



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Ricci-Bourguignon Flows and Warped Products

por

Valter Borges [†]

sob orientação da

Profa. Dra. Keti Tenenblat

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, PPGMat-UnB, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

[†]O autor contou com apoio financeiro CAPES, CNPq e FAPDF durante a realização deste trabalho.

Resumo

Esta tese tem três propósitos principais. Primeiro, investigamos soluções do fluxo de Ricci que preservam a estrutura de produto torcido. Neste caso, nós mostramos que a fibra é uma variedade de Einstein e a equação do Fluxo de Ricci na variedade produto é equivalente a um sistema de equações de evolução na base. Em seguida, consideramos soluções do fluxo Ricci que preservam a estrutura do produto torcido e são definidos para todo tempo negativo, as chamadas soluções anciãs. Nós provamos a não-existência de tais soluções quando o produto torcido tem base compacta e a constante de Einstein de sua fibra é não-positiva.

Em segundo lugar, estudamos quase solitons de Ricci em produtos torcidos. Mostramos que um quase soliton de Ricci gradiente em um produto torcido, $(B^n \times_h F^m, g, f, \lambda)$, cuja função potencial f depende da fibra, ou é um sóliton de Ricci ou λ não é constante e o produto torcido, a base, e a fibra são variedades de Einstein que admitem campos de vetores conformes. Assumindo a completude, uma classificação é fornecida para os quase solitons Ricci em produtos torcidos, cujas funções potenciais dependem da fibra. Uma propriedade importante da função potencial é provada, nominalmente, sua decomposição em termos de funções que dependem ou da base ou da fibra. No caso de um sóliton de Ricci completo, provamos que a função potencial depende apenas da base.

O terceiro tema ocupa-se do fluxo de Ricci-Bourguignon em uma variedade compacta de dimensão 3. Esta é uma família de equações de evolução a 1 parâmetro, ρ , e nós mostramos que a importante estimativa de Hamilton-Ivey é verdadeira quando esse parâmetro está no intervalo $(-1/2, 1/4)$. Como consequência dessa desigualdade, mostramos que as soluções anciãs, em variedades tridimensionais compactas, possuem curvatura seccional não negativa, quando sua curvatura escalar é uniformemente limitada no tempo e $\rho \in (-1/2, 1/4)$.

Palavras Chave: Fluxo de Ricci, Fluxo de Ricci-Bourguignon, Desigualdade de Hamilton-Ivey, Soliton de Ricci, Almost Soliton de Ricci, Variedade de Einstein, Produto Warped, Campos Conformes.

Abstract

This thesis has three main purposes. First we investigate solutions of the Ricci flow which preserves the warped product structure. In this case, we show that the fiber is an Einstein manifold and the Ricci Flow equation on the product manifold is equivalent to a system of evolution equations on the base. We then turn to the solutions of the Ricci Flow that preserve the warped product structure and are defined for all negative time, the so called ancient solutions. We prove the nonexistence of such solutions if the base is compact and the Einstein constant of its fiber is nonnegative.

Secondly we study Ricci Almost Soliton on warped products. It is shown that a gradient Ricci almost soliton on a warped product, $(B^n \times_h F^m, g, f, \lambda)$ whose potential function f depends on the fiber, is either a Ricci soliton or λ is not constant and the warped product, the base and the fiber are Einstein manifolds, which admit conformal vector fields. Assuming completeness, a classification is provided for the Ricci almost solitons on warped products, whose potential functions depend on the fiber. An important decomposition property of the potential function in terms of functions which depend either on the base or on the fiber is proven. In the case of a complete Ricci soliton, the potential function depends only on the base.

The third theme is concerned with the Ricci-Bourguignon Flow on a compact 3-dimensional manifold. This is a family of evolution equations on a parameter ρ and we show that the important Hamilton-Ivey estimate holds when ρ lies in $(-1/2, 1/4)$. As a consequence of this inequality, we show that ancient solutions on compact three dimensional manifolds with scalar curvature uniformly bounded on time, has positive sectional curvature, provided $\rho \in (-1/2, 1/4)$.

Keywords: Ricci Flow, Ricci-Bourguignon Flow, Hamilton-Ivey Inequality, Ricci Soliton, Ricci Almost Soliton, Einstein Manifold, Warped Product, Conformal Fields.