Omega)$. Observamos que no caso $p > 1$ essa proposição afirma que

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow \exists\, C > 0 \text{ tal que } \left| \int_\Omega u Div\varphi dx \right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \tag{2.1}$$

No entanto, quando $p = 1$, pode se construir um exemplo de uma função u que satisfaz

$$\left| \int_\Omega u Div\varphi dx \right| \leq C\|\varphi\|_\infty,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N),$$

mas u não pertence a $W^{1,1}(\Omega)$. A partir disso vamos dizer que uma função $u \in L^1(\Omega)$ é de variação limitada se ela satisfaz (2.1). Na Seção 2.1 apresentaremos os principais resultados topológicos de $BV(\Omega)$ que serão utilizados nas provas de vários resultados apresentados no Capítulo 4. Na Seção 2.2 discutiremos as principais propriedades de imersão do espaço $BV(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$.
As principais referências utilizadas neste capítulo são: Ambrosio [2], Attouch [3] e Lawrence [10].

2.1 Definições e propriedades

Iniciamos com o caso $p = 1$ da Proposição 5.1.6.

Proposição 2.1.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e $u \in L^1(\Omega)$. Consideremos:*

(i) $u \in W^{1,1}(\Omega)$,

(ii) *existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left| \int_\Omega u Div\varphi dx \right| \leq C\|\varphi\|_\infty, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N),$$

(iii) *existe uma constante* $C > 0$ *tal que para todo aberto* $\omega \subset\subset \Omega$ *e todo* $h \in \mathbb{R}^N$ *com* $|h| < dist(\overline{\omega}, \partial\Omega)$*, tem-se*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|,$$

onde $\tau_h u(x) := u(x+h)$.

Então $(i) \Longrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii)$*. Além disso, temos que* $C = \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$ *em* (ii) *e* (iii).

Aproveitando essa Proposição, denominamos por $BV(\Omega)$ o subespaço vetorial, com as operações de soma e produto do $L^1(\Omega)$, das funções que satisfaz (ii) acima, ou seja

$$BV(\Omega) := \left\{ u \in L^1(\Omega) : \left| \int_\Omega u Div\varphi dx \right| \leq C\|\varphi\|_\infty, \forall \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\}$$

e por

$$|u|_{BV(\Omega)} = \sup \left\{ \int_\Omega u Div\varphi dx : \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\},$$

onde $Div\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$. Segue imediatamente da definição que $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ é uma semi-norma em $BV(\Omega)$.

Definição 2.1.2 *Dizemos que* $BV(\Omega)$ *construído anteriormente é o espaço vetorial das funções de variação limitada.*

Para enunciarmos o próximo teorema, relembramos que $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ é o espaço das medidas de Radon que é isomorfo ao espaço produto $\mathcal{M}(\Omega)^N$ e de acordo com esse isomorfismo,

$$\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N) \Leftrightarrow \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_N) \text{ com } \mu_i \in \mathcal{M}(\Omega),\ i = 1, \cdots, N.$$

Teorema 2.1.3 *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^N$*. Então são equivalentes:*

(i) $u \in BV(\Omega)$*,*

(ii) $u \in L^1(\Omega)$ e $Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Em particular, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{M}(\Omega)$ para todo $i = 1, \cdots, N$, onde $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ é a derivada direcional de u no sentido distribucional,

(iii) $u \in L^1(\Omega)$ e $\|Du\| := \sup\{\langle Du, \varphi\rangle : \varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1\} < +\infty$, onde Du é o gradiente de u no sentido distribucional e

$$\langle Du, \varphi\rangle := \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \varphi_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Demonstração:

$i) \Longrightarrow ii)$ Defina

$$\begin{aligned} T \colon BV(\Omega) &\to \left(C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)\right)^* \\ u &\to T(u) \colon C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad \varphi \to \langle T(u), \varphi\rangle = -\int_\Omega u Div\ \varphi dx. \end{aligned}$$

Afirmações:

- $\overline{C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|} = C_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$, onde $\|\cdot\|$ é a norma do supremo de $C_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Para a prova dessa afirmação veja-se a demonstração do Teorema 1.2.5.

- $T(u)$ é linear pela linearidade da integral e continua, pois $u \in BV(\Omega)$, ou seja

$$|\langle T(u), \varphi\rangle| = \left|\int_\Omega u Div\ \varphi dx\right| \leq c\|\varphi\|_\infty,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Portanto, por extensão, existe uma única

$$\mu \in (C_0(\Omega, \mathbb{R}^N))^* = \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

tal que

$$\langle \mu, \varphi\rangle = \langle T(u), \varphi\rangle = -\int_\Omega u Div\ \varphi dx,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \tag{2.2}$$

e da definição de derivada distribucional, segue

$$\langle \mu, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi_i dx := \langle Du, \varphi\rangle,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), \tag{2.3}$$

Isso é, pelo isomorfismo de $\mathcal{M}(\Omega)^N$ e $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, obtemos $\mu_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Ainda da unicidade da extensão acima, vamos denotar por $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ a medida μ_i definida no espaço $\mathcal{M}(\Omega)$.

$ii) \Longrightarrow iii)$ Pela hipótese de que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{M}(\Omega)$, segue que

$$|\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_\infty, \ \forall \varphi \in C_0(\Omega),$$

pois $\mathcal{M}(\Omega)$ é o dual topológico de $C_0(\Omega)$.

Desde que $C_c(\Omega)$ é denso em $C_0(\Omega)$, obtemos

$$|\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_\infty, \ \forall \varphi \in C_c(\Omega),$$

ou seja, tomando o supremo sobre tais funções, na desiguadade acima, obtemos o afirmado.

$iii) \Longrightarrow i)$ De fato, sabemos que $T : L^1_{loc}(\Omega) \to \left(C_c^\infty(\Omega)\right)^*$, definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi dx$$

é uma distribuição.

Como consequência, temos que

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| = |\langle T_u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle| = | - \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle|$$

e portanto

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| = | - \langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle| \leq C, \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

onde a última desigualdade segue da hipótese. Seja $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Então existe uma sequência $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \longrightarrow \varphi \in C_c^1(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{C_c^1}$. Assim, segue da desigualdade acima e do Teorema da Convergência Dominada, que

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq C, \ \ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Essa desigualdade nos leva a

$$\left|\int_\Omega uDiv\varphi dx\right| \leq \sum_{i-1}^{N}\left|\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx\right| \leq CN, \quad \forall\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

o que mostra que $u \in BV(\Omega)$. Isso finaliza a prova. ∎

Observação 2.1.4 *Da equivalência entre $i)$ e $ii)$ do teorema anterior, segue que para cada $u \in BV(\Omega)$, existe uma medida de Radon $\mu := Du$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \varphi_i\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\int_\Omega uDiv\varphi dx, \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N). \tag{2.4}$$

Além disso, pela aplicação definida em (1.20) e de (2.4) ,segue que

$$\begin{aligned}\|T(Du)\| &= \sup\{\langle T(Du), \varphi\rangle : \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^N)\}\\ &= \sup\left\{\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \varphi_i\frac{\partial u}{\partial x_i} : \varphi_i \in C_0(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{M}(\Omega)\right\}\\ &= \sup\left\{-\int_\Omega uDiv\ \varphi dx : \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\}.\end{aligned}$$

e, portanto, pelo Teorema da representação Riesz-Alexandroff, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Du| &:= |Du|(\Omega) = \|Du\| = \|T(Du)\|\\ &= \sup\left\{\int_\Omega uDiv\varphi dx : \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Teorema 2.1.5 *O espaço $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço vetorial próprio de $BV(\Omega)$.*

Demonstração: A inclusão de $W^{1,1}(\Omega)$ em $BV(\Omega)$ segue imediatamente da Proposição 2.1.1. Além disso, $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço vetorial de $BV(\Omega)$ com as operações de soma e produto consideradas.

No que segue vamos exibir um exemplo de uma função $u \in BV(\Omega) \setminus W^{1,1}(\Omega)$. Dado um conjunto aberto $E \subset \Omega$ com fronteira suave tal que $m(E) < \infty$ e $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < \infty$, onde $\mathcal{H}^{N-1}$ denota a medida de Hausdorff de dimensão $N-1$ e $m(E)$ denota a medida de Lebesgue do conjunto E em $\mathbb{R}^N$. Mostraremos que $\chi_E \in BV(\Omega)$.

Desde que $\chi_E \in L^1(\Omega)$, resta apenas provar que a variação é finita. De fato, segue pelo Teorema 2.16 (Teorema generalizado de Green) que para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \chi_E Div\varphi dx = \int_E Div\varphi dx = \int_{\partial E} \nu \cdot \varphi \mathcal{H}^{N-1} \\ \leq \int_{\partial E} \|\varphi\|_\infty \|\nu\|_\infty \mathcal{H}^{N-1} = \mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < \infty.\end{aligned}$$

onde ν é o normal exterior a $\partial\Omega$. Logo tomando o supremo para tais φ obtemos

$$\int_\Omega |D\chi_E| = \sup\left\{\int_\Omega \chi_E Div\ \varphi dx : \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\} \leq \mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < \infty.$$

No que segue, vamos mostrar que $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$. Para isso mostraremos a seguinte afirmação.

Afirmação 1: Seja Ω um subconjunto conexo de $\mathbb{R}^N$ e $\Omega \supset E$ um conjunto mensurável. Então $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$ a menos que $E = \Omega$ ou $E = \varnothing$.

Para provar essa afirmação usaremos o seguinte resultado,

$$u, v \in W^{1,1}(\Omega), u = v \text{ q.t.p em } B \in B(\Omega) \Longrightarrow Du = Dv \text{ q.t.p sobre } B, \tag{2.6}$$

onde D denota a derivada no sentido distribucional. A prova dessa afirmação pode se encontrar em [11], pág. 203.

De fato, suponha por contradição que $\chi_E \in W^{1,1}(\Omega)$ para todo $E \subset \Omega$ excepto quando $E = \Omega$ ou $E = \varnothing$. Logo, já que $\chi_E = 1$ q.t.p sobre E, então por 2.6 obtemos que

$$D\chi_E = D(1) = 0 \text{ q.t.p sobre } E.$$

Analogamente como $\chi_E = 0$ sobre $\Omega \setminus E$ segue de 2.6 que

$$D\chi_E = D(1) = 0 \text{ q.t.p sobre } \Omega \setminus E.$$

Portanto, $D\chi_E = 0$ sobre Ω. Consequentemente da desigualdade de Poincaré (5.1.8) segue que χ_E é constante, i.e. $E = \Omega$ ou $E = \varnothing$ o que é uma contradição. Concluindo assim a prova da afirmação 1. Portanto, $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$. ■

Proposição 2.1.6 *Considere* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $BV(\Omega)$ *tal que* $\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|_{BV(\Omega)} < +\infty$*. Se* (u_n) *converge em* $L^1(\Omega)$ *para algum* $u \in L^1(\Omega)$*, então*

$$u \in BV(\Omega) \ e \ |u|_{BV(\Omega)} \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} |u_n|_{BV(\Omega)}.$$

Demonstração: Seja $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Daí existe um conjunto compacto K tal que $supp(\varphi) \subset K$. Em consequência da continuidade de $|Div\varphi|$ em K e $supp(Div\varphi) \subset K$, obtemos que $\sup_{x\in K} |Div\varphi(x)| = C < \infty$. Logo,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u_n Div\varphi dx - \int_\Omega u Div\varphi dx\right| = \left|\int_K (u_n - u) Div\varphi dx\right| &\leq \int_K |u_n - u||Div\varphi| dx \\ &\leq C\int_K |u_n - u| dx \leq C\int_\Omega |u_n - u| dx.\end{aligned}$$

Como $u_n \longrightarrow u$ em $L^1(\Omega)$ segue que

$$\int_\Omega u Div\varphi dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega u_n Div\varphi dx = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega u_n Div\varphi dx.$$

Tomando o supremo para $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ e da hipótese $\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|_{BV(\Omega)} < \infty$, obtemos

$$|u|_{BV(\Omega)} \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} |u_n|_{BV(\Omega)} < \infty.$$

Portanto, pelo Teorema 2.1.3, $u \in BV(\Omega)$. ■

Desde que $|\cdot|_{BV} = 0$ define apenas uma seminorma em $BV(\Omega)$, pois $|\cdot|_{BV} = 0$ não implica que $u = 0$, vamos definir

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_{BV(\Omega)} : BV(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\to \|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_{L_1(\Omega)} + |u|_{BV(\Omega)}\end{aligned}$$

que torna uma norma em $BV(\Omega)$.

Teorema 2.1.7 *O espaço* $BV(\Omega)$ *munido com a* $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $BV(\Omega)$, isso é, para todo

$\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_m - u_n\|_{BV(\Omega)} = \|u_m - u_n\|_{L_1(\Omega)} + |u_m - u_n|_{BV(\Omega)} < \epsilon, \forall\, m, n \geq N_\epsilon.$$

Então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$. Em consequência, da completitude de $L^1(\Omega)$, existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $L^1(\Omega)$. Em particular para $p, q \in \mathbb{N}$ e fixando $q > N_\epsilon$, obtemos

$$u_p - u_q \longrightarrow u - u_q, \text{ quando } p \longrightarrow \infty \tag{2.7}$$

e também sendo (u_n) uma sequência de Cauchy em $BV(\Omega)$, temos que

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} |u_p - u_q|_{BV(\Omega)} \leq \sup_{p\in\mathbb{N}} \|u_p - u_q\|_{BV(\Omega)} < \epsilon.$$

Assim da Proposição 2.1.6 obtemos

$$|u - u_q|_{BV(\Omega)} \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} |u_p - u_q|_{BV(\Omega)} \leq \epsilon,$$

logo

$$|u|_{BV(\Omega)} \leq |u - u_q|_{BV(\Omega)} + |u_q|_{BV(\Omega)} < \infty,$$

e como $u \in L^1(\Omega)$ conclui pelo Teorema 2.1.3 que $u \in BV(\Omega)$. Além disso,

$$\|u - u_q\|_{BV(\Omega)} = \|u - u_q\|_{L^1(\Omega)} + |u - u_q|_{BV(\Omega)} \longrightarrow 0, \text{ em } BV(\Omega).$$

Portanto $BV(\Omega)$ é um espaço de Banach. ■

Corolário 2.1.8 *Se $u \in W^{1,1}(\Omega)$, então $\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} = \|u\|_{BV(\Omega)}$.*

Demonstração: Considere $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Então segue do Teorema 1.3.2, que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} &= \|u\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\Omega)} \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \sup\left\{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi_i dx : \varphi_i \in C_c(\Omega), |\varphi_i|_\infty \leq 1\right\} \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)} + \sup\left\{-\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega u\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx : \varphi_i \in C_c^1(\Omega), |\varphi_i|_\infty \leq 1\right\} \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)} + \sup\left\{-\int_\Omega u Div\varphi dx : \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\} \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)} + |u|_{BV(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Isso prova o corolário. ■

Teorema 2.1.9 *O espaço $BV(\Omega)$ não é reflexivo.*

Demonstração: Primeiro, vamos provar a seguinte afirmação.

Afirmação: $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $BV(\Omega)$. De fato, seja $(u_n) \subset W^{1,1}(\Omega)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } BV(\Omega).$$

Pelo Teorema 2.1.8, a norma de u_n no espaço $BV(\Omega)$ coincide com a norma de u_n em $W^{1,1}(\Omega)$. Logo, (u_n) é um sequência de Cauchy em $W^{1,1}(\Omega)$, pois

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,1}} = \|u_n - u_m\|_{BV(\Omega)} \leq \|u_n - u\|_{BV(\Omega)} + \|u_m - u\|_{BV(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

quando $m, n \longrightarrow \infty$. Em consequência, existem (u_{n_k}) e $\breve{u} \in W^{1,1}(\Omega)$ tal que $u_{n_k} \longrightarrow \breve{u}$ em $W^{1,1}(\Omega)$. Por outro lado

$$\begin{aligned}
\|u - \breve{u}\|_{BV(\Omega)} &\leq \|u - u_{n_k}\|_{BV(\Omega)} + \|\breve{u} - u_{n_k}\|_{BV(\Omega)} \\
&= \|u - u_{n_k}\|_{BV(\Omega)} + \|\breve{u} - u_{n_k}\|_{W^{1,1}(\Omega)} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $n \longrightarrow \infty$, mostrando que $u = \breve{u}$. Assim obtemos que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W^{1,1}(\Omega).$$

Portanto $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $BV(\Omega)$, o que conclui a prova da afirmação.

Assim, pelo Teorema 5.0.1, $BV(\Omega)$ não é reflexivo, pois $W^{1,1}(\Omega)$ não reflexivo.

■

2.2 Convêrgencia e imersões

Das propriedades dos Espaços de Sobolev temos que o espaço $C^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{1,1}(\Omega)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{W^{1,1}(\Omega)}$. Assim, segue do corolário anterior que

$$\overline{C^\infty(\Omega)\cap BV(\Omega)}^{\|\cdot\|_{BV(\Omega)}} = \overline{C^\infty(\Omega)\cap BV(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,1}(\Omega)}} \subset W^{1,1}(\Omega) \subsetneq BV(\Omega),$$

ou seja, $C^\infty(\Omega)\cap BV(\Omega)$ não é denso em $BV(\Omega)$ com a topologia da norma. Dessa forma, nosso objetivo é encontrar uma nova noção de convergência que torne o espaço $C^\infty(\Omega)\cap BV(\Omega)$ denso em $BV(\Omega)$ com respeito à topologia induzida por esta convergência. Para este objetivo, primeiro definimos a Convergência Intermediária.

Definição 2.2.1 (Convergência Intermediária) *Considere uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ e $u \in BV(\Omega)$. Dizemos que $u_n \longrightarrow u$ no sentido da convergência intermediária se*

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^1(\Omega) \text{ e } |u_n|_{BV(\Omega)} \longrightarrow |u|_{BV(\Omega)}.$$

Relembramos a seguinte definição.

Definição 2.2.2 *Uma função regularizante ρ_ϵ é definida por*

$$\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-N}\rho(x/\epsilon),$$

onde ρ é uma função não negativa que satisfaz

$$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ supp(\rho) \subset \overline{B_1}(0) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1.$$

A partir de uma função regularizante, podemos definir a seguinte convolução.

Definição 2.2.3 *Considere $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e ρ_ϵ uma função regularizante. Definimos*

$$\rho_\epsilon * \mu(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\epsilon(x-y)\mu(y).$$

Teorema 2.2.4 *Seja ρ_ϵ uma função regularizante e $\rho_\epsilon * \mu$ definido como na Definição acima. Então $\rho_\epsilon * \mu \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e além disso, satisfaz*

$i)$ $\rho_\epsilon * \mu \rightharpoonup \mu$ *fracamente em* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$,

$ii)$ $\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_\epsilon * \mu| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\mu|$,

$iii)$ $\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_\epsilon * \mu| \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\mu|$ *quando* $\epsilon \longrightarrow 0$.

Demonstração: Ver [3], pág. 132.

Teorema 2.2.5 *O espaço $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ é denso em $BV(\Omega)$ no sentido da convergência intermediária.*

Demonstração: Note que $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$. De fato, a inclusão $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \supset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ é evidente. Por outro lado, dado $u \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ então existe a derivada $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ contínua e assim para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ obtemos que

$$\int_K \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx < \infty \text{ e } \int_K |u| dx < \infty,$$

isso é, $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(\Omega)$. Assim, por definição de derivada fraca obtemos que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Logo, pela densidade do espaço $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^1(\Omega)$ na norma do supremo e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx, \ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega),$$

e como $u \in BV(\Omega)$ tomando supremo para $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ tal que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ temos que

$$\sup \left\{ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx : \ \varphi \in C_c(\Omega), \ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} < \infty.$$

Portanto, pelo Teorema 1.3.2 obtemos que $\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\Omega)} < \infty$, isso é $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$.

Agora mostraremos que para todo $u \in BV(\Omega)$ existe $(u_\epsilon) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |u - u_\epsilon| dx < \epsilon \text{ e } \left| \int_\Omega |Du_\epsilon| - \int_\Omega |Du| \right| < 4\epsilon$$

onde a integral de $|Du_\epsilon|$ é no sentido de Lebesgue (veja (2.5) na observação 2.1.4) e a integral de $|Du|$ é no sentido da variação total da medida definida em (1.2.13). Consideremos uma família $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de Ω tal que

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_o}|Du|dx<\epsilon,\quad \Omega_i\subset\subset\Omega_{i+1},\quad \Omega=\bigcup_{i=0}^{\infty}\Omega_i.$$

Construímos uma cobertura aberta $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de Ω da seguinte maneira

$$C_1=\Omega_2 \text{ e } C_i=\Omega_{i+1}\setminus\overline{\Omega}_{i-1},\ \forall i\geq 2.$$

Seja $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Assim, as funções φ_i satisfazem

$$\varphi_i\in C_c^\infty(C_i),\quad 0\leq\varphi_i\leq 1,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i=1.$$

Note que $\varphi_1=1$ em Ω_1. Para cada $i\in\mathbb{N}$ escolhamos $\epsilon_i>0$ tal que as seguintes estimativas sejam satisfeitas (ver prova do Teorema 2.2.4 em [3] pág. 132-133)

$$supp(\rho_{\epsilon_i}*\varphi_i u)\subset C_i, \tag{2.8}$$
$$\int_\Omega|\rho_{\epsilon_i}*(u\varphi_i)-u\varphi_i|dx<\frac{\epsilon}{2^i}, \tag{2.9}$$
$$\left|\int_\Omega|\rho_{\epsilon_1}*(\varphi_1 Du)dx-\int_\Omega|\varphi_1 Du|dx\right|<\epsilon \text{ e} \tag{2.10}$$
$$\int_\Omega|\rho_{\epsilon_i}*(uD\varphi_i)-uD\varphi_i|dx<\frac{\epsilon}{2^i}, \tag{2.11}$$

onde ρ_{ϵ_i} são funções regularizantes. Defina a função

$$u_\epsilon=\sum_{i=1}^{\infty}\rho_{\epsilon_i}*(u\varphi_i).$$

Observe que a soma é localmente finita, pois para cada $x\in\Omega$ pertence ao máximo dois, entre os conjuntos $\{C_i\}$ e por (2.8), u_ϵ está bem definido. Além disso, temos pelo Teorema 2.2.5 que $u_\epsilon\in C^\infty(\Omega)$ e como $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i=1$, obtemos $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i u=u$.

Logo, pela estimativa dada em (2.9) obtemos

$$\int_\Omega |u-u_\epsilon|dx = \int_\Omega \left| u - \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (u\varphi_i) \right| dx = \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^{\infty} (u\varphi_i - \rho_{\epsilon_i} * (u\varphi_i)) \right| dx,$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega |u\varphi_i - \rho_{\epsilon_i} * (u\varphi_i)|\, dx < \epsilon,$$

fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$ obtemos que $u_\epsilon \longrightarrow u$ em $L^1(\Omega)$. Resta apenas mostrar que

$$\int_\Omega |Du_\epsilon| \longrightarrow \int_\Omega |Du|.$$

Derivando no sentido distribucional obtemos que

$$D(u\varphi_i) = \varphi_i Du + uD\varphi_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} D\varphi_i = 0,$$

logo

$$\begin{aligned} Du_\epsilon &= \sum_{i=1}^{\infty} D(\rho_{\epsilon_i} * (u\varphi_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * D(u\varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (uD\varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{\infty} (\rho_{\epsilon_i} * (uD\varphi_i) - uD\varphi_i). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Assim das estimativas (2.11), (2.12) e do Teorema 2.2.4 obtemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega |\rho_{\epsilon_1} * (uD\varphi_1)|dx - \int_\Omega |Du_\epsilon| \right| &\leq \sum_{i=2}^{\infty} \int_\Omega |\rho_{\epsilon_i} * (\varphi_i Du)|dx \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega |\rho_{\epsilon_i} * (uD\varphi_i) - uD\varphi_i|dx \\ &\leq \sum_{i=2}^{\infty} \int_\Omega |\rho_{\epsilon_i} * (\varphi_i Du)|dx + \epsilon \\ &\leq \sum_{i=2}^{\infty} \int_\Omega |\varphi_i Du|dx + \epsilon \\ &\leq \int_{\Omega \setminus \Omega_o} |Du| + \epsilon < 2\epsilon. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por outro lado, sabendo que $\varphi = 1$ em Ω_1 e da estimativa (2.10) temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |\rho_{\epsilon_1} * (uD\varphi_1)|dx - \int_\Omega |Du|\right| &\leq \left|\int_\Omega |\rho_{\epsilon_1} * (uD\varphi_1)|dx - \int_\Omega |\varphi_1 Du|\right| \\
&+ \left|\int_\Omega |\varphi_1 Du| - \int_\Omega |Du|\right| \\
&\leq \epsilon + \left|\int_\Omega |\varphi_1 Du| - \int_\Omega |Du|\right| \\
&< \epsilon + \int_\Omega (1-\varphi_1)|Du| \\
&\leq \epsilon + \int_{\Omega \setminus \Omega_o} |Du| < 2\epsilon, \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Portanto, das desigualdades (2.13) e (2.14) obtemos

$$\left|\int_\Omega |Du_\epsilon| - \int_\Omega |Du|\right| < 2\epsilon + 2\epsilon = 4\epsilon.$$

Mostrando que se $\epsilon \longrightarrow 0$ então

$$\int_\Omega |Du_\epsilon| \longrightarrow \int_\Omega |Du|,$$

o que conclui a prova. ■

Definição 2.2.6 (Fronteira Lipschitziana) *Considere Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$. Dizemos que Ω tem fronteira Lipschitziana se para $p \in \partial\Omega$ existe um hiperplano H de dimensão $N-1$, uma função Lipschitz contínua $g : H \to \mathbb{R}$ e $r, h > 0$ tais que*

i) $\Omega \cap C = \{x + y\eta : x \in B_r(p) \cap H,\ -h < y < g(x)\}$,

ii) $(\partial\Omega) \cap C = \{x + y\eta : x \in B_r(p) \cap H,\ g(x) = y\}$,

onde, η é o vetor normal unitário a H e

- $B_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - p\| < r\}$,
- $C := \{x + y\eta : x \in B_r(p) \cap H,\ -h < y < h\}$.

Teorema 2.2.7 *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira Lipschitziana. Então para todo p com $1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}$ a imersão*

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua. Mais precisamente, existe uma constante $C > 0$, que depende somente de Ω, p e N, tal que

$$\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|u\|_{BV(\Omega)}, \text{ para todo } u \in BV(\Omega).$$

Demonstração: Seja uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ que converge a $u \in BV(\Omega)$ no sentido da convergência intermediária, ver Teorema 2.2.5. Assim, $(u_n) \in W^{1,1}(\Omega)$. Da imersão contínua $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$ existe uma constante $C > 0$, que depende somente de Ω, p e N tal que

$$\left(\int_\Omega |u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|u_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} = C\left(\|u_n\|_{L^1(\Omega)} + |u_n|_{BV(\Omega)}\right) < \infty.$$

Como $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $p \geq 1$ e (u_n) é limitado, segue que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$ para $p \geq 1$ e pelas propriedades da convergência fraca em $L^p(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \left(\int_\Omega |u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} C\left(\|u_n\|_{L^1(\Omega)} + |u_n|_{BV(\Omega)}\right) \\ &= C\|u\|_{BV(\Omega)},\end{aligned}$$

onde usamos a convergência intermediária para obter a última igualdade. Isso termina a prova. ■

Observação 2.2.8 *De acordo com o teorema anterior, cada elemento de $BV(\Omega)$ pertence a $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}$. Isso nos permite melhorar levemente o Teorema de densidade (2.2.5) para a seguinte forma.*

Corolário 2.2.9 *Seja $u \in BV(\Omega)$. Então existe $(u_n) \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que*

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^p(\Omega) \text{ e } |u_n|_{BV(\Omega)} \longrightarrow |u|_{BV(\Omega)}.$$

No que segue, passaremos a usar a seguinte notação

$$1^* = \frac{N}{N-1}. \tag{2.15}$$

Teorema 2.2.10 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira Lipschitziana. Então para todo p com $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$ a imersão*

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é compacta.

Demonstração: Seja uma sequência $(u_n) \subset BV(\Omega)$ tal que $\|u_n\|_{BV(\Omega)} \leq 1$. Pela Observação (2.2.8) temos que existe $v_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$\|v_n - u_n\|_p < 1/n, \ \forall p \in [1, 1^*] \ \text{ e } \ \|\nabla v_n\|_{L^1(\Omega)} < 2,$$

onde a última desigualdade segue da hipótese $\|u_n\|_{BV(\Omega)} \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\|v_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} = \|v_n\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla v_n\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|v_n - u_n\|_{L^1} + \|u_n\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla v_n\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|v_n - u_n\|_{L^1} + \|u_n\|_{BV(\Omega)} + \|\nabla v_n\|_{L^1(\Omega)} < 4.\end{aligned}$$

Desde que (v_n) é limitado em $W^{1,1}(\Omega)$, segue da imersão compacta de $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para $p \in [1, 1^*)$ que existe uma subsequência v_{n_k} e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $v_{n_k} \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Logo

$$\|u_{n_k} - u\|_{L^p(\Omega)} = \|v_{n_k} - u_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} + \|v_{n_k} - u\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

quando $k \longrightarrow \infty$. Portanto $u_{n_k} \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Mostraremos agora que $u \in BV(\Omega)$. Como $\|u_{n_k}\|_{BV(\Omega)} = \|u_{n_k}\|_{L^1(\Omega)} + |u_{n_k}|_{BV(\Omega)} \leq 1$ então $\sup_{k\in\mathbb{N}} |u_{n_k}|_{BV(\Omega)} \leq 1$ e além disso $u_{n_k} \longrightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, isso é, pela Proposição 2.1.6, obtemos que $u \in BV(\Omega)$ o que completa a prova. ■

Teorema 2.2.11 (Teorema do Traço em BV(Ω)) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado com fronteira Lipschitziana. Então existe um operador linear e contínuo $\Gamma : BV(\Omega) \longrightarrow L^1(\partial\Omega, \mathcal{H}^{N-1})$ tal que:*

i) $\Gamma(u) = u_{|\partial\Omega}$ *se* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap BV(\Omega)$,

ii) vale a versão generalizada da fórmula de Green:

$$\int_\Omega \varphi Du = -\int_\Omega u Div\varphi + \int_{\partial\Omega} u_{|\partial\Omega}\varphi \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1}, \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \qquad (2.16)$$

onde $\nu(x)$ é o vetor normal exterior a Ω em x, que está definido para todo $x \in \partial\Omega$, a menos de un conjunto de medida $\mathcal{H}^{N-1}$ nula.

Demonstração: Ver [3], pág. 379.

Teorema 2.2.12 (Desigualdade de Poincaré em BV(Ω)) *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira Lipschitziana. Então existe uma constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \leq C\left(\int_{\Omega}|Du| + \int_{\partial\Omega}|u|d\mathcal{H}^{N-1}\right),$$

para todo $u \in BV(\Omega)$.

Demonstração: Ver [10], pág 189.

Capítulo 3

Subdiferencial e o Gradiente de Clarke

Neste capítulo, vamos apresentar as noções de subdiferencial e o gradiente generalizado de Clarke. Por todo este capítulo, denotaremos por X um espaço de Banach real munido da norma $\|\cdot\|$, seu dual será representado por X^* e a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ significará o par de dualidade entre X^* e X.

3.1 Subdiferencial

As definições e demonstrações dos resultados listados nesta seção podem ser encontrados em Carl [22] e Zsulkin [23].

Definição 3.1.1 *Considere $\psi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa localmente Lipschitz. Definimos o domínio efetivo de ψ como*

$$D(\psi) = \{u \in X : \psi(u) < +\infty\}.$$

Definição 3.1.2 *Considere $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa ($\psi \not\equiv +\infty$). Um elemento $u^* \in X^*$ é chamado subgradiente de ψ em $u \in D(\psi)$ se satisfaz a seguinte desigualdade*

$$\psi(v) - \psi(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle, \ \forall v \in X. \tag{3.1}$$

Além disso, o conjunto de todos $u^* \in X^*$ satisfazendo (3.1) é chamado de subdiferencial de ψ em u e é denotado por $\partial\psi(u)$.

Definição 3.1.3 (Derivada de Gateaux) *Considere X, Y espaços de Banach e $G : U \subset X \longrightarrow Y$ uma função cujo domínio U é um aberto de X. Definimos a derivada direcional de G no ponto $u \in U$ na direção $h \in X$ por*

$$\langle G'(u), h\rangle = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{G(u+th) - G(u)}{t},$$

desde que o limite exista. Se $\langle G'(u), h\rangle$ existe para todo $h \in X$ e se a seguinte função

$$\begin{aligned} G'(u) : X &\longrightarrow Y \\ h &\longrightarrow \langle G'(u), h\rangle \end{aligned}$$

é linear e contínuo, então dizemos que G é Gateaux diferenciável em u, e chamamos $G'(u)$ a derivada de Gateaux de G no ponto $u \in U$.

Teorema 3.1.4 *Seja $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e Gateaux diferenciável em $u \in X$. Então $\partial G(u)$ tem um só elemento, a saber, $u^* = G'(u)$.*

Demonstração: Sejam $u, v \in X$ e $t \in (0, 1]$. Da convexidade de G obtemos que

$$G(u + t(v-u)) = G(tv + (1-t)u) \leq tG(v) + (1-t)G(u) = t(G(v) - G(u)) + G(u).$$

Logo,

$$\frac{G(u + t(v-u)) - G(u)}{t} \leq G(v) - G(u).$$

Como G é Gateaux diferenciável, decorre que

$$\langle G'(u), v-u\rangle = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{G(u + t(v-u)) - G(u)}{t} \leq G(v) - G(u).$$

Mostrando que $G'(u) \in \partial G(u)$. Agora seja $u^* \in \partial G(u)$. Então para cada $v \in X$ e $t > 0$

$$G(u+tv) - G(u) \geq \langle u^*, u + tv - u\rangle = \langle u^*, tv\rangle = t\langle u^*, v\rangle,$$

de modo que

$$\langle G'(u), v\rangle = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} \geq \langle u^*, v\rangle,$$

isso é, $\langle G'(u) - u^*, v\rangle \geq 0$, para todo $v \in X$. Portanto, $\langle G'(u) - u^*, v\rangle = 0,\ \forall v \in X$, o que mostra que $G'(u) = u^*$. Isso finaliza a prova. ■

3.2 O gradiente generalizado de Clarke

As definições e demonstrações dos resultados listados nesta seção podem ser encontrados em Chang [7], Clarke [9] e Carl [22].

Definição 3.2.1 *Um funcional $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dito localmente Lipschitz ($f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$) se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança $V = V_x$ de x e uma constante $K = K_x > 0$ tal que*

$$|f(y) - f(z)| \leq K\|y - z\|, \text{ para todo } y, z \in V.$$

Exemplo 3.2.2 *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = |t|$ é uma função localmente Lipschitz.*

Definição 3.2.3 *Considere $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e $u, v \in X$. A derivada generalizada de f em u na direção v é definida por*

$$f^o(u; v) = \limsup_{x \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

ou equivalentemente,

$$f^o(u; v) = \limsup_{h \longrightarrow 0,\ \lambda \downarrow 0} \frac{f(u + h + \lambda v) - f(u + h)}{\lambda},$$

Proposição 3.2.4 *Seja $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$. Então*

(i) *dado $u \in X$, o funcional $f^o(u; \cdot)$ é subaditivo, positivamente homogêneo, convexo e satisfaz a desigualdade*

$$|f^o(u; v)| \leq K\|v\|, \forall v \in X,$$

(ii) $f^o(u; -v) = (-f)^o(u; v), \forall u, v \in X,$

(iii) *a função $(u, v) \in X \times X \longrightarrow f^o(u; v) \in \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente.*

Demonstração: Prova do $i)$. Vamos mostrar primeiro a subaditividade.

Sejam u, v, w e $y \in X$

$$\begin{aligned} f^o(u; v+w) &= \limsup_{y \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{f(y+tv+tw)-f(y)}{t} \\ &\leq \limsup_{y \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{f(y+tw+tv)-f(y+tw)}{t} + \limsup_{y \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{f(y+tw)-f(y)}{t} \\ &= \limsup_{y \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{f(x+tv)-f(y+tw)}{t} + \limsup_{y \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{f(y+tw)-f(y)}{t}, \\ &= f^o(u;v) + f^o(u;w), \end{aligned}$$

onde $x := y + tw$ na segunda igualdade.

Vamos mostrar que $f^o(u; \cdot)$ é positivamente homogênea. Dado $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} f^o(u; \lambda v) &= \limsup_{y \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{f(y+t\lambda v)-f(y)}{t} \\ &= \limsup_{y \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{f(y+rv)-f(y)}{r.\lambda^{-1}} \\ &= \lambda \limsup_{y \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{f(y+rv)-f(y)}{r} \\ &= \lambda f^o(u;v), \end{aligned}$$

onde $r := \lambda t$ na segunda igualdade. Para finalizar a prova do item $i)$, observamos de $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ que

$$\begin{aligned} f^o(u;v) &= \limsup_{y \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{f(y+rv)-f(y)}{t} \leq \limsup_{y \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \left| \frac{f(y+rv)-f(y)}{t} \right| \\ &\leq \limsup_{y \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} K \| \frac{x+tv-x}{t} \| = K\|v\|, \ \forall v \in X. \end{aligned}$$

Prova do $ii)$. Segue da definição de f e tomando $w := x - tv$ que

$$\begin{aligned} f^o(u; -v) &= \limsup_{x \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{f(x-tv)-f(x)}{t} \\ &= \limsup_{w \longrightarrow u,\ t \downarrow 0} \frac{(-f)(w+tv)-(-f)(w)}{t} \\ &= (-f)^o(u;v). \end{aligned}$$

Prova do $iii)$. Sejam (u_n) e (v_n) sequências arbitrárias tais que $u_n \longrightarrow u$ e $v_n \longrightarrow v$ respectivamente. Então segue da definição de $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ que existem $w_n \in X$ e $t_n > 0$ tal que

$$\|w_n - u_n\| + t_n < \frac{1}{n}$$

e

$$\begin{aligned} f^o(u_n; v_n) - \frac{1}{n} &\leq \frac{f(w_n + t_n v_n) - f(w_n)}{t_n} \\ &= \frac{f(w_n + t_n v) - f(w_n)}{t_n} + \frac{f(w_n + t_n v_n) - f(w_n + t_n v)}{t_n}. \end{aligned}$$

Desde que $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, obtemos que

$$f^o(u_n; v_n) - \frac{1}{n} \leq \frac{f(w_n + t_n v) - f(w_n)}{t_n} + \frac{K t_n \|v_n - v\|}{t_n},$$

para algum $K > 0$. Assim, fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} f^o(u_n, v_n) \leq f^o(u, v).$$

■

Agora estamos em condições de definir o gradiente generalizado de Clarke.

Definição 3.2.5 *O gradiente generalizado de Clarke de um funcional localmente Lipzchitz ($f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$) em um ponto $u \in X$ é o subconjunto de X^* definido por*

$$\partial f(u) = \{\zeta \in X^* : f^o(u; v) \geq \langle \zeta, v \rangle, \forall v \in X\}.$$

Denotemos por $\|\cdot\|_{X^*}$ a norma em X^* definida por

$$\|\zeta\|_{X^*} = \sup\{\langle \zeta, v \rangle : v \in X, \|v\| \leq 1\}.$$

Teorema 3.2.6 *Seja $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$. Então o conjunto $\partial f(u)$ é não vazio.*

Demonstração: Pela Proposição 3.2.4, temos que $f^o(u; \cdot)$ é um funcional positivamente homogêneo e subaditivo. Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach, forma analítica, existe um funcional $\zeta : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\langle \zeta, v\rangle \le f^o(u;v),\ \forall v \in X \tag{3.2}$$

e, como uma consequência da Proposição 3.2.4, obtemos que

$$\langle \zeta, v\rangle \le K\|v\|, \forall v \in X,$$

isso é, $\zeta \in X^*$. Portanto, segue disso e de (3.2) que $\zeta \in \partial f(u)$. ■

Proposição 3.2.7 *Sejam $f \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$ e $u \in X$. Então:*

(i) *$\partial f(u) \subset X^*$ é convexo, fraco*-compacto e*

$$\|\zeta\|_{X^*} \le K \text{ para todo } \zeta \in \partial f(u),$$

onde $K = K_u > 0$ é a constante de Lipschitz,

(ii) $f^o(u;v) = \max\{\langle \zeta, v\rangle : \zeta \in \partial f(u)\}$,

(iii) *a multifunção $u \longrightarrow \partial f(u)$ é fraco*-fechado, no seguinte sentido: se $(u_n, \zeta_n) \subset X \times X^*$ é uma sequência satisfazendo*

$$\zeta_n \in \partial f(u_n),\ \ u_n \xrightarrow{X} u \ \ e\ \ \zeta_n \overset{*}{\rightharpoonup} \zeta,$$

então $\zeta \in \partial f(u)$.

Demonstração: Prova do $i)$.

Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki obtemos que

$$B_{\partial f(u)} = \{\Phi \in \partial f(u) : \|\Phi\|_{X^*} \le 1\} \text{ é fraco}^* - \text{compacto}$$

e o caso geral é obtido pelo Teorema 11, pág. 34 em [24]. Por outro lado, como $f \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$ segue que

$$\|\zeta\|_{X^*} = \sup_{\|v\|\le 1} \langle \zeta, v\rangle \le \sup_{\|v\|\le 1} f^o(u;v) \le K_u,\ \ \forall \zeta \in \partial f(u).$$

Prova do $ii)$.

De fato, segue diretamente da definição que $\langle \zeta, v \rangle \leq f^o(u; v), \ \forall v \in X$. Suponha por contradição que para algum $v \in X$, vale a desigualdade estrita. Então segue do Teorema de Hahn-Banach-Forma Analítica, que existe um funcional $\zeta \in X^*$ tal que

$$f^o(u; v) > \langle \zeta, v \rangle = f^o(u; v),$$

o que nos leva a uma contradição.

Prova do iii).

Dado $(u_n) \subset X$ satisfazendo $u_n \longrightarrow u$ em X e seja $\zeta_n \in \partial f(u_n)$ com $\zeta_n \overset{*}{\rightharpoonup} \zeta$ em X^*. Então por definição temos

$$\langle \zeta_n, v \rangle \leq f^o(u_n; v), \ \forall v \in X.$$

Assim, segue da semicontinuidade superior de $f^o(u; \cdot)$ que

$$f^o(u; v) \geq \limsup_{n \longrightarrow \infty} f^o(u_n; v) \geq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \langle \zeta_n, v \rangle \geq \langle \zeta, v \rangle, \ \forall v \in X.$$

Como v é arbitrário, segue que $\zeta \in \partial f(x)$. ■

Proposição 3.2.8 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ um funcional convexo. Então o gradiente generalizado de Clarke $\partial f(u)$ coincide com o subdiferencial de f.*

Demonstração: Ver [9], pág. 167.

3.3 Propriedades do gradiente generalizado de Clarke

Como referência para as demonstrações feitas nesta seção, o leitor pode consultar Clarke [9] e Carl [22], que foram os textos base na construção deste tópico.

Definição 3.3.1 *Um elemento $u \in X$ é dito ser um ponto crítico de um funcional $f \in Lip_{loc}(X; \mathbb{R})$ se*

$$0 \in \partial f(u).$$

Proposição 3.3.2 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in X$. Então*

$$\partial(\lambda f)(u) = \lambda \partial f(u).$$

Em particular, temos

$$\partial(-f)(u) = -\partial f(u).$$

Demonstração: Se $\lambda = 0$, a propriedade é obvia.

Se $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\zeta \in \partial(\lambda f)(u) &\iff \langle \zeta, v\rangle \leq (\lambda f)^o(u;v), \forall v \in X \\
&\iff \langle \frac{1}{\lambda}\zeta, v\rangle \leq \frac{1}{\lambda}(\lambda f)^o(u;v) = f^o(u;v), \forall v \in X \\
&\iff \zeta \in \lambda \partial f(u).
\end{aligned}$$

Se $\lambda < 0$, segue da Proposição 3.2.4 (ii) que

$$\begin{aligned}
\zeta \in \partial(\lambda f)(u) &\iff \langle \frac{1}{\lambda}\zeta, v\rangle = -\frac{1}{\lambda}\langle \zeta, -v\rangle \\
&\leq -\frac{1}{\lambda}(\lambda f)^o(u;-v) = -\frac{1}{\lambda}(-\lambda f)^o(u;v) = f^o(u;v), \forall v \in X \\
&\iff \zeta \in \lambda \partial f(u).
\end{aligned}$$

Isso completa a prova. ■

Definição 3.3.3 *Uma função localmente Lipschitz $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada regular em um ponto $u \in X$ se:*

(i) *a derivada direcional $\langle f'(u), v\rangle := f^{'}(u;v)$ existe, para cada $v \in X$,*

(ii) $f^o(u;v) = f^{'}(u;v), \forall v \in X.$

Proposição 3.3.4 *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções localmente Lipschitz. Então para cada $u \in X$, temos a seguinte inclusão:*

$$\partial(f+g)(u) \subset \partial f(u) + \partial g(u).$$

Além disso, se as funções f e g são regulares no ponto $u \in X$, então a inclusão acima se torna uma igualdade e $f + g$ é regular em u.

Demonstração: Seja $\zeta \in \partial(f+g)(u)$. Por definição, temos

$$\langle \zeta, v\rangle \leq (f+g)^o(u;v) \leq f^o(u;v) + g^o(u;v), \forall v \in X. \tag{3.3}$$

Argumentando por contradição, admitamos que $\zeta \notin \partial f(u) + \partial g(u)$. Então como X^* é um espaço de Haussdorff munido da topologia fraca*, existe $w \in X$ tal que

$$\begin{aligned}
\langle \zeta, w \rangle &> \max\{\langle z, w \rangle : z := z_1 + z_2 \in \partial f(u) + \partial g(u)\} \\
&= \max\{\langle z_1, w \rangle + \langle z_2, w \rangle : z_1 \in \partial f(u), z_2 \in \partial g(u)\} \\
&= \max\{\langle z_1, w \rangle : z_1 \in \partial f(u)\} + \max\{\langle z_2, w \rangle : z_2 \in \partial g(u)\} \\
&= f^o(u; w) + g^o(u; w),
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da Proposição 3.2.7 (ii). Isso contradiz (3.3).

Suponha agora que f e g são regulares em $u \in X$. Seja $\zeta \in \partial f(u) + \partial g(u)$. Então por definição, obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle \zeta, v \rangle &\leq f^o(u; v) + g^o(u; v) = f'(u; v) + g'(u; v) \\
&= (f+g)'(u; v) = (f+g)^o(u; v), \forall v \in X.
\end{aligned}$$

Onde concluímos que $\zeta \in \partial(f+g)(u)$, isso é

$$\partial(f+g) \supset \partial f(u) + \partial g(u).$$

■

Capítulo 4

Equação de Euler-Lagrange para problemas com 1-Laplaciano

Neste capítulo, consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira Lipschitzina e ν é o vetor normal unitário sobre $\partial\Omega$. No capítulo 2, apresentamos o Teorema 2.1.3 que caracteriza os espaços de variação limitada e no Capítulo 1 o Teorema de Riesz Alexandroff que nos da uma identificação das medidas de Radon $\mathcal{M}(\Omega)$ com o dual topológico do espaço $C_0(\Omega)$, onde a norma em $\mathcal{M}(\Omega)$ é igual à variação total da medida.

Esses teoremas serão de muita importância na prova do Teorema 4.1.8 que nos fornecerá um significado para as soluções de Variação Limitada de um problema cujo funcional energia contém um termo que é uma variação limitada de uma medida de Radon. Para provar esse teorema será necessário utilizar as Proposições 4.1.1 e 4.1.2.

Além disso, entenderemos o significado de um ponto crítico para o funcional de energia associado ao problema do operador 1-Laplaciano dado por $-\Delta u = f$ em Ω, onde Ω é limitado e $u \in BV(\Omega)$ e obteremos a equação de Euler-Lagrange que é satisfeita pelos pontos críticos do funcional de energia associado.

Os resultados e as demonstrações deste capítulo podem ser encontrados nas referências [1, 12, 17].

Para as seguintes seções precisaremos do seguinte conjunto,

$$L^\infty_q(\Omega) := \{z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) : Divz \in L^q(\Omega)\}, \text{ para } q \geq 1.$$

4.1 Resultados do espaço BV(Ω) e das medidas de Radon

Proposição 4.1.1 *Para cada $z \in L_1^\infty(\Omega)$ existe uma função $[z,\nu] \in L^\infty(\partial\Omega)$, chamada traço normal de z, tal que*

$$\|[z,\nu]\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \|z\|_{L^\infty(\Omega)},$$
$$\int_\Omega uDivzdx + \int_\Omega zDudx = \int_{\partial\Omega} [z,\nu]ud\mathcal{H}^{N-1}, \; para \; todo \; u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4.1}$$

Além disso, se $z \in L_q^\infty(\Omega)$, para algum $1 \leq q \leq \infty$, então

$$\int_\Omega uDivzdx + \int_\Omega zDudx = \int_{\partial\Omega} [z,\nu]u_{|\partial\Omega}d\mathcal{H}^{N-1}, \text{ para todo } u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^{q'}(\Omega). \tag{4.2}$$

Demonstração: Fixe $z \in L_1^\infty(\Omega)$ e defina a seguinte aplicação linear

$$\alpha(u) := \int_\Omega uDivzdx + \int_\Omega zDudx, \; \forall u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Desde que Ω tem fronteira Lipschitziana, escolhemos uma cobertura aberta $\{U_k\}_{k=0}^l$ de $\overline{\Omega}$ e $x_k \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ com

$$\overline{B_\epsilon(x+\epsilon x_k)} \subset \Omega, \; \forall x \in \Omega_k := U_k \cap \Omega \; e \; \forall \epsilon > 0 \text{ pequeno}.$$

Seja $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função regularizante, definimos

$$\rho_m^k(x) := m^n\rho(mx + x_k) \; e \; z_m^k := \rho_m^k * z \in C^\infty(\overline{\Omega}_k).$$

Então $supp\rho_m^k(x-\cdot) \subset \Omega$ para $x \in \Omega_k$ e para todo $\epsilon > 0$ pequeno. Pelo Teorema 5.0.7 do apêndice, decorre que

$$\rho_m^k * z =: z_m^k \longrightarrow z \text{ em } L^1(\Omega_k). \tag{4.3}$$

Além disso, dos Teoremas 5.0.8 e 2.16 obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} |Divz(x) - Divz_m^k(x)|dx &= \int_{\Omega_k} |Divz(x) - Div(\rho_m^k * z(x))|dx \\
&= \int_{\Omega_k} |Divz(x) - Div\rho_m^k * z(x)|dx \\
&= \int_{\Omega_k} |Divz(x) - \int_{\Omega} z(y)Div\rho_m^k(x-y)dy|dx \\
&= \int_{\Omega_k} |Divz(x) - \int_{\Omega} \rho_m^k(x-y)Divz(y)dy|dx \\
&= \int_{\Omega_k} |Divz(x) - \rho_m^k * Divz(x)|dx \\
&= \|Divz(x) - \rho_m^k * Divz(x)\|_{L^1(\Omega_k)}.
\end{aligned}
$$

Desde que $z \in L_1^\infty(\Omega)$, $Divz \in L^1(\Omega_k)$ segue do Teorema 5.0.7, que

$$
\int_{\Omega_k} |Divz(x) - Divz_m^k(x)|dx \longrightarrow 0, \text{ quando } m \longrightarrow \infty. \tag{4.4}
$$

Seja $\{\zeta^k\}_{k=0}^l \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ uma partição da unidade subordinada a $\{\Omega_k\}$. Assim, definindo

$$
z_m := \sum_{k=0}^{l} \zeta^k z_m^k \in C^\infty(\overline{\Omega}),
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\|z_m\|_{L^\infty(\Omega)} &= \|\sum_{k=0}^{l} \zeta^k z_m^k\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\sum_{k=0}^{l} \zeta^k \rho_m^k * z\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&= \inf\{C; \left|\sum_{k=0}^{l} \zeta^k \rho_m^k * z\right| \leq C \; q.t.p \text{ em } \Omega\}.
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Desde que

$$
\left|\sum_{k=0}^{l} \zeta^k \rho_m^k * z\right| \leq \sum_{k=0}^{l} |\zeta^k||\rho_m^k * z| \leq \|z\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{k=0}^{l} |\zeta^k|,
$$

em que foi usado

$$
|\rho_m^k * z| = \left|\int_{\Omega} \rho_m^k(x-y)z(y)dy\right| \leq \|z\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{4.6}
$$

para obtermos a última desigualdade, segue de (4.5) que

$$\|z_m\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|z\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Como podemos reescrever $z := \sum_{k=0}^{l} \zeta^k z$, temos que $Div(\zeta^k z) = zD\zeta^k + \zeta^k Divz$ e

$$\begin{aligned}
\|Divz_m - Divz\|_{L^1(\Omega)} &= \|z_m^k.D\zeta^k + \zeta^k.Divz_m^k - z.D\zeta^k - \zeta^k Divz\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq \|D\zeta^k(z_m^k - z)\|_{L^1(\Omega)} + \|\zeta^k(Divz_m^k - Divz)\|_{L^1(\Omega_k)} \\
&\leq k_1\|z_m^k - z\|_{L^1(\Omega_k)} + k_2\|Divz_m^k - Divz\|_{L^1(\Omega_k)},
\end{aligned}$$

o que implica de (4.3) e (4.4) que

$$Divz_m \longrightarrow Divz \text{ em } L^1(\Omega). \tag{4.7}$$

Além disso, segue de (4.3), que

$$\|z_m - z\|_{L^1(\Omega)} = \|\sum_{k=0}^{l} \zeta^k z_m^k - z\|_{L^1(\Omega)} \leq \|z_m^k - z\|_{L^1(\Omega)} \left|\sum_{k=0}^{l} \zeta^k\right| \longrightarrow 0. \tag{4.8}$$

Assim, segue de (4.7), (4.8) e do Teorema de Green generalizado 2.2.11 e da continuidade do operador traço

$$\begin{aligned}
|\alpha(u)| &= \lim_{m \longrightarrow \infty} \left| \int_\Omega uDivz_m dx + \int_\Omega z_m Dudx \right| \\
&= \lim_{m \longrightarrow \infty} \left| \int_{\partial\Omega} u_{|\partial\Omega} z_m \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} \right| \\
&\leq \|z\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_{|\partial\Omega}\|_{L^1(\partial\Omega)}, \ \forall u \in C^\infty(\overline{\Omega}).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Em particular, dados $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, concluímos que

$$\alpha(u - v) = 0 \text{ se } \ u_{|\partial\Omega} = v_{|\partial\Omega}, \ \mathcal{H}^{N-1} \text{ q.t.p em } \partial\Omega,$$

i.e., $\alpha(u)$ depende só de $u_{|\partial\Omega}$. Agora, defina a aplicação linear $\beta : Y \to \mathbb{R}$ por

$$\beta(u_{|\partial\Omega}) := \alpha(u), \ \forall u \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

onde $Y = \{u_{|\partial\Omega} : u \in C^\infty(\overline{\Omega})\}$. Assim, Y é um subespaço de $L^1(\partial\Omega)$ e, de (4.9), obtemos que

$$|\beta(u_{|\partial\Omega})| = |\alpha(u)| \leq \|z\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_{|\partial\Omega}\|_{L^1(\partial\Omega)}, \ \forall u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{4.10}$$

i.e., β é contínuo.

Portanto, pelo Teorema de Hahn-Banach existe uma extensão linear contínua de β ao espaço $L^1(\partial\Omega)$ e que preserva norma. Ou seja, de $\beta \in (L^1(\partial\Omega))'$ existe uma função $[z,\nu] \in L^\infty(\partial\Omega)$ tal que

$$\alpha(u) = \beta(u_{|\partial\Omega}) = \int_{\partial\Omega} [z,\nu]u_{|\partial\Omega} d\mathcal{H}^{N-1}, \ \forall u \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

o que nos leva a

$$\int_\Omega uDivzdx + \int_\Omega zDudx = \int_{\partial\Omega} [z,\nu]u_{|\partial\Omega} d\mathcal{H}^{N-1}, \text{ para todo } u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Isso mostra (4.1.2). Além disso, segue de (4.10), da preservação de normas que

$$\|[z,\nu]\|_\infty = \|\beta\|_{L^1(\partial\Omega)} = \|\alpha\|_\infty = \sup_{u \in C_c^\infty(\Omega)} \frac{|\alpha(u)|}{\|u_{|\partial\Omega}\|_{L^1(\partial\Omega)}} \leq \|z\|_{L^\infty(\Omega)}$$

e isso mostra (4.1.1).

Para finalizar a prova resta mostrar (4.2). Assuma que $z \in L_q^\infty(\Omega)$ e $u \in W^{1,1} \cap L^{q'}(\Omega)$ para algum $1 < q \leq \infty$. Então pela Proposição 5.1.11 existe uma sequência $(u_m) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } W^{1,1}(\Omega) \text{ e } u_m \longrightarrow u \text{ em } L^{q'}(\Omega), \tag{4.11}$$

então

$$\left| \int_\Omega u_m Divzdx + \int_\Omega uDivzdx \right| \leq \|u_m - u\|_{L^{q'}(\Omega)} \|Divz\|_{L^q(\Omega)} \to 0, \text{ quando m} \longrightarrow \infty \text{ e}$$

$$\left| \int_\Omega zDu_m + \int_\Omega zDu \right| \leq \|z\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u_m - \nabla u\|_{L^1(\Omega)} \to 0, \text{ quando m} \longrightarrow \infty.$$

Desde que o operador traço é contínuo em $W^{1,1}(\Omega)$, segue de (4.11) que

$$\left|\int_{\partial\Omega}[z,\nu]u_{m|\partial\Omega}d\mathcal{H}^{N-1}-\int_{\partial\Omega}[z,\nu]u_{|\partial\Omega}d\mathcal{H}^{N-1}\right|\leq\|[z,\nu]\|_{L^{\infty}(\partial\Omega)}\|u_{m|\partial\Omega}-u_{|\partial\Omega}\|_{L^{1}(\partial\Omega)}$$
$$\leq C\|z\|_{L^{\infty}(\Omega)}\|u_{m}-u\|_{W^{1,1}(\Omega)}\longrightarrow 0.$$

Usando isso, (4.1) e (4.11), obtemos

$$\int_{\Omega}uDivzdx+\int_{\Omega}zDudx=\int_{\partial\Omega}[z,\nu]u_{|\partial\Omega}d\mathcal{H}^{N-1},\ \text{para todo } u\in W^{1,1}(\Omega)\cap L^{q'}(\Omega).$$

Agora assuma que $q=1$ então $z\in L_{1}^{\infty}(\Omega)$ e $u\in W^{1,1}\cap L^{\infty}(\Omega)$. Pelo Teorema 5.1.11 obtemos que existe $(u_{m})_{m\geq 1}\subset C^{\infty}(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_{m}\longrightarrow u \text{ em } W^{1,1}(\Omega).$$

Assim, como $u_{m}\rightarrow u\in L^{1}(\Omega)$, então existe uma subsequência $(u_{m_{k}})$ e uma função $g\in L^{1}(\Omega)$ tal que

$$u_{m_{k}}(x)\longrightarrow u(x) \text{ q.t.p em } \Omega,$$
$$|u_{m_{k}}(x)|\leq g(x) \text{ q.t.p em } \Omega,$$

o que nos leva a

$$u_{m_{k}}(x)Divz(x)\longrightarrow u(x)Divz(x) \text{ q.t.p em } \Omega,$$
$$|u_{m_{k}}(x)Divz(x)|\leq|KDivz(x)| \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue seque que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\int_{\Omega}u_{m_{k}}Divz=\int_{\Omega}uDivz.$$

Também obtemos de $u_{m_{k}}\longrightarrow u$ em $W^{1,1}(\Omega)$ que

$$\left|\int_{\Omega}zDu_{m_{k}}+\int_{\Omega}zDu\right|\leq\|z\|_{L^{\infty}(\Omega)}\|\nabla u_{m_{k}}-\nabla u\|_{L^{1}(\Omega)}\rightarrow 0,\ \text{quando k}\longrightarrow\infty,$$

e da continuidade do operador traço em $W^{1,1}(\Omega)$ obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Omega}[z,\nu]u_{m|\partial\Omega}d\mathcal{H}^{N-1}-\int_{\partial\Omega}[z,\nu]u_{|\partial\Omega}d\mathcal{H}^{N-1}\right| &\leq \|[z,\nu]\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|u_{m|\partial\Omega}-u_{|\partial\Omega}\|_{L^1(\partial\Omega)}\\ &\leq C\|z\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_m-u\|_{W^{1,1}(\Omega)}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Então, para (u_m) em (4.1) segue que

$$\int_\Omega uDivzdx+\int_\Omega zDudx=\int_{\partial\Omega}[z,\nu]u_{|\partial\Omega}d\mathcal{H}^{N-1},\ \text{para todo } u\in W^{1,1}(\Omega),$$

onde a última igualdade é obtida. Isso finaliza a prova da Proposição. ■

Proposição 4.1.2 *Para cada $u\in BV(\Omega)\cap L^p(\Omega)$ com $1<p<\infty$ e $z\in L^\infty_{p'}(\Omega)$ existe uma medida de Radon $(z,Du)\in\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, tal que*

$$\int_\Omega uDivzdx+\int_\Omega d(z,Du)=\int_{\partial\Omega}[z,\nu]u_{|\partial\Omega}d\mathcal{H}^{N-1} \tag{4.12}$$

e

$$\langle(z,Du),\varphi\rangle=-\int_\Omega u\varphi Divzdx-\int_\Omega uzD\varphi dx,\ \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega).$$

Além disso, para cada aberto $\tilde{\Omega}\subset\Omega$, valem

$$\langle(z,Du),\varphi\rangle\leq\|\varphi\|_\infty\|z\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\int_{\tilde{\Omega}}|Du|dx,\ \forall\varphi\in C_c^\infty(\tilde{\Omega}) \tag{4.13}$$

e

$$\left|\int_{\tilde{\Omega}}d(z,Du)dx\right|\leq\int_{\tilde{\Omega}}|d(z,Du)|dx\leq\|z\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\int_{\tilde{\Omega}}|Du| \tag{4.14}$$

para todo conjunto Boreliano $\tilde{\Omega}\subset\Omega$.

Demonstração: Fixe $u\in BV(\Omega)\cap L^p(\Omega), z\in L^\infty_{p'}(\Omega)$ e defina a seguinte aplicação linear

$$\begin{aligned}(z,Du):C_c^\infty(\Omega)&\longrightarrow\mathbb{R}\\ \varphi&\longrightarrow\langle(z,Du),\varphi\rangle\end{aligned}$$

$$\langle(z,Du),\varphi\rangle:=-\int_\Omega u\varphi Divzdx-\int_\Omega uzD\varphi dx. \tag{4.15}$$

Além disso, observamos que para cada conjunto aberto $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ fixado, temos que $u|_{\tilde{\Omega}} \in BV(\tilde{\Omega})$. Pelo Teorema 2.2.5 podemos aproximar $u|_{\tilde{\Omega}}$ por uma sequência $(u_m)_{m\geq 1} \in C^{\infty}(\tilde{\Omega}) \cap BV(\tilde{\Omega})$, isso é,

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } L^1(\tilde{\Omega}) \ e \ \int_{\tilde{\Omega}} |Du_m| \longrightarrow \int_{\tilde{\Omega}} |Du|. \tag{4.16}$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tilde{\Omega}} u_m \varphi Divz dx + \int_{\tilde{\Omega}} u_m z D\varphi dx \right| &= \left| \int_{\tilde{\Omega}} \varphi z D u_m dx \right| \\ &\leq \|\varphi\|_{\infty} \|z\|_{L^{\infty}(\tilde{\Omega})} \int_{\tilde{\Omega}} |Du_m|, \text{ para } \varphi \in C_c^{\infty}(\tilde{\Omega}). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Consequentemente se tomarmos $u_m \in C^{\infty}(\tilde{\Omega})$ em (4.15) segue de (4.16) e (4.17) que

$$|\langle (z, Du), \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_{\infty} \|z\|_{L^{\infty}(\tilde{\Omega})} \int_{\tilde{\Omega}} |Du| dx, \ \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\tilde{\Omega})$$

e isso mostra (4.13).

Agora passando ao supremo sobre os $\varphi \in C_c^{\infty}(\tilde{\Omega})$ tal que $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$, segue da Observação 2.1.4 que

$$\left| \int_{\tilde{\Omega}} d(z, Du) dx \right| \leq \int_{\tilde{\Omega}} |d(z, Du)| dx \leq \|z\|_{L^{\infty}(\tilde{\Omega})} \int_{\tilde{\Omega}} |Du|, \forall \text{ conjunto Boreliano } \tilde{\Omega} \subset \Omega$$

o que mostra (4.14).

Resta mostrar que

$$\int_{\Omega} u Divz dx + \int_{\Omega} d(z, Du) dx = \int_{\partial\Omega} [z, \nu] u_{|_{\partial\Omega}} d\mathcal{H}^{N-1}.$$

De fato, para cada $\epsilon > 0$ dado, escolha um aberto $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ e $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tal que

$$|Du|(\partial\tilde{\Omega}) = 0, \ |Du|(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) < \epsilon, \ 0 \leq \varphi(x) \leq 1 \text{ em } \Omega \text{ e } \ \varphi(x) = 1 \text{ em } \tilde{\Omega}. \tag{4.18}$$

Além disso, segue da prova do Teorema 2.2.5, que existe uma sequência $(u_m) \in$

$C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ tal que

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } L^p(\Omega) \text{ e } |Du_m|(\Omega) \longrightarrow |Du|(\Omega) \tag{4.19}$$

e $|Du_m|(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \leq 3|Du|(\Omega \setminus \tilde{\Omega})$. Então de (4.14) segue que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega d(z, Du_m) - \int_\Omega d(z, Du)\right| &\leq \left|\int_\Omega d(z, Du_m)\right| + \left|\int_\Omega d(z, Du)\right| \\
&\leq |\langle (z, Du_m - Du), \varphi\rangle| + \int_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}} |d(z, Du_m)| \\
&+ \int_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}} |d(z, Du)| \\
&\leq |\langle (z, Du_m - Du), \varphi\rangle| + 4\|z\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \int_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}} |Du|.
\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de ϵ em (4.18) e das convergências em (4.19), segue da desigualdade anterior que

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \left|\int_\Omega d(z, Du_m) - \int_\Omega d(z, Du)\right| = 0. \tag{4.20}$$

Logo, de (4.14) obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega zDu_m - \int_\Omega d(z, Du)\right| &\leq \left|\int_\Omega zDu_m - \int_\Omega |d(z, Du_m)|\right| \\
&+ \left|\int_\Omega |d(z, Du_m) - \int_\Omega d(z, Du)\right| \\
&\leq 2\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |Du_m| + \left|\int_\Omega |d(z, Du_m) - \int_\Omega d(z, Du)\right|
\end{aligned}$$

e fazendo $m \longrightarrow \infty$ segue da hipótese (4.19) e pela igualdade anterior (4.20) que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\longrightarrow\infty} \left|\int_\Omega zDu_m - \int_\Omega d(z, Du)\right| &\leq 2\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |Du| \\
&= 2\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}} |Du| + \int_{\tilde{\Omega}} |Du|\right) \\
&\leq 2\|z\|_{L^\infty(\Omega)}\epsilon,
\end{aligned}$$

onde o termo $\int_{\tilde{\Omega}} |Du| = 0$ pois das hipóteses (4.18) temos que $\varphi(x) = 1$ em $\tilde{\Omega}$. Portanto, pela arbitrariedade de $\epsilon > 0$ concluímos que

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_\Omega zDu_m dx = \int_\Omega d(z, Du).$$

Note que $u_m \in W^{1,1}(\Omega)$ e pelo Teorema 2.2.11 temos que $u_{m_{|\partial\Omega}} \longrightarrow u_{|\partial\Omega}$ em $L^1(\partial\Omega)$. Assim, de (4.2) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}[z,\nu]u_{|\partial\Omega}d\mathcal{H}^{N-1} &= \lim_{m\longrightarrow\infty}\int_{\partial\Omega}[z,\nu]u_{m_{|\partial\Omega}}d\mathcal{H}^{N-1}\\ &= \lim_{m\longrightarrow\infty}\left(\int_\Omega u_m Divz dx + \int_\Omega zDu_m dx\right)\\ &= \int_\Omega uDivzdx + \int_\Omega (z, Du)dx.\end{aligned}$$

Isso finaliza a prova. ∎

Teorema 4.1.3 *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e limitado com fronteira Lipschitziana e $B \subset \mathbb{R}^N$ a bola unitária tal que $\overline{\Omega} \subset B$. Sejam $u \in BV(\Omega)$ e*

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & x \in \Omega,\\ 0 & x \in B \setminus \Omega.\end{cases}$$

Então $\bar{u} \in BV(B)$ e

$$D\bar{u} = Du - u_{|\partial\Omega}\nu\mathcal{H}^{N-1}_{|\partial\Omega},$$

onde $\nu(x)$ denota o vetor unitário exterior a Ω em $x \in \partial\Omega$.

Demonstração: Aplicando o Teorema 2.16, para cada $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_B \varphi D\bar{u}dx &= -\int_B \bar{u}Div\varphi dx + \int_{\partial B}\bar{u}_{|\partial\Omega}\varphi\nu d\mathcal{H}^{N-1}\\ &= -\int_\Omega uDiv\varphi dx = \int_\Omega \varphi Du dx - \int_{\partial\Omega}u_{|\partial\Omega}\varphi\nu d\mathcal{H}^{N-1}.\end{aligned}$$

Desde que u e $\bar{u} \in L^1(\Omega)$, segue que

$$D\bar{u} = Du - u_{|\partial\Omega}\nu\mathcal{H}^{N-1}_{|\partial\Omega},$$

no sentido distribucional. ∎

Observação 4.1.4 *Veja que pelo Teorema 2.1.3, identificamos $D\bar{u}$ como uma medida de Radon e portanto a variação total de $D\bar{u}$ é*

$$|D\bar{u}|(B) = |Du|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u_{|\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{4.21}$$

Definição 4.1.5 *Considere $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, onde X é o dual do espaço Y. Definimos a função conjugada de f sobre Y, com respeito da forma bilinear $\langle x, y\rangle, x \in X$ e $y \in Y$, por*

$$f^*(y) = \sup_{x\in X}(\langle x, y\rangle - f(x)),\ y \in Y, x \in X.$$

Teorema 4.1.6 *Seja E um espaço vetorial e $\varphi : E \longrightarrow (-\infty, \infty]$ convexa semicontínua inferiormente e $\varphi \not\equiv +\infty$. Então $\varphi^{**} = \varphi$.*

Demonstração: Ver [5], pág. 13.

Definição 4.1.7 *Seja E um espaço de Banach e $A \subset E$. Definimos a função indicador I_A por*

$$I_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A, \\ \infty & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

No que segue, com o objetivo de entender o significado de soluções para problemas envolvendo o 1-Laplaciano, definimos

$$E_1(u) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} & u \in BV(\Omega) \cap L^p(\Omega), \\ \infty & u \in L^p(\Omega) \setminus BV(\Omega). \end{cases}$$

$$E_2(u) := -\int_\Omega fudx, \quad E_3(u) := \alpha \int_\Omega |u-g|^r dx,\ \forall u \in L^p(\Omega),$$

$$G(u) := \int_\Omega |u-h|^q dx,\ \forall u \in L^p(\Omega).$$

Vamos também assumir as seguintes hipóteses:

(H_1) $f \in L^{p'}(\Omega),\ \ g \in L^r(\Omega),\ \ h \in BV(\Omega) \cap L^q(\Omega)$,

(H_2) $\frac{N}{N-1} \le p < \infty,\ \ 1 \le q,\ \ r \le p,\ \ \alpha \in \mathbb{R}.$

Teorema 4.1.8 *Sejam $u \in BV(\Omega)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com $\partial\Omega$ fronteira Lipschitziana. Então:*

(1) *O funcional E_1 é convexo, semicontínuo inferiormente e positivamente homogêneo de grau 1 em $L^p(\Omega)$. Além disso, $u^* \in \partial E_1(u)$ para $u \in L^p(\Omega)$ se e só se existe $z \in L(\Omega, \mathbb{R}^N)$ com*

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1, \ u^* = Divz \in L^{p'}(\Omega), \tag{4.22}$$

$$E_1(u) = \langle u^*, u\rangle = -\int_\Omega uDivzdx$$

Se $E_1(u) > 0$, então $\|z\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ em (4.22).

(2) *O funcional E_2 é continuamente diferenciável sobre $L^p(\Omega)$ com*

$$E_2'(u) = -f, \text{ para todo } u \in L^p(\Omega).$$

(3) *Para $q > 1$ o funcional G é convexo, Lipschitz localmente contínuo, e Gateaux diferenciável sobre $L^p(\Omega)$ com*

$$G'(u) = q|u-h|^{q-2}(u-h).$$

O subdiferencial é dado por

$$\partial G(u) = \{q|u-h|^{q-2}(u-h)\}, \text{ para todo } u \in L^p(\Omega).$$

Demonstração: Prova do (1). Defina o conjunto

$$M^* = \{v^* \in L^{p'}(\Omega) : v^* = -Divz, \ z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), \|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\}.$$

Afirmação 1: M^* é fechado.

De fato, consideremos uma sequência $\{v_n^*\} \subset M^*$ com $v_n^* \longrightarrow v^*$ em $L^{p'}(\Omega)$. Então existe $z_n \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|z_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ e $v_n^* = -Divz_n$. Como $z_n \in L^\infty(\Omega)$, então

$$\int_\Omega z_n Div\varphi dx \leq C\|\varphi\|_\infty, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Portanto, $z_n \in BV(\Omega)$. Pela versão generalizada da Fórmula de Green, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_n^* \varphi dx &= -\int_\Omega Div z_n \varphi dx \\ &= \int_\Omega z_n D\varphi dx - \int_{\partial\Omega} z_{n_{|\partial\Omega}} \varphi \nu d\mathcal{H}^{N-1}, \\ &= \int_\Omega z_n D\varphi dx, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Desde que $\{v_n^*\}$ é limitado em $L^\infty(\Omega)$, segue pelo Teorema 5.0.10, que

$$z_n \overset{*}{\rightharpoonup} z \text{ em } L^\infty(\Omega) \tag{4.24}$$

o que implica por (4.23), que

$$\int_\Omega v^* \varphi dx = \int_\Omega z D\varphi dx = -\int_\Omega Div z \varphi dx, \ \forall \in C_c^\infty(\Omega),$$

e, por Du Bois Raimond 5.0.6, $v^* = -Div z \in L^{p'}(\Omega)$. Além disso, segue de (4.24) que

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \le \liminf_{n \longrightarrow \infty} \|z_n\|_{L^\infty(\Omega)} \le 1,$$

obtendo que $v^* \in M^*$, i.e., M^* é fechado. No que segue mostraremos que $I_{M^*}^* = E_1$, onde I_{M^*} denota a função conjugada da função indicadora de M^*, ou seja,

$$I_{M^*}^*(v) = \sup_{v^* \in L^{p'}(\Omega)} (\langle v^*, v\rangle - I_{M^*}(v^*)) = \sup_{v^* \in M^*} \langle v^*, v\rangle, \text{ para todo } v \in L^p(\Omega).$$

Para cada $v^* \in M^*, v \in L^p(\Omega)$ segue das Proposições 4.1.1 e 4.1.2 que

$$\begin{aligned}\langle v^*, v\rangle &= \int_\Omega v^* v dx = -\int_\Omega v Div z dx \\ &= \int_\Omega d(z, Dv) - \int_{\partial\Omega} [z,\nu] v_{|\partial\Omega} d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\le \left| \int_\Omega d(z, Dv) - \int_{\partial\Omega} [z,\nu] v_{|\partial\Omega} d\mathcal{H}^{N-1} \right| \\ &\le \left| \int_\Omega d(z, Dv) \right| + \left| \int_{\partial\Omega} [z,\nu] v_{|\partial\Omega} d\mathcal{H}^{N-1} \right| \\ &\le \|z_n\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |Dv| + \int_{\partial\Omega} |v_{|\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1} \right) \le E_1(v), \end{aligned}$$

isso é,

$$I_{M^*}^*(v) \leq E_1(v), \ \forall v \in L^p(\Omega). \tag{4.25}$$

Por outro lado, segue pela Observação 4.1.4, que

$$E_1(v) = \int_\Omega |Dv| + \int_{\partial\Omega} |v_{|\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1} = |D\bar{v}|(B) = \int_B |D\bar{v}|,$$

para todo $v \in L^p(\Omega)$. Assim

$$\begin{aligned} E_1(v) = \int_B |D\bar{v}| &= \sup\left\{\int_B \bar{v} Divz dx : z \in C_c^\infty(B, \mathbb{R}^N), \|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\int_\Omega v Divz dx : z \in C_c^\infty(B, \mathbb{R}^N), \|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int_\Omega v Divz dx : z \in L^\infty(\Omega), \|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1, Divz \in L^{p'}(\Omega)\right\} \\ &= \sup\left\{\int_\Omega v^* v dx : v^* \in M^*\right\} \\ &= I_{M^*}^*(v), \ \forall v \in L^p(\Omega). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Portanto de (4.25) e (4.26), obtemos

$$I_{M^*}^*(v) = E_1(v), \ \forall v \in L^p(\Omega). \tag{4.27}$$

Desde que M^* é convexo, segue de (4.27) e do Teorema 4.1.6 que

$$I_{M^*} = (I_{M^*}^*)^* = E_1^*. \tag{4.28}$$

Afirmação 3: $v^* \in \partial E_1(v) \Longleftrightarrow E_1(v) + E_1^*(v^*) = E_1(v) + I_{M^*} = \langle v^*, v\rangle$.
De fato, seja $v^* \in \partial E_1(v)$, então

$$\begin{aligned} v^* \in \partial E_1(v) &\Longleftrightarrow E_1(u) - E_1(v) \geq \langle v^*, u - v\rangle, \forall u \in L^p(\Omega) \\ &\Longleftrightarrow \langle v^*, u\rangle - E_1(u) \leq \langle v^*, v\rangle - E_1(v), \forall u \in L^p(\Omega) \\ &\Longleftrightarrow \sup_{v^* \in L^p(\Omega)} \{\langle v^*, u\rangle - E_1(u)\} \leq \langle v^*, v\rangle - E_1(v) \\ &\Longleftrightarrow E_1^*(v^*) \leq \langle v^*, v\rangle - E_1(v). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Por outro lado, de (4.28) decorre que

$$
\begin{aligned}
I^*_{M^*}(v) &= \sup_{v^*\in L^{p'}(\Omega)} \{\langle v^*, v\rangle - I_{M^*}(v^*)\} = \sup_{v^*\in L^{p'}(\Omega)} \{\langle v^*, v\rangle - E_1^*(v^*)\} \\
&\geq \langle v^*, v\rangle - E_1^*(v^*),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
E_1^*(v^*) \geq \langle v^*, v\rangle - I^*_{M^*}(v) = \langle v^*, v\rangle - E_1(v). \tag{4.30}
$$

Então de (4.29) e (4.30), obtemos

$$
v^* \in \partial E_1(v) \Longleftrightarrow E_1(v) + E_1^*(v^*) = E_1(v) + I_{M^*}(v^*) = \langle v^*, v\rangle.
$$

Portanto,

$$
v^* \in \partial E_1(v) \Longleftrightarrow E_1(v) = \langle v^*, v\rangle.
$$

Prova do (2).

Calculando a derivada de E_2 no ponto $u \in L^p(\Omega)$, na direção $h \in L^p(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
\langle E_2'(u), h\rangle &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{E_2(u+th) - E_2(u)}{t} \\
&= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{-\int_\Omega f(u+th)dx + \int_\Omega fudx}{t} = -\int_\Omega fhdx.
\end{aligned}
$$

Assim, $\langle E_2'(u), h\rangle = -\int_\Omega fhdx$ existe para todo $h \in L^p(\Omega)$ e a função

$$
\begin{aligned}
E_2'(u) : L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
h &\longrightarrow \langle E_2'(u), h\rangle = -\int_\Omega fhdx
\end{aligned}
$$

é linear pela linearidade da integral e contínua pois

$$
|\langle E_2'(u), h\rangle| = \left|\int_\Omega fhdx\right| \leq \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\|h\|_{L^p(\Omega)} = C\|h\|_{L^p(\Omega)}.
$$

Portanto,

$$
E_2'(u) = -f, \ \forall u \in L^p(\Omega).
$$

Prova do (3).

Mostremos que G é convexo. De fato, definamos

$$F(t) = \int_o^t \varphi(\tau)d\tau,$$

onde $\varphi(t) = qt^{q-1}$. Isto é, $G(u) = F(\|u-h\|_{L^q(\Omega)})$. Mostrar que G é convexa, é equivalente a provar que F é convexa. Para $0 \leq s < t$, seja $\eta = \lambda s + (1-\lambda)t$ com $s, t \in [0,1]$. Então

$$\begin{aligned} F(t) - F(\eta) &= \int_\eta^t \varphi(\tau)d\tau \geq \int_\eta^t \varphi(\eta)d\tau = (t-\eta)\varphi(\eta), \\ F(\eta) - F(s) &= \int_s^\eta \varphi(\tau)d\tau \leq \int_s^\eta \varphi(\eta)d\tau = (\eta - s)\varphi(\eta). \end{aligned}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(F(t) - F(\eta)) &\geq (1-\lambda)(t-\eta)\varphi(\eta), \\ -\lambda(F(\eta) - F(s)) &\geq -\lambda(\eta - s)\varphi(\eta), \end{aligned}$$

somando estas desigualdades, obtemos

$$\lambda F(s) + (1-\lambda)F(t) - F(\eta) \geq (\lambda s + (1-\lambda)t - \eta)\varphi(\eta) \geq 0.$$

Isto é,

$$F(\lambda s + (1-\lambda)t - \eta) \leq \lambda F(s) + (1-\lambda)F(t),$$

o que prova que F (e portanto G) é convexo. Agora calculemos a derivada de Gateaux. Seja $w \in L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle G(u), w\rangle &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{G(u+tw) - G(u)}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\int_\Omega |u-h+tw|^q dx - \int_\Omega |u-h|^q dx}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \int_\Omega \frac{1}{t}(|u-h+tw|^q - |u-h|^q)dx. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Para $t \in (0,1)$ definamos uma função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(s) = |stw(x) + u(x) - h(x)|^q.$$

Lembrando que $|y| = ySign(y)$ obtemos

$$g'(s) = q|stw(x) + u(x) - h(x)|^{q-1}Sign(stw(x) + u(x) - h(x))tw(x) \tag{4.32}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{qt}g(s)|_0^1 = \int_0^1 |stw(x) + u(x) - h(x)|^{q-1}Sign(stw(x) + u(x) - h(x))w(x)ds.$$

Assim,

$$\frac{g(1) - g(0)}{qt} = \int_0^1 |stw(x) + u(x) - h(x)|^{q-1}Sign(stw(x) + u(x) - h(x))w(x)ds,$$

ou seja,

$$\frac{|u - h + tw|^q - |u - h|^q}{qt} = \int_0^1 |stw + u - h|^{q-1}Sign(stw + u - h)hds. \tag{4.33}$$

Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\xi)$, isso é,

$$\begin{aligned}||u(x) - h(x) + tw(x)|^q - |u(x) - h(x)|^q| &= |q|\xi tw(x) + u(x) - h(x)|^{q-1}Sign(\xi tw(x) \\ &\quad + u(x) - h(x))tw(x)| \\ &= qt|\xi tw(x) + u(x) - h(x)|^{q-1}.|w(x)| \\ &\leq qt||u(x) - h(x)| + |w(x)||^{q-1}|w(x)|.\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\frac{|u(x) - h(x) + tw(x)|^q - |u(x) - h(x)|^q}{t} \leq \underbrace{q||u(x) - h(x)| + |w(x)||^{q-1}|w(x)|}_{F(x)}.$$

Afirmação: $F(x) \in L^1(\Omega)$. De fato, da desigualdade de Holder, decorre que

$$\begin{aligned}\int_\Omega q(|u-h|+|w|)^{q-1}|w|dx &\leq q\left(\int_\Omega (|u-h|+|w|)^{(q-1)p}dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |w|^q dx\right)^{1/q}\\ &= q\left(\int_\Omega (|u-h|+|w|)^{q}dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |w|^q dx\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 5.1 obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega q(|u-h|+|w|)^{q-1}|w|dx &\leq q\left(\int_\Omega 2^{q-1}(|u-h|^q+|w|^q)dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |w(x)|^q dx\right)^{1/q}\\ &= 2^{\frac{q-1}{p}}q\left(\|u-h\|^q_{L^q(\Omega)}+\|w\|^q_{L^q(\Omega)}\right)^{1/p}\|w\|_{L^q(\Omega)}.\end{aligned}$$

Veja que para $1 \leq q \leq p$, $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, então $u+h \in L^q(\Omega)$. Assim, a função $q(|u-h(\cdot)|+|w(\cdot)|)^{q-1}|w(\cdot)|$ está em $L^1(\Omega)$. Portanto, temos todas as hipóteses para aplicar o Teorema da Convergência Dominada em (4.31), logo de (4.33) obtemos

$$\begin{aligned}\langle G'(u),w\rangle &= \int_\Omega \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{|u-h+tw|^q-|u-h|^q}{t}dx\\ &= q\int_\Omega \lim_{t\longrightarrow 0}\int_0^1 |stw+u-h|^{q-1}Sign(stw+u-h)hdsdx\\ &= q\int_\Omega w(x)\lim_{t\longrightarrow 0}\int_0^1 |stw+u-h|^{q-1}Sign(stw+u-h)dsdx\\ &= q\int_\Omega w(x)|u-h|^{q-1}Sign(u-h)dx\\ &= q\int_\Omega w(x)|u-h|^{q-2}(u-h)dx, \forall u\in L^p(\Omega), w\in L^q(\Omega),\end{aligned}$$

isso é,

$$G'(u) = q|u-h|^{q-2}(u-h), \forall u \in L^p(\Omega).$$

Como G é Gateaux diferenciável e convexo, pelo Teorema 3.1.4, obtemos que seu subdiferencial é

$$\partial G(u) = \{q|u-h|^{q-2}(u-h)\}.$$

Mostremos ainda que o operador G é localmente Lipschitz contínuo, isso é,

$$|G(u)-G(v)| \leq K\|u-v\|_{L^q(\Omega)},\ \forall u,v \in L^q(\Omega),$$

onde,

$$
\begin{aligned}
|G(u)-G(v)| &= \left| \int_\Omega |u-h|^q dx - \int_\Omega |v-h|^q dx \right| \\
&\leq \int_\Omega ||u-h|^q - |v-h|^q| dx. \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

De fato, se $1 \leq q \leq p$, então $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Definamos uma função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(s) = |s(u-h) + (1-s)(v-h)|^q.$$

Lembrando que $|y| = ySgn(y)$, obtemos

$$g'(s) = q|s(u-h) + (1-s)(v-h)|^{q-1} Sgn(s(u-h) + (1-s)(v-h))(u-v)$$

e pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\xi)$, isso é,

$$|u-h|^q - |v-h|^q = q|s(u-h) + (1-s)(v-h)|^{q-1} Sign(\epsilon(u-h) + (1-\epsilon)(v-h))(u-v).$$

Como $\epsilon \in (0,1)$ segue que

$$
\begin{aligned}
||u-h|^q - |v-h|^q| &= q||\epsilon(u-h) + (1-\epsilon)(v-h)|^{q-1}(u-v)| \\
&\leq q||u-h| + |v-h||^{q-1}|u-v| \\
&\leq q2^{q-1}(|u-h|^{q-1} + |v-h|^{q-1})|u-v|. \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

Note que, da desigualdade de Holder, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (|u-h|^{q-1}|u-v|) dx &\leq \left(\int_\Omega |u-h|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |u-v|^q \right)^{1/q} \\
&= \|u-h\|^{q/p}_{L^q(\Omega)} \|u-v\|_{L^q(\Omega)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (|v-h|^{q-1}|u-v|) dx &\leq \left(\int_\Omega |v-h|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |u-v|^q \right)^{1/q} \\
&= \|v-h\|^{q/p}_{L^q(\Omega)} \|u-v\|_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Integrando em (4.35) e das desigualdades anteriores decorre que

$$\int_\Omega ||u-h|^q - |v-h|^q|dx \leq q2^{q-1}(\|u-h\|^{q/p}_{L^q(\Omega)} + \|v-h\|^{q/p}_{L^q(\Omega)})\|u-v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Das hipóteses dadas temos que u, v e $h \in L^q(\Omega)$, logo

$$\int_\Omega ||u-h|^q - |v-h|^q|dx \leq K\|u-v\|_{L^q(\Omega)}. \tag{4.36}$$

Assim de (4.34) e (4.36) concluímos a prova.

Por outra parte, claramente podemos fazer o mesmo procedimento para o funcional

$$E_3(u) := \alpha \int_\Omega |u-h|^r dx, \ \forall u \in L^p(\Omega).$$

Lembremos que pelo Teorema 3.3.2, temos que

$$\partial(\alpha F)(u) = \alpha \partial F(u).$$

Concluímos assim que

$$\partial(\alpha E_3)(u) = \alpha\{r|u-h|^{r-2}(u-h)\}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

■

4.2 Problema de torção

Nesta seção, motivados pelo artigo de Bernand Kawhol [17], vamos estabelecer as condições necessárias para que um minimizador do funcional de energia associado ao problema (4.37), definido sobre $BV(\Omega)$, satisfaça

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.37}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $f \in L^{p'}(\Omega)$ com $\frac{N}{N-1} \leq p < \infty$ e o operador diferencial 1-Laplaciano é definido como $\Delta_1 u = Div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$. Dessa maneira, o objetivo é entender o significado de uma solução de variação limitada para o funcional de energia associado ao problema (4.37).

4.2.1 Funcional de energia

Nesta seção, vamos definir o funcional de energia associado ao problema de torção (4.37). Para isso, construiremos o funcional de energia associado ao seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= 1 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $-\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ com $p \in (1, \infty)$. Para abordar esta seção, o espaço $BV(\Omega)$ estará munido com a seguinte norma:

$$|||u|||_{BV} = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

que é equivalente a $\|\cdot\|_{BV}$.

Teorema 4.2.1 *As normas $|||\cdot|||_{BV(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{BV}$ são equivalentes.*

Demonstração: Do Teorema 2.2.12 obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega |Du| &\leq C_1 \left(\int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right) + \int_\Omega |Du| \\ &\leq (C_1 + 1)|||u|||_{BV(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Teorema do Operador Traço 2.2.11, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |||u|||_{BV(\Omega)} = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} &\leq \int_\Omega |Du| + C\|u\|_{BV(\Omega)} \\ &\leq (1 + C)\|u\|_{BV(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto, das desigualdades obtemos que

$$\frac{1}{(C_1 + 1)} \|u\|_{BV(\Omega)} \leq |||u|||_{BV(\Omega)} \leq (1 + C)\|u\|_{BV(\Omega)}, \text{ para todo } u \in BV(\Omega).$$

∎

Assim, os resultados obtidos para o espaço $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)})$ no Capítulo 2 são válidos para o espaço $(BV(\Omega), |||\cdot|||_{BV(\Omega)})$.

Com o objetivo de obter o funcional energia associado ao problema de torção (4.37), definamos o conjunto de perímetro finito.

Definição 4.2.2 (Conjuntos de perímetro finito) *Considere $E \subset \Omega$ um conjunto mensurável. Definimos o perímetro de E em Ω, denotado por $P(E,\Omega)$, como a variação total da função caraterística χ_E em Ω, ou seja,*

$$P(E,\Omega) := \sup\left\{\int_E Div\varphi dx : \varphi \in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\}.$$

Dizemos que E é um conjunto com perímetro finito em Ω se $P(E,\Omega) < \infty$.

Teorema 4.2.3 *Seja u uma função localmente integrável sobre Ω ($u \in L^1_{loc}(\Omega)$) e $E_t = \{x \in \Omega : u(x) > t\}$. Então*

$$\int_\Omega |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(E_t,\Omega) dt.$$

Demonstração: Ver [13], pág. 219.

Teorema 4.2.4 *Para cada subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, temos*

$$|u|_{BV(\Omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} P(E_t,\Omega) dt.$$

Em particular, se $u \in BV(\Omega)$, então o conjunto $E_t = \{x \in \Omega : u(x) > t\}$ tem perímetro finito em Ω. Além disso,

$$|Du|(B) = \int_{-\infty}^{\infty} |D\chi_{E_t}|(B) dt \;\; e \;\; Du(B) = \int_{-\infty}^{\infty} D\chi_{E_t}(B) dt,$$

para todo conjunto Boreliano $B \subseteq \Omega$.

Demonstração: Ver [2], pág. 145.

Agora vejamos um fato muito importante antes da construção do funcional de energia associado ao problema (4.37). Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= 1 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.38}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $-\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ com $p \in (1, \infty)$. A função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é chamada solução fraca de (4.38) se e só se

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \varphi dx, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Portanto, o funcional de energia associado ao problema (4.38) é

$$J_p(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega u dx.$$

Para $p \in (1, \infty)$ esse funcional está bem definido. Para o caso $p = 1$, se tentarmos minimizar sobre $W_0^{1,1}(\Omega)$, existem problemas com a existência de uma solução em $W_0^{1,1}(\Omega)$, pois existem sequências limitadas em $W_0^{1,1}(\Omega)$, que convergem na topologia de $L^1(\Omega)$ para uma função, a qual não pertence ao espaço $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Uma maneira de superar essa dificuldade é trabalhar no espaço $BV(\Omega)$. Nesse caso, pelo Teorema 4.2.3, J_1 pode ser estendido para o espaço $BV(\Omega)$ como

$$J_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (P(E_t, \Omega) - A(E_t))dt, \tag{4.39}$$

para $0 \leq u \in BV(\Omega)$, onde:

i) $E_t = \{x \in \Omega : u(x) > t\}$ é o conjunto de níveis de $u \in BV(\Omega)$,

ii) $P(E_t, \Omega)$ denota o perímetro de E_t em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,

iii) $A(E_t)$ denota área ou volume, isso é, a medida de Lebesgue N-dimensional de E_t.

Impondo as condições de fronteira, considerando o termo $\int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1}$, onde $\mathcal{H}^{N-1}$ é a medida de Hausdorff $(N-1)$-dimensional. Pelo Teorema 4.2.4 pode se reescrever (4.39) como

$$J_1(u) = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega u dx.$$

Portanto, pelos argumentos anteriores, estamos em condições de definir o funcional de energia associado ao problema (4.37), o qual seria $I = \tilde{\psi} - \Phi$ definido em $BV(\Omega)$ com

$$\tilde{\psi}(u) = \int_\Omega |Du| \text{ e } \Phi(u) = \int_\Omega f u dx.$$

Mas, observamos que o problema de torção (4.37) possui condição de fronteira de Dirichlet homogênea. Assim, impondo essa condição consideremos o funcional $I = \psi - \Phi$ definido em $BV(\Omega)$ como

$$\psi(u) := \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

isso é,

$$I(u) = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega f u dx. \tag{4.40}$$

4.2.2 Ponto crítico

Baseado na teoria de subdiferenciais [7, 9, 23] pode se definir um ponto crítico para o funcional de energia associado ao problema de torção.

Definição 4.2.5 (Ponto crítico) *Considere $I = \psi - \Phi$, onde $\Phi \in C^1(BV(\Omega))$ e $\psi : BV(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funcional convexo localmente Lipschitz. Dizemos que um ponto crítico é uma função $u \in BV(\Omega)$ tal que $0 \in \partial I(u)$, ou equivalentemente*

$$\psi(v) - \psi(u) \geq \langle \Phi'(u), v - u \rangle, \ \forall v \in BV(\Omega).$$

Observação 4.2.6 *Da definição anterior temos*

$$\begin{aligned} 0 \in \partial I(u) &\Longleftrightarrow (\psi(v) - \Phi(v)) - (\psi(u) - \Phi(u)) \geq 0, \forall v \in BV(\Omega) \\ &\Longleftrightarrow \psi(v) - \psi(u) \geq \Phi(v) - \Phi(u), \forall v \in BV(\Omega). \end{aligned}$$

Logo, como $\Phi \in C^1(BV(\Omega))$ e pela convexidade da função ψ, temos que

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(u), v - u \rangle &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\Phi(u + t(v - u)) - \Phi(u)}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\Phi((1 - t)u + tv) - \Phi(u)}{t} \\ &\leq \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\psi((1 - t)u + tv) - \psi(u)}{t} \\ &\leq \psi(v) - \psi(u), \forall v \in BV(\Omega). \end{aligned}$$

Assim, a desigualdade anterior é obtida.

Proposição 4.2.7 *Seja $I = \psi - \Phi$ um funcional sobre $BV(\Omega)$, onde $\Phi \in C^1(BV(\Omega), \mathbb{R})$ e $\psi : BV(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa e semicontínua inferiormente. Então, todo mínimo local é um ponto crítico de I.*

Demonstração: Seja u um mínimo local de I, isso é, $I(u) \leq I(v)$ para toda vizinhança de u. Dado $t > 0$ suficientemente pequeno, da convexidade da função ψ obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq & I((1-t)u + tv) - I(u) \\ & = \psi((1-t)u + tv) - \Phi(u + t(v-u)) - (\psi(u) - \Phi(u)) \\ & \leq t(\psi(v) - \psi(u)) - (\Phi(u + t(v-u)) - \Phi(u)). \end{aligned}$$

Assim, dividindo por t e fazendo $t \longrightarrow 0$ obtemos

$$\psi(v) - \psi(u) \geq \langle \Phi'(u), v - u \rangle, \ \forall v \in BV(\Omega).$$

■

Em particular, para o funcional (4.40), $u \in BV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ é ponto critico se e só se

$$\psi(v) - \psi(u) \geq \langle \Phi'(u), v - u \rangle, \ \forall v \in BV(\Omega).$$

Assim, estamos em condições de definir uma solução de variação limitada para o problema (4.37).

Definição 4.2.8 (solução de variação limitada) *Dizemos que uma função $u \in BV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ é solução de variação limitada para o problema (4.37) se*

$$|||v|||_{BV} - |||u|||_{BV} \geq \int_\Omega f(v-u)dx, \ \forall v \in BV(\Omega) \cap L^p(\Omega).$$

Teorema 4.2.9 *Seja $u \in BV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ um minimizador do problema (4.37). Então:*

$$\begin{cases} \exists\, z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } \|z\|_\infty \leq 1, Divz \in L^{p'}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} = -\int_\Omega uDivzdx, \\ -Divz = f \text{ q.t.p em } \Omega, \end{cases} \tag{4.41}$$

onde $\frac{N}{N-1} \leq p < \infty$.

4.2.3 Equação de Euler-Lagrange

Mostraremos que os pontos críticos do funcional de energia (4.40) satisfazem uma versão de (4.37) na qual aparece um campo vetorial $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ que está bem definido e que coincide com $\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$ nos pontos onde $\nabla u \neq 0$. Por essas razões e com o objetivo de aplicar o Teorema 4.1.8, estendemos os funcionais definidos em $BV(\Omega)$ para $L^p(\Omega)$ da seguinte maneira

$$\overline{\psi}(u) = \begin{cases} \psi(u) & \text{se } u \in BV(\Omega) \cap L^p(\Omega), \\ \infty & \text{se } u \in L^p(\Omega) \setminus BV(\Omega), \end{cases}$$

$$\overline{\Phi}(u) = \int_\Omega f u dx,$$

onde $\overline{I}(u) = \overline{\psi}(u) - \overline{\Phi}(u)$. Dessa forma, temos que $\overline{\Phi} \in C^1(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ e $\overline{\psi}$ é convexa e semicontínua inferiormente. Assim, o subdiferencial $\partial \overline{I}(u)$ está bem definido. O seguinte teorema nos dá uma condição necessária para que uma função seja ponto crítico.

Teorema 4.2.10 *Seja $u \in BV(\Omega)$. Se $0 \in \partial I(u)$ então $0 \in \partial \overline{I}(u)$.*

Demonstração: Da hipótese temos que

$$\psi(v) - \psi(u) \geq \langle \Phi'(u), v - u \rangle, \ \forall v \in BV(\Omega). \tag{4.42}$$

Mostraremos que

$$0 \in \partial \overline{I}(u) \Longleftrightarrow \overline{\psi}(v) - \overline{\psi}(u) \geq \langle \overline{\Phi}'(u), v - u \rangle, \ \forall v \in L^p(\Omega).$$

Caso 1: se $v \in BV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ obtemos de (4.42) que

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(v) - \overline{\psi}(u) = \psi(v) - \psi(u) &\geq \langle \Phi'(u), v - u \rangle \\ &= \int_\Omega f(v-u) dx = \langle \overline{\Phi}'(u), v - u \rangle, \ \forall v \in L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Caso 2: se $v \in L^p(\Omega) \setminus BV(\Omega)$ segue que $\overline{\psi}(v) = +\infty$ e, como $u \in BV(\Omega)$, obtemos que

$$\overline{\psi}(v) - \overline{\psi}(u) = +\infty \geq \langle \Phi'(u), v - u \rangle,$$

isto é,

$$\overline{\psi}(v) - \overline{\psi}(u) \geq \langle \overline{\Phi}'(u), v - u \rangle \ \forall v \in L^p(\Omega).$$

Portanto, concluímos que $0 \in \partial \overline{I}(u)$. ■

Provemos agora o Teorema 4.2.9. Suponha que $u \in BV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ é um minimizador do problema de torção (4.37). Logo, pela Proposição 4.2.7, obtemos que u é ponto crítico do funcional de energia $\overline{I} := \psi - \Phi$ que, por sua vez, é solução de variação limitada, ou seja,

$$|||v|||_{BV(\Omega)} - |||u|||_{BV(\Omega)} \geq \int_\Omega f(v-u)dx, \ \forall v \in BV(\Omega).$$

Pelo Teorema 4.2.10, se $0 \in \partial I(u)$ então $0 \in \partial \overline{I}(u)$ e da convexidade de $\overline{\psi}$ e $\overline{\Phi} \in C^1(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ segue que $\overline{\Phi}'(u) \in \partial \overline{\psi}(u)$. Assim, da definição de subdiferencial obtemos

$$\exists z^* \in (L^p(\Omega))^* = L^{p'}(\Omega) \text{ tal que } z^* \in \partial \overline{\psi}(u) \text{ e } \overline{\Phi}'(u) = z^*. \tag{4.43}$$

Logo, pelo Teorema 4.1.8, existe $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|z\|_\infty \leq 1$ satisfazendo

$$\begin{aligned} z^* &= -Divz \in (L^p(\Omega))^* = L^{p'}(\Omega), \\ \psi(u) &= \langle z^*, u \rangle = -\int_\Omega uDivzdx. \end{aligned} \tag{4.44}$$

De (4.43) e (4.44) obtemos que

$$-\int_\Omega vDivzdx = \langle z^*, v \rangle = \langle \overline{\Phi}'(u), v \rangle = \int_\Omega fvdx,$$

isto é,

$$\int_\Omega (f + Divz)vdx = 0, \forall v \in BV(\Omega).$$

Portanto,

$$-Divz = f \text{ q.t.p em } \Omega. \tag{4.45}$$

De (4.44) e (4.45), conclui-se que

$$\begin{cases} \exists\, z \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } \|z\|_{\infty} \leq 1, Divz \in L^{p'}(\Omega) \\ -\displaystyle\int_{\Omega} uDivzdx = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1}, \\ -Divz = f \text{ q.t.p em } \Omega, \end{cases}$$

onde a última equação é chamada Equação de Euler-Lagrange.

Capítulo 5

APÊNDICE

Lema 5.1 *Se* $1 \leq r < \infty$ *e* $a \geq 0$*,* $b \geq 0$*, então* $(a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r + b^r)$*.*

Teorema 5.0.1 *Seja* $F \subset E$ *subespaço fechado. Se* E *é reflexivo, então* F *é reflexivo.*

Demonstração: Ver [5], pág. 70.

Teorema 5.0.2 *Seja* E *um espaço de Banach. Suponha que existe uma família* $(O_i)_{i \in I}$ *tal que*

$i)$ *para cada* $i \in I$*,* O_i *é um subconjunto não vazio de* E*,*

$ii)$ $O_i \cap O_j = \varnothing$ *se* $i \neq j$*,*

$iii)$ I *não é enumerável.*

Então E *não é separável.*

Demonstração: Ver [5], pág. 103.

Teorema 5.0.3 *Seja* E *um espaço de Banach. Dados* $A, B \subset E^*$ *conjuntos convexos tal que* $A \cap B = \varnothing$*,* A *fechado em* $\sigma(E^*, E)$ *e* B *compacto em* $\sigma(E^*, E)$*. Então existem* $x_0 \in E,\ x_0 \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$H = \{f \in E^* : \langle f, x_0 \rangle = \alpha\}$$

separa A e B *estritamente, isto é*

$$\langle f, x_0 \rangle \leq \alpha - \epsilon,\ \forall f \in A,$$
$$\langle f, x_0 \rangle \geq \alpha + \epsilon,\ \forall f \in B.$$

Demonstração: Ver [5].

Corolário 5.0.4 *Seja E um espaço de Banach. Então para cada $x \in E$ temos*

$$\begin{aligned}\|x\|_{E^*} &= \sup\{|\langle f, x\rangle| : f \in E^* \text{ e } \|f\| \leq 1\} \\ &= \max\{|\langle f, x\rangle| : f \in E^* \text{ e } \|f\| \leq 1\}.\end{aligned}$$

Demonstração: Ver [5], pág. 4.

Proposição 5.0.5 *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Então $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < +\infty$.*

Demonstração: Ver [5], pág. 109.

Lema 5.0.6 *(Du Bois Raymond) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Então $u = 0$ q.t.p em Ω.

Demonstração: Ver [5], pág. 110.

Teorema 5.0.7 *Seja $f \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$(\rho_n * f) \longrightarrow f \text{ em } L^p(\Omega). \tag{5.1}$$

Demonstração: Ver [5], pág. 109.

Teorema 5.0.8 *Sejam $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N),\ k \geq 1$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Então $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ e*

$$D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g, \ \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k. \tag{5.2}$$

Em particular, se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Ver [5], pág. 107.

Proposição 5.0.9 *Seja (f_n) uma sequência em E^*. Então*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } \sigma(E^*, E) \Longleftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \ \forall x \in E.$$

Demonstração: Ver [5], pág. 63.

Teorema 5.0.10 *Seja E um espaço de Banach separável e $\{f_n\}$ uma sequência limitada em E^*. Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge na topologia $\sigma(E^*, E)$.*

Demonstração: Ver [5], pág. 75.

Teorema 5.0.11 *Seja E um espaço de Banach separável. Então B_{E^*} é metrizável na topologia $\sigma(E^*, E)$. Reciprocamente, se B_{E^*} é metrizável em $\sigma(E^*, E)$ então E é separável.*

Demonstração: Ver [5], pág. 78.

5.1 Propriedades dos espaços de Sobolev

A principal referência utilizada neste capítulo é : Brezis [5] e Lawrence [11].

Definição 5.1.1 *Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ um número não negativo. Dizemos que um multi-índice α de ordem k é uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tal que*

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Além disso o número α acima é chamado ordem do multi-índice α, denotaremos

$$D^\alpha := \frac{\partial^k}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}},$$

se $|\alpha| \geq 1$.

Agora definamos a derivada fraca de uma função p-integrável.

Definição 5.1.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, α um multi-índice e $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que g é a α-ésima derivada fraca de f em Ω e escrevemos por $D^\alpha f = g$ se*

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g \varphi dx, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definição 5.1.3 (Espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$) *Considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ com $1 \leq p \leq +\infty$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é defindo por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists \ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$$

onde $D^\alpha u$ denota a α-ésima derivada fraca de u em Ω.

Proposição 5.1.4 *O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.*

Proposição 5.1.5 *O espaço $W^{1,2}(\Omega) := H^1(\Omega)$ munido com o seguinte produto escalar*

$$(u,v) = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{L^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

é um espaço de Hilbert separável.

Demonstração: Ver [5], pág. 264.

Proposição 5.1.6 (Caracterização de $W^{1,p}(\Omega)$) *Consideremos um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^N$ e $u \in L^p(\Omega)$ com $1 < p \leq +\infty$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

(ii) *existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}, \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \forall i = 1, \cdots, N,$$

(iii) *existe uma constante $C > 0$ tal que para todo aberto $\omega \subset\subset \Omega$ e todo $h \in \mathbb{R}^N$ com $|h| <$ dist$(\omega, \partial\Omega)$, tem-se:*

$$||\tau_h u - u||_{L^p(\omega)} \leq C|h|,$$

onde $\tau_h u(x) := u(x+h)$. Além disso, se pode tomar $C = 2\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ em (ii) e (iii).

Demonstração: Ver [5], pág. 267.

Definição 5.1.7 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{k,p}$, i.e.*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}.$$

De acordo com a definição, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_m) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \longrightarrow u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 5.1.8 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e $1 \leq p < N$. Então existe $C = C(N, p, |\Omega|) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [5], pág. 290.

Proposição 5.1.9 *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ e $\partial\Omega$ de classe C^1. Então para cada $u, v \in H^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv(\eta . e_i) dS, \ 1 \leq i \leq N.$$

Demonstração: Ver [3], pág. 189. e [5], pág. 316.

Teorema 5.1.10 (Teorema do traço) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que

(i) *$T(u) = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,*

(ii) *existe $C = C(p, \Omega) > 0$ tal que, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, vale*

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [11], pág. 258.

Proposição 5.1.11 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $\partial\Omega$ de classe C^1. Então para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ existe $(u_m)_{m\geq 1} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que*

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } W^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [11], pág. 252.

Definição 5.1.12 (Imersão continua) *Consideremos $(X, ||\cdot||_X)$ e $(Y, ||\cdot||_Y)$ espaços normados com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \ \forall x \in X.$$

Nesse caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$.

Definição 5.1.13 (Imersão Compacta) *Consideremos X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \hookrightarrow Y$. Dizemos que a imersão de X e Y é compacta se a aplicação identidade $i : X \longrightarrow Y$ for compacta. Nesse caso dizemos que X está imerso compactamente em Y e escrevemos $X \overset{C}{\hookrightarrow} Y$.*

Uma maneira equivalente de definir uma imersão compacta é dizer que X está imerso compactamente em Y, se toda sequência limitada $(u_n) \subset X$ possui subsequência convergente em Y.

Teorema 5.1.14 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um subconjunto limitado e de classe C^1. Então as seguintes imersões são compactas:*

- $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega);\ 1 \leq q \leq \frac{Np}{N-p}$ *se* $p < N$,
- $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega);\ 1 \leq q < +\infty$ *se* $p = N$,
- $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega});$ *se* $p > N$.

Demonstração: Ver [3], pág. 285.

Referências Bibliográficas

[1] Alves, C.; Figueiredo, G. and Pimenta, M. **Existence and profile of ground-state solutions to a 1-Laplacian problem in** $\mathbb{R}^N$. arXiv preprint arXiv:1804.07618, 2018.

[2] Ambrosio, L.; Fusco N. and Pallara, D. **Functions of bounded variation and free discontinuity problems**. Clarendon Press Oxford, 2000.

[3] Attouch, H.; Buttazzo, G. and Michaire, G. **Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces: Applications to PDEs and Optimization**. Mathematical Programming Society and Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

[4] Bogachev, V. **Measure theory**. Springer Science & Business Media, v.1, 2007.

[5] Brezis, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Springer Science & Business Media, 2010.

[6] Chambolle, A.; Caselles, V.; Cremers, D.; Novaga, M. and Pock, T. **An introduction to total variation for image analysis**. Theoretical foundations and numerical methods for sparse recovery, v.9, 263-340 , 2010.

[7] Chang, K. **Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v.80, no.1, 102-129, 1981.

[8] Clarke, F. **A new approach to Lagrange multipliers**. Mathematics of Operations Research, v.1, no.2, 165-174, 1976.

[9] Clarke, F. **Optimization and nonsmooth analysis**. Mathematics of Operations Research, Numdam, v.5, Siam, 1990.

[10] Evans, L.; Craig, G. and Ronald, F. **Measure Theory and Fine Properties of Functions**. CRC Press, Boca Raton, 1992.

[11] Evans, L. **Partial Differential Equations**. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 1998.

[12] Figueiredo, G.M.; Pimenta, M.T.O. **Existence of bounded variation solutions for a 1-Laplacian problem with vanishing potentials**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 459:861-878, 2018.

[13] Fleming, W.H. and Rishel, R. **An Integral Formula for Total Gradient Variation**. Arch. Math., v.11, 218-222, 1960.

[14] Folland, G.B. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. John Wiley and Sons, 2 edition, 1999.

[15] Giusti, E. **Minimal surfaces and functions of bounded variation**. Monogr. Math., v.80, 1984.

[16] Jenkins, H. and Serrin, J. **The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimension**. 229, 170-187, 1968.

[17] Kawohl, B. and Schuricht, F. **Dirichlet problems for the 1-Laplace operator, including the eingenvalue problem**. World Scientific Publishing Company, n.4, v.9, 515-543, 2007.

[18] Kawohl, B. **On the family of torsional creep problems**, J. Reine Angew. Math. 410, 1-22, 1990.

[19] Royden, H. **Real Analysis**. Macmillan London. v.2, 1988.

[20] Rudin, W. **Principles of mathematical analysis**. MMcGraw-hill New York. v.3, 1970.

[21] Rudin, L.; Osher, S. and Fatemi, E. **Nonlinear total variation based noise removal algorithms**. Physica D60, 259-268, 1992.

[22] Siegfried, C.; Khoi Le, V. and Montreanu, D. **Nonsmooth Variational Problems and Their Inequalities: Comparison Principles and Applications**. Springer Science & Business Media, 2007.

[23] Szulkin, A. **Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems**. Annales de l'I.H.P, v.3, no.2, 77-109, 1986.

[24] Tyrrell, R. **Conjugate Duality and Optimization**. Siam, Vol.16, 1974.