Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Ricardo José Sandoval Matos

Orientador: Mauro Moraes Alves Patrão

Entropia Topológica de Endomorfismos de Grupos de Lie

Esta dissertação é submetida como requisito parcial
para a obtenção do título de *mestre em matemática*.

Brasília, Fevereiro de 2019

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Entropia Topológica de Endomorfismos de Grupos de Lie

por

Ricardo José Sandoval Matos*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 19 de fevereiro de 2019.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Mauro Moraes Alves Patrão - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. André Caldas de Souza – MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Adriano João da Silva – UNICAMP (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

Agradeço o apoio de minha família, especialmente o apoio da minha mãe e irmã. Agradeço também a oportunidade de ter várias discussões proveitosas e esclarecedoras com o meu orientador assim como com sua paciência em me explicar tópicos difíceis. Agradeço as conversas interessantes com os Professores André Caldas e Lucas Ferreira na UnB. Agradeço ao bom ambiente de estudo do departamento de matemática, ao grupo de Sistemas Dinâmicos da UnB e ao apoio da bolsa de mestrado do CNPq.

Essa oportunidade de estudo foi bastante fortuita. No início dos nossos estudos, em outubro de 2017, meu orientador resolveu quase completamente o problema principal deste trabalho. A união de dois tópicos do meu interesse: Sistemas Dinâmicos e Grupos de Lie, assim como a generalidade e simplicidade do resultado principal imediatamente me interessaram. Começando com um estudo de diversas medidas de entropia, seguindo estudando fibrados, pares de Li-Yorke e terminando com diversos resultados interessantes da Teoria de Lie minha formação como matemático em muito se enriqueceu. O estudo de uma área de pesquisa em contato com diversas áreas da matemática foi desafiadora e proveitosa. Várias oportunidades foram indispensáveis neste percurso: um excelente grupo de estudo com o meu orientador, o Professor Lucas Ferreira e o Professor André Caldas voltados a um aprofundamento em Teoria de Lie com o Livro [11]; vários seminários sobre Sistemas Dinâmicos e grupos de Lie; assim como professores prestativos e um orientador atencioso. Fico feliz em fazer parte de uma equipe de profissionais competentes o que me motiva a aprofundar meus estudos e me tornar um professor da UnB. Obrigado a todos pela ajuda nesta jornada. Espero agora contribuir para futuros trabalhos e para o desenvolvimento do grupo de Sistemas Dinâmicos da UnB.

Obrigado.

Resumo

Fazemos uma breve introdução à Teoria Ergódica e definimos três medidas de entropia. Apresentamos então uma versão do Princípio Variacional da entropia que compara estas três medidas de entropia em um contexto não compacto. A seguir, demonstramos que a entropia em fibrados é menor ou igual à entropia no quociente mais a entropia na fibra no caso em que a fibra é compacta. Dada esta limitação, introduzimos o conceito de Pares de Li-Yorke, que nos ajudará a controlar a entropia em casos mais gerais. No capítulo seguinte, apresentamos os resultados de Teoria de Lie necessários ao nosso resultado principal. No último capítulo, começamos com o cálculo da entropia de Dinaburg-Bowen de endomorfismos em grupos de Lie (Fórmula de Bowen) e concluímos, no nosso resultado principal, determinando a entropia topológica de qualquer endomorfismo em grupos de Lie.

Palavras-chave: Teoria Ergódica, Teoria de Lie, Entropia, Fibrados, Pares de Li-Yorke, Grupos de Lie, Endomorfismos.

Abstract

In this work we make a brief introduction to Ergodic Theory and define three types of entropy. We then present one version of the Variational Principle that compares these three types of entropy in a noncompact context. We follow by demonstrating that the entropy in the fibers is less than or equal to the entropy of the quotient plus the entropy of the fiber, in the case the fiber is compact. Given this limitation, we introduce the concept of Li-Yorke Pairs, that will help us to control the entropy in more general cases. In the next chapter, we resume the results from Lie Theory necessary to our main result. In the last chapter, we start with the Bowen Formula, that is the method to calculate the Dinaburg-Bowen entropy of the endomorphisms of Lie groups and conclude, in our main result, by determining the topologic entropy of any endomorphisms of Lie groups.

Keywords: Ergodic Theory, Lie Theory, Entropy, Fiber Bundles, Li-Yorke Pairs, Lie Groups, Endomorphisms.

Sumário

Capítulo 1

Introdução Geral

Entropia originalmente foi um conceito físico desenvolvido por Rudolph Clausius em 1850 no estudo de motores. Neste contexto, entendia-se que diferenças de temperatura eram necessárias para realizar trabalho. Um sistema fechado tende naturalmente à equalização da temperatura e à impossibilidade de realizar trabalho. Essa tendência natural de sistemas está relacionada, na teoria de Clausius, com o aumento da entropia. Maxwell, em 1860, e Boltzmann, em 1872, usaram o entendimento de temperatura como energia cinética de átomos e, com isso, aperfeiçoaram o conceito de entropia. A partir do estudo de mecânica estatística, demonstrou-se a chamada *Segunda Lei da Termodinâmica*: em qualquer sistema fechado a entropia total nunca decresce. Note que, em contraste com grandezas conservadas, como a energia e o momento, a entropia de um sistema fechado aumenta ou permanece constante com o passar do tempo.

Neste trabalho, focaremos particularmente no estudo de entropia de transformações. A Segunda Lei, neste contexto, sugere que a entropia de uma transformação será sempre nula ou positiva e, de fato, este será o caso para todas as entropias estudadas neste trabalho. Uma interpretação bastante simplificada para a entropia de uma transformação é entender o quanto esta transformação "mistura" o sistema. No estudo de mecânica estatística, surge inicialmente a fórmula $-\sum_i p_i \log p_i$ para o cálculo de entropia, em que p_i são as probabilidades de um macroestado do sistema. Posteriormente, Shannon usou o conceito de entropia no estudo de teoria de informação, criando uma nova óptica sob a qual estudar entropia. Kolmogorov, por sua vez, usou o conceito de entropia para estudar o comportamento de sistemas dinâmicos em geral e criou o que chamamos de entropia de Kolmogorov $h_\mu(\phi)$ (veja a seção 2.3).

Neste trabalho, focaremos na chamada entropia topológica e, em especial, no cálculo da entropia topológica para endomorfismos em grupos de Lie. No estudo de entropia em grupos de Lie não compactos, algumas dificuldades imediatamente surgem pela falta de medidas de probabilidade invariantes naturais em geral. Por exemplo, a transformação linear $\phi(x) = 2x$ com $x \in \mathbb{R}$ não "mistura" o espaço $\mathbb{R}$ e deveria então ter entropia nula, enquanto que para $\phi(x) = 2x$ definida em $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}^1$ temos que a medida de Lebesgue é de probabilidade e é invariante e obtemos que a entropia de Kolmogorov é $\log 2 > 0$, e de fato, temos que esta transformação "mistura" o sistema.

Para estudar um sistema dinâmico, além de usar a entropia de Kolmogorov, podemos também usar a chamada entropia de Dinaburg-Bowen. Esta entropia usa o conceito de separação entre órbitas para contar a taxa de aumento da quantidade total de órbitas distinguíveis ao aplicar ϕ diversas vezes. O problema de calcular, para uma distância invariante, a entropia de Dinaburg-Bowen de endomorfismos em grupos de Lie foi resolvido em 1971 em [3]. No Corolário 4.2.7, vemos que a entropia de Dinaburg-Bowen de um endomorfismo em grupo de Lie é a soma dos logaritmos dos módulos dos autovalores com módulo maior que 1 da derivada da transformação na identidade.

A entropia de Dinaburg-Bowen em distâncias invariantes infelizmente também não distingue a transformação $\phi(x) = 2x$ em $x \in \mathbb{R}$ da transformação $\phi(x) = 2x$ em $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}^1$. Usaremos então a entropia topológica introduzida em 1965 por Adler, Konheim e McAndrew para estudar a entropia de endomorfismos de grupos de Lie. O resultado principal deste trabalho resolve o problema de forma completa no Teorema 4.4.2. Felizmente estas três entropias - (h_μ) Kolmogorov-Sinai, (h) topológica e (h_d) Dinaburg-Bowen - estão relacionadas de maneira concisa na versão "não-compacta" do Princípio Variacional de [5] no Teorema 2.6.1. Essas relações serão importantes na demonstração de nosso Teorema Principal 4.4.2.

Em 2010, mostrou-se em [18] que a entropia topológica de automorfismos em Grupos de Lie simplesmente conexos é sempre nula, demostrando-se então que, em vários casos, a entropia topológica é estritamente menor que a entropia de Dinaburg-Bowen. Em 2013, estenderam-se estes resultados em [5] e se determinou a entropia de um endomorfismo sobrejetor de um grupo nilpotente ou redutivo como sendo a entropia da restrição do endomorfismo a componente toral do centro de G. Em 2016, em [6], estenderam os resultados anteriores para endomorfismos de transformações não próprias. Em novembro de 2017, publicou-se no repositório Arxiv, em [19], a resolução do problema quando o endomorfismo é próprio e, já em fevereiro de 2018, resolveu-se o caso geral. Recentemente (dezembro de 2018) o artigo foi aceito para publicação no Israel Journal of Mathematics.

Duas dificuldades se apresentaram ao se tentar resolver o problema para um grupo de Lie geral não compacto. A primeira foi como estender os resultados de Bowen em fibrados, por exemplo: a entropia em um grupo de Lie compacto é igual à soma da entropia na fibra com a entropia no quociente (ver [3]), para os casos não compactos. A segunda dificuldade foi como lidar com os grupos de Lie solúveis, que se mostraram os mais difíceis de tratar. Dadas estas dificuldades o estudo de Pares de Li-Yorke foi essencial, assim como obter um resultado técnico sobre endomorfismos de grupos de Lie solúveis, o Teorema 3.3.3.

Vale a pena analisar mais alguns exemplos para compreender melhor o resultado principal (Teorema 4.4.2). Seja $\phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ o endomorfismo $\phi(z) = z^3$ ao considerar $\mathbb{C}^*$ como um grupo de Lie bidimensional em $\mathbb{R}$. Como fazemos para calcular a entropia de ϕ? Para calcular a entropia de Dinaburg-Bowen $h_d(\phi)$ deste endomorfismo para a distância invariante podemos usar o Corolário 4.2.7. De fato, a derivada de ϕ na identidade é três vezes a matriz identidade, logo, neste caso temos dois autovalores iguais a três e que a entropia de Dinaburg-Bowen de ϕ será $2 \log 3$. Agora, note-se que em $\mathbb{C}^*$ temos que uma das dimensões reais a partir da identidade é compacta ($\mathbb{S}^1 = \{z : |z| = 1\}$), enquanto que a outra dimensão é homeomorfa a $\mathbb{R}$. Note-se que, ao aplicar ϕ várias vezes em $\mathbb{C}^*$, os pontos em $\mathbb{S}^1$ permanecem em $\mathbb{S}^1$, enquanto que o resto dos pontos ou se aproximam do zero, ou vão para o infinito. Desta forma, é razoável pensar que na direção não compacta, não há muita desordem, enquanto que a transformação em $\mathbb{S}^1$ é equivalente à transformação $\phi(x) = 3.x$ com $x \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ e, de fato, pelo Teorema 4.4.2 a entropia topológica deste endomorfismo é apenas $\log 3$.

Um exemplo interessante em um espaço bidimensional é o do endomorfismo $\phi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ definido por $\phi(x, y) := (x + y, x)$. Neste caso, a transformação linear $d\phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem dois autovalores irracionais $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ com autovetores $(1, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ e $(1, \frac{-\sqrt{5}-1}{2})$, respectivamente. A transformação ϕ então expande com relação a um autovetor e contrai em relação ao outro. Para calcular a entropia de Dinaburg-Bowen $h_d(\phi)$, para a distância invariante, usamos o Corolário 4.2.7 e, como somente $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ tem módulo maior que 1, temos que $h_d(\phi) = \log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$. Note-se que, neste caso, um autovetor gera em $\mathbb{T}^2$ subgrupos não fechados densos em $\mathbb{T}^2$.

Um exemplo em grupos de Lie não abelianos seria analisar um endomorfismo do grupo das transformações em $\mathbb{C}$, $f(z) = e^{i\theta}.z + b + ic$, onde θ, b e $c \in \mathbb{R}$. Neste caso, como o grupo de Lie é solúvel (e não nilpotente), apenas o resultado mais recente de outubro de 2017 pode ser aplicado. É interessante notar que o quociente deste grupo pelo seu centro é isomorfo ao grupo gerado pelas translações e rotações no plano. Parte das dificuldades de obter o resultado principal no caso solúvel vem da possibilidade destes grupos terem centros desconexos. Estas dificuldades são resolvidas em geral pela Proposição 3.3.3.

No capítulo 2 veremos uma rápida introdução à Teoria Ergódica e, em seguida, uma introdução resumida aos três tipos de entropia. Logo depois, apresentaremos o Teorema Variacional que liga os três tipos de entropia, e alguns corolários úteis. Veremos então como calcular ou estimar a entropia em fibrados (uma generalização de produtos cartesianos). Terminamos a seção com os Pares de Li-Yorke que usaremos para lidar com quocientes de grupos de Lie.

No capítulo 3, fazemos um rápido apanhado de alguns resultados de Teoria de Lie que usaremos para demonstrar nosso resultado principal. Na primeira seção, temos resultados sobre os diversos tipos de grupos de Lie que, de alguma forma, aparecem quando se "decompõe" um grupo de Lie geral. Na segunda seção, nos aprofundamos no toro maximal do centro do grupo. De fato, este toro aparece no Teorema principal 4.4.2. Veremos que toda a entropia do grupo de Lie está "concentrada" no toro maximal do centro do grupo e naturalmente precisaremos de um estudo mais aprofundado deste toro. Na terceira seção, demonstraremos alguns resultados técnicos e, na Proposição 3.3.3, obteremos a ferramenta necessária para lidarmos com grupos de Lie solúveis.

No capítulo 4, começaremos estudando as chamadas medidas ϕ-homogêneas para com elas calcular a entropia de Dinaburg-Bowen de endomorfismos na segunda seção. Na terceira seção, aprofundaremos nosso estudo de Pares de Li-Yorke em Grupos de Lie com um resultado chave sendo a Proposição 4.3.3, que permite "quebrar" certos grupos de Lie e usar a ausência de pares de Li-Yorke para concluir que a entropia é nula pelo Teorema 2.8.10. Na quarta e última seção, finalmente calcularemos a entropia topológica de todos os endomorfismos de grupos de Lie.

1.1 Estratégia da demonstração

Vamos resumir, de maneira informal, as principais ideias usadas na demonstração do Teorema Principal 4.4.2. Para isso vamos nos restringir a demonstrar o Corolário 4.4.3 e apenas citar os diversos resultados exigidos. O Corolário 4.4.3 afirma que se $\phi : G \to G$ é um endomorfismo sobrejetivo de um grupo de Lie conexo, temos que a entropia topológica do endomorfismo $h(\phi)$ é igual a $h(\phi|_{T(G)})$, que é a entropia do endomorfismo restrito a $T(G)$ o toro maximal do centro de G.

A demonstração começa por aplicar a Proposição 2.7.3, para o subgrupo *compacto* $T(G)$ obtendo

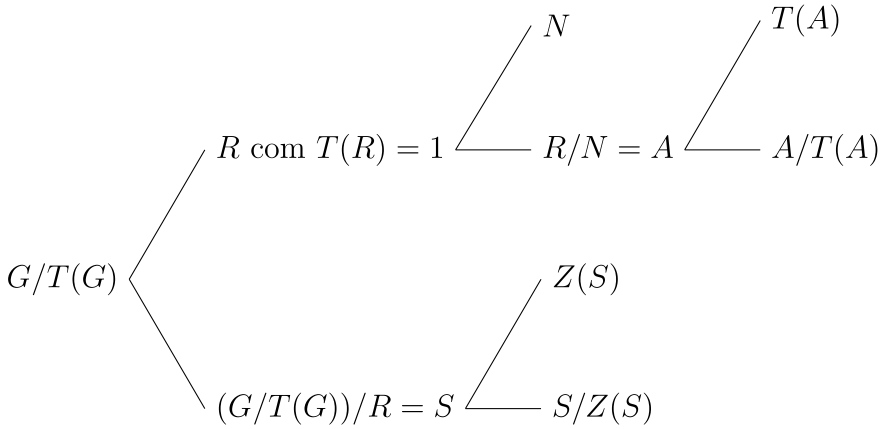
$$h(\phi) \leq h(\phi|_{T(G)}) + h(\psi),$$

onde ψ é o endomorfismo induzido por ϕ em $G/T(G)$. Agora, pela Proposição 2.4.4, temos que $h(\phi|_{T(G)}) \leq h(\phi)$. De forma que, se mostrarmos que $h(\psi) = 0$ obtemos

$h(\phi|_{T(G)}) = h(\phi)$.

Para mostrar que $h(\psi) = 0$, mostramos primeiro que a transformação ψ não tem um par de Li-Yorke, o que implica, de fato, pelo Teorema 2.8.10, que $h(\psi) = 0$. Agora, para mostrar que ψ não tem um par de Li-Yorke usamos que se H e G^*/H não possuem par de Li-Yorke então o grupo original G^* não tem par de Li-Yorke (Proposição 4.3.3), onde H é qualquer subgrupo fechado de G^*. Desta forma, o objetivo se torna decompor $G/T(G)$ em partes e mostrar que em cada uma destas partes o endomorfismo induzido não tem par de Li-Yorke.

Para indicar a "decomposição" de $G/T(G)$ é possível fazer o seguinte esquema ilustrativo:



onde as setas superiores sempre indicam o subgrupo tomado enquanto que as inferiores indicam o quociente com relação à este subgrupo. Consideramos também os endomorfismos induzidos em cada uma destas "partes".

- R - Radical solúvel com $T(R) = 1$ (Proposição 3.2.5).
- N - Radical nilpotente com $T(N) = 1$ logo é simplesmente conexo (Proposição 3.1.4). O endomorfismo em N é então conjugado pela exponencial à uma transformação linear em um espaço vetorial (a sua álgebra) que não tem par de Li-Yorke (Proposição 4.3.1).
- $T(A)$ - Endomorfismo induzido tem ordem finita (Teorema 3.3.3), logo não tem par de Li-Yorke.
- $A/T(A)$ - Transformação linear em um espaço vetorial logo não tem par de Li-Yorke (Proposição 4.3.1).
- $Z(S)$ - Discreto - pela Proposição 4.3.2 não tem par de Li-Yorke.
- $S/Z(S)$ - Proposição 3.1.10 (onde o artigo [7] é utilizado) mostra que o endomorfismo tem potência que corresponde a um automorfismo interno. Agora, um automorfismo interno em um grupo linear é uma restrição de uma transformação linear logo não tem par de Li-Yorke.

Capítulo 2

Teoria Ergódica

2.1 Introdução

Começaremos com uma rápida introdução à Teoria Ergódica de sistemas dinâmicos, demonstrando o Teorema de Recorrência de Poincaré tradicional e depois sua versão topológica. Introduziremos então a noção de suporte de medidas e demonstraremos dois importantes resultados sobre o suporte e o conjunto dos pontos recorrentes.

Logo após a teoria ergódica, estudaremos três definições para a entropia de uma transformação $\phi : X \to X$. O foco do trabalho será a chamada entropia topológica. Felizmente o Princípio Variacional que veremos na seção 2.6 dá uma relação simples entre as três entropias no caso geral.

Primeiro definiremos a *entropia de Kolmogorov-Sinai* $h_\mu(\phi)$, que foi introduzida por Kolgomorov em 1958 e Sinai em 1959. Esta entropia usa uma medida μ que é ϕ-invariante em X. Inicialmente definimos a entropia de uma partição finita $\mathcal{A}$ de X. Depois definiremos a entropia de ϕ com relação a esta partição $\mathcal{A}$ e finalmente, tomando o supremo entre todas as partições finitas mensuráveis no espaço de medida (X, Σ, μ), em que Σ é uma σ-álgebra em (X, μ), obteremos a entropia $h_\mu(\phi)$ da transformação mensurável ϕ com relação à medida μ.

A segunda será a *entropia topológica* $h(\phi)$, que foi introduzida inicialmente em 1965 por Adler, Konheim e McAndrew. Esta entropia será definida a partir de uma topologia em X em que usaremos coberturas abertas de X em vez de partições. Além disso, para calcular esta entropia, usaremos o chamado número de cobertura $N(\mathcal{A})$, que é a menor cardinalidade de uma subcobertura da cobertura $\mathcal{A}$. Definiremos então $h(\phi, \mathcal{A})$ como a entropia topológica com relação à cobertura $\mathcal{A}$ pelo limite $\frac{1}{n} \log N(\mathcal{A}^n)$ quando $n \to \infty$. Para finalmente obter $h(\phi)$, tomaremos o supremo entre todas as entropias $h(\phi, \mathcal{A})$ em que $\mathcal{A}$ é uma *cobertura admissível*; usaremos a definição de coberturas admissíveis principalmente para abarcar casos não compactos.

Na literatura também é encontrada a notação $h_{top}(\phi)$ para $h(\phi)$.

A terceira será a *entropia de Dinaburg-Bowen* $h_d(\phi)$, definida por Dinaburg em 1970 e por Bowen em 1971. Esta entropia usará uma distância d em X. A distância d, junto com a transformação ϕ, definirá a chamada *distância dinâmica*, d_n. A distância dinâmica será então usada para definir os conjuntos (n, ϵ)-separados e (n, ϵ)-geradores para essencialmente "contar" o total de órbitas ϵ-distinguíveis em n iterações de ϕ. A entropia de Dinaburg-Bowen $h_d(\phi)$ pode ser então entendida como a taxa de aumento do total de órbitas distinguíveis com relação ao número de iterações n da transformação ϕ.

A primeira definição de entropia é também denominada na literatura entropia métrica. Esta nomenclatura pode causar alguma confusão e não será usada neste texto. De fato, a primeira definição não usa nenhuma métrica e sim uma medida μ enquanto que apenas a última definição depende de uma escolha de uma métrica ou distância d. A seguir, usaremos as definições como aparecem em, por exemplo, [14], [22] e [1]. Para construir estas entropias apresentaremos todas as definições relevantes, enquanto que alguns resultados importantes serão citados sem demonstração. Para uma exposição mais completa veja, por exemplo [9] ou [22].

Para calcular a entropia topológica de endomorfismos em grupos de Lie, mostraremos na Proposição 2.7.3, que a entropia de um endomorfismo em um grupo de Lie é menor ou igual à soma da entropia no quociente e da entropia da fibra no caso em que a fibra é compacta. Na seção 2.7 (Entropia em fibrados), começaremos com um resultado de Bowen, Proposição 2.7.1 (veja o artigo [3]), e precisaremos de uma versão mais geral de outro resultado de Bowen na Proposição 2.7.2. Terminaremos então a seção com a Proposição 2.7.3, que é o resultado necessário para nosso teorema final (4.4.2).

Infelizmente, o cálculo da entropia a partir de quocientes se mostra insuficiente no caso de grupos solúveis. Para demostrar que a entropia do quociente de um grupos solúvel pelo Toro central é nula, mostraremos que não existem *pares de Li-Yorke* nestes grupos. De fato, no Teorema 2.8.10 mostraremos que, se a entropia de um endomorfismo é positiva, sempre existe um par de Li-Yorke, ou seja, se não há nenhum par de Li-Yorke então a entropia é necessariamente zero.

2.2 Teoria Ergódica

Quando o espaço X vier munido de uma distância d, ou seja, quando (X, d) é um espaço métrico, podemos definir a noção de convergência de uma sequência $x_n \in X$ a partir da métrica d. Dizemos que uma sequência x_n em X converge para um ponto

x de X quando para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq N$, temos que $d(x_n, x) < \epsilon$.

Se (X, d) é um espaço métrico, assumiremos que o espaço X está munido da topologia natural gerada pelas bolas abertas em X i.e., a topologia de X que tem como base $\{B(x, \epsilon);\ \text{para todo } x \in X \text{ e } \epsilon > 0\}$ onde $B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\}$.

No caso em que o espaço X tiver apenas uma topologia definiremos a convergência de uma sequência x_n de X de forma semelhante. Uma sequência $x_n \in X$ converge para um ponto $x \in X$ se, para qualquer aberto V contendo o ponto x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ temos que $x_n \in V$.

Seja (X, d) um espaço métrico e $\phi : X \to X$ uma transformação qualquer. Dizemos que um ponto $y \in X$ é um ω-limite de um ponto $x \in X$ se existe uma sequência n_k indo para ∞ tal que $\lim_{n_k \to \infty} \phi^{n_k}(x) = y$, e denotamos por $\omega(x)$ o conjunto de todos os ω-limites do ponto x.

Um ponto é *recorrente* para uma transformação $\phi : X \to X$ se ele pertence ao seu próprio ω-limite, ou seja, se $x \in \omega(x)$.

Definição 2.2.1. *Chamamos de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\phi$ o conjunto dos pontos recorrentes em X de uma transformação $\phi : X \to X$.*

Definição 2.2.2. *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida. Dizemos que uma transformação mensurável $\phi : X \to X$ preserva a medida, se $\mu(\phi^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo A em Σ, neste caso, também dizemos μ é uma medida ϕ-invariante de X.*

Teorema 2.2.3. *(Teorema de Recorrência de Poincaré). Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida finita e $\phi : X \to X$, uma transformação mensurável que preserva medida. Então para qualquer $A \in \Sigma$, quase todo ponto de A retorna para A infinitas vezes. Mais precisamente,*

$$\mu\left(\{x \in A : \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow \phi^n(x) \notin A\}\right) = 0.$$

Demonstração: Seja $B_m = \{x \in A : n \geq m \Rightarrow \phi^n(x) \notin A\}$. Observe primeiro que como $B_m = A \setminus \cup_{j \geq m} \phi^{-j}(A)$ temos que B_m é mensurável. Agora note que se $j \geq m$ então $B_m \cap \phi^{-j}(B_m) = \varnothing$. Assim, se $j - k \geq m$ então $\phi^{-j}(B_m) \cap \phi^{-k}(B_m) = \varnothing$.

Deste modo a coleção de conjuntos $\{\phi^{-jm}(B_m)\}_{j \geq 0}$ é disjunta e, como ϕ preserva a medida, todos estes conjuntos tem a mesma medida e

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu\left(\phi^{-jm}(B_m)\right) = \mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \phi^{-jm}(B_m)\right) \leq \mu(X).$$

Como o primeiro somatório é infinito temos que $\mu(B_m) = 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$, logo

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) = 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Note que o Teorema de Poincaré anterior não faz nenhuma referência à distância ou topologia do espaço X e também não explicita o conjunto dos pontos recorrentes $\mathcal{R}_\phi$ do espaço X.

Em geral trabalharemos com *medidas de Borel* ou medidas definidas sobre *uma σ-álgebra de Borel* que é a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de X. Demonstraremos uma versão topológica do Teorema de Poincaré no caso em que X possui uma base enumerável.

Teorema 2.2.4. (*Versão topológica do Teorema de Recorrência de Poincaré*). *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida finita e suponha que X tenha uma base enumerável para sua topologia. Se $\phi : X \to X$ é uma transformação mensurável que preserva a medida μ, então quase todo ponto $x \in X$ é recorrente para a transformação ϕ, ou seja, $\mu(\mathcal{R}_\phi) = \mu(X)$.*

Demonstração: Considere $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base enumerável de X. Para cada n seja $Y_n = \{x \in U_n : \exists k \in \mathbb{N}, m \geq k \Rightarrow \phi^m(x) \notin U_n\}$, ou seja, o conjunto dos pontos de U_n que a partir de algum momento saem permanentemente de U_n. Se $\mathcal{R}_\phi$ é o conjunto dos pontos recorrentes de ϕ, então temos que $\cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = X \setminus \mathcal{R}_\phi$. Pelo Teorema de Recorrência de Poincaré anterior (Teorema 2.2.3), temos que $\mu(Y_n) = 0$ para qualquer n. Tomando a união de todos os Y_n obtemos $\mu(X \setminus \mathcal{R}_\phi) = 0$ e portanto $\mu(\mathcal{R}_\phi) = \mu(X)$. ■

Seja X um espaço com uma topologia com base enumerável e μ uma medida de Borel em X, ou seja, uma medida sobre a σ-álgebra *de Borel* de X, que é a *a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de X*. Definimos o *suporte de μ* por

$$\operatorname{supp}(\mu) = \{x \in X : \mu(U) > 0 \text{ para toda vizinhança aberta } U \text{ de } x\}.$$

Proposição 2.2.5. *O suporte da medida μ, $\operatorname{supp}(\mu)$, é o menor fechado de medida total, ou seja, é o complementar do maior aberto de medida nula. Em particular, o fecho de um conjunto de medida total contém $\operatorname{supp}(\mu)$.*

Demonstração: Como a base é enumerável, podemos definir A_n como a sequência dos abertos da base de medida zero. Se $A = \cup_n A_n$ então A também é aberto de medida zero e, além disso, mostraremos que A é *o maior aberto de medida zero*. De fato, se U for um conjunto aberto de medida zero então como U é aberto temos que $U = \cup_n U_n$ onde U_n são os abertos da base contidos em U. Agora, como U tem medida zero então U_n tem medida zero, para todo n, e então todos os U_n estão contidos em A por definição. Tomando a união para todo n obtemos que $U \subset A$ como queríamos.

Por definição, como A tem medida nula, se $x \in A$ então $x \notin \operatorname{supp}(\mu)$. Por outro lado, se $x \notin \operatorname{supp}(\mu)$ então pela definição de $\operatorname{supp}(\mu)$ existe um aberto U de medida zero que o contém e então $x \in U \subset A$. Logo $\operatorname{supp}(\mu) = X \setminus A$ e $\operatorname{supp}(\mu)$ é então *o menor fechado de medida total.* ■

Proposição 2.2.6. *Seja X espaço com base enumerável e seja μ uma medida de Borel em X. Se $\phi : X \to X$ é uma transformação mensurável que preserva a medida μ, então $\operatorname{supp}(\mu)$ está contido em $\overline{\mathcal{R}(\phi)}$, o fecho do conjunto dos pontos recorrentes.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.4, temos que $\mu(\mathcal{R}(T)) = \mu(X)$. Então temos que $\mu(\mathcal{R}(\phi)) = \mu(\overline{\mathcal{R}(\phi)}) = \mu(X)$. Agora, como $\overline{\mathcal{R}(\phi)}$ é fechado e de medida total, pela Proposição 2.2.5 anterior temos que $\overline{\mathcal{R}(\phi)} \supset \operatorname{supp}(\mu)$, como queríamos demonstrar. ■

2.3 Entropia de Kolgomorov-Sinai $h_\mu(\phi)$

Seja (X, μ) um espaço de probabilidade. Dizemos que uma coleção finita de subconjuntos mensuráveis não vazios de X, $\mathcal{A} = \{A_i : i = 1, ..., n\}$, é uma *partição mensurável finita* de X se $\cup_{i=1}^n A_i = X$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$ e A_i são mensuráveis, para todo i=1,...,n. Por conveniência, vamos definir que $0.\log\frac{1}{0} = -0.\log 0 = 0$. Desta forma, como $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$, temos que a definição de entropia de partições definida a seguir se torna contínua com relação as medidas $\mu(A_i)$.

Dada uma partição mensurável finita $\mathcal{A}$ de X definimos a entropia da partição $\mathcal{A}$ como:

$$H_\mu(\mathcal{A}) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \log \frac{1}{\mu(A_i)}.$$

Dadas duas partições mensuráveis finitas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ definimos:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} := \{A \cap B : A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{B}\}.$$

Proposição 2.3.1. *Sejam $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ e $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1,\dots,m}$ partições mensuráveis finitas do espaço de probabilidade (X, μ). Então*

(a) $H_\mu(\mathcal{A}) \geq -\log\left(\sup_{i=1,\dots,n} \mu(A_i)\right) \geq 0.$

(b) $H_\mu(\mathcal{A}) \leq \log(\#\mathcal{A}).$

(c) $H_\mu(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq H_\mu(\mathcal{A}) + H_\mu(\mathcal{B})$.

nos itens (a) e (b), valem as igualdades

$$H_\mu(\mathcal{A}) = -\log\left(\sup_{i=1,\ldots,n} \mu(A_i)\right) = \log(\#\mathcal{A}),$$

se, e somente se, todos os elementos de $\mathcal{A}$ tem a mesma medida.

Demonstração: (a) A segunda desigualdade é consequência de

$$0 < \sup_{i=1,\ldots,n} \mu(A_i) \leq 1.$$

Para a primeira desigualdade, pela definição de entropia da partição $\mathcal{A}$ temos que

$$H_\mu(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \log \frac{1}{\mu(A_i)} \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \log \frac{1}{\sup\limits_{j=1,\ldots,n} \mu(A_j)} = -\log \sup_{j=1,\ldots,n} \mu(A_j),$$

pois a soma de todas as medidas da partição é 1.

(b) Para demonstrar este item usaremos a convexidade da função $\phi(x) = x \log x$. De fato, como $\phi(x) = x \log x$ é estritamente convexa, temos que

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(x_i)$$

se $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ e $a_i \geq 0$, com a igualdade se, e somente se, $x_i = x_j$ para todos os i, j.

Fazendo $n = \#\mathcal{A}$, $a_i = 1/n$ e $x_i = \mu(A_i)$ nesta desigualdade, temos que

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\mu(A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\phi(\mu(A_i)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(\mu(A_i)) = -\frac{1}{n}H_\mu(\mathcal{A}),$$

com a igualdade se, e somente se, $\mu(A_i) = \frac{1}{n}$ para todo i. Note agora que o primeiro termo da equação anterior é

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\mu(A_i)\right) = \phi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\right) = \phi\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}\log n,$$

ou seja,

$$-\frac{1}{n}\log n \leq -\frac{1}{n}H_\mu(\mathcal{A}),$$

lembrando que $n = \#\mathcal{A}$ temos como queríamos

$$H_\mu(\mathcal{A}) \leq \log(\#\mathcal{A}).$$

(c) Por definição

$$H_\mu(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) \log\left(\frac{1}{\mu(A_i \cap B_j)}\right).$$

Agora na expressão anterior vamos substituir o termo $\mu(A_i \cap B_j)$ por $\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}.\mu(A_i)$ e o termo $\log\left(\frac{1}{\mu(A_i\cap B_j)}\right)$ por $\log\left(\frac{1}{\mu(A_i)}\right) + \log\left(\frac{\mu(A_i)}{\mu(A_i\cap B_j)}\right)$ distribuindo o resultado temos dois termos:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}.\mu(A_i)\log\left(\frac{1}{\mu(A_i)}\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i).\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}\log\left(\frac{\mu(A_i)}{\mu(A_i \cap B_j)}\right).$$

No primeiro membro desta soma temos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}.\mu(A_i)\log\left(\frac{1}{\mu(A_i)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\log\left(\frac{1}{\mu(A_i)}\right)\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\log\left(\frac{1}{\mu(A_i)}\right) = H_\mu(\mathcal{A}).$$

Enquanto que no segundo termo temos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i).\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}\log\left(\frac{\mu(A_i)}{\mu(A_i \cap B_j)}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}(-1).\log\left(\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}\right).$$

Agora note que para cada j o segundo somatório deste termo é

$$-\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}.\log\left(\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}\right).$$

Tomando $x_i = \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}$, $a_i = \mu(A_i)$ e $\phi(x) = x\log x$ temos

$$-\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}.\log\left(\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}\right) = -\sum_{i=1}^{n} a_i\phi(x_i) \leq -\phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i\right),$$

mas

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i\right) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i \cap B_j)\right) = \phi\left(\mu(B_j)\right) = \mu(B_j)\log\left(\mu(B_j)\right).$$

Logo, para cada j,

$$-\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}.\log\left(\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)}\right) \leq -\mu(B_j)\log\left(\mu(B_j)\right).$$

E obtemos

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i).\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(A_i)}\log\left(\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(A_i)}\right)\leq -\sum_{j=1}^{m}\mu(B_j)\log\left(\mu(B_j)\right)=H_\mu(\mathcal{B}),$$

como queríamos demonstrar. ■

A demonstração do item (c) pode parecer algo artificial porque evitamos usar explicitamente o conceito de entropia condicional.

Agora seja $\phi : X \to X$ uma transformação que preserva medida. Note que neste caso a coleção $\phi^{-1}\mathcal{A} = \{\phi^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ é também uma partição de X e temos que $H_\mu(\phi^{-1}\mathcal{A}) = H_\mu(\mathcal{A})$. Além disso, temos que $\phi^{-1}(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) = \phi^{-1}\mathcal{A}\vee\phi^{-1}\mathcal{B}$

A partir de uma partição $\mathcal{A}$ definimos uma nova partição $\mathcal{A}^n$ como

$$\mathcal{A}^n := \mathcal{A}\vee\phi^{-1}\mathcal{A}\vee ...\vee\phi^{-(n-1)}\mathcal{A}.$$

Por estas propriedades e pelo item (c) da Proposição 2.3.1 anterior podemos demonstrar que a sequência $H_\mu(\mathcal{A}^n)$ é subaditiva. De fato,

$$H_\mu(\mathcal{A}^{n+m}) = H_\mu(\mathcal{A}^n\vee\phi^{-n}\mathcal{A}^m)\leq H_\mu(\mathcal{A}^n)+H_\mu(\mathcal{A}^m).$$

O próximo Lema também é conhecido como Lema subaditivo de Fekete e será usado para demonstrar que a entropia de Kolmogorov-Sinai está bem definida.

Lema 2.3.2. *Se a_n é uma sequência subaditiva de números reais positivos, ou seja, se $a_{n+m}\leq a_n+a_m$, então o $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ existe.*

Demonstração:

Fixando m, escreva, para cada $n>0$, $n = km+r$ com $0\leq r<m$, assim temos

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{km+r}}{km+r}\leq\frac{a_{km}}{km}+\frac{a_r}{km}\leq\frac{ka_m}{km}+\frac{a_r}{km}=\frac{a_m}{m}+\frac{a_r}{km}.$$

Agora, fazendo $n\to\infty$, como m é fixo, temos que $k\to\infty$ e assim temos, para cada $m\in\mathbb{N}$,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leq\frac{a_m}{m},$$

e assim,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leq\liminf_{m\to\infty}\frac{a_m}{m},$$

e então o limite superior é igual ao limite inferior e o limite $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ existe. ■

Definimos a entropia de Kolmogorov-Sinai da transformação ϕ em um espaço com medida μ *com respeito à partição* $\mathcal{A}$ como:

$$h_\mu(\phi, \mathcal{A}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{A}^n).$$

Note que pelo Lema anterior este limite está bem definido. Dado estas preparações podemos definir a entropia de Kolmogorov-Sinai.

Definição 2.3.3. *A entropia de Kolmogorov-Sinai de uma transformação mensurável* $\phi : X \to X$ *com relação a uma medida* μ*,*

$$h_\mu(\phi) := \sup_{\mathcal{A}} h_\mu(\phi, \mathcal{A}),$$

onde o supremo é tomado entre todas as partições mensuráveis finitas $\mathcal{A}$ *de* X*.*

A Proposição a seguir fornece algumas das principais propriedades da entropia de Kolmogorov-Sinai de uma transformação com respeito a uma partição finita mensurável.

Proposição 2.3.4. *Sejam* $\phi : X \to X$ *uma transformação mensurável que preserva a medida do espaço de probabilidade* (X, μ) *e* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *duas partições finitas e mensuráveis com entropia finita. Então*

(a) *A sequência* $\frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{A}^n)$ *é decrescente.*

(b) $h_\mu(\phi, \mathcal{A}) \geq \limsup_{n\to\infty} \big(- \frac{1}{n} \log \sup_{A\in\mathcal{A}} \mu(A) \big)$.

(c) $h_\mu(\phi, \mathcal{A}) \leq H_\mu(\mathcal{A})$.

(d) $h_\mu(\phi, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq h_\mu(\phi, \mathcal{A}) + h_\mu(\phi, \mathcal{B})$.

As demonstrações serão omitidas e podem ser encontradas em [9] ou no Corolário 4.9.1 e Teoremas 4.10 e 4.12 de [22]. A próxima Proposição apresenta duas propriedades importantes da entropia de Kolmogorov-Sinai.

Proposição 2.3.5. *Sejam* (X, μ) *e* (Y, ν) *espaços de probabilidade,* $\phi : X \to X$ *e* $\psi : Y \to Y$ *transformações mensuráveis que preservam medida.*

(a) $h_\mu(\phi^m) = m.h_\mu(\phi)$ *para* $m \in \mathbb{N}$.

(b) *Definindo* $\phi \times \psi : X \times Y \to X \times Y$ *por* $(\phi \times \psi)(x, y) = (\phi(x), \psi(y))$ *e* $\mu \times \nu$ *a medida produto em* $X \times Y$ *temos que*

$$h_{\mu\times\nu}(\phi \times \psi) = h_\mu(\phi) + h_\nu(\psi).$$

As demonstrações serão omitidas e podem ser encontradas em [9] ou nos Teoremas 4.13 e 4.23 de [22].

É interessante saber que, quando o espaço é compacto e ϕ é uma transformação contínua $\phi : X \to X$, sempre existe uma medida de probabilidade Boreliana ϕ-invariante. De fato, seja $\mathfrak{B}(X)$ o conjunto de todas as probabilidades sobre os *Borelianos em* X, onde *Borelianos* são os conjuntos pertencentes a *menor* σ*-álgebra que contém todos os abertos*, então temos o seguinte resultado.

Teorema 2.3.6. *(Teorema de Krylov-Bogolyubov). Seja* (X, d) *espaço métrico compacto e* $\phi : X \to X$ *uma transformação contínua. Então existe uma probabilidade Boreliana* $\mu \in \mathfrak{B}(X)$ *que é* ϕ*-invariante.*

A demonstração será omitida e pode ser achada, por exemplo, no Teorema 4.1.1 em [14].

2.4 Entropia Topológica $h(\phi)$

A definição de entropia topológica $h(\phi)$ foi motivada pela definição de entropia de Kolmogorov-Sinai e tem vários paralelos com ela. A entropia topológica depende inicialmente de uma cobertura aberta dada, em vez de uma partição, e usa o número mínimo de abertos da cobertura necessários para cobrir o espaço X. Lembrando que para a entropia de Kolmogorov-Sinai temos que $H_\mu(\mathcal{A}) \leq \log(\#\mathcal{A})$ (item (b) da Proposição 2.3.1), é usado então por analogia o logaritmo do número mínimo de cobertura para definir a entropia topológica.

Seja (X, d) um espaço métrico localmente compacto, ou seja, um espaço métrico em que todo ponto $x \in X$ pertence a um aberto com fecho compacto e seja $\phi : X \to X$ uma transformação contínua de X e $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de X. Definimos o *número da cobertura* de $\mathcal{A}$, $N(\mathcal{A})$, como sendo a menor cardinalidade de uma subcobertura $\mathcal{A}$. De forma análoga às definições com partições, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são coberturas de X definimos uma nova cobertura $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ cujos elementos são da forma $A \cap B$ com $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$. Definimos $\phi^{-1}(\mathcal{A})$ como a cobertura cujos elementos são da forma $\phi^{-1}(A)$, com $A \in \mathcal{A}$ que também são abertos pois ϕ é contínua. Agora definimos $\mathcal{A}^n := \mathcal{A} \vee \phi^{-1}(\mathcal{A}) \vee ... \vee \phi^{-(n-1)}(\mathcal{A})$.

Com estes ingredientes, definimos a entropia topológica da transformação ϕ com relação a cobertura $\mathcal{A}$ como

$$h(\phi, \mathcal{A}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{A}^n).$$

A analogia entre a entropia de Kolmogorov-Sinai e a entropia topológica ocorre então quando substitui-se o termo $\log N(\mathcal{A}^n)$ por $H_\mu(\mathcal{A}^n) \leq \log N(\mathcal{A}^n)$.

Proposição 2.4.1. *O limite na definição de $h(\phi, \mathcal{A})$ existe.*

Demonstração: Para verificar que o limite utilizado nesta definição realmente existe, pelo Lema 2.3.2, basta mostrar que a sequência $\log N(\mathcal{A}^n)$ é subaditiva, isto é,

$$\log N(\mathcal{A}^{n+m}) \leq \log N(\mathcal{A}^n) + \log N(\mathcal{A}^m).$$

Equivalentemente, basta mostrar que $N(\mathcal{A}^{n+m}) \leq N(\mathcal{A}^n).N(\mathcal{A}^m)$.

Para verificar esta desigualdade, observe primeiro que se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são duas coberturas de X, então $N(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq N(\mathcal{A}).N(\mathcal{B})$. Além dissso, como $N(\phi^{-1}(\mathcal{A})) \leq N(\mathcal{A})$ e

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{n+m} &= \mathcal{A} \vee ... \vee \phi^{-(n-1)}(\mathcal{A}) \vee \phi^{-n}(\mathcal{A}) \vee ... \vee \phi^{-(n+m-1)}(\mathcal{A}) \\
\mathcal{A}^{n+m} &= \mathcal{A}^n \vee \phi^{-n}\left(\mathcal{A} \vee ... \vee \phi^{-(m-1)}(\mathcal{A})\right) \\
\mathcal{A}^{n+m} &= \mathcal{A}^n \vee \phi^{-n}(\mathcal{A}^m),
\end{aligned}$$

temos que

$$N(\mathcal{A}^{n+m}) \leq N(\mathcal{A}^n).N(\phi^{-n}(\mathcal{A}^m)) \leq N(\mathcal{A}^n).N(\mathcal{A}^m),$$

como queríamos demonstrar. ■

Note que, neste caso, existe a possibilidade de que o número de cobertura seja infinito. Para retirar esta possibilidade e também para obter resultados semelhantes ao caso em que o espaço é compacto, vamos introduzir o conceito de *coberturas admissíveis* como feito em [5].

Definição 2.4.2. *(Cobertura Admissível). Seja X um espaço topológico, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma cobertura admissível quando pelo menos um de seus elementos tem complemento compacto.*

A definição de cobertura admissível está relacionada à topologia que vem da compactificação por um ponto, de fato, na compactificação por um ponto um aberto que contenha o ponto no infinito sempre tem um complemento compacto na topologia original.

Considerando as coberturas admissíveis é possível então definir $h(\phi)$.

Definição 2.4.3. *Em um espaço topológico X, a entropia topológica de uma transformação contínua $\phi : X \to X$ é dada por*

$$h(\phi) := \sup_{\mathcal{A}: \, admiss\acute{\imath}vel} h(\phi, \mathcal{A}),$$

com o supremo tomado sobre todas as coberturas abertas admissíveis de X.

Com esta definição é possível demonstrar o Princípio Variacional (Teorema 2.6.1) que será visto mais à frente. Note que no caso em que o espaço é compacto todas as coberturas são admissíveis.

Proposição 2.4.4. *Seja X um espaço topológico, $\phi : X \to X$ uma transformação contínua, e seja $Y \subset X$ fechado tal que $T(Y) \subset Y$ então*

$$h(\phi|_Y) \leq h(\phi).$$

Demonstração: Toda cobertura admissível de Y pode ser estendida para uma cobertura admissível de X. De fato, seja $\mathcal{A}$ uma cobertura de Y, se definirmos

$$\mathcal{A}^* := \{A \cup (X \setminus Y) : A \in \mathcal{A}\},$$

obtemos uma cobertura aberta de X. Pois para $A \in \mathcal{A}$ temos $(A \cup (X \setminus Y))^c = A^c \cap Y$ que é o complementar de A em Y, logo $A^c \cap Y$ é fechado em Y e como Y é fechado, temos que $(A \cup (X \setminus Y))^c$ também é fechado em X e obtemos, como queríamos, que $A \cup (X \setminus Y)$ é aberto em X e $\mathcal{A}^*$ é cobertura aberta. Além disso, se M tem complementar compacto em Y então $M \cup (X \setminus Y)$ também tem complementar compacto em X e a cobertura $\mathcal{A}^*$ de X também é admissível.

Note que $(\mathcal{A}^*)^n$ é em geral uma cobertura mais fina que $(\mathcal{A}^n)^*$, pois as imagens inversas de uma cobertura $\mathcal{A}$ de Y podem também segmentar o conjunto $X \setminus Y$. Desta forma, $N((\mathcal{A}^*)^n) \geq N((\mathcal{A}^n)^*) = N(\mathcal{A}^n)$ e obtemos que $h(\phi|_Y, \mathcal{A}) \leq h(\phi, \mathcal{A}^*)$. Como todas as coberturas de Y podem ser estendidas para uma cobertura de X concluímos que $h(\phi|_Y) \leq h(\phi)$, como queríamos demonstrar. ∎

2.5 Entropia de Dinaburg-Bowen $h_d(\phi)$

Uma boa referência para esta seção é o início do artigo [3]. Seja (X, d) um espaço métrico e $\phi : X \to X$ uma transformação. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos a *distância dinâmica* em X por

$$d_n^\phi(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(\phi^i(x), \phi^i(y)).$$

Para esta métrica temos, analogamente, o conceito de *bola dinâmica*, que é dada por

$$B_n^\phi(x, \epsilon) := \{y \in X : d_n^\phi(x, y) < \epsilon\}.$$

Quando não houver possibilidade de confusão também podemos omitir ϕ na expressão $B_n^\phi(x, \epsilon)$.

Lema 2.5.1. *Em um espaço métrico (X, d), a bola dinâmica $B_n^\phi(x, \epsilon)$ como definida anteriormente pode ser reescrita em termos da bola tradicional, de fato, temos que*

$$B_n^\phi(x, \epsilon) = \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(B(\phi^k(x), \epsilon)).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} y \in B_n^\phi(x, \epsilon) &\Leftrightarrow d_n(y, x) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow d(\phi^k(y), \phi^k(x)) < \epsilon \text{ para todo } k = 0, ..., n-1 \\ &\Leftrightarrow \phi^k(y) \in B(\phi^k(x), \epsilon) \text{ para todo } k = 0, ..., n-1 \\ &\Leftrightarrow y \in \phi^{-k}(B(\phi^k(x), \epsilon)) \text{ para todo } k = 0, ..., n-1 \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(B(\phi^k(x), \epsilon)), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ∎

Definição 2.5.2. *Conjuntos (n, ϵ)-separados e (n, ϵ)-geradores.*

(a) *Dizemos que um conjunto $E \subset X$ é (n, ϵ)-separado se para todos x, $y \in E$ com $x \neq y$ temos $d_n(x, y) > \epsilon$.*

(b) *Dado $K \subset X$, dizemos que um subconjunto $F \subset X$ é (n, ϵ)-gerador de K se para todo $x \in K$ existe um $y \in F$ tal que $d_n(x, y) \leq \epsilon$.*

Informalmente falando, em um conjunto (n, ϵ)-separado, as órbitas de dois pontos quaisquer sempre se distanciam mais do que ϵ antes da n-ésima iterada de ϕ. E informalmente, um conjunto F é (n, ϵ)-gerador de K se a órbita de qualquer ponto de K está a uma distância menor ou igual a ϵ da órbita de algum ponto de F antes da n-ésima iterada de ϕ.

Agora, dado um conjunto $K \subset X$ compacto, denotamos por $s_n^\phi(\epsilon, K)$ a maior cardinalidade de um conjunto (n, ϵ)-separado contido em K, e por $r_n^\phi(\epsilon, K)$ a menor cardinalidade de um conjunto (n, ϵ)-gerador de K. Para medir a taxa de crescimento exponencial destas quantidades com relação à n, definimos

$$s_\phi(\epsilon, K) := \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n^\phi(\epsilon, K)$$

e

$$r_\phi(\epsilon, K) := \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n^\phi(\epsilon, K).$$

Quando não houver possibilidade de confusão, podemos omitir ϕ nas notações destas definições.

Lema 2.5.3. *Se K é um subconjunto compacto de X então*

(a) $r_n(\epsilon, K) \leq s_n(\epsilon, K) \leq r_n(\frac{1}{2}\epsilon, K) < \infty$.

(b) *Se* $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$ *então* $r(\epsilon_1, K) \geq r(\epsilon_2, K)$ *e* $s(\epsilon_1, K) \geq s(\epsilon_2, K)$.

Demonstração: (a) Se E é um conjunto (n, ϵ)-separado máximo em K, então ele gera K, pois caso contrário, deverá existir $y \in K$ tal que $d_n(x, y) > \epsilon$ para todo $x \in E$, e logo $\{y\} \cup E$, será um conjunto (n, ϵ)-separado maior que E. Logo $r_n(\epsilon, K) \leq s_n(\epsilon, K)$.

Agora, seja E um conjunto (n, ϵ)-separado em K e F um $(n, \frac{1}{2}\epsilon)$-gerador de K. Então para todo $x \in E$ existe $g(x) \in F$, tal que $d_n(x, g(x)) \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Assim, se $g(x) = g(y)$, temos que $d_n(x, y) \leq d_n(x, g(x)) + d_n(y, g(y)) \leq \epsilon$. Como E é (n, ϵ)-separado, temos então que $x = y$ quando $g(x) = g(y)$. Assim, g é uma função injetora de E em F. Logo $\#E \leq \#F$ e então $s_n(\epsilon, K) \leq r_n(\frac{1}{2}\epsilon, K)$.

(b) Se $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$ então conjuntos (n, ϵ_1)-geradores são (n, ϵ_2)-geradores. Logo $r_n(\epsilon_1, K) \geq r_n(\epsilon_2, K)$ e então $r(\epsilon_1, K) \geq r(\epsilon_2, K)$. Do mesmo modo se $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$ os conjuntos (n, ϵ_2)-separados são (n, ϵ_1)-separados, logo $s_n(\epsilon_1, K) \geq s_n(\epsilon_2, K)$ e então $s(\epsilon_1, K) \geq s(\epsilon_2, K)$. ■

Definição 2.5.4. *Seja ϕ:$X \to X$ uma transformação uniformemente contínua do espaço métrico (X, d) e $K \subset X$ compacto. Definimos*

$$h_d(\phi, K) := \lim_{\epsilon \to 0^+} r_\phi(\epsilon, K) = \lim_{\epsilon \to 0^+} s_\phi(\epsilon, K),$$

onde temos segunda igualdade pelo Lema 2.5.3. E definimos a entropia de Dinaburg-Bowen de ϕ como

$$h_d(\phi) := \sup\{h_d(\phi, K) : K \subset X, K \text{ compacto}\}.$$

É importante observar que se $K_1 \subset K_2$ então $h_d(\phi, K_1) \leq h_d(\phi, K_2)$ e assim, se (X, d) é compacto então $h_d(\phi, X) = h_d(\phi)$.

Observação 2.5.5. *Para simplificar certas demonstrações (Ex: Proposição 2.7.1) parte da literatura usa outra definição de métrica dinâmica:*

$$\widehat{d}_n^\phi(x, y) := \max_{0 \leq i \leq n} d(\phi^i(x), \phi^i(y)),$$

lembrando que a definição que usamos no começo da seção foi

$$d_n^\phi(x, y) := \max_{0 \leq i \leq n-1} d(\phi^i(x), \phi^i(y)),$$

note que $\widehat{d}_n^{\phi}(x,y) = d_{n+1}^{\phi}(x,y)$*. Agora, se usássemos a primeira definição isso altera a definição de bola dinâmica e as definições de conjuntos* (n,ϵ)*-separados e geradores. Felizmente no cálculo de* $s_\phi(\epsilon, K)$ *e* $r_\phi(\epsilon, K)$ *a mudança de definição não faria nenhuma diferença e como consequência a definição da entropia* $h_d(\phi, K)$ *e* $h_d(\phi)$ *também não mudaria. De fato, usando* $\widehat{d}$*, temos* $\widehat{s}_n^{\phi}(\epsilon, K) = s_{n+1}^{\phi}(\epsilon, K)$ *e a definição de* $\widehat{s}_\phi$ *fica então*

$$\begin{aligned}\widehat{s}_\phi(\epsilon, K) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_{n+1}^{\phi}(\epsilon, K)\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{1}{n+1} \log s_{n+1}^{\phi}(\epsilon, K) = s_\phi(\epsilon, K),\end{aligned}$$

pois $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$*. Para* (n,ϵ)*-geradores podemos usar um raciocínio análogo, e então as definições mais importantes como* $h_d(\phi, K)$ *e* $h_d(\phi)$ *não mudam.*

A seguir apresentamos duas propriedades da entropia de Dinaburg-Bowen.

Proposição 2.5.6. *Sejam* (X,d) *e* (Y,d') *espaços métricos,* $\phi : X \to X$ *e* $\psi : Y \to Y$ *transformações uniformemente contínuas. Então:*

(a) $h_d(\phi^m) = m.h_d(\phi)$ *para* $m \in \mathbb{N}$.

(b) *Definindo* $\phi \times \psi : X \times X \to Y \times Y$ *por* $(\phi\times\psi)(x,y) = (\phi(x), \psi(y))$ *e*

$$d''((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \text{máx}\,\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\},$$

temos que

$$h_{d''}(\phi\times\psi) \le h_d(\phi) + h_{d'}(\psi),$$

com a igualdade valendo se X *ou* Y *é um espaço métrico compacto.*

No item (b) anterior a desigualdade não pode ser trocada por uma igualdade, pois existem exemplos onde vale a desigualdade estrita, ou seja, $h'_{d'}(\phi\times\psi) < h_d(\phi) + h_{d'}(\psi)$. Um exemplo pode ser encontrado no artigo de P. Hulse, [12]. A demonstração desta Proposição será omitida e pode ser encontrada em [9] ou (Teorema 7.10 de [22]). Note como estas propriedades são análogas as propriedades da entropia de Kolmogorov-Sinai na Proposição 2.3.5.

2.6 Princípio Variacional da Entropia

O importante Princípio Variacional da Entropia a seguir relaciona os três tipos de entropia vistos e também tem vários Corolários úteis que serão usados mais à frente.

A versão usada aqui engloba casos em que o espaço X não é compacto. Pode-se achar a demonstração do Teorema 2.6.1 em [5].

No Teorema a seguir tomaremos o supremo entre diversas medidas de Radon de probabilidade. Uma medida de Radon é uma medida em que a topologia é "compatível" com a medida. De forma mais precisa, uma medida de probabilidade é chamada "de Radon" se satisfaz três condições: (i) é uma medida sobre a σ-álgebra dos Borelianos, (ii) a medida de qualquer Boreliano é igual ao ínfimo da medida de todos os abertos contendo este Boreliano e (iii) se a medida de qualquer aberto é igual ao supremo das medidas de todos os compactos contidos neste aberto.

Teorema 2.6.1. *(Princípio Variacional da Entropia). Seja X um espaço metrizável separável e localmente compacto e seja $\phi : X \to X$ uma transformação contínua, então*

$$\sup_{\mu} h_{\mu}(\phi) = h(\phi) = \min_{d} h_d(\phi),$$

onde o supremo é tomado entre as medidas de probabilidade de Radon ϕ-invariantes μ e o mínimo é assumido em qualquer distância induzida por uma distância definida na compactificação por um ponto de X.

Quando não houver medida μ que seja ϕ-invariante vamos assumir que o supremo $\sup_{\mu} h_{\mu}(\phi)$ é 0. Esta definição também faz sentido no contexto de medidas com $0 \leq \mu(X) \leq 1$, neste caso, sempre há pelo menos uma medida invariante a medida nula que tem entropia zero.

Corolário 2.6.2. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e T uma transformação contínua, então a entropia topológica $h(\phi)$ é igual a entropia de Dinaburg-Bowen $h_d(\phi)$, ou seja,*

$$h(\phi) = h_d(\phi).$$

Demonstração: Quando o espaço X é compacto a compactificação por um ponto só acrescenta um ponto "∞" e qualquer distância definida em X é induzida por uma distância em $X \cup \{\infty\}$ onde, por exemplo, o ponto ∞ está a uma distância fixa "grande" D de todos os outros pontos (considerar D maior que a metade do diâmetro de X é suficiente). Logo $h_d(\phi)$ definido em X é igual à $h_{\widetilde{d}}(\widetilde{\phi})$ definido em $X \cup \{\infty\}$. Pelo Princípio Variacional da entropia (Teorema 2.6.1), temos que $h(\phi) = h_{\widetilde{d}}(\widetilde{\phi})$, logo $h(\phi) = h_d(\phi)$, onde a distância d é dada pela distância no compacto. ■

Corolário 2.6.3. *Seja X um espaço metrizável separável e localmente compacto e seja $\phi : X \to X$ uma tranformação contínua própria, se $k \in \mathbb{N}$ então*

$$h(\phi^k) = k.h(\phi).$$

Demonstração: A igualdade vale para a entropia de Kolmogorov-Sinai pela Proposição 2.3.5, logo, aplicando o Princípio Variacional 2.6.1, a igualdade também é válida para a entropia topológica. ∎

A seguir demonstramos que para calcular a entropia topológica de uma transformação basta restringir a transformação ao fecho dos pontos recorrentes. Este resultado será útil mais a frente quando demonstrarmos os principais resultados do trabalho.

Corolário 2.6.4. *Seja $\phi : X \to X$, uma transformação contínua e X um espaço métrico separável e localmente compacto então a entropia topológica $h(\phi)$ é igual a entropia topológica da transformação ϕ restrita ao fecho do conjunto dos pontos recorrentes $\overline{\mathcal{R}_\phi}$, ou seja,*

$$h(\phi) = h(\phi|_{\overline{\mathcal{R}_\phi}}).$$

Demonstração: De fato, para calcular $h_\mu(\phi)$ com respeito a uma métrica ϕ-invariante μ, basta calcular a entropia de ϕ restrita ao suporte de μ. Pela Proposição 2.2.6 o suporte de uma medida ϕ-invariante μ está sempre contido no fecho do conjunto dos pontos recorrentes $\mathcal{R}_\phi$. Pelo Princípio Variacional da Entropia (Teorema 2.6.1) temos que $\sup_\mu h_\mu(\phi) = h(\phi)$, agora, como $\sup_\mu h_\mu(\phi) = \sup_\mu h_\mu(\phi|_{\overline{\mathcal{R}_\phi}})$ temos então que $h(\phi) = h(\phi|_{\overline{\mathcal{R}_\phi}})$. ∎

2.7 Entropia em fibrados

Neste trabalho já vimos que a entropia de Kolmogorov-Sinai ($h_\mu(\phi)$) em produtos cartesianos é a soma das entropias dos fatores (item b da Proposição 2.3.5). Para distâncias d na Proposição 2.5.6 vimos que a entropia de Dinaburg-Bowen no produto cartesiano é menor ou igual a soma das entropia nos fatores. Nesta seção, estenderemos estes resultados para fibrados e, de fato, vamos demonstrar primeiro que a entropia de Dinaburg-Bowen de uma transformação num fibrado é limitada superiormente pela soma da entropia da transformação induzida na base com o supremo da entropia em cada uma de suas fibras.

Proposição 2.7.1. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos compactos, $\phi : X \to X$, $\psi : Y \to Y$ e $\pi : X \to Y$ aplicações contínuas com π sobrejetora e $\pi \circ \phi = \psi \circ \pi$. Então*

$$h_d(\phi) \leq h_{d'}(\psi) + \sup_{y \in Y} h_d(\phi, \pi^{-1}(y)).$$

Demonstração: Para simplificar a notação usaremos a convenção

$$d_n(x,y) = \max_{1\leq k\leq n}(\phi^k(x), \psi^k(y)),$$

lembrando que podemos fazer isso de acordo com a Observação 2.5.5. Podemos supor que $a = \sup_{y\in Y} h_d(\phi, \pi^{-1}(y)) < \infty$, já que o caso $a = \infty$ é trivial.

Seja $\epsilon > 0$ e fixado $\alpha > 0$, escolha para cada $y \in Y$ um número $m(y) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m(y)} \log r^{\phi}_{m(y)}(\epsilon, \pi^{-1}(y)) \leq h_d(\phi, \pi^{-1}(y)) + \alpha \leq a + \alpha. \tag{2.1}$$

De fato, esse número existe pois

$$r_\phi(\epsilon, \pi^{-1}(y)) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r^{\phi}_n(\epsilon, \pi^{-1}(y))$$

e

$$h_d(\phi, \pi^{-1}(y)) = \lim_{\epsilon\to 0} r_\phi(\epsilon, \pi^{-1}(y)) = \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r^{\phi}_n(\epsilon, \pi^{-1}(y)).$$

Para cada $y \in Y$, seja $E_y \subset X$ um conjunto $(m(y), \epsilon)$-gerador minimal de $\pi^{-1}(y)$, i.e., com $r^{\phi}_{m(y)}(\epsilon, \pi^{-1}(y))$ elementos. Então $U_y = \cup_{z\in E_y} B^{\phi}_{m(y)}(z, 2\epsilon)$ é uma vizinhança aberta de $\pi^{-1}(y) = \bigcap_{\gamma>0} \pi^{-1}(\overline{B(y,\gamma)})$. Assim, temos que

$$(X \setminus U_y) \cap (\bigcap_{\gamma>0}(\pi^{-1}(\overline{B(y,\gamma)})) = \varnothing$$

é uma interseção de compactos vazia e então, pela compacidade de X, existe uma subcoleção finita com interseção vazia, e então neste caso, existe um $\gamma = \gamma(y)$ tal que $\pi^{-1}(\overline{B(y,\gamma)}) \cap (X \setminus U_y) = \varnothing$, ou seja, $\pi^{-1}(\overline{B(y,\gamma)}) \subset U_y$.

Considere $B(y_1, \gamma_1), ..., B(y_r, \gamma_r)$ uma cobertura finita de Y e δ seu número de Lebesgue. Seja E_n um conjunto (n, δ)-gerador minimal de Y com $r^S_n(\delta, Y)$ elementos. Para cada $y \in E_n$ e $0 \leq j \leq n$, escolha um $c_{j,y} \in \{y_1, ..., y_r\}$ tal que

$$\overline{B(\psi^j(y), \delta)} \subset B(c_{j,y}, \gamma_{j,y}),$$

onde $\gamma_{j,y}$ é o raio γ correspondente a $c_{j,y}$.

Para cada $y \in E_n$, seja $b_{s,y} := c_{t_s(y),y}$ e $\gamma'_{j,y} := \gamma_{t_s(y),y}$, onde construímos a sequência $t_j(y)$ por indução da forma

$$t_0(y) = 0$$
$$t_{s+1}(y) = t_s(y) + m(b_{s,y}),$$

parando quando $t_{q+1}(y) \geq n$. Como q depende de y escreveremos $q(y)$.

Dado $y \in E_n$, $z_1 \in E_{b_{1,y}}$, $z_2 \in E_{b_{2,y}}$, ... , $z_{q(y)} \in E_{b_{q(y),y}}$, defina

$$V(y, z_1, ..., z_{q(y)}) = \{u \in X : d(\phi^{t+t_s(y)}(u), \phi^t(z_s)) < 2\epsilon, \\ \text{para todo } 0 \leq t \leq m(b_{s,y}) \text{ e } 0 \leq s \leq q(y)\}.$$

Note que o último $t + t_s(y)$ é igual à $m(b_{q(y),y}) + t_q(y) = t_{q+1}(y) \geq n$.

Agora, afirmamos que para estas vizinhanças V temos que

$$\bigcup_{(y,z_1,...,z_{q(y)})} V(y, z_1, ..., z_{q(y)}) = X.$$

De fato, dado $u \in X$, tome $y \in E_n$ tal que $d_n(y, \pi(u)) < \delta$. Fixado s onde, $0 \leq s \leq q(y)$, temos que $0 \leq t_s(y) \leq n-1$ e então $d'(\psi^{t_s(y)}(\pi(u)), \psi^{t_s(y)}(y)) \leq \delta$. Daí temos

$$\pi(\phi^{t_s(y)}(u)) = \psi^{t_s(y)}(\pi(u)) \in B(\psi^{t_s(y)}(y), \delta) \subset B(b_{s,y}, \gamma'_{s,y}),$$

e assim

$$\phi^{t_s(y)}(u) \in \pi^{-1}(B(b_{s,y}, \gamma'_{s,y})) \subset U_{b_{s,y}} = \bigcup_{z \in E_{b_{s,y}}} B^{\phi}_{m(b_{s,y})}(z, 2\epsilon).$$

Logo existe $z_s \in E_{b_{s,y}}$ tal que $d\left(\phi^t(\phi^{t_s(y)}(u)), \phi^t(z_s)\right) < 2\epsilon$ para $0 \leq t < m(b_{s,y})$, demonstrando a afirmação.

Agora, se F é um conjunto $(n, 4\epsilon)$-separado então $F \cap V(y, z_1, ..., z_{q(y)})$ tem no máximo um elemento. Pois V tem diâmetro no máximo 4ϵ em distância dinâmica de X enquanto que um conjunto $(n, 4\epsilon)$-separado em X tem as distâncias dinâmicas entre elementos distintos maiores que 4ϵ.

Como $\#E_{b_{s,y}} = r_{m(b_{s,y})}(\epsilon, \pi^{-1}(b_{s,y}))$ temos que para cada $y \in E_n$, a quantidade máxima de $q(y)$-uplas $(z_1, ..., z_{q(y)})$ é

$$N_x = \prod_{s=1}^{q(y)} \#E_{b_{s,y}}.$$

Então lembrando da desigualdade (2.1) e de $\#E_{b_{s,y}}$ em termos de r_m temos

$$\log N_x = \sum_{s=1}^{q(y)} \log(\#E_{b_{s,y}}) \leq (a + \alpha) \sum_{s=0}^{q(y)} m(b_{s,y}). \tag{2.2}$$

Agora observe que $t_{q(y)}(y) = \sum_{s=0}^{q(y)-1} m(b_{s,y})$ e então, pondo

$$M = \text{máx } \{m(y_1), ..., m(y_r)\},$$

temos que

$$\sum_{s=0}^{q(y)} m(b_{s,y}) = t_{q(y)}(y) + m(b_{s,y}) \leq n + M. \tag{2.3}$$

Logo das desigualdades (2.2) e (2.3) obtemos

$$\log N_x \leq (a+\alpha).(n+M),$$

e assim, $N_x \leq e^{(a+\alpha).(n+M)}$. A partir desta desigualdade e lembrando que para cada $y \in E_n$ os conjuntos $V(y, z_1, ..., z_{q(y)})$ tem no máximo um elemento qualquer de um conjunto $(n, 4\epsilon)$-separado em X temos então que

$$s_n^{\phi}(4\epsilon, X) \leq \#E_n.e^{(a+\alpha).(n+M)}.$$

Deste modo obtemos

$$\frac{1}{n}\log s_n^{\phi}(4\epsilon, X) \leq \frac{1}{n}\log(\#E_n) + \frac{1}{n}(a+\alpha).(n+M),$$

e assim,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log s_n^{\phi}(4\epsilon, X) \leq r_{\psi}(\delta, Y) + a + \alpha \leq h_{d'}(S) + a + \alpha.$$

Tomando $\epsilon \to 0$ nesta desigualdade e como α é arbitrário positivo, obtemos

$$h_d(\phi) \leq h_{d'}(\psi) + a = h_{d'}(\psi) + \sup_{y\in Y} h_d(\phi, \pi^{-1}(y)),$$

como queríamos demonstrar. ■

Para demonstrar nosso resultado principal (Teorema 4.4.2), na Proposição a seguir vamos apresentar uma generalização parcial para espaços não compactos do resultado do Bowen anterior (Proposição 2.7.1 ou Teorema 19 de [3]).

Proposição 2.7.2. *Sejam X e Y espaços topológicos metrizáveis e localmente compactos. Se o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow[\varphi]{} & Y \end{array}$$

e as aplicações π, ϕ e φ são próprias e contínuas e π é sobrejetora então

$$h(\phi) \leq h(\varphi) + \sup_{y\in Y} h_{d_X}\left(\phi, \pi^{-1}(y)\right),$$

onde d_X é a distância induzida por uma distância da compactificação por um ponto.

Demonstração: Podemos considerar $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$, as compactificações por um ponto de X e Y, e o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{\phi}"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "\widetilde{\pi}"] \\ \widetilde{Y} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"'] & \widetilde{Y} \end{tikzcd}$$

onde $\widetilde{\pi}$, $\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\varphi}$ são aplicações contínuas, dadas pelas extensões naturais das aplicações contínuas π, ϕ e φ; além disso, temos que este diagrama comuta. Agora, podemos aplicar a Proposição 2.7.1 para espaços compactos, e como em espaços compactos $h = h_d$ (Corolário 2.6.2), temos então

$$h(\widetilde{\phi}) \leq h(\widetilde{\varphi}) + \sup_{y \in \widetilde{Y}} h_{d_{\widetilde{X}}} \left(\widetilde{\phi}, \widetilde{\pi}^{-1}(y)\right),$$

onde $d_{\widetilde{X}}$ é a distância de $\widetilde{X}$. Como $\widetilde{\pi}^{-1}(\infty) = \infty$ e $\widetilde{\phi}^{-1}(\infty) = \infty$ temos que

$$h_{d_{\widetilde{X}}} \left(\widetilde{\phi}, \widetilde{\pi}^{-1}(\infty)\right) = 0,$$

e então

$$\sup_{y \in \widetilde{Y}} h_{d_{\widetilde{X}}} \left(\widetilde{\phi}, \widetilde{\pi}^{-1}(y)\right) = \sup_{y \in Y} h_{d_X} \left(\phi, \pi^{-1}(y)\right),$$

onde d_X é a distância induzida por $d_{\widetilde{X}}$. Pelo Princípio Variacional (Teorema 2.6.1) temos que $h = h_{d_X}$ se a distância d_X vier da compactificação por um ponto. Pela Proposição 2.3 de [18] temos que a entropia da compactificação é igual a entropia original, ou seja, $h(\widetilde{\phi}) = h(\phi)$ e $h(\widetilde{\varphi}) = h(\varphi)$, demonstrando a Proposição. ■

Quando a transformação ϕ é "compatível" com a ação de um grupo T em X, temos mais estrutura no espaço X. Neste caso, conseguimos um resultado mais preciso: a entropia de ϕ é menor ou igual à entropia φ mais a entropia de τ que é a transformação em T induzida por ϕ. Para definir esta compatibilidade, vamos começar com a definição de fibrado T-principal, neste caso temos que o diagrama da Proposição 2.7.2 comuta e $\phi(x.t) = \phi(x).\tau(t)$.

Explicitando todos os elementos desta estrutura. Temos T um grupo e (X, d_X), (Y, d_Y) e (T, d_T) espaços métricos; $\pi : X \to Y$ uma aplicação contínua e sobrejetora; $p : X \times T \to X$ uma ação livre contínua, denotada por $p(x,t) = x.t$, onde

(i) $\pi^{-1}(\pi(x)) = x.T = p(x,T)$ e

(ii) $x.t = x.t' \Rightarrow t = t'$.

Se $\phi : X \to X$, $\varphi : Y \to Y$ e $\tau : T \to T$ são aplicações contínuas e se, $\varphi \circ \pi = \pi \circ \phi$ e $\phi(x.t) = \phi(x).\tau(t)$, para todos $x \in X$ e $t \in T$. Temos que a ação ϕ é "compatível" com a ação do grupo T em X e que ϕ induz a ação τ em T

Proposição 2.7.3. *Sejam X e Y espaços topológicos metrizáveis e localmente compactos. Se o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

e as aplicações π, ϕ e φ são próprias e contínuas, e se além disso, $\pi : X \to Y$ é um fibrado T-principal, onde T é um grupo compacto, e existe $\tau : T \to T$ tal que

$$\phi(x.t) = \phi(x).\tau(t),$$

para todo $x \in X$ e $t \in T$, então

$$h(\phi) \leq h(\varphi) + h(\tau).$$

Demonstração: Seja $p : X \times T \to X$ a ação livre contínua associada ao fibrado T-principal $\pi : X \to Y$. Defina $\widetilde{p} : \widetilde{X} \times T \to \widetilde{X}$ a extensão de p com $p(\infty, t) = \infty.t = \infty$, para todo $t \in T$. Afirmamos que $\widetilde{p}$ é uma ação contínua. De fato, seja $x_n \to \infty$ e $t_n \to t$. Se $x_n.t_n$ não converge para ∞, então existe $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $x_{n_k}.t_{n_k} \in K$, onde $K = \widetilde{X} \backslash B_{d_{\widetilde{X}}}(\infty, \varepsilon)$. Como K é compacto, então existe $x \in K$ tal que $x_{n_{k_j}}.t_{n_{k_j}} \to x$ e

$$x_{n_{k_j}} = x_{n_{k_j}}.t_{n_{k_j}}.t_{n_{k_j}}^{-1} \to x.t^{-1}.$$

O que contradiz $x_n \to \infty$, mostrando que $\widetilde{p}$ é contínua. Agora por compacidade, dada uma distância d_T de T e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $d_T(t, t') < \delta$, então $d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}.t, \widetilde{x}.t') < \varepsilon$, para todo $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$. Logo, se $d_T(t, t') < \delta$, então $d_X(x.t, x.t') < \varepsilon$, para todo $x \in X$. Agora, dado $y \in Y$, considere $x \in \pi^{-1}(y)$. Então $d_T(\tau^k(t), \tau^k(t')) < \delta$ implica que

$$d_X\left(\phi^k(x.t), \phi^k(x.t)\right) = d_X\left(\phi^k(x).\tau^k(t), \phi^k(x).\tau^k(t')\right) < \varepsilon.$$

Logo, se T_n é um conjunto (n, δ)-gerador de T para τ, então $x.T_n$ é um conjunto (n, ε)-gerador de $\pi^{-1}(y) = x.T$ para ϕ. Então $r_n^{\phi}(\varepsilon, \pi^{-1}(y)) \leq r_n^{\tau}(\delta, T)$, onde $r_n^{\phi}(\varepsilon, Y)$ é a menor cardinalidade de um conjunto (n, ε)-gerador de $Y \subset X$ para uma transformação contínua $\phi : X \to X$. Isto implica que

$$h_{d_X}\left(\phi, \pi^{-1}(y)\right) \leq h_{d_T}(\tau)$$

e como T é compacto pelo Teorema 2.6.2 temos que $h_{d_T}(\tau) = h(\tau)$. Obtemos agora então a desigualdade a partir da Proposição anterior 2.7.2. ■

2.8 Pares de Li-Yorke

Em um sistema dinâmico, a entropia positiva da transformação pode ser entendida como um indicador da "caoticidade" do sistema. De fato. Veremos a seguir um outro indicador de caoticidade que tem uma relação próxima com a entropia positiva: a presença no sistema dinâmico dos chamados *pares de Li-Yorke.*

Definição 2.8.1. *Dada uma transformação contínua $\phi : X \to X$ de um espaço topológico X, um par $(a, b) \in X \times X$ é chamado de par de Li-Yorke quando $a \neq b$ e existem duas sequências $n_k \to \infty$ e $m_k \to \infty$ e existe $c \in X$ tal que*

$$(\phi^{n_k}(a), \phi^{n_k}(b)) \to (a, b)$$

e

$$(\phi^{m_k}(a), \phi^{m_k}(b)) \to (c, c).$$

O principal resultado desta seção diz que se a entropia de um sistema dinâmico for positiva então existe um par de Li-Yorke no sistema dinâmico (Teorema 2.8.10). O tratamento que usamos aqui segue [6].

Na literatura é encontrada a definição de pares de Li-Yorke em espaços compactos como o par (a, b) com $a \neq b$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} d(\phi^n(a), \phi^n(b)) > 0 \text{ e } \liminf_{n\to\infty} d(\phi^n(a), \phi^n(b)) = 0.$$

Se um par satisfaz a primeira definição, este par naturalmente também satisfaz a segunda definição. Preferiremos a primeira definição por se adaptar melhor ao caso não compacto e ser consequência mais natural da entropia positiva.

Definição 2.8.2. *Dada uma transformação $\phi : X \to X$, dizemos que uma medida de probabilidade ϕ-invariante μ é ϕ-ergódica se sempre que um subconjunto $S \subset X$ é ϕ-invariante temos $\mu(S) = 0$ ou $\mu(S) = 1$.*

Lembrando, que o Teorema 2.3.6 afirma que para uma transformação contínua ϕ definida em um espaço métrico compacto sempre existe uma medida de probabilidade Boreliana ϕ-invariante. De fato, para espaços compactos temos um resultado ainda mais forte.

Teorema 2.8.3. *Toda tranformação contínua ϕ definida em um espaço compacto metrizável X tem uma medida de probabilidade Boreliana ϕ-ergódica.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada, por exemplo, no Teorema 4.1.11 de [14].

A partir de agora nos restringiremos a transformações próprias. Uma transformação é definida como própria se a imagem inversa de um compacto é sempre um conjunto compacto. No caso de transformações próprias é possível estender o domínio X para a sua compactificação por um ponto $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$, de forma contínua, definindo $\widetilde{\phi}(\infty) = \infty$ e $\widetilde{\phi}(x) = \phi(x)$ para todo $x \in X$.

Se X é um espaço metrizável separável e localmente compacto então a sua compactificação por um ponto $\widetilde{X}$ é compacta metrizável. De fato, isto é uma consequência do Teorema de Metrização de Urysohn. Veja, por exemplo, os Teoremas 9.10, 11.2 e 11.3 de [4].

Proposição 2.8.4. *Seja X um espaço metrizável separável localmente compacto e seja $\phi : X \to X$ uma transformação contínua própria, se $h(\phi) > 0$ então existe μ ϕ-ergódica tal que $h_\mu(\phi) > 0$.*

Demonstração: Se X satisfaz as condições da Proposição então a sua compactificação por um ponto $\widetilde{X}$ é compacto metrizável e temos que $\widetilde{\phi}$ é contínua em $\widetilde{X}$. Pela Proposição 2.3 de [18] temos que a entropia da compactificação é igual a entropia original, ou seja, $h(\phi) = h(\widetilde{\phi})$.

Pelo Corolário 8.6.1 item (i) de [22] temos que

$$\sup_{\widetilde{\mu}} h_{\widetilde{\mu}}(\widetilde{\phi}) = h(\widetilde{\phi}),$$

onde $\widetilde{\mu}$ é tomado entre todas as medidas $\widetilde{\phi}$-ergódicas, e então existe uma medida de probabilidade $\widetilde{\phi}$-ergódica $\widetilde{\mu}$ tal que $h_{\widetilde{\mu}}(\widetilde{\phi}) > 0$. Agora, como $\{\infty\}$ é um conjunto invariante temos que $\mu(\{\infty\}) = 0$ ou $\mu(\{\infty\}) = 1$. Mas, se $\mu(\{\infty\}) = 1$, temos que $h_{\widetilde{\mu}}(\widetilde{\phi}) = 0$, o que é uma contradição. Logo $\mu(\{\infty\}) = 0$ e temos que $h_\mu(\phi) = h_{\widetilde{\mu}}(\widetilde{\phi}) > 0$, como queríamos demonstrar. ∎

Antes de demonstrar o Teorema 2.8.10 precisaremos da definição de esperança condicional e algumas de suas propriedades (seção 34 de [2]). Dizemos que uma função real $Z : X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{F}$-mensurável em uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ se para todo aberto $U \subset \mathbb{R}$ a imagem inversa $Z^{-1}(U)$ está em $\mathcal{F}$.

Definição 2.8.5. *Dado um espaço de probabilidade (X, Σ, μ), uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ contida em Σ e uma função Σ-mensurável Z definimos uma nova função $E(Z|\mathcal{F})$ que é $\mathcal{F}$-mensurável, integrável e*

$$\int_A Z d\mu = \int_A E(Z|\mathcal{F}) d\mu, \text{ para todo } A \subset \mathcal{F}.$$

Usando o Teorema de Radon-Nikodin é possível demonstrar que $E(Z|\mathcal{F})$ está bem definida e é única a menos de um conjunto de medida 0, ou seja, se duas funções *satisfazem a igualdade anterior então elas são diferentes em, no máximo, um conjunto de medida zero.*

Além disso, precisaremos de duas propriedades de variáveis aleatórias (Teorema 34.2 (i), (iii) e Teorema 16.10 (i) de [2]).

Proposição 2.8.6. *Dado um espaço de probabilidade (X, Σ, μ), uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ contida em Σ.*

(i) Se $Z \geq 0$ então $E(Z/\mathcal{F}) \geq 0$.

(ii) Se $Z \geq 0$ e $\int Z d\mu = 0$ então $Z = 0$ quase sempre.

Agora definiremos a σ-álgebra de Pinsker e uma medida produto λ_μ em $X \times X$ baseada na σ-álgebra de Pinsker e μ. Para uma referência sobre σ-álgebra de Pinsker veja o Teorema 18.1 de [10].

Definição 2.8.7. *(σ-álgebra de Pinsker e medida produto). Para uma medida ϕ-invariante própria a σ-álgebra de Pinsker $\mathcal{P}$, é a sub-σ-álgebra tal que $h_\mu(\phi, \mathcal{P}) = 0$, ou seja, se uma partição finita $\mathcal{D}$ tem todos os seus elementos em $\mathcal{P}$ então $h_\mu(\phi, \mathcal{D}) = 0$.*

O produto de μ consigo mesma sobre $\mathcal{P}$, denotado por λ_μ, é a medida em $X \times X$ tal que para dois conjuntos mensuráveis A, $B \subset X$, temos

$$\lambda_\mu(A \times B) = \int E(1_A|\mathcal{P}).E(1_B|\mathcal{P})d\mu.$$

Se a transformação ϕ é própria e μ é ϕ-ergódica, então λ_μ é $\phi \times \phi$-ergódica (veja Teorema 19.27 de [10]). Também note que se $\mu(A) = 0$ então $A \in \mathcal{P}$.

Lema 2.8.8. *Seja Δ, o conjunto dos pontos diagonais em $X \times X$, ou seja,*

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}.$$

Se ϕ é uma transformação própria então para uma medida ϕ-ergódica μ tal que $h_\mu(\phi) > 0$, temos

$$\lambda_\mu(\Delta) = 0.$$

Demonstração: Como λ_μ é ergódica e Δ é $\phi \times \phi$-invariante é suficiente mostrar que $\lambda_\mu(\Delta) \neq 1$. Suponha, por absurdo, que $\lambda_\mu(\Delta) = 1$. Então para qualquer conjunto mensurável $B \subset X$,

$$\int E(1_B|\mathcal{P}).E(1_{B^c}|\mathcal{P})d\mu = \lambda_\mu(B \times B^c) = 0,$$

pois $B \times B^c \subset \Delta^c$. E como a esperança condicional de uma função não-negativa é não-negativa (item (ii) de 2.8.6) temos que

$$E(1_B|\mathcal{P}).E(1_{B^c}|\mathcal{P}) = 0 \tag{2.4}$$

quase sempre. Seja

$$A = \{x \in X | E(1_B|\mathcal{P}) \neq 0\}.$$

Como $E(1_B|\mathcal{P})$ é uma função $\mathcal{P}$-mensurável temos que $A \in \mathcal{P}$. Agora,

$$\begin{aligned} \mu(B \setminus A) &= \int_{A^c} 1_B d\mu \\ &= \int_{A^c} E(1_B|\mathcal{P}) d\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

De forma semelhante,

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus B) &= \int_{A} 1_{B^c} d\mu \\ &= \int_{A} E(1_{B^c}|\mathcal{P}) d\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

onde a última igualdade, agora, vem do fato de que em A temos que $E(1_B|\mathcal{P}) \neq 0$ e pela equação (2.4) anterior, temos que $E(1_{B^c}|\mathcal{P}) = 0$ em A quase sempre.

Como A está em $\mathcal{P}$ e os conjuntos de medida zero estão em $\mathcal{P}$ temos que B também está em $\mathcal{P}$. De fato, como $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ temos que $A \cap B$ está em $\mathcal{P}$. Agora, como $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ obtemos que B está em $\mathcal{P}$. Mas como B é arbitrário temos, pela definição de σ-álgebra de Pinsker, que $h_\mu(\phi, \mathcal{D}) = 0$ para qualquer partição $\mathcal{D}$ e então $h_\mu(\phi) = 0$, o que contradiz a hipótese do Lema. Logo $\lambda_\mu(\Delta) \neq 1$ e $\lambda_\mu(\Delta) = 0$, como queríamos demonstrar. ∎

Lema 2.8.9. *Dados μ e λ_μ como na Definição 2.8.7, se*

$$z \in \operatorname{supp}(\mu) \text{ então } (z, z) \in \operatorname{supp}(\lambda_\mu).$$

Demonstração: Suponha por contradição que $z \in \operatorname{supp}(\mu)$ e que (z, z) não está no suporte de λ_μ. Logo existe uma vizinhança U de (z, z), tal que $\lambda_\mu(U) = 0$. Neste caso, existe uma vizinhança A de z tal que $(z, z) \in A \times A \subset U$ e então,

$$\begin{aligned}
\lambda_\mu(U) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_\mu(A \times A) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int E(1_A|\mathcal{P})^2 d\mu = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad E(1_A|\mathcal{P})^2 = 0 \text{ quase sempre} \\
&\Leftrightarrow \quad E(1_A|\mathcal{P}) = 0 \text{ quase sempre} \\
&\Leftrightarrow \quad \int E(1_A|\mathcal{P}) d\mu = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int 1_A d\mu = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mu(A) = 0.
\end{aligned}$$

Como $z \in A$ e z está no suporte de μ temos uma contradição. ■

Teorema 2.8.10. *Seja X um espaço metrizável separável localmente compacto e seja $\phi : X \to X$ uma transformação contínua própria. Se $h(\phi) > 0$ então existe um par de Li-Yorke para este sistema.*

Demonstração: Pela Proposição 2.8.4 existe uma medida ϕ-ergódica μ tal que $h_\mu(\phi) > 0$. Seja $Z = \text{supp}(\mu)$ e $W = \text{supp}(\lambda_\mu)$. Para cada aberto não vazio $U \subset X \times X$ na topologia relativa à W, seja

$$W_U = \limsup_{n\to\infty} \phi^{-n}(U) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \phi^{-n}(U).$$

Ou seja, W_U contém todos os pontos de X cujas órbitas passam infinitas vezes em U. Temos que W_U é ϕ-invariante, além disso, note que $\cup_{n=k}^{\infty} \phi^{-n}(U)$ é uma sequência de conjuntos decrescente em k. E para todo k,

$$\lambda_\mu(\cup_{n=k}^{\infty} \phi^{-n}(U)) \geq \lambda_\mu(U) > 0.$$

Pela continuidade da medida temos que $\lambda_\mu(W_U) \geq \lambda_\mu(U) > 0$ e então pela ergodicidade de λ_μ temos que $\lambda_\mu(W_U) = 1$.

Agora, se β é uma base enumerável para a topologia de W e se

$$W_\beta = \bigcap_{U\in\beta} W_U,$$

temos que $\lambda_\mu(W_\beta) = 1$. Lembrando que $\lambda_\mu(\Delta) = 0$ (Lema 2.8.8), temos

$$\lambda_\mu(W_\beta \setminus \Delta) = 1.$$

Note agora que W_β é o conjunto dos pontos cujas órbitas passam infinitas vezes em uma base enumerável de W, além disso, pelo Lema 2.8.9 temos que para todo $z \in \text{supp}(\mu)$ temos $(z, z) \in \text{supp}(\lambda_\mu) \subset W_\beta$. Então se escolhermos $(a, b) \in W_\beta \setminus \Delta$ temos que $a \neq b$, e que a órbita de (a, b) passa infinitas vezes sobre qualquer aberto contendo (a, b) logo, em particular, $(\phi^n(a), \phi^n(b))$ tem subsequência que converge para (a, b). De forma semelhante, $(\phi^n(a), \phi^n(b))$ tem subsequência que converge para $(c, c) \in \text{supp}(\lambda_\mu)$ onde $c \in \text{supp}(\mu)$, ou seja, (a, b) é par de Li-Yorke. ■

É interessante notar que no final da demonstração anterior, temos que um par de Li-Yorke $(a, b) \in W_\beta \setminus \Delta$ tem uma órbita densa em $W = \text{supp}(\lambda_\mu)$.

Este Teorema será usado neste trabalho na direção reversa, ou seja, se não existem pares de Li-Yorke no sistema então a entropia da transformação é nula. De fato, no capítulo 3 mostraremos uma "lei de composição" da não-existência de pares de Li-Yorke (Proposição 4.3.3) e usaremos o Teorema anterior de forma crucial para demonstrar o resultado principal do trabalho (Teorema 4.4.2).

Capítulo 3

Teoria de Lie

3.1 Grupos de Lie

Neste capítulo, apresentaremos os resultados sobre a estrutura de Grupos de Lie e suas álgebras que foram necessários na demonstração do resultado principal (Teorema 4.4.2). Na primeira seção, estudaremos recobrimentos de grupos, grupos nilpotentes, grupos solúveis, grupos semissimples e endomorfismos de grupos; e terminaremos com o Teorema Fundamental do Centro (Teorema 3.1.13), um resultado-chave no trabalho.

Na seção seguinte, estudamos em detalhes o Toro maximal do centro do grupo, que acaba se tornando o foco de nosso resultado principal. Na última seção, demonstraremos o Teorema 3.3.3, um resultado técnico que analisa endomorfismos em grupos solúveis.

Dado um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, denotaremos por G_0 a *componente conexa da identidade de G*. Temos que G_0 é subgrupo normal de G. De fato, para qualquer $g \in G$, como $1 \in gG_0g^{-1}$ temos que gG_0g^{-1} é a componente conexa que contém a identidade, ou seja, $gG_0g^{-1} = G_0$. Além disso, como G_0 é um subgrupo aberto e fechado de G temos que G/G_0 é um subgrupo discreto já que as componentes conexas de G_0 são disjuntas entre si.

O *centro de G* denotado por

$$Z(G) = \{h \in G : gh = hg, \text{ para todo } g \in G\},$$

é um subgrupo fechado e normal de G. Quando $G = G_0$, a álgebra de $Z(G)$ é o *centro de $\mathfrak{g}$*,

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{H \in \mathfrak{g} : [H, X] = 0, \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\},$$

é um ideal de $\mathfrak{g}$ (veja o Lema 11.1.1 de [11]). Um isomorfismo entre grupos de Lie é um isomorfismo de grupos que é um difeomorfismo. Diremos que os grupos de Lie

G e H são isomorfos, $G \simeq H$, se existe um isomorfismo entre G e H. O seguinte resultado pode ser achado na seção 9.5 de [11], especialmente no Teorema 9.5.4, com a exceção do fato que $\widetilde{\Gamma}$ é finitamente gerado, que pode ser achado quando combinamos $\widetilde{\Gamma} \simeq \pi_1(G)$ com o Corolário 14.2.10 (iv) de [11].

Teorema 3.1.1. *Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então existem um grupo de Lie simplesmente conexo $\widetilde{G}$ e um subgrupo discreto e finitamente gerado $\widetilde{\Gamma}$ do seu centro de forma que $G \simeq \widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$. O grupo de Lie $\widetilde{G}$ é chamado de recobrimento universal de G é único a menos de isomorfismo e também tem álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Além disso, cada endomorfismo ϕ de G é induzido por um único endomorfismo $\widetilde{\phi}$ de $\widetilde{G}$ tal que $\widetilde{\phi}\left(\widetilde{\Gamma}\right) \subset \widetilde{\Gamma}$.*

Uma consequência deste Teorema é que qualquer grupo de Lie abeliano conexo é isomorfo ao produto de um espaço vetorial com um toro. Este toro é um grupo de Lie abeliano conexo e compacto (veja o exemplo 9.5.6 de [11]). Obtemos então que para todo grupo G a componente conexa do $Z(G)$ é o produto de um espaço vetorial e um toro. Este toro será o foco de vários dos resultados presentes neste trabalho e por isso definimos:

Definição 3.1.2. *Seja G um grupo de Lie. Denotaremos por $T(G)$ o toro maximal do centro de G.*

Será útil no nosso estudo do subgrupo de Lie $T(G)$ conhecer primeiro o grupo de endomorfismos de um toro n dimensional.

Proposição 3.1.3. *Se T é um toro em n dimensões, temos que $T \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ e então o grupo de automorfismos de T é isomorfo ao subgrupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.*

Demonstração: Temos que $\mathbb{R}^n$ é o recobrimento universal de T, então usando a parte final do Teorema 3.1.1 temos que um endomorfismo ϕ de $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ induz um endomorfismo $\widetilde{\phi}$ em $\mathbb{R}^n$, onde $\widetilde{\phi}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$, e então $\widetilde{\phi} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. ■

Seja G um grupo de Lie e seja $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie, para qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe *um único ideal maximal nilpotente* $\mathfrak{n}$ (veja Definição 5.2.10 de [11]), denominado *radical nilpotente de* $\mathfrak{g}$. O subgrupo conexo de G gerado por $\mathfrak{n}$, denotado por N, é denominado o *radical nilpotente de G*.

Para grupos nilpotentes de Lie temos duas Proposições sobre sua estrutura que não tem equivalentes para subgrupos solúveis. A Proposição a seguir pode ser encontrada no Teorema 11.2.6 e no Corolário 11.2.7 de [11].

Proposição 3.1.4. *Seja N um grupo de Lie nilpotente com álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. Então $\mathfrak{n}$ é nilpotente e* $\exp : (\mathfrak{n}, *) \to N$ *é o recobrimento universal de N, onde $(\mathfrak{n}, *)$ é um Grupo de Lie definido em $\mathfrak{n}$ e o produto é dado pela série de Dynkin (que é polinomial). Além disso, a exponencial $(\mathfrak{n}, *)$:* $\exp_{\mathfrak{n}} : \mathfrak{n} \to (\mathfrak{n}, *)$ *é a identidade em $\mathfrak{n}$ e a função exponencial $exp_N : \mathfrak{n} \to N$ é sobrejetiva em N.*

A Proposição seguinte pode ser encontrada na Proposição 11.2.9 de [11].

Proposição 3.1.5. *Seja N um grupo de Lie nilpotente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. Então $\mathfrak{n}$ é nilpotente e o seu centro é a exponencial do centro da álgebra $\mathfrak{n}$, ou seja, $Z(N) = \exp_N(\mathfrak{z}(\mathfrak{n}))$, e o centro de N é conexo.*

De forma análoga, para qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe *um único ideal maximal solúvel* $\mathfrak{r}$ (veja a Proposição 5.4.3 de [11]), denominado *radical solúvel de* $\mathfrak{g}$. O subgrupo conexo de G gerado por $\mathfrak{r}$, denotado por R, é denominado o *radical solúvel de G*.

Como $\mathfrak{r}$ é uma álgebra solúvel então $\mathfrak{r}' = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ é um ideal nilpotente de $\mathfrak{g}$ (Corolário 5.4.12 de [11]). Logo temos que $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{r}$, pois $\mathfrak{n}$ é o ideal nilpotente maximal. Em termos dos subgrupos ficamos com $R' \subset N \subset R$, onde R' é o subgrupo gerado por $\mathfrak{r}'$, e concluímos que R/N é um subgrupo abeliano conexo. Resumimos estes resultados no Corolário a seguir.

Proposição 3.1.6. *Se $\mathfrak{r}$ é o radical solúvel de $\mathfrak{g}$ então $\mathfrak{r}' = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ é um ideal nilpotente de $\mathfrak{g}$. Além disso, R/N é um subgrupo abeliano conexo onde N e R são, respectivamente, os radicais nilpotente e solúvel de G.*

Sejam $\widetilde{R}$ e $\widetilde{N}$, respectivamente, os recobrimentos universais de R e N então, por definição, temos que $\widetilde{R}$ e $\widetilde{N}$ simplesmente conexos. Além disso, como eles tem as mesmas álgebras de Lie que R e N obtemos de forma semelhante que $\widetilde{R}/\widetilde{N}$ também é um subgrupo abeliano conexo. Obtemos então o seguinte resultado (veja a Proposição 11.2.15 de [11]).

Proposição 3.1.7. *O quociente $\widetilde{R}/\widetilde{N}$ é um grupo de Lie abeliano e simplesmente conexo logo é isomorfo a um espaço vetorial, ou seja,*

$$\widetilde{R}/\widetilde{N} \simeq V,$$

onde V é um espaço vetorial de dimensão finita.

Os radicais solúveis também são caracterizados pelo seguinte resultado (veja o Lema 5.6.1 de [11] e a bijeção entre subálgebras e subgrupos conexos pelo Teorema de subgrupos integrais 9.4.8 de [11]).

Proposição 3.1.8. *O radical solúvel $\mathfrak{r}$ é único ideal solúvel de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ é semissimples. O radical solúvel R é o único subgrupo conexo normal solúvel de G tal que G/R é semissimples.*

Seja $C_g(h) = ghg^{-1}$ a conjugação por g em G. A *representação adjunta do grupo* G é a ação em $\mathfrak{g}$ dada por $\mathrm{Ad}(g)(X) = \mathrm{d}(C_g)_1(X)$, onde $X \in \mathfrak{g}$ e $\mathrm{d}(C_g)_1$ é a diferencial de C_g na identidade.

Uma caracterização útil de $Z(G)$ no caso em que G é um grupo de Lie conexo é

$$Z(G) = \{h \in G : \mathrm{Ad}(h)(X) = X \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}.$$

De fato, se G é conexo temos $G = \langle \exp \mathfrak{g} \rangle$, logo basta mostrar que

$$\mathrm{Ad}(h)(X) = X \Leftrightarrow h \exp X h^{-1} = \exp X.$$

O que decorre de $\exp(\mathrm{Ad}(h)X) = C_h(\exp X)$.

Quando G for um grupo de Lie linear, temos em especial que $\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$, pois neste caso, $\mathrm{Ad}(g)X = \mathrm{d}(C_g)_1 X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \exp(tX) g^{-1}|_{t=0} = gXg^{-1}$.

Proposição 3.1.9. *Seja $\phi : S \to S$ um endomorfismo sobrejetivo de um grupo de Lie conexo semissimples S. Então existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^k = C_g$ para algum $g \in S$ onde C_g é a conjugação por g, em particular, ϕ é um automorfismo.*

Demonstração: Note que

$$\phi^k(\exp X) = \exp\left((\phi')^k X\right).$$

Onde ϕ' é a derivada de ϕ na identidade. Mas como $\mathfrak{g}$ é semissimples sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\phi')^k$ é um endomorfismo interno de $\mathfrak{g}$ (veja o Corolário 1.3 de [7]). Isto é, existe um $k \in \mathbb{N}$ e um $g \in S$ tal que $(\phi')^k = \mathrm{Ad}(g)$ e então

$$\phi^k(\exp X) = \exp\left((\phi')^k X\right) = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) = C_g(\exp X).$$

Como S é gerado por elementos da forma $\exp X$, obtemos $\phi^k = C_g$. Além disso, temos que ϕ^k é automorfismo já que C_g é um automorfismo, concluindo que ϕ é um automorfismo. ∎

Proposição 3.1.10. *Seja $\psi : S/Z(S) \to S/Z(S)$ onde S é um grupo semissimples conexo e $Z(S)$ é o centro de S então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que ψ^k é uma restrição de uma transformação linear.*

Demonstração: Note que grupo adjunto de S é isomorfo à $S/Z(S)$ e o grupo adjunto sempre é um grupo linear pois é uma ação em $\mathfrak{g}$. Como pela Proposição anterior 3.1.9 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\psi^k = C_g$ para algum $g \in S/Z(S)$ temos que $\psi^k(h) = ghg^{-1}$, para todo $h \in S/Z(S)$. Note $C_g(h) = ghg^{-1}$ que é uma transformação linear em h, ou de forma mais precisa, $\psi^k = C_g(h)$ é uma restrição de uma transformação linear no espaço da matrizes. ∎

Lema 3.1.11. *Seja G um grupo de Lie conexo e $\phi : G \to G$ um endomorfismo contínuo sobrejetor. O núcleo do endomorfismo ϕ é finito e ϕ é uma função própria.*

Demonstração: Como $\phi : G \to G$ é um endomorfismo sobrejetor pelo Teorema 3.1.1 existe $\widetilde{\Gamma}$ um subgrupo discreto e finitamente gerado do centro de $\widetilde{G}$ tal que $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma} \simeq G$ e existe $\widetilde{\phi} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ tal que $\widetilde{\phi}\left(\widetilde{\Gamma}\right) \subset \widetilde{\Gamma}$ e o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G} \arrow[r, "\widetilde{\phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "\pi"] \\ G \arrow[r, "\phi"'] & G \end{tikzcd}$$

onde $\pi : \widetilde{G} \to G \simeq \widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$ é projeção canônica. Como $\mathrm{d}\phi_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ e $\mathrm{d}\widetilde{\phi}_1 = \mathrm{d}\phi_1$ temos que $\widetilde{\phi}(\widetilde{G}) = \widetilde{G}$, agora, como $\widetilde{G}$ é simplesmente conexo e $\widetilde{\phi}$ é recobrimento temos que $\widetilde{\phi}$ é injetora e então $\widetilde{\phi}$ é automorfismo. Temos que $g \in \ker\phi \Leftrightarrow \phi(g) = 1$, e como π é sobrejetor existe $\widetilde{g} \in \widetilde{H}$ tal que $\pi(\widetilde{g}) = g$ e então $\phi(\pi(\widetilde{g})) = \pi(\widetilde{\phi}(\widetilde{g})) = 1 \Leftrightarrow \widetilde{\phi}(\widetilde{g}) \in \widetilde{\Gamma} \Leftrightarrow \widetilde{g} \in \widetilde{\phi}^{-1}(\widetilde{\Gamma})$. Então temos que $g = \pi(\widetilde{g}) \in \pi(\widetilde{\phi}^{-1}(\widetilde{\Gamma})) = \widetilde{\phi}^{-1}(\widetilde{\Gamma})/\widetilde{\Gamma}$. Então $\ker\phi = \widetilde{\phi}^{-1}(\widetilde{\Gamma})/\widetilde{\Gamma}$. Agora, como $\widetilde{\phi}$ é automorfismo de $\widetilde{G}$ temos que $\widetilde{\phi}^{-1}(\widetilde{\Gamma})/\widetilde{\Gamma} \simeq \widetilde{\Gamma}/\widetilde{\phi}(\widetilde{\Gamma})$ e então

$$|\ker\phi| = \left|\widetilde{\phi}^{-1}(\widetilde{\Gamma})/\widetilde{\Gamma}\right| = \left|\widetilde{\Gamma}/\widetilde{\phi}(\widetilde{\Gamma})\right|.$$

Pelo Teorema 3.1.1 temos que $\widetilde{\Gamma}$ é um subgrupo discreto e finitamente gerado do centro de $\widetilde{G}$ então $\widetilde{\Gamma} \simeq \mathbb{Z}^m \oplus D$ onde D é um subgrupo abeliano finito de $\widetilde{\Gamma}$ e $m \in \mathbb{N}$. Como $\widetilde{\phi}$ é automorfismo $\widetilde{\phi}(\widetilde{\Gamma}) \simeq \mathbb{Z}^m \oplus D$. Identificando $\widetilde{\Gamma}$ com $\mathbb{Z}^m \oplus D$ obtemos que $\widetilde{\phi}(\mathbb{Z}^m) \simeq \mathbb{Z}^m$, além disso, como endomorfismos levam elementos de ordem finita em elementos de ordem finita temos que $\widetilde{\phi}(D) = D$.

Como $\widetilde{\phi}(D) = D$ o endomorfismo $\widetilde{\phi}|_{\widetilde{\Gamma}}$ induz em $\widetilde{\Gamma}/D \simeq \mathbb{Z}^m$ um endomorfismo $\theta : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^m$. Seja $\{z_i\}$ uma base para $\widetilde{\Gamma}/D$ logo $\{w_i\} = \{\theta(z_i)\} \in \theta(\mathbb{Z}^m)$ é uma base de $\theta(\mathbb{Z}^m) \subset \mathbb{Z}^m$, já que θ é induzido a partir do automorfismo $\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\phi}(\mathbb{Z}^m) \simeq \mathbb{Z}^m$. Temos então que $w_i = \sum_j a_{ij} z_j$, onde a matriz $A = \{a_{ij}\}$ tem entradas inteiras e $\det A \neq 0$. Podemos colocar a base $\{z_i\}$ em função da base $\{w_i\}$ invertendo a matriz A, de fato, $z_i = \frac{1}{\det A}\sum_j b_{ij} w_j$, onde $(\det A).A^{-1} = B = \{b_{ij}\} = C^t$ e C é a matriz dos cofatores de A. Note então que os termos $(\det A).z_i \in \theta(\mathbb{Z}^m)$ e concluímos que $|\ker\phi| = |\widetilde{\Gamma}/\widetilde{\phi}(\widetilde{\Gamma})| = |\mathbb{Z}^m/\theta(\mathbb{Z}^m)| \leq |\det A|^m$. ■

É possível mostrar que no Lema anterior 3.1.11 vale um resultado mais preciso. Usando a notação do Lema anterior temos, de fato, que $|\widetilde{\Gamma}/\widetilde{\phi}(\widetilde{\Gamma})| = |\det A|$. A demonstração usa o "escalonamento" da matriz A a partir de mudanças das bases $\{z_i\}$ e $\{w_i\}$ sem alterar o determinante de A como é feito, por exemplo, no Teorema 14.6.2 de [11], ou de forma equivalente, na chamada forma normal de Smith de uma matriz de inteiros.

Uma subvariedade imersa $L = f(V)$ é chamada de *subvariedade quasi-regular* de M se dado N um espaço topológico localmente conexo e $\psi : N \to M$ contínua assumindo valores em L. Então, $\psi : N \to L$ é sempre contínua em relação a topologia intrínseca (Defição B.2 [20]).

Lema 3.1.12. *Seja G um grupo de Lie conexo e $\phi : G \to G$ um endomorfismo contínuo, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^k(G) = H$ e $\phi(H) = H$. Além disso, H é um subgrupo fechado de G.*

Demonstração: A derivada de ϕ na identidade é uma transformação linear $\mathrm{d}\phi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, então existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathrm{d}\phi_1)^{k+1}(\mathfrak{g}) = (\mathrm{d}\phi_1)^k(\mathfrak{g})$. De fato, como $(\mathrm{d}\phi_1)^{k+1}(\mathfrak{g}) = (\mathrm{d}\phi_1)^k(\mathrm{d}\phi_1(\mathfrak{g})) \subset (\mathrm{d}\phi_1)^k(\mathfrak{g})$ se a sequência de números naturais $\dim((\mathrm{d}\phi_1)^n(\mathfrak{g}))$ for estritamente decrescente ela eventualmente seria negativa o que é uma contradição. Seja então k o menor natural tal que $(\mathrm{d}\phi_1)^{k+1}(\mathfrak{g}) = (\mathrm{d}\phi_1)^k(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$, além disso, por indução, podemos mostrar que $(\mathrm{d}\phi_1)^n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$, para todo $n \geq k$.

Seja $H = <\exp\mathfrak{h}>$, ou seja, o grupo gerado por elementos da forma $\exp X$ onde $X \in \mathfrak{h}$. Como $(\mathrm{d}\phi_1)^k(\mathfrak{g}) = \mathrm{d}\phi_1(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ e como $G = <\exp\mathfrak{g}>$ temos que $\phi^k(G) = H$ e $\phi(H) = H$.

Seja g pertencente ao fecho de H e U uma vizinhança localmente conexa de g na topologia de G e seja V uma vizinhança compacta de $\phi^k(g)$ na topologia de H visto como um grupo de Lie por si mesmo. Como H é um subvariedade quasi-regular de G, pela continuidade de $\phi^k|_U : U \to G$ e como $\phi^k|_U(U) \subset H$ segue que $\phi^k|_U : U \to H$ é contínua com relação a topologia intrínseca de H. Seja $g_n \in H \cap U$ uma sequência que converge para g na topologia de G. Temos então que $\phi^k(g_n)$ converge para $\phi^k(g)$ na topologia intrínseca de H. Então existe $l \geq 0$ tal que $\phi^k(g_n) \in V$ para todo $n \geq l$. Logo $g_n \in (\phi^k|_H)^{-1}(V)$, para todo $n \geq l$.

Como H é união enumerável de compactos temos que $\phi^k|_H : H \to H$ é um endomorfismo mensurável e então $\phi^k|_H$ é contínua (veja por exemplo [15]). Pelo Lema 3.1.11 anterior obtemos que $\phi^k|_H$ é uma função própria já que $\phi^k|_H$ é uma função sobrejetora e H é conexo. Então $(\phi^k|_H)^{-1}(V)$ é compacto na topologia de H, como a imersão de H em G é contínua temos que $(\phi^k|_H)^{-1}(V)$ também é compacto na topologia de G. Como $\phi^k(g_n) \in V$ para todo $n \geq l$, e como g_n converge para g na topologia de G, temos então que $g \in (\phi^k|_H)^{-1}(V) \subset H$ mostrando que H é fechado em G. ∎

A subálgebra $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$ está *compactamente mergulhada* se o subgrupo gerado por $\exp \mathrm{ad}(\mathfrak{k})$ tem fecho compacto em $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ e ela é *maximal* se não está propriamente contida em nenhuma outra. Dizemos que um endomorfismo $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma *derivação interna* se existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\theta(Y) = [X, Y]$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Chamamos θ de *semissimples em* $\mathbb{R}$ se θ é diagonalizável em $\mathbb{C}$, veja por exemplo, a Definição 5.3.1 nas págs. 95 e 96 de [11].

No Teorema a seguir, no item (i) vamos enunciar um resultado sobre subálgebras maximais abelianas compactamente mergulhadas (veja o Lema 14.2.4 e o Teorema 14.2.7 de [11]), no item (ii) o chamado Teorema Fundamental do Centro (veja o Teorema 14.2.8 de [11]) e no item (iii) uma consequência do Exercício 14.2.1 de [11].

Teorema 3.1.13. *Dado um grupo de Lie conexo G temos que,*

(i) A imagem de uma subálgebra maximal abeliana compactamente mergulhada por um automorfismo é também uma subálgebra maximal abeliana compactamente mergulhada. Além disso, duas subálgebras maximais abelianas compactamente mergulhadas são conjugadas por um elemento do fecho do conjunto gerado pela exponencial das derivações internas da álgebra.

(ii) (Teorema Fundamental do Centro). O centro de um grupo de Lie conexo G é dado por

$$Z(G) = \exp\{X \in \mathfrak{h} : \textit{o espectro de } \mathrm{ad}(X) \subset 2\pi i\mathbb{Z}\},$$

onde $\mathfrak{h}$ é qualquer subálgebra maximal abeliana compactamente mergulhada de $\mathfrak{g}$.

(iii) Temos que $\exp(X) \in Z(G)$ se, e somente se, $\mathrm{ad}(X)$ é semissimples em $\mathbb{R}$, ou seja, é diagonalizável em $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ e o seu espectro está em $2\pi i\mathbb{Z}$, além disso, como $\mathrm{ad}(X)$ para $X \in \mathfrak{h}$ comutam entre si eles são simultaneamente diagonalizáveis.

3.2 Toro maximal

Nesta seção, provamos alguns resultados relacionados a $T(G)$ o *toro maximal do centro do grupo de Lie G*. Começamos com um Lema conhecido cuja prova será apresentada para conveniência do leitor.

Lema 3.2.1. *Seja G um grupo de Lie conexo e T um toro que é subgrupo normal de G. Então T é um subgrupo do $Z(G)$.*

Demonstração: Seja $C_g : G \to G$ a conjugação por $g \in G$. Como T é um subgrupo normal de G, podemos considerara restrição $C_g|_T : T \to T$. Então $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$, dado por $\phi(g) = C_g|_T$, é um homomorfismo contínuo de um grupo de Lie conexo G para o grupo discreto dos automorfismos de T (veja a Proposição 3.1.3). Como a imagem de um conjunto conexo é conexo e $\phi(1) = 1$ temos que ϕ é o homomorfismo trivial. Então temos que $C_g(h) = h$, para todo $g \in G$ e para todo $h \in T$, ou seja, $T \subset Z(G)$. ■

Um subgrupo fechado H é *subgrupo característico* de G se H é invariante por qualquer automorfismo contínuo de G. Temos que se K é subgrupo fechado característico de H e H é subgrupo fechado característico de G então K é subgrupo fechado característico de G. De fato, se ϕ é automorfismo de G temos que $\phi(H) = H$ e então $\phi|_H$ é automorfismo contínuo de H e temos

$$\phi(K) = \phi|_H(K) = K.$$

Note que $T(G)$ é subgrupo característico de G para qualquer grupo de Lie G. De fato, como $Z(G)$ é característico em G temos que $\phi(T(G)) \subset Z(G)$ para qualquer automorfismo ϕ de G. Agora, $\phi(T(G))$ é um toro contido em $Z(G)$ com a mesma dimensão que $T(G)$. Como $T(G)$ é o toro maximal de $Z(G)$ temos então que $\phi(T(G)) = T(G)$.

O próximo resultado relaciona o toro maximal do centro de um grupo de Lie com o toro maximal do centro de seus radicais solúveis e nilpotentes.

Proposição 3.2.2. *Sejam G um grupo de Lie conexo, R o seu radical solúvel e N o seu radical nilpotente. Então os toros maximais dos seus centros coincidem, ou seja,*

$$T(G) = T(R) = T(N).$$

Demonstração: Como $T(G)$ é um subgrupo conexo normal abeliano de G, temos que $T(G) \subset R$ e então $T(G) \subset T(R)$. Por outro lado, seja $C_g : G \to G$ a conjugação por $g \in G$. Como R é um subgrupo característico de G, podemos considerar a restrição $C_g|_R : R \to R$. Como $T(R)$ é agora subgrupo característico de R, podemos então considerar a restrição $C_g|_{T(R)} : T(R) \to T(R)$. Isto mostra que $T(R)$ é um subgrupo normal de G que é um toro. Pelo Lema 3.2.1, temos que $T(R) \subset Z(G)$, e então $T(R) \subset T(G)$ e obtemos $T(G) = T(R)$. A demonstração que $T(G) = T(N)$ é análoga à esta, substituindo R por N. ■

Proposição 3.2.3. *Seja N um grupo de Lie nilpotente conexo e seja $T(N)$ o seu toro maximal central. Então $N/T(N)$ é simplesmente conexo.*

Demonstração: Seja $\pi : \widetilde{N} \to N$ o recobrimento universal de N, então $N \simeq \widetilde{N}/\ker(\pi)$ onde $\ker(\pi) \subset Z(\widetilde{N})$ (Teorema 3.1.1). Pela Proposição 3.1.4 temos que a exponencial é bijetora em $\widetilde{N}$. Agora, como $Z(\widetilde{N}) = \exp_{\widetilde{N}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{n}))$ (Proposição 3.1.5), $Z(\widetilde{N})$ também é simplesmente conexo e $Z(\widetilde{N})$ é isomorfo a um espaço vetorial.

Temos também pela Proposição 3.1.5 que $Z(N) \simeq \pi\left(Z(\widetilde{N})\right)$ logo $T(N) \simeq \widetilde{T}/\ker(\pi)$, onde $\widetilde{T} = \pi^{-1}(T(G))$ é isomorfo a um espaço vetorial. Por outro lado, temos que

$$\frac{N}{T(N)} \simeq \frac{\widetilde{N}/\ker(\pi)}{\widetilde{T}/\ker(\pi)} \simeq \frac{\widetilde{N}}{\widetilde{T}},$$

e então temos que $N/T(N)$ é homeomorfo ao quociente de dois espaços vetoriais e então é simplesmente conexo. ■

Se um grupo G é compacto pela Proposição 12.1.4 de [11] temos que a sua álgebra $\mathfrak{g}$ é compacta e então pelo Lema 12.1.2 (iv) [11] temos então que sua álgebra é redutível e finalmente pelo Lema 5.7.1(ii) de [11] temos que $\mathfrak{g}$ é a soma direta de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, que é uma subálgebra abeliana, com a subálgebra derivada $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, que é uma subálgebra semissimples.

Então se um grupo de Lie G for compacto e solúvel a subálgebra semissimples é trivial e temos $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, ou seja, $\mathfrak{g}$ é abeliano. Agora, pelo Teorema 3.1.1, temos que $G \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^m$ e como G é compacto $m = n$ e G é isomorfo a um toro de dimensão n. Obtemos então o seguinte resultado.

Proposição 3.2.4. *Se um grupo de Lie G é compacto e solúvel então G é um toro.*

Concluímos esta seção com o próximo resultado, que é necessário para a conexão entre a não existência de pares de Li-Yorke e o Teorema 3.3.3 que é o principal resultado da próxima seção.

Proposição 3.2.5. *Se G é um grupo de Lie conexo e R é o seu radical solúvel. Temos que $R/T(R)$ é o radical solúvel de $G/T(G)$ e que*

$$T(G/T(G)) = T(R/T(R)) = \mathbf{1},$$

onde $\mathbf{1}$ é o grupo trivial. Além disso, o radical nilpotente de $G/T(G)$ é simplesmente conexo.

Demonstração: Como $T(G) = T(R)$, pela Proposição 3.2.2, temos que $R/T(R)$ é um subgrupo conexo normal e solúvel de $G/T(G)$ e que

$$\frac{G/T(G)}{R/T(R)} \simeq \frac{G}{R}$$

é semissimples. Pela Proposição 3.1.8, temos que $R/T(R)$ é o radical solúvel de $G/T(G)$. Considerando o homorfismo canônico $\pi : R \to R/T(R)$. Temos que $\pi^{-1}(T(R/T(R))) = S$ é subgrupo de Lie compacto conexo e solúvel, que pela Proposição 3.2.4 é um toro.

Como $T(R/T(R))$ é um subgrupo normal, temos que $\pi^{-1}(T(R/T(R)))$ também é normal. Agora, pelo Lema 3.2.1, temos que $\pi^{-1}(T(R/T(R))) \subset Z(R)$, e então temos que $\pi^{-1}(T(R/T(R))) \subset T(R)$, o que implica que $T(R/T(R))$ é trivial. Pela Proposição 3.2.2 temos $T(G/T(G)) = T(R/T(R)) = \mathbf{1}$. Temos que um subgrupo H é nilpotente se, e somente se, $H/T(N) = H/T(G)$ é nilpotente (Proposição 5.2.3 (ii) de [11]). Logo $N/T(N)$ é o subgrupo nilpotente maximal de $G/T(G)$ e pela Proposição 3.2.3 obtemos que $N/T(N)$ é simplesmente conexo. ■

3.3 Ordem finita

Nesta seção, provamos o principal resultado técnico do trabalho. O Teorema 3.3.3 trata sobre um grupo de Lie conexo solúvel R e o seu radical nilpotente N. Seja ϕ um endomorfismo sobrejetor de R que induz um endomorfismo φ em $A = R/N$ (lembrando que A é um grupo de Lie abeliano conexo pelo Corolário 3.1.6) se N é *simplesmente conexo* então φ restrito ao toro maximal do grupo A tem ordem finita. Este resultado será importante, pois implicará que entre a parte solúvel e a parte nilpotente não haverá contribuição para a entropia. Primeiro, precisaremos de alguns resultados preliminares.

Proposição 3.3.1. *Seja R um grupo de Lie conexo solúvel e $\widetilde{R}$ o seu recobrimento universal, seja $\widetilde{\Gamma}$ o subgrupo discreto de $Z(\widetilde{R})$ tal que $R = \widetilde{R}/\widetilde{\Gamma}$. Se N e $\widetilde{N}$ são os radicais nilpotentes de, respectivamente, R e $\widetilde{R}$, onde $N = \widetilde{\pi}(\widetilde{N})$. Então existem isomorfismos ψ e ψ_2 tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{R} \arrow[l, "\widetilde{\pi}"'] \arrow[r, "\widetilde{\pi}_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & V \arrow[d, "\pi_2"] \\ A & A_1 \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\psi_2"] & A_2 \end{tikzcd}$$

onde $V = \widetilde{R}/\widetilde{N}$ é um espaço vetorial, $A = R/N$, $A_1 = \widetilde{R}/\widetilde{\Gamma}\widetilde{N}$, $A_2 = V/\Gamma$, com $\Gamma = \widetilde{\pi}_2(\widetilde{\Gamma})$, e os homorfismos $\widetilde{\pi}$, $\widetilde{\pi}_2$, π, π_1, π_2 são respectivamente as projeções canônicas.

Além disso, sejam $\phi : R \to R$ um endomorfismo contínuo sobrejetivo, $\widetilde{\phi} : \widetilde{R} \to \widetilde{R}$ o endomorfismo induzido por ϕ em $\widetilde{R}$, $\phi_2 : V \to V$ o endomorfismo induzido por

$\widetilde{\phi}$ *em* V*, e* $\varphi : A \to A$ *o endomorfismo induzido por* ϕ *em* A*, e* $\varphi_2 : A_2 \to A_2$ *o endomorfismo induzido por* ϕ_2 *em* A_2*. Então* φ_2 *é conjugado a* φ *pelo isomorfismo* $\psi \circ \psi_2^{-1}$ *e se* V_Γ *é o subespaço de* V *gerado por* Γ *temos que* $\pi_2(V_\Gamma) = T(A_2)$ *e que* $d(\varphi_2|_{T(A_2)})_1$ *é conjugado a* $d\left(\phi_2|_{V_\Gamma}\right)_1$ *pelo isomorfismo* $d(\pi_2|_{V_\Gamma})_1$*.*

Demonstração: Pela Proposição 3.1.7 temos que $V = \widetilde{R}/\widetilde{N}$ é um espaço vetorial já que ele é um grupo de Lie abeliano conexo e simplesmente conexo. Como $\widetilde{\Gamma}$ é um subgrupo do centro $Z(\widetilde{R})$, temos que $\widetilde{N}\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}\widetilde{N}$ e que

$$\ker(\pi \circ \widetilde{\pi}) = \ker \pi_1 = \ker(\pi_2 \circ \widetilde{\pi}_2),$$

logo podemos definir isomorfismos ψ e ψ_2 de forma que o diagrama comute.

Por definição, os isomorfismos induzidos são tais que $\phi \circ \widetilde{\pi} = \widetilde{\pi} \circ \widetilde{\phi}$ e $\varphi \circ \pi = \pi \circ \phi$. Então temos que $\varphi \circ \pi \circ \widetilde{\pi} = \pi \circ \widetilde{\pi} \circ \widetilde{\phi}$ e, usando o diagrama comutativo, obtemos $\varphi \circ \psi \circ \pi_1 = \psi \circ \pi_1 \circ \widetilde{\phi}$. Com um argumento similar, temos que $\varphi_2 \circ \psi_2 \circ \pi_1 = \psi_2 \circ \pi_1 \circ \widetilde{\phi}$. Definindo $\varphi_1 : A_1 \to A_1$ como o endomorfismo induzido por $\widetilde{\phi}$ em A_1, temos que $\varphi_1 \circ \pi_1 = \pi_1 \circ \widetilde{\phi}$ e então que $\varphi \circ \psi \circ \pi_1 = \psi \circ \varphi_1 \circ \pi_1$ e $\varphi_2 \circ \psi_2 \circ \pi_1 = \psi_2 \circ \varphi_1 \circ \pi_1$. Estes implicam que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi_1$ e que $\varphi_2 \circ \psi_2 = \psi_2 \circ \varphi_1$, o que implica que $\varphi \circ \psi \circ \psi_2^{-1} = \psi \circ \psi_2^{-1} \circ \varphi_2$.

Pelo Teorema 3.1.1 temos que $\widetilde{\Gamma}$ é invariante por $\widetilde{\phi}$, como $\phi_2 \circ \widetilde{\pi}_2 = \widetilde{\pi}_2 \circ \widetilde{\phi}$, obtemos então que $\Gamma = \widetilde{\pi}_2(\widetilde{\Gamma})$ é invariante por ϕ_2, que é uma transformação linear. E então V_Γ também é invariante por ϕ_2 e podemos considerar a restrição $\phi_2|_{V_\Gamma}$. Como $\pi_2 \circ \phi_2 = \varphi_2 \circ \pi_2$, então $d(\varphi_2|_{\pi_2(V_\Gamma)})_1$ é conjugado a $d\left(\phi_2|_{V_\Gamma}\right)_1$ pelo isomorfismo $d(\pi_2|_{V_\Gamma})_1$.

Agora falta mostrar que $\pi_2(V_\Gamma)$ é, de fato, igual à $T(A_2)$ e concluímos que $d(\varphi_2|_{\pi_2(V_\Gamma)})_1 = d(\varphi_2|_{T(A_2)})_1$ é conjugado à $d\left(\phi_2|_{V_\Gamma}\right)_1$. Se W é um complemento de V_Γ em V, podemos definir $\rho : A_2 \to \pi_2(V_\Gamma) \times W$, dado por $\rho(\pi_2(v)) = (\pi_2(v_\Gamma), w)$, onde $v = v_\Gamma + w$ com $v_\Gamma \in V_\Gamma$, e $w \in W$, é um isomorfismo de grupos de Lie bem definido. De fato, se $v' = v'_\Gamma + w'$ onde $v'_\Gamma \in V_\Gamma$ e $w' \in W$, temos que

$$\begin{aligned}
\pi_2(v) = \pi_2(v') &\Leftrightarrow v - v' \in \Gamma \\
&\Leftrightarrow v_\Gamma - v'_\Gamma + w - w' \in \Gamma \subset V_\Gamma \\
&\Leftrightarrow v_\Gamma - v'_\Gamma \in \Gamma \text{ e } w - w' = 0 \\
&\Leftrightarrow \rho(\pi_2(v)) = \rho(\pi_2(v')),
\end{aligned}$$

como $\rho(\pi_2(V_\Gamma)) = T(\pi_2(V_\Gamma) \times W)$, obtemos que $\pi_2(V_\Gamma)$ é igual à $T(A_2)$. ■

A *representação adjunta* da álgebra $\mathfrak{g}$ é a aplicação dada por $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$, onde $X, Y \in \mathfrak{g}$. Quando G for um grupo de Lie linear, temos de forma mais concreta que $\mathrm{ad}(X)Y = [X,Y] = XY - YX$. Na álgebra do grupo linear geral $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, ou seja, na álgegra de todas as matrizes complexas quadradas, podemos considerar a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ das matrizes diagonais de $\mathfrak{g}$. É possível verificar que

$$\mathrm{ad}(H)E_{ij} = \alpha_{ij}(H)E_{ij},$$

onde E_{ij} é uma matriz quadrada que tem 1 na posição (i,j) da matriz e zero nas outras posições. Para cada posição (i,j) temos que o autovalor $\alpha_{ij}(H) = h_i - h_j$, onde $H = \mathrm{diag}(h_1,\dots,h_n)$. A transformação linear $\alpha_{ij} : H \to \mathbb{C}$ é definida como a *raiz associada a subálgebra de Cartan* $\mathfrak{h}$ e o subespaço $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ gerado por E_{ij} é definido como *o espaço da raíz associada à* α_{ij}, e

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \sum_{i,j} \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$$

é definido como a *decomposição do espaço das raízes de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ *associada à* $\mathfrak{h}$.

Lembrando que chamamos $Z \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ de semissimples em $\mathbb{R}$ se Z é diagonalizável em $\mathbb{C}$. O seguinte Lema foi proposto e demonstrado pelo professor Luiz San Martin em comunicação pessoal com Mauro Patrão.

Lema 3.3.2. *Seja* $\mathfrak{a}$ *uma subálgebra abeliana de* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ *cujos elementos são semissimples em* $\mathbb{R}$ *e seja* $\theta \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *um elemento do normalizador de* $\mathfrak{a}$. *Então a restrição* $Ad(\theta)|_{\mathfrak{a}}$ *tem ordem finita.*

Demonstração: Pelas hipóteses podemos assumir a menos de conjugação que $\mathfrak{a}$ está contida na subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ das matrizes diagonais de $\mathfrak{g}$. Considere o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$ dado por

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{a},\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X,H] = 0,\ \text{para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Como θ normaliza $\mathfrak{a}$, obtemos que θ normaliza $\mathfrak{z}(\mathfrak{a},\mathfrak{g})$. De fato, se $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a},\mathfrak{g})$ e $H \in \mathfrak{a}$, temos que

$$[\mathrm{Ad}(\theta)X, H] = \mathrm{Ad}(\theta)[X, \mathrm{Ad}(\theta)^{-1}H] = \mathrm{Ad}(\theta).0 = 0,$$

já que $\mathrm{Ad}(\theta)^{-1}H \in \mathfrak{a}$. Por outro lado, pela decomposição em espaços de raízes de $\mathfrak{g}$ associada a $\mathfrak{h}$, obtemos que

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{a},\mathfrak{g}) = \mathfrak{h} \oplus \sum \{\mathfrak{g}_\alpha : \alpha(H) = 0,\ \text{para todo } H \in \mathfrak{a}\},$$

onde α e $\mathfrak{g}_\alpha$ são raízes e espaços de raízes associados a $\mathfrak{h}$. De fato, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a},\mathfrak{g})$ e se $\alpha(H) = 0$ e $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ temos que $\mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X = 0$, para todo $H \in \mathfrak{a}$. Por outro lado, se $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a},\mathfrak{g})$ então para todo $H \in \mathfrak{a}$ temos $[X,H] = 0$ decompondo X em

$X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$ e $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, temos $X = X_{\mathfrak{h}} + \sum_\alpha X_\alpha$. E então $[X, H] = [X_{\mathfrak{h}}, H] + \sum_\alpha [X_\alpha, H] = \sum_\alpha (\alpha(H) X_\alpha) = 0$ se, e somente se, $\alpha(H) = 0$, para todo $H \in \mathfrak{a}$.

A decomposição anterior implica que $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g})$ depende de $\mathfrak{a}$, especificamente de quais $\alpha \equiv 0$ em $\mathfrak{a}$, isto é, de quais autovalores são iguais. Logo $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g})$ é dado por matrizes com a seguinte decomposição por blocos na diagonal

$$\begin{pmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_k \end{pmatrix}$$

onde $X_1, \ldots, X_k$ são matrizes quadradas. Como θ normaliza $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g})$, isto implica que θ normaliza o seu centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}))$, que pelo Lema de Schur (Exercício 13.1.4 de [11]) é dado pelas matrizes diagonais da forma

$$\begin{pmatrix} z_1 I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_k I_k \end{pmatrix}$$

onde $I_1, \ldots, I_k$ são as matrizes identidade e $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$. O normalizador de $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}))$ é gerado por matrizes com a mesma estrutura de blocos e por matrizes que permutam blocos de mesmo tamanho, se eles existem. De fato, escolhendo uma matriz $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}))$ em que todos os z_i são diferentes entre si, temos então que X forma uma ação natural em $\mathbb{R}^n$ onde cada z_i é um autovalor correspondente a um autoespaço distinto com dimensão igual ao tamanho da matriz correspondente. Se Y normaliza $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}))$ então $YXY^{-1} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}))$ corresponde a uma "mudança de base" por Y, ou seja, uma matriz com autoespaços de mesmas dimensões que X. Agora, toda matriz em $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}))$ tem autoespaços $V_i = \{e_{i_1}, ..., e_{i_p}\}$, onde e_{i_j} são os elementos da base canônica. Desta forma, a conjugação por Y é equivalente a uma permutação de autoespaços V_i, se existem V_i com a mesma dimensão, vezes uma matriz que fixa todos estes espaços, ou seja, uma matriz com a mesma decomposição de blocos de $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g})$.

Então a restrição de $\mathrm{Ad}(\theta)$ à $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}))$ tem ordem finita, já que matrizes com esta mesma estrutura de blocos centralizam $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}))$ e matrizes que permutam blocos de mesmo tamanho tem ordem finita. Como $\mathfrak{a}$ está contida em $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}))$, temos então que a restrição $\mathrm{Ad}(\theta)|_{\mathfrak{a}}$ tem ordem finita. ■

O próximo Teorema é o principal resultado técnico do capítulo.

Teorema 3.3.3. *Seja R um grupo de Lie conexo e solúvel, $\phi : R \to R$ um endomorfismo contínuo e sobrejetivo, N o radical nilpotente de R e φ o endomorfismo* *induzido por ϕ em $A = R/N$. Se N é simplesmente conexo, então $\varphi|_{T(A)}$ tem ordem finita.*

Demonstração: Pela Proposição 3.3.1 e usando a sua notação, temos que $d(\varphi|_{T(A)})_1$ é conjugado a $d(\varphi_2|_{T(A_2)})_1$, que é conjugado a $d\left(\phi_2|_{V_\Gamma}\right)_1$. Então é suficiente mostrar que $d\left(\phi_2|_{V_\Gamma}\right)_1$ tem ordem finita.

Como o homomorfismo $\widetilde{\pi}|_{\widetilde{N}} : \widetilde{N} \to N$ é um recobrimento e N é simplesmente conexo, então $\widetilde{\pi}|_{\widetilde{N}}$ é um isomorfismo. Isto implica que $\ker\left(\widetilde{\pi}|_{\widetilde{N}}\right) = \widetilde{N} \cap \widetilde{\Gamma} = \{1\}$ e, por outro lado, que $\widetilde{\pi}_2|_{\widetilde{\Gamma}} : \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ também é um isomorfismo, pois $\ker\left(\widetilde{\pi}_2|_{\widetilde{\Gamma}}\right) = \widetilde{N} \cap \widetilde{\Gamma} = \{1\}$. Como Γ é um subgrupo discreto do espaço de vetorial $V = \widetilde{R}/\widetilde{N}$, então existe um conjunto linearmente independente $\{v_1, \ldots, v_k\}$ tal que $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}v_k$, o que implica que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base de V_Γ. Pelo item (ii) do Teorema 3.1.13, fixando uma subálgebra maximal abeliana compactamente mergulhada $\mathfrak{h}$ da álgebra de Lie $\mathfrak{r}$ de $\widetilde{R}$, temos que

$$Z\big(\widetilde{R}\big) = \exp\{X \in \mathfrak{h} : \text{o espectro de } \operatorname{ad}(X) \subset 2\pi i\mathbb{Z}\},$$

e temos pelo item (iii) do Teorema 3.1.13 que para $X \in \mathfrak{r}$ temos que $\exp(X) \in Z\big(\widetilde{R}\big)$ se, e somente se, $\operatorname{ad}(X)$ é semissimples em $\mathfrak{r}$ e o espectro de $\operatorname{ad}(X)$ é um subconjunto de $2\pi i\mathbb{Z}$. Como $\widetilde{\Gamma}$ é um subgrupo de $Z\big(\widetilde{R}\big)$, então existem $\{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathfrak{h}$ tal que $\widetilde{\pi}_2(\exp(X_i)) = v_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Se $\mathfrak{h}_\Gamma$ é o subespaço de $\mathfrak{h}$ gerado por $\{X_1, \ldots, X_k\}$, então $\widetilde{H}_\Gamma = \exp(\mathfrak{h}_\Gamma)$ é um subgrupo conexo de $\widetilde{R}$. Como Γ é gerado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$ e $\widetilde{\pi}_2|_{\widetilde{\Gamma}}$ é um isomorfismo, então $\widetilde{\Gamma}$ é gerado por $\{\exp(X_1), \ldots, \exp(X_k)\}$. Temos que $\widetilde{\Gamma} \subset \widetilde{H}_\Gamma$ e então que $\Gamma \subset \widetilde{\pi}_2\big(\widetilde{H}_\Gamma\big)$, o que implica que $V_\Gamma \subset \widetilde{\pi}_2\big(\widetilde{H}_\Gamma\big)$, já que $\widetilde{\pi}_2\big(\widetilde{H}_\Gamma\big)$ é subespaço de V. Por outro lado, temos que

$$\dim\left(\widetilde{\pi}_2\big(\widetilde{H}_\Gamma\big)\right) \leq \dim\left(\widetilde{H}_\Gamma\right) \leq k = \dim\left(V_\Gamma\right),$$

mostrando que $\widetilde{\pi}_2|_{\widetilde{H}_\Gamma} : \widetilde{H}_\Gamma \to V_\Gamma$ é um isomorfismo, o que implica que

$$\ker\left(\widetilde{\pi}_2|_{\widetilde{H}_\Gamma}\right) = \widetilde{N} \cap \widetilde{H}_\Gamma = \{1\}.$$

Como $\phi_2 \circ \widetilde{\pi}_2 = \widetilde{\pi}_2 \circ \widetilde{\phi}$ e V_Γ é invariante por ϕ_2, temos que $\widetilde{H}_\Gamma\widetilde{N}$ é invariante por $\widetilde{\phi}$ e então podemos considerar o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_\Gamma\widetilde{N} \arrow[r, "\widetilde{\phi}|_{\widetilde{H}_\Gamma\widetilde{N}}"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}_2"'] & \widetilde{H}_\Gamma\widetilde{N} \arrow[d, "\widetilde{\pi}_2"] \\
V_\Gamma \arrow[r, "\phi_2|_{V_\Gamma}"'] & V_\Gamma
\end{tikzcd}$$

como $\widetilde{H}_\Gamma \cap \widetilde{N} = \{1\}$, temos que $\mathfrak{h}_\Gamma \cap \mathfrak{n} = \{0\}$, onde $\mathfrak{n}$ é a álgebra de Lie de $\widetilde{N}$. Como $\mathfrak{n}$ contém a álgebra derivada de $\mathfrak{r}$ (Proposição 3.1.6), então $\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$ é uma subálgebra, e de fato, um ideal.

Temos também que $\mathfrak{h}_\Gamma$ está compactamente mergulhado em $\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$. De fato, para todo $X \in \mathfrak{h}_\Gamma$, temos que $\mathrm{ad}(X)$ é semissimples e o espectro está contido em $i\mathbb{R}$, já que a base $\{X_1, \dots, X_k\}$ de $\mathfrak{h}_\Gamma$ gera uma subálgebra abeliana e o espectro de $\mathrm{ad}(X_j) \subset 2\pi i\mathbb{Z}$ para todo $j = 1, ..., k$. O mesmo então também é verdade para a restrição $\mathrm{ad}(X)|_{\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}}$, demonstrando a afirmação. Agora, note que como o espectro de $\mathrm{ad}(X)$ está contido em $i\mathbb{R}$ então o fecho do grupo gerado pelas exponenciais de $\mathrm{ad}(X)$ é mergulhado compacto. De fato, como as matrizes $\exp(\mathrm{ad}X) \in \mathfrak{gl}(k, \mathbb{C})$ são simultaneamente diagonalizáveis, temos que, após uma mudança de base, todos os seus elementos tem forma $\exp D$, onde D é uma matriz diagonal de autovalores em $i\mathbb{R}$ e então $\|\exp D\| = 1$. Podemos também considerar a restrição $\mathrm{ad}(X)|_{\mathfrak{h}_\Gamma} = 0$ e a restrição $\mathrm{ad}(X)|_{\mathfrak{n}}$ que também é semissimples e cujo espectro está contido em $i\mathbb{R}$.

Seja $\widehat{\mathfrak{h}}$ uma subálgebra maximal abeliana compactamente mergulhada de $\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$ contendo $\mathfrak{h}_\Gamma$. Como $\widetilde{\phi}\left(\widetilde{H}_\Gamma \widetilde{N}\right) \subset \widetilde{H}_\Gamma \widetilde{N}$, então $d\widetilde{\phi}_1 (\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}) = \mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$. Pelo item (i) do Teorema 3.1.13, temos que $d\widetilde{\phi}_1 \widehat{\mathfrak{h}}$ é uma subálgebra maximal abeliana compactamente mergulhada de $\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$. Também temos, pelo item (i) do Teorema 3.1.13, que existe um automorfismo interno $\widehat{\psi}$ de $\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$ tal que $\widehat{\psi} d\widetilde{\phi}_1 \widehat{\mathfrak{h}} = \widehat{\mathfrak{h}}$. Pelo diagrama comutativo anterior, temos que

$$d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1 \circ d\left(\widetilde{\phi}|_{\widetilde{H}_\Gamma \widetilde{N}}\right)_1 = d\left(\phi_2|_{V_\Gamma}\right)_1 \circ d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1.$$

Por outro lado, temos que $d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1 \circ \widehat{\psi} = d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1$. De fato, temos que $\widehat{\psi}$ é o limite de produtos $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(Y_1)} \cdots \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(Y_l)}$, onde $Y_1, \dots, Y_l \in \mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$ e, para todo $Y \in \mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$, temos que $d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1 \circ \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(Y)} = d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1$, pois $d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1|_{\mathfrak{n}} = 0$ e $\mathrm{ad}(Y)\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right) \subset \mathfrak{n}$. Fazendo $\widehat{\phi} = \widehat{\psi} \circ d\left(\widetilde{\phi}|_{\widetilde{H}_\Gamma \widetilde{N}}\right)_1$, temos $\widehat{\phi}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$ e $\widehat{\phi}(\widehat{\mathfrak{h}}) = \widehat{\mathfrak{h}}$ então

$$\begin{aligned} d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1 \circ \widehat{\phi} &= d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1 \circ \widehat{\psi} \circ d\left(\widetilde{\phi}|_{\widetilde{H}_\Gamma \widetilde{N}}\right)_1 \\ &= d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1 \circ d\left(\widetilde{\phi}|_{\widetilde{H}_\Gamma \widetilde{N}}\right)_1 \\ &= d\left(\phi_2|_{V_\Gamma}\right)_1 \circ d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1. \end{aligned}$$

Também temos que $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}_\Gamma \oplus \left(\widehat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{n}\right)$, de fato, se $Z \in \widehat{\mathfrak{h}}$, então $Z = X + Y$, com $X \in \mathfrak{h}_\Gamma$ e $Y \in \mathfrak{n}$, e então $Y = Z - X \in \widehat{\mathfrak{h}}$ logo $Y \in \widehat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{n}$.

Além disso, temos que $\widehat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right)$, onde $\mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right)$ é o centro de $\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$. De fato, temos que $\mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right) \subset \widehat{\mathfrak{h}}$, já que $\widehat{\mathfrak{h}}$ é a subálgebra maximal abeliana compacta mergulhada de $\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$. Temos também que $\mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right) \subset \mathfrak{n}$, pois $\mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right)$ é abeliano e também ideal de $\mathfrak{r}$. De fato, se $Z \in \mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right)$, $X \in \mathfrak{r}$, e $Y \in \mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$ como $[Y, X]$

está em $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{n}$, temos que

$$[Y,[X,Z]] = [[Y,X],Z] + [X,[Y,Z]] = 0$$

e temos $[X,Z] \in \mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right)$ e $\mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right)$ é um ideal. Logo $\mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right)$ está contido em $\mathfrak{n}$ e em $\widehat{\mathfrak{h}}$ e então $\mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right) \subset \widehat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{n}$.

Por outro lado, se $Y \in \widehat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{n}$, temos que $\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{h}_\Gamma} = 0$ e que $\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{n}}$ é nilpotente, o que implica que $\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{h}_\Gamma\oplus\mathfrak{n}}$ é nilpotente. Logo o espectro de $\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{h}_\Gamma\oplus\mathfrak{n}}$ é zero e então o espectro está contido em $2\pi i\mathbb{Z}$. Pelo item (ii) do Teorema 3.1.13 temos que $\exp(Y)$ está no centro do subgrupo conexo gerado por $\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}$. Além disso, pelo item (iii) do Teorema 3.1.13 temos que $\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{h}_\Gamma\oplus\mathfrak{n}}$ é semissimples. Como $\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{h}_\Gamma\oplus\mathfrak{n}}$ também é nilpotente, isto implica que $\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{h}_\Gamma\oplus\mathfrak{n}} = 0$, mostrando que $Y \in \mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right)$.

Agora se $P : \widehat{\mathfrak{h}} \to \mathfrak{h}_\Gamma$ é a projeção linear associada a decomposição

$$\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}_\Gamma \oplus \left(\widehat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{n}\right) = \mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right).$$

Temos que $d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1|_{\mathfrak{h}_\Gamma} \circ P = d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1|_{\widehat{\mathfrak{h}}}$, pois $d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1|_{\mathfrak{n}} = 0$ e $P|_{\mathfrak{h}_\Gamma} = Id$. Fazendo $T = P \circ \widehat{\phi}|_{\mathfrak{h}_\Gamma} : \mathfrak{h}_\Gamma \to \mathfrak{h}_\Gamma$, temos então que

$$\begin{aligned} d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1|_{\mathfrak{h}_\Gamma} \circ T &= d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1|_{\mathfrak{h}_\Gamma} \circ P \circ \widehat{\phi}|_{\mathfrak{h}_\Gamma} \\ &= d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1|_{\widehat{\mathfrak{h}}} \circ \widehat{\phi}|_{\mathfrak{h}_\Gamma} \\ &= d\left(\phi_2|_{V_\Gamma}\right)_1 \circ d\left(\widetilde{\pi}_2\right)_1|_{\mathfrak{h}_\Gamma}. \end{aligned}$$

Como $\widetilde{\pi}_2|_{\widetilde{H}_\Gamma} : \widetilde{H}_\Gamma \to V_\Gamma$ é um isomorfismo, temos que $d\left(\phi_2|_{V_\Gamma}\right)_1$ é conjugada a T e então é suficiente mostrar que T tem ordem finita. Agora, considerando o homomorfismo $\rho : \mathfrak{h}_\Gamma \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$, dado por $\rho(X) = \mathrm{ad}(X)|_{\mathfrak{n}}$, temos que T é conjugado a $\mathrm{Ad}(\theta)$ restrito a subálgebra $\mathfrak{a}$, onde $\theta = \widehat{\phi}|_{\mathfrak{n}}$ e $\mathfrak{a}$ é a imagem de ρ. De fato, temos que $\mathrm{Ad}(\theta) \circ \rho = \rho \circ T$, pois se $X \in \mathfrak{h}_\Gamma$ e $Y \in \mathfrak{n}$ temos

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{Ad}(\theta) \circ \rho\right)(X)Y &= \theta(\rho(X))\theta^{-1}Y \\ &= \theta[X, \theta^{-1}Y] \\ &= \widehat{\phi}[X, \theta^{-1}Y] \\ &= \left[\widehat{\phi}X, \widehat{\phi}\theta^{-1}Y\right] \\ &= \left[\widehat{\phi}X, Y\right], \end{aligned}$$

pois $\widehat{\phi}(\widehat{\mathfrak{h}}) = \widehat{\mathfrak{h}}$ e $\theta(\mathfrak{n}) = \widehat{\phi}|_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$. Agora, como $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{z}\left(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}\right)$, temos que $\left[\widehat{\phi}X, Y\right] = \left[P\left(\widehat{\phi}X\right), Y\right] = [TX, Y]$ então

$$\begin{aligned} \left[\widehat{\phi}X, Y\right] &= [TX, Y] \\ &= \rho(TX)Y \\ &= \left(\rho \circ T\right)(X)Y. \end{aligned}$$

Falta mostrar que ρ é um isomorfismo. De fato, se $\rho(X) = \mathrm{ad}(X)|_{\mathfrak{n}} = 0$, então $X \in \mathfrak{z}\,(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n})$, já que $X \in \mathfrak{h}_\Gamma$, o que implica que $X = 0$, pois $\mathfrak{h}_\Gamma \cap \mathfrak{z}\,(\mathfrak{h}_\Gamma \oplus \mathfrak{n}) = 0$. Então T e $\mathrm{Ad}(\theta)$ restrito a $\mathfrak{a}$ são conjugados. Temos que cada $\mathrm{ad}(X)|_{\mathfrak{n}} \in \mathfrak{a}$ é semissimples e que θ normaliza $\mathfrak{a}$ pois $(\mathrm{Ad}(\theta) \circ \rho)\,(X) = \rho(TX)$ e $TX \in h_\Gamma$. Então pelo Lema 3.3.2, $\mathrm{Ad}(\theta)$ tem ordem finita e demonstramos o Teorema. $\blacksquare$

Capítulo 4

Entropia de Endomorfismos

4.1 Medidas ϕ-homogêneas

As medidas ϕ-homogêneas têm a vantagem de facilitar a análise de espaços não-compactos e, de fato, com elas determinamos a entropia de Dinaburg-Bowen de endomorfismos em grupos de Lie quaisquer no Teorema 4.2.7 da próxima seção. Pelo Princípio Variacional 2.6.1, temos que a entropia de Dinaburg-Bowen é apenas um limitante superior da entropia topológica e, de fato, para achar a entropia topológica é necessário se restringir ao toro maximal do centro do grupo. De forma mais precisa, o Teorema 4.4.2 permite o cálculo exato da entropia topológica em qualquer caso. Para obter este resultado, na seção 4.3, estudamos pares de Li-Yorke em grupos de Lie para demonstrar a ausência de pares de Li-Yorke em certos quocientes de grupos de Lie.

Definição 4.1.1. *Uma medida de Borel μ em X é dita ϕ-homogênea se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\mu(K) < \infty$ para todo K compacto.

(ii) $\mu(K) > 0$ para algum K compacto.

(iii) Para todo $\epsilon > 0$ existem números positivos δ e c tais que

$$\mu(B_n^\phi(y, \delta)) \leq c.\mu(B_n^\phi(x, \epsilon)),$$

para todos x, $y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

Note que agora não exigimos que a medida μ seja ϕ-invariante mas apenas algumas condições "fracas" para μ e uma condição de "uniformidade" da μ com relação à ϕ.

A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ com relação à uma isometria ϕ, por exemplo, é ϕ-homogênea. De forma mais geral, a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ é ϕ-homogênea sempre que ϕ é uma transformação uniformemente contínua.

A partir de uma medida ϕ-homogênea, definimos $k(\mu,\phi)$ como

$$k(\mu,\phi) := \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(B_n(y,\epsilon)).$$

Proposição 4.1.2. *Se μ é ϕ-homogênea a quantidade $k(\mu,\phi)$ não depende do ponto y escolhido no limite.*

Demonstração: De fato, se x é outro ponto de X, então pela condição (iii) dado $\epsilon > 0$, existem c_1, c_2, δ_1 e δ_2 com $\delta_2 < \delta_1 < \epsilon$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$c_2.\mu(B_n(y,\delta_2)) \leq c_1.\mu(B_n(x,\delta_1)) \leq \mu(B_n(y,\epsilon))$$

e logo

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(B_n(y,\epsilon)) &\leq \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(B_n(x,\delta_1)) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(B_n(y,\delta_2)).\end{aligned}$$

Assim, tomando $\epsilon \to 0$, temos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(B_n(x,\epsilon)) = \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(B_n(y,\epsilon)),$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 4.1.3. *Se $\phi : X \to X$ é uma transformação uniformemente contínua e μ é uma medida ϕ-homogênea em X então $h_d(\phi) = k(\mu,\phi)$. Se além disso, X é compacto, $\mu(X) = 1$ e μ é ϕ-invariante então $h_\mu(\phi) = k(\mu,\phi)$ e em particular μ é uma medida de entropia máxima.*

Demonstração: Seja K compacto e U uma vizinhança de K com $\mu(U) < \infty$ que existe pois X é localmente compacto e medidas de compactos são finitas.

Seja $\epsilon > 0$ tal que $B(K,\epsilon) \subset U$. Se $E \subset K$ é um conjunto (n,ϵ)-separado então $\bigcup_{x\in E} B_n^\phi(x,\frac{1}{2}\epsilon)$ é uma união disjunta contida em U. Tome δ e $c > 0$ tais que $\mu(B_n(y,\delta)) \leq c.\mu(B_n(x,\frac{1}{2}\epsilon))$ para quaisquer x, $y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$\mu(B_n(y,\delta)).s_n(\epsilon,K) \leq c.\mu(B_n(x,\epsilon/2)).s_n(\epsilon,K) \leq c.\mu(U),$$

assim

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log s_n(\epsilon,K) &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\frac{c.\mu(U)}{\mu(B_n(y,\delta))} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(B_n(y,\delta)),\end{aligned}$$

logo pelas definições temos, $h_d(\phi, K) \leq k(\mu, \phi)$.

Por outro lado, seja K um compacto com $\mu(K) > 0$. Se F é um conjunto (n, δ)-gerador de K então $K \subset \bigcup_{x \in F} B_n(x, 2\delta)$. Dado $\epsilon > 0$, tome δ e c tais que $\mu(B_n(x, 2\delta)) \leq c.\mu(B_n(y, \epsilon))$ para x, $y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim temos

$$c.\mu(B_n(y, \epsilon)).r_n(\delta, K) \geq \mu(B_n(x, 2\delta)).r_n(\delta, K) \geq \mu(K)$$

e do mesmo modo feito anteriormente, tomando limites superiores e logaritmos, obtemos que $h_d(\phi, K) \geq k(\mu, \phi)$. E concluímos que $h_d(\phi, K) = k(\mu, \phi)$.

Para provar a segunda parte da Proposição temos agora, por hipótese, que X é compacto, μ é ϕ-invariante e que μ é ϕ-homogênea então pelo resultado anterior temos que $h_d(\phi) = k(\mu, \phi)$. Pelo Princípio Variacional 2.6.1 temos que $h_\mu(\phi) \leq h_d(\phi)$ logo $h_\mu(\phi) \leq k(\mu, \phi)$.

Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta > 0$ e c tais que $\mu(B_n(x, \delta)) \leq c.\mu(B_n(y, \epsilon))$, para todos x, $y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Seja $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_r\}$ uma partição mensurável de X com $\operatorname{diam}(A_i) < \delta$ para todo i.

Os conjuntos $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \vee \phi^{-1}\mathcal{A} \vee ... \vee \phi^{-(n-1)}\mathcal{A}$ são da forma $A_I := A(i_0, ..., i_{n-1}) = \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(A_{i_k})$. Se $x \in A_I$, então $A_I \subset B_n(x, \delta)$ e assim

$$\mu(A_I) \leq \mu(B_n(x, \delta)) \leq c.\mu(B_n(y, \epsilon)),$$

para todo I. Para y fixo temos então

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{A}^n) &= -\sum_{I=i_0,\dots,i_{n-1}} \mu(A_I) \log \mu(A_I) \\ &\geq -\sum_I \mu(A_I). \log\left(c.\mu(B_n(y, \epsilon))\right) = -\log\left(c.\mu(B_n(y, \epsilon))\right) \end{aligned}$$

e assim

$$h_\mu(\phi, \mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{A}^n) \geq \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(y, \epsilon)).$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos $h_\mu(\phi) \geq k(\mu, \phi) = h_d(\phi)$. ∎

4.2 Fórmula de Bowen

Seja ϕ um endomorfismo do grupo de Lie G, ou seja, $\phi : G \to G$ é um homomorfismo. Sobre grupos topológicos localmente compactos é sempre possível construir uma medida invariante sobre a multiplicação à direita do grupo. A menos de uma constante esta medida é única e é chamada de medida de Haar invariante à direita. De forma análoga, também há uma medida de Haar invariante por multiplicação à esquerda do grupo.

Proposição 4.2.1. *Seja G um grupo localmente compacto com distância invariante à direita d e seja $\phi : G \to G$ um endomorfismo. Então a medida de Haar invariante à direita em G é ϕ-homogênea.*

Demonstração: Sendo μ a medida de Haar invariante à direita, é suficiente mostrar que $B_n^\phi(x,\epsilon) = B_n^\phi(1,\epsilon).x$ para qualquer $x \in X$ pois assim temos que

$$\mu(B_n^\phi(x,\epsilon)) = \mu(B_n^\phi(y,\epsilon)),$$

para todo x, $y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 2.5.1 temos

$$B_n^\phi(x,\epsilon) = \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(B(\phi^k(x),\epsilon)),$$

então basta mostrar que

$$\phi^{-k}(B(\phi^k(x),\epsilon)) = \phi^{-k}(B(1,\epsilon)).x,$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Por indução, para $k = 0$ a igualdade anterior vale pois d é invariante à direita. Agora,

$$\phi^{-(k+1)}\left(B(\phi^{k+1}(x),\epsilon)\right) = \phi^{-1}\left(\phi^{-k}(B(\phi^k(\phi(x)),\epsilon))\right)$$

e pela hipótese de indução temos que o termo da direita é

$$= \phi^{-1}\left(\phi^{-k}\left(B(1,\epsilon)\right).\phi(x)\right).$$

Agora, temos que $\phi^{-1}\left(C.\phi(x)\right) = \phi^{-1}(C).x$ para qualquer conjunto C, de fato,

$$\begin{aligned} y \in \phi^{-1}(C.\phi(x)) &\Leftrightarrow \phi(y) \in C.\phi(x) \\ &\Leftrightarrow \phi(y).\phi(x)^{-1} \in C \\ &\Leftrightarrow \phi(y.x^{-1}) \in C \\ &\Leftrightarrow y.x^{-1} \in \phi^{-1}(C) \\ &\Leftrightarrow y \in \phi^{-1}(C).x \end{aligned}$$

e concluímos que

$$\phi^{-1}\left(\phi^{-k}\left(B(1,\epsilon)\right).\phi(x)\right) = \phi^{-(k+1)}(B(1,\epsilon)).x,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Proposição 4.2.2. *Sejam N e M variedades diferenciáveis e sejam $\phi : N \to N$, $\psi : M \to M$ e $\pi : N \to M$ aplicações diferenciáveis que comutam ($\pi \circ \phi = \psi \circ \pi$). Considere μ_N uma medida diferenciável em N que é ϕ-homogênea com relação à distância d_N e seja μ_M uma medida diferenciável em M que é ψ-homogênea com relação à distância d_M.*

Se $\phi(x) = x$ e se π é um difeomorfismo local numa vizinhança U de x então temos $k(\mu_N, \phi) = k(\mu_M, \psi)$.

Demonstração: Seja $U_1 \subset U$ uma vizinhança de x tal que $\phi(U_1) \subset U$, $\overline{U_1}$ é compacto, $\overline{U_1} \subset U$ e π é difeomorfismo em U. Considere ϵ tal que $B(x, \epsilon) \subset U_1$ e a_ϵ e b_ϵ tais que

$$B(\pi(x), a_\epsilon) \subset \pi(B(x, \epsilon)) \subset B(\pi(x), b_\epsilon).$$

Logo

$$\psi^{-k}(B(\pi(x), a_\epsilon)) \subset \psi^{-k}(\pi(B(x, \epsilon))) \subset \psi^{-k}(B(\pi(x), b_\epsilon)),$$

para $k = 0, ..., n-1$. Agora, como $\phi(x) = x$, temos $\psi(\pi(x)) = \pi(x)$. Como $\pi \circ \phi^k = \psi^k \circ \pi$, temos que $\psi^{-k} \circ \pi = \pi \circ \phi^{-k}$. Assim, podemos reescrever estes conjuntos como

$$\psi^{-k}(B(\psi^k(\pi(x)), a_\epsilon)) \subset \pi(\phi^{-k}(B(\phi^k(x), \epsilon))) \subset \psi^{-k}(B(\psi^k(\pi(x)), b_\epsilon)),$$

para $k = 0, ..., n-1$. Como $\pi(\cap A_i) \subset \cap(\pi(A_i))$, fazendo a interseção para todo k em $\pi(\phi^{-k}(B(\phi^k(x), \epsilon))) \subset \psi^{-k}(B(\psi^k(\pi(x)), b_\epsilon))$ e usando o Lema 2.5.1 obtemos

$$\pi(B_n^\phi(x, \epsilon)) \subset B_n^\psi(\pi(x), b_\epsilon).$$

Para obter o "outro lado" desta relação considere $z \in B_n^\psi(\pi(x), a_\epsilon)$, ou seja,

$$z \in \psi^{-k}(B(\pi(x), a_\epsilon)),$$

para $k = 0, ..., n-1$. Em particular, $z \in B(\pi(x), a_\epsilon)$ e então $z \in \pi(B(x, \epsilon))$ logo $z = \pi(y)$ onde $y \in B(x, \epsilon)$. Vamos agora mostrar por indução que $y \in \phi^{-k}(B(x, \epsilon))$ para $k = 0, ..., n-1$. Para $k = 0$ já está verificado, como

$$z = \pi(y) \in \psi^{-k}(B(\pi(x), a_\epsilon)),$$

para $k = 0, ..., n-1$ então

$$\pi(\phi^k(y)) = \psi^k(\pi(y)) \in B(\pi(x), a_\epsilon) \subset \pi(B(x, \epsilon))$$

e $\pi(\phi^k(y)) \in \pi(B(x, \epsilon))$; para $k = 0, ..., n-1$. Agora por indução, temos $\phi^k(y) \in B(x, \epsilon)$ e então $\phi^{k+1}(y) \in \phi(B(x, \epsilon)) \subset \phi(U_1) \subset U$. Como π é bijetora em U e $\pi(\phi^k(y)) \in \pi(B(x, \epsilon))$ temos que

$$\phi^{k+1}(y) \in B(x, \epsilon),$$

para $k = 0, ..., n-2$; e concluímos a indução. Então $\phi^k(y) \in B(x,\epsilon)$ para $k = 0, ..., n-1$ e $y \in \phi^{-k}(B(x,\epsilon))$ para $k = 0, ..., n-1$; ou seja, $y \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(B(x,\epsilon))$ e

$$z = \pi(y) \in \pi\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(B(x,\epsilon))\right) = \pi(B_n^{\phi}(x,\epsilon)).$$

Usando agora o Lema 2.5.1 e juntando com a relação já demonstrada obtemos

$$B_n^{\psi}(\pi(x), a_\epsilon) \subset \pi(B_n^{\phi}(x,\epsilon)) \subset B_n^{\psi}(\pi(x), b_\epsilon).$$

Como μ_N e μ_M são medidas diferenciáveis, π é um difeomorfismo em U e $\overline{U_1} \subset U$ é compacto, então existem constantes C_1 e C_2 tais que para todo conjunto mensurável $E \subset U_1$ vale

$$C_1.\mu_M(\pi(E)) \leq \mu_N(E) \leq C_2.\mu_M(\pi(E)).$$

Assim temos que,

$$\begin{aligned} C_1.\mu_M(B_n^{\psi}(\pi(x), a_\epsilon)) &\leq C_1.\mu_M(\pi(B_n^{\phi}(x,\epsilon))) \\ &\leq \mu_N(B_n^{\phi}(x,\epsilon)) \\ &\leq C_2.\mu_M(\pi(B_n^{\phi}(x,\epsilon))) \\ &\leq C_2.\mu_M(B_n^{\psi}(\pi(x), b_\epsilon)) \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log \mu_M(B_n^{\psi}(\pi(x), a_\epsilon)) &\geq \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log \mu_N(B_n^{\phi}(x,\epsilon)) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log \mu_M(B_n^{\psi}(\pi(x), b_\epsilon)). \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon \to 0$ concluímos a Proposição. ■

Proposição 4.2.3. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m determinada por uma distância Riemanniana d e seja $f : M \to M$ uma transformação diferenciável então*

$$h_d(f) \leq \text{máx } \{0, m.\log(\sup_{x\in M} \|\mathrm{d}f|_{T_xM}\|)\}.$$

Demonstração: Seja $a = \sup_{x\in M} \|\mathrm{d}f|_{T_xM}\|$. Suponha $a < \infty$ (o caso $a = \infty$ é imediato). Se $a < 1$, pela desigualdade do valor médio, temos que $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ e então f não expande distâncias, implicando que os conjuntos $(1,\epsilon)$-geradores são (n,ϵ)-geradores para todo $n \in \mathbb{N}$ e assim, $h_d(f) = 0$.

Suponha então que $1 \leq a < \infty$. Seja $K \subset M$ compacto e $\epsilon > 0$. Considere $\| \|_m$ a norma do máximo em $\mathbb{R}^n$ e $B(0,r)$ a bola em $\mathbb{R}^n$ nesta norma. Escolha agora sistemas de coordenadas $\varphi_1, ..., \varphi_r : B(0, 1/2) \to M$ em M de forma que $K \subset \bigcup_{i=1}^r \varphi_i((B(0, 1/2))$. Tome c tal que $d(\varphi_i(p), \varphi_i(q)) \leq c.\|p - q\|_m$ para todos p, $q \in B(0, 1/2)$ e $1 \leq i \leq r$.

Agora, para cada $\delta \in (0, 1)$, seja

$$E(\delta) = \{(k_1\delta, ..., k_m\delta) \in \mathbb{R}^m : k_i \in \mathbb{Z} \text{ e } |k_i\delta| < 1/2\}.$$

Então $\#E(\delta) < (\frac{1}{\delta} + 1)^m < (\frac{2}{\delta})^m$ e qualquer ponto de $B(0, 1/2)$ está a uma distância $\leq \delta$ de algum ponto de $E(\delta)$.

O conjunto $F(\delta) = \bigcup_{j=1}^r \varphi_j(E(\delta))$ é $(n, a^n.c.\delta)$-gerador de K. De fato, seja $x = \varphi_i(p) \in K$ com $p \in B(0, 1/2)$ e considere $q \in E(\delta)$ tal que $\|p - q\| \leq \delta$. Ponha $y = \varphi_i(q) \in F(\delta)$. Se $0 \leq k \leq n$ então

$$\begin{aligned} d(f^k(x), f^k(y)) &\leq a^k.d(x, y) \\ &\leq a^n.d(\varphi_i(p), \varphi_i(q)) \\ &= a^n.c.\|p - q\| \\ &\leq a^n.c.\delta. \end{aligned}$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, escolha δ tal que $\dfrac{1}{\delta} = \dfrac{a^n.c}{\epsilon}$, assim

$$r_n(\epsilon, K) \leq r.\#E(\delta) < r.\left(\frac{2}{\delta}\right)^m = r.\left(\frac{2a^n.c}{\epsilon}\right)^m.$$

Logo passando log e limites obtemos $h_d(f) \leq m. \log a$, como queríamos demonstrar. ■

Corolário 4.2.4. *Seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e λ o autovalor de maior módulo. Então*

$$h_d(T) \leq \text{máx } \{0, m. \log |\lambda|\}.$$

Demonstração: Pela item (a) da Proposição 2.5.6 temos que $h_d(T) = \frac{1}{n} h_d(T^n)$ pelo Proposição anterior 4.2.3 temos que

$$\frac{1}{n} h_d(T^n) \leq \frac{1}{n} \text{máx } \{0, m. \log \|T^n\|\} = \text{máx } \{0, m. \log \|T^n\|^{\frac{1}{n}}\}.$$

e como $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = |\lambda|$ (Pela Fórmula de Gelfand pg. 195 de [17]), então temos $h_d(T) \leq \text{máx } \{0, m. \log |\lambda|\}$. ■

Proposição 4.2.5. *Seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e $\lambda_1, ..., \lambda_m$ seus autovalores (possivelmente repetidos). Então*

$$h_d(T) = \sum_{|\lambda_i|>1} \log |\lambda_i|,$$

onde d é a distância euclidiana em $\mathbb{R}^m$.

Demonstração: Pela decomposição de Jordan do operador T, conseguimos uma decomposição $\mathbb{R}^m = E_1 \times ... \times E_k$, onde cada E_j é invariante por T e cada $T_j = T|_{E_j}$ tem autovalores com módulo α_j. Então podemos escrever $T = T_1 \times ... \times T_k$.

Assim pelo item (b) da Proposição 2.5.6 temos que $h_d(T) \leq \sum_{j=1}^{k} h_d(T_j)$.

Pelo Corolário 4.2.4 anterior temos $h_d(T_j) \leq \text{máx}\ \{0, \dim E_j. \log \alpha_j\}$, e então

$$h_d(T) \leq \sum_{|\lambda_i|>1} \log |\lambda_i|.$$

Para a outra desigualdade, considere o subespaço V de $\mathbb{R}^m$ formado pelo produto dos subespaços E_j tais que $\alpha_j > 1$ e μ a medida de Lebesgue em V. Pela Proposição 4.2.1 a distância euclidiana é T-homogênea e então pela Proposição 4.1.3 temos que $h_d(T|_V) = k(\mu, T|_V)$. Mas como $B_{n+1}^{T|_V}(0, \epsilon) \subset (T|_V)^{-n}(B(0, \epsilon))$, logo

$$\begin{aligned}
\mu(B_{n+1}^{T|_V}(0, \epsilon)) &\leq \mu\Big((T|_V)^{-n}(B(0, \epsilon))\Big) \\
&= \mu(B(0, \epsilon)).\left|\det(T|_V)^{-n}\right| \\
&= \frac{\mu(B(0, \epsilon))}{|\det T|_V|^n}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
k(\mu, T|_V) &= \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(y, \epsilon)) \\
&\geq \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \frac{\mu(B(0, \epsilon))}{|\det T|_V|^n} = \log |\det T|_V| \,,
\end{aligned}$$

e assim,

$$h_d(T) \geq h_d(T|_V) = k(\mu, T|_V) \geq \log |\det T|_V| = \sum_{|\lambda_i|>1} \log |\lambda_i|.$$

■

Na Proposição a seguir usaremos a definição de medida diferenciável como na Definição 5.1.1 na pág. 184 de [14], ou seja, uma medida é diferenciável em uma variedade se ela é a integral de uma função densidade diferenciável na variedade.

Corolário 4.2.6. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Considere $\phi : G \to G$ um endomorfismo e $\mathrm{d}\phi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ o homomorfismo na sua álgebra dado pelo diferencial de ϕ na identidade. Se d é uma distância invariante à direita em G e $|\cdot|$ é a distância induzida pela norma euclidiana no espaço vetorial então*

$$h_d(\phi) = h_{|\cdot|}(\mathrm{d}\phi_1).$$

Demonstração: Pela Proposição 4.2.1 a medida de Haar μ em G é ϕ-homogênea com relação à métrica invariante à direita d em G, e a medida usual de Lebesgue μ_L em $\mathfrak{g}$ é $\mathrm{d}\phi_1$-homogênea com relação a qualquer norma em $\mathfrak{g}$. A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$ e satisfaz $\phi \circ \exp = \exp \circ \mathrm{d}\phi_1$ (Proposição 9.2.10 de [11]). Logo, da Proposição 4.2.2, temos $k(\mu, \phi) = k(\mu_L, \mathrm{d}\phi_1)$ e da Proposição 4.1.3 temos

$$h_d(\phi) = k(\mu, \phi) = k(\mu_L, \mathrm{d}\phi_1) = h_{|\cdot|}((\mathrm{d}\phi)_1),$$

como queríamos demonstrar. ■

Demonstramos então a fórmula para a entropia de Dinaburg-Bowen ($h_d(\phi)$) de um endomorfismo $\phi : G \to G$ para qualquer grupo de Lie G.

Corolário 4.2.7. *(Fórmula de Bowen). Seja G grupo de Lie, $\phi : G \to G$ um endomorfismo e $\mathrm{d}\phi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ um homomorfismo com autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_m$ contando com multiplicidade. Se d é uma distância invariante à direita em G então*

$$h_d(\phi) = \sum_{|\lambda_i|>1} \log |\lambda_i|.$$

Demonstração: Pelo Corolário 4.2.6 e a Proposição 4.2.5 temos

$$h_d(\phi) = h_{|\cdot|}(\mathrm{d}\phi_1) = \sum_{|\lambda_i|>1} \log |\lambda_i|.$$

■

4.3 Pares de Li-Yorke em grupos de Lie

Nesta seção, provamos alguns resultados úteis sobre a existência ou não-existência de pares de Li-Yorke.

O principal resultado desta seção será que, se o toro maximal do centro de um grupo de Lie é trivial e a restrição de um endomorfismo para a componente conexa da identidade é sobrejetiva, então existe uma potência positiva deste endomorfismo que não tem nenhum par de Li-Yorke (Corolário 4.3.6). Começaremos com um resultado sobre pares de Li-Yorke em grupos lineares e em grupos discretos e a seguir veremos a relação entre quocientes de grupos de Lie e pares de Li-Yorke.

Proposição 4.3.1. *Se T é uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ então T não tem par de Li-Yorke.*

Demonstração: Vamos demonstrar por absurdo, seja $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ com $a \neq b$ um par de Li-Yorke. Então existe $n_k \to \infty$ tal que $(T^{n_k}(a), T^{n_k}(b)) \to (a, b)$ e também existe $n_l \to \infty$ tal que $(T^{n_l}(a), T^{n_l}(b)) \to (c, c)$. Pela linearidade de T temos que $T^{n_k}(a - b) \to a - b$ e $T^{n_l}(a - b) \to c - c = 0$ fazendo $a - b = x \neq 0$ temos $T^{n_k}(x) \to x$ e $T^{n_l}(x) \to 0$.

Seja $\mathbb{R}^m = E_1 \times E_2 \times E_3$ onde E_1, E_2 e E_3 são respectivamente os autoespaços maximais de T com autovalores de módulo menor que 1, igual à 1 e maior que 1. Seja $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^m$ com $x_i \in E_i$, para qualquer x_1 temos que $T^{n_k}(x_1) \to 0$ quando $k \to \infty$ então $x_1 = 0$. Para $x_3 \neq 0$ temos que $T^n(x_3) \to \infty$ quando $n \to \infty$ então temos $x_3 = 0$.

Como temos que $T^{n_l}(x_2) \to 0$ quando $l \to \infty$, basta mostrar que $x_2 = 0$. De fato, se $x_2 = (y_1, ..., y_d)$ podemos supor que $T|_{E_2}$ é uma matriz triangular superior com autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_d$ de módulo 1. Como $T^{n_l}(y_1, ..., y_d) \to 0$, da última para a primeira coordenada, temos:

$$\begin{aligned} {\lambda_d}^{n_l}.y_d &\to 0 \\ {\lambda_{d-1}}^{n_l}.y_{d-1} + (*).y_d &\to 0 \\ &\vdots \\ {\lambda_1}^{n_l} y_1 + (*).y_2 + ... + (*).y_d &\to 0. \end{aligned}$$

Agora, como todos os termos ${\lambda_i}^{n_l}$ tem módulo 1 obtemos $y_d = 0$, e em sucessão, $y_{d-1} = 0$, ..., e $y_1 = 0$ obtendo $x_2 = 0$, como queríamos. Concluindo, temos que $a - b = x = 0$ e $a = b$ o que é contradição com $a \neq b$. ■

Note que, a Proposição anterior implica pelo Teorema 2.8.10 que as transformações lineares em $\mathbb{R}^m$ tem entropia topológica zero.

Proposição 4.3.2. *Se $\phi : G \to G$ é um endomorfismo e G é um grupo discreto então ϕ não tem par de Li-Yorke, e além disso, pela Proposição 2.8.10 temos que $h(\phi) = 0$*

Demonstração: Vamos demonstrar por absurdo, seja $(a, b) \in G \times G$ com $a \neq b$ um par de Li-Yorke. Então existe uma subsequência $n_i \to \infty$ tal que

$$(\phi^{n_i}(a), \phi^{n_i}(b)) \to (c, c) \text{ para } c \in G,$$

como G é discreto temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\phi^{n_i}(a), \phi^{n_i}(b)) = (c, c)$ para todo $i \geq k$ e então $(\phi^n(a), \phi^n(b)) = (c, c)$ para todo $n \geq n_k$. Logo não existe subsequência $n_l \to \infty$ tal que $(\phi^{n_l}(a), \phi^{n_l}(b)) \to (a, b)$ e (a, b) não é par de Li-Yorke e obtemos uma contradição. ■

Agora veremos a relação entre quocientes e pares de Li-Yorke.

Proposição 4.3.3. *Seja $\phi : G \to G$ um endomorfismo contínuo e H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G tal que $\phi(H) \subset H$. Considere o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & G \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G/H & \xrightarrow[\varphi]{} & G/H \end{array}$$

onde π é a projeção canônica e φ não tem nenhum par de Li-Yorke. Então ϕ tem um par de Li-Yorke se, e somente se, $\phi|_H$ tem um par de Li-Yorke.

Demonstração: Como $H \subset G$ se $\phi|_H$ tem um par de Li-Yorke, então ϕ também tem um par de Li-Yorke. Agora suponha que $\phi|_H$ não tem nenhum par de Li-Yorke. Sejam $a, b, c \in G$ e subsequências $n_l \to \infty$ e $n_k \to \infty$ tal que

$$(\phi^{n_l}(a), \phi^{n_l}(b)) \to (a, b) \qquad \text{e} \qquad (\phi^{n_k}(a), \phi^{n_k}(b)) \to (c, c).$$

Aplicando π nestas equações e usando o diagrama comutativo temos que

$$(\varphi^{n_l}(\pi(a)), \varphi^{n_l}(\pi(b))) \to (\pi(a), \pi(b))$$

e que

$$(\varphi^{n_k}(\pi(a)), \varphi^{n_k}(\pi(b))) \to (\pi(c), \pi(c)).$$

Como φ não tem pares de Li-Yorke, então temos $\pi(a) = \pi(b)$. Logo $a = bh$ para algum $h \in H$ e $h = b^{-1}a$, e temos

$$\begin{aligned} \phi^{n_l}(h) &= \phi^{n_l}(b^{-1})\phi^{n_l}(a) \\ &= \phi^{n_l}(b)^{-1}\phi^{n_l}(a) \\ &\to b^{-1}a \\ &= h. \end{aligned}$$

Note que de fato, $\phi^{n_l}(b^{-1}) = \phi^{n_l}(b)^{-1}$, pois $\phi^{n_l}(b^{-1})\phi^{n_l}(b) = \phi^{n_l}(1) = 1$.

Por outro lado, considerando a distância invariante pela esquerda em G, temos que

$$\begin{aligned} d\left(\phi^{n_k}(h), 1\right) &= d\left(\phi^{n_k}(b)\phi^{n_k}(h), \phi^{n_k}(b)\right) \\ &= d\left(\phi^{n_k}(a), \phi^{n_k}(b)\right) \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Então obtemos

$$(\phi^{n_l}(h), \phi^{n_l}(1)) \to (h, 1) \qquad \text{e} \qquad (\phi^{n_k}(h), \phi^{n_k}(1)) \to (1, 1).$$

Como $\phi|_H$ não tem par de Li-Yorke, temos $h = 1$, mostrando que ϕ não tem par de Li-Yorke. ■

O seguinte resultado reduz o problema da não existência de pares de Li-Yorke do endomorfismo a mostrar a não existência de pares de Li-Yorke apenas no seu radical solúvel.

Proposição 4.3.4. *Seja G um grupo de Lie, $\phi : G \to G$ um endomorfismo contínuo tal que $\phi(G_0) = G_0$ e R um radical solúvel de G_0. Se $\phi|_R$ não tem par de Li-Yorke, então ϕ^n não tem par de Li-Yorke para algum $n > 0$.*

Demonstração: Como $\phi(R) \subset R$, podemos considerar o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "\phi|_{G_0}"] \arrow[d, "\pi"'] & G_0 \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

onde $S = G_0/R$ é um grupo de Lie semissimples, π é a projeção canônica e φ é o endomorfismo induzido por ϕ em S. Como $\phi(G_0) = G_0$, obtemos $\varphi(S) = S$, o que implica que $\varphi(Z(S)) \subset Z(S)$, onde $Z(S)$ é o centro de S. Podemos então considerar o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & S \arrow[d, "\rho"] \\ S/Z(S) \arrow[r, "\psi"'] & S/Z(S) \end{tikzcd}$$

onde ρ é a projeção canônica e ψ é o endomorfismo induzido por φ em $S/Z(S)$. Como $S/Z(S)$ é isomorfo ao grupo do adjunto de S, ele é então um grupo de Lie semissimples linear. Então temos que ψ^n é conjugado a restrição de uma transformação linear para algum $n > 0$ (veja a Proposição 3.1.10) e então pela Proposição 4.3.1 ψ^n não tem par de Li-Yorke. Como $Z(S)$ é discreto, pela Proposição 4.3.2, temos que $\varphi^n|_{Z(S)}$ não tem par de Li-Yorke. Pela Proposição 4.3.3, obtemos que φ^n não tem par de Li-Yorke. Como, por hipótese, $\phi|_R$ não tem par de Li-Yorke, $\phi^n|_R$ também não tem par de Li-Yorke. Obtemos agora da Proposição 4.3.3 que $\phi^n|_{G_0}$ não tem par de Li-Yorke. Finalmente, como $\phi(G_0) = G_0$, podemos considerar o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G/G_0 & \xrightarrow[\gamma]{} & G/G_0 \end{array}$$

onde $C = G/G_0$ é o grupo das componentes conexas de G, onde agora π é a projeção canônica e γ é o endomorfismo induzido por ϕ em C. Como C é um grupo discreto, temos que γ não tem par de Li-Yorke (Proposição 4.3.2). Então γ^n não tem par Li-Yorke, como $\phi^n|_{G_0}$ não tem par de Li-Yorke, pela Proposição 4.3.3 obtemos então que ϕ^n não tem par de Li-Yorke. ■

O próximo resultado é uma consequência do resultado anterior e do principal resultado do Capítulo 2 (Teorema 3.3.3).

Proposição 4.3.5. *Seja R um grupo solúvel conexo, $\phi : R \to R$ um endomorfismo sobrejetivo contínuo e N o radical nilpotente de R. Se N é simplesmente conexo, então ϕ não tem par de Li-Yorke.*

Demonstração: Como $\phi(N) \subset N$, podemos considerar o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} & R \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ A & \xrightarrow[\varphi]{} & A \end{array}$$

onde $A = R/N$ é um grupo abeliano de Lie (Proposição 3.1.6), π é a projeção canônica e φ é o endomorfismo induzido por ϕ em A. Como N é grupo de Lie nilpotente e simplesmente conexo, temos que $\phi|_N$ é conjugado a uma transformação linear (Proposição 3.1.4) e então pela Proposição 4.3.1 não tem par de Li-Yorke. Como $\varphi(T(A)) \subset T(A)$, podemos considerar também o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ A/T(A) & \xrightarrow[\psi]{} & A/T(A) \end{array}$$

onde $T(A)$ é o toro maximal de A, ρ é a projeção canônica e ψ é o endomorfismo induzido por φ em $A/T(A)$. Como $A/T(A)$ é um grupo de Lie abeliano e simplesmente conexo de Lie, temos que ψ é conjugado à uma transformação linear e portanto não tem par de Li-Yorke. Pelo Teorema 3.3.3, temos que $\varphi|_{T(A)}$ tem ordem finita e então não tem par de Li-Yorke. Pela Proposição 4.3.3 φ não tem par de Li-Yorke e agora novamente pela Proposição 4.3.3 temos que ϕ não tem par de Li-Yorke. ■

Agora obtemos o principal resultado da seção que é fundamental para o cálculo da entropia topológica na próxima seção.

Corolário 4.3.6. *Seja G um grupo de Lie e $\phi : G \to G$ um endomorfismo contínuo tal que $\phi(G_0) = G_0$. Se $T(G_0)$ é trivial, então ϕ^n não tem par de Li-Yorke para algum $n > 0$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.2.2 temos que $T(R) = T(G_0)$ logo $T(R)$ é trivial e então $R \simeq R/T(R)$. Agora, pela Proposição 3.2.5, temos que o radical nilpotente de R é simplesmente conexo. Como $\phi(G_0) = G_0$, também temos que $\phi|_R$ é um endomorfismo sobrejetivo contínuo. Pela Proposição 4.3.5, temos que $\phi|_R$ não tem par de Li-Yorke. E finalmente, pela Proposição 4.3.4, obtemos o Corolário. ■

4.4 Entropia Topológica de endomorfismos

Primeiro mostraremos um Lema que será usado logo a seguir.

Lema 4.4.1. *Seja G um grupo de Lie e $\phi : G \to G$ um endomorfismo contínuo. Existe um número natural n tal que ϕ restrito a $H_0 = \phi^n(G_0)$ é sobrejetivo. Em particular, H_0 é o subgrupo maximal conexo de G tal que $\phi(H_0) = H_0$ e*

$$h(\phi) = h(\phi|_H).$$

Demonstração: Na Proposição 3.1.12 vimos que se a diferencial na unidade de ϕ é a transformação linear $d\phi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(d\phi_1)^{n+1}(\mathfrak{g}) = (d\phi_1)^n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$ e $(d\phi_1)(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Também vimos que se $H_0 = <\exp \mathfrak{h}>$, temos que $\phi(H_0) = H_0$ e como G_0 é conexo $\phi^n(G_0) = H_0 = \phi(H_0)$, temos então que $\phi(H_0) = H_0$. Se L é subgrupo conexo de G tal que $\phi(L) = L$ então $L = \phi^n(L) \subset \phi^n(G_0) = H_0$, logo H_0 é subgrupo conexo maximal de G tal que $\phi(H_0) = H_0$. Além disso, pela Proposição 3.1.12, temos que H_0 é fechado. Definindo $H = \phi^n(G)$, como H/H_0 é discreto, temos que H também é fechado.

Para a última afirmação, note que o fecho do conjunto dos pontos recorrentes $\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}_\phi}$ está contido em H. De fato, se $x \in \overline{\mathcal{R}}$ então existe uma sequência x_i tal que $x_i \to x$ e $x_i \in \mathcal{R}$, ou seja, $x_i \in \omega(x_i)$. Agora, como $\phi^m(G) = H$, para todo $m \geq n$ e como H é fechado temos que $\omega(x_i) \subset H$ para todo $x_i \in G$. Então $x_i \in H$ e, usando novamente que H é fechado, temos que $x \in H$. Como $\mathcal{R} \subset H \subset G$ pela Proposição 2.4.4 temos que $h(\phi|_{\overline{\mathcal{R}}}) \leq h(\phi|_H) \leq h(\phi)$ e, pelo Corolário 2.6.4, temos que $h(\phi) = h(\phi|_{\overline{\mathcal{R}}})$, concluímos que $h(\phi|_H) = h(\phi)$. ■

O Teorema a seguir é o principal resultado do trabalho. Veremos que, para calcular a entropia topológica de um endomorfismo contínuo em grupo de Lie, basta calcular a entropia topológica do endomorfismo restrito ao toro maximal do centro do grupo G_ϕ. Como o toro é compacto, podemos aplicar a fórmula de Bowen (Proposição 4.2.7) para achar a entropia topológica do endomorfismo restrito a este toro e obtemos uma fórmula explícita para calcular a entropia de um endomorfismo contínuo de um grupo de Lie.

Teorema 4.4.2. *Seja G um grupo de Lie e $\phi : G \to G$ um endomorfismo contínuo. Então temos que*

$$h(\phi) = h\left(\phi|_{T(G_\phi)}\right),$$

onde G_ϕ é o subgrupo maximal conexo de G tal que $\phi(G_\phi) = G_\phi$, e $T(G_\phi)$ é o toro maximal do centro G_ϕ. Em particular, sempre existe uma probabilidade ϕ-invariante de entropia maximal.

Demonstração: Pelo Lema 4.4.1, existe um $n > 0$ tal que, $H_0 = \phi^n(G_0)$, seja $H = \phi^n(G)$ então $h(\phi) = h(\phi|_H)$ e $\phi(H_0) = H_0$. Se definimos $G_\phi = H_0$ obtemos que o subgrupo G_ϕ é o subgrupo maximal conexo tal que $\phi(G_\phi) = G_\phi$. Então, podemos então considerar o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\phi|_H"] \arrow[d, "\pi"'] & H \arrow[d, "\pi"] \\ H/H_0 \arrow[r, "\varphi"'] & H/H_0 \end{tikzcd}$$

onde π é a projeção canônica e φ é o endomorfismo induzido por ϕ em H/H_0. Como π é uma aplicação contínua, temos que $\pi\left(\mathcal{R}_{\phi|_H}\right) \subset \mathcal{R}_\varphi$. Como H/H_0 é discreto, temos que $\mathcal{R}_\varphi = \mathcal{P}_\varphi$, onde $\mathcal{P}_\varphi$ é o conjunto dos pontos periódicos de φ. Então temos que $\mathcal{R}_{\phi|_H} \subset \pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)$, logo $\overline{\mathcal{R}_{\phi|_H}} \subset \pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)$, como $\mathcal{P}_\varphi$ é um conjunto fechado em H/H_0. Então $h(\phi|_H) = h\left(\phi|_{\pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)}\right)$ pela Proposição 2.6.4. Temos também que $\mathcal{P}_\varphi$ é um subgrupo de H/H_0. De fato, se $x, y \in \mathcal{P}_\varphi$, temos que $\varphi^l(x) = x$ e que $\varphi^m(y) = y$, e então $\varphi^{lm}(xy) = \varphi^{lm}(x)\varphi^{lm}(y) = xy$. Além disso, temos que $\varphi|_{\mathcal{P}_\varphi}$ é um isomorfismo. Primeiro $\varphi|_{\mathcal{P}_\varphi}$ é sobrejetor pois pontos periódicos são imagens deles mesmos. Para mostrar que $\varphi|_{\mathcal{P}_\varphi}$ é injetiva seja $x \in \mathcal{P}_\varphi$ tal que $\varphi(x) = 1$. Como $\varphi^l(x) = x$, temos que

$$x = \varphi^{l-1}(\varphi(x)) = \varphi^{l-1}(1) = 1,$$

como queríamos. Finalmente mostraremos que $\phi|_{\pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)}$ é uma função própria, e para isso mostraremos que o núcleo de $\phi|_{\pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)}$ é finito. Seja $h \in \pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)$ tal que $\phi(h) = 1$. Temos $\pi(h) \in \mathcal{P}_\varphi$ e também que $\varphi(\pi(h)) = \pi(\phi(h)) = 1$. Como $\varphi|_{\mathcal{P}_\varphi}$ é um isomorfismo, temos que $\pi(h) = 1$, o que implica que $h \in H_0 = G_\phi$. Então o núcleo de $\phi|_{\pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)}$ é finito já que está contido no núcleo de $\phi|_{G_\phi}$, que é finito pelo Lema 3.1.11 pois $\phi(G_\phi) = G_\phi$ e G_ϕ é conexo. Como $\phi(T(G_\phi)) \subset T(G_\phi)$, podemos considerar o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi) \arrow[r, "\phi|_{\pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi) \arrow[d, "\pi_1"] \\
\pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)/T(G_\phi) \arrow[r, "\psi"'] & \pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)/T(G_\phi)
\end{tikzcd}$$

onde π_1 é a projeção canônica e ψ é o endomorfismo induzido por ϕ em $\pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)/T(G_\phi)$. Temos que a componente conexa da identidade de $\pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)/T(G_\phi)$ é dada por $G_\phi/T(G_\phi)$, que é conexa, pois G_ϕ é conexo. Pela Proposição 3.2.5, temos que $T(G_\phi/T(G_\phi))$ é trivial. Além disso, temos que $\psi(G_\phi/T(G_\phi)) = G_\phi/T(G_\phi)$, já que $\phi(G_\phi) = G_\phi$. Então pelo, Corolário 4.3.6, temos que ψ^n não tem par de Li-Yorke para algum $n > 0$. Como $\phi|_{\pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)}$ é própria ψ e ψ^n são próprias, temos então pelo Teorema 2.8.10 que $h(\psi^n) = 0$, o que pelo Corolário 2.6.3 implica que $h(\psi) = 0$. Como π_1 também é uma função própria, pela Proposição 2.7.3 se tomamos $\tau = \phi|_{T(G_\phi)}$, temos que

$$\begin{aligned}
h(\phi) &= h(\phi|_H) \\
&= h\left(\phi|_{\pi^{-1}(\mathcal{P}_\varphi)}\right) \\
&\leq h(\psi) + h\left(\phi|_{T(G_\phi)}\right) \\
&= h\left(\phi|_{T(G_\phi)}\right) \\
&\leq h(\phi),
\end{aligned}$$

onde temos a última desigualdade pela Proposição 2.4.4. Obtemos então que $h(\phi) = h\left(\phi|_{T(G_\phi)}\right)$. Como o toro é compacto pela Proposição 4.1.3 sempre existe uma medida de probabilidade $\phi|_{T(G_\phi)}$-invariante de entropia máxima, se estendermos esta medida para todo G concluímos o Teorema. ■

Apresentamos agora um caso particular do Teorema anterior.

Corolário 4.4.3. *Seja G um grupo be a Lie conexo e $\phi : G \to G$ um endomorfismo sobrejetor contínuo. Então temos que*

$$h(\phi) = h\left(\phi|_{T(G)}\right),$$

onde $T(G)$ é o toro maximal no centro de G. Em particular, se G é simplesmente conexo, então $h(\phi) = 0$.

Demonstração: Quando G for simplesmente conexo $T(G)$ é trivial logo pelo Teorema anterior 4.4.2 temos $h\left(\phi|_{T(G)}\right) = 0$. ■

Para esclarecer a relação entre a presença de pares de Li-Yorke e entropia positiva temos o seguinte resultado demonstrado por Andres Koropecki em [16].

Proposição 4.4.4. *Seja T um toro e $\phi : T \to T$ um endomorfismo sobrejetivo e contínuo. Então $h(\phi) > 0$ se, e somente se, ϕ^n tem um par de Li-Yorke para cada $n > 0$.*

Demonstração: Pela Proposição 2.6.3 se $h(\phi) > 0$, então $h(\phi^n) = nh(\phi) > 0$ para cada $n > 0$. Então pela Proposição 2.8.10, ϕ^n tem um par de Li-Yorke para cada $n > 0$. Por outro lado, assuma que $h(\phi) = 0$. Como T é compacto pelo Corolário 2.6.2 temos $h(T) = h_d(T)$. E então pela fórmula de Bowen (Corolário 4.2.7), temos que todos os autovalores de $d\phi_1$ tem valor absoluto menor ou igual à 1. Agora, como ϕ é sobrejetora temos que o determinante de $d\phi_1$ é $\neq 0$ e como pela Proposição 3.1.3 temos que o determinante é inteiro temos que o determinante tem módulo maior ou igual à 1. Pela fórmula de Bowen temos então que todos os autovalores têm módulo 1 e que o determinante de $d\phi_1$ é igual à ± 1. Isso implica que ϕ é inversível pois se $d\phi_1 = A$ então $d\phi_1^{-1} = \frac{1}{\det A} B^t \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, onde $B = \{b_{ij}\}$ é a matriz dos cofatores de A.

Por indução na dimensão, $\dim(T)$ de T, vamos provar que existe um $n > 0$ tal que ϕ^n não tem par de Li-Yorke. Se a $\dim(T) = 1$, então ϕ é a identidade ou a inversão, e obtemos o resultado. Agora assuma que $\dim(T) = d > 1$. Pelo Corolário do Teorema 24.5 de [8], temos que ϕ não é ergódico. Então a Proposição 24.1 de [8] implica que $A = d\phi_1 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ tem um autovalor que é raiz da unidade. Então existe um $m > 0$ e $v \in \mathbb{Z}^d$ tal que $A^m v = v$. De fato, temos que $(A^m - I)v = 0$ é um sistema linear com coeficientes racionais com solução não trivial. Considerando S como o subgrupo conexo de T gerado por v obtemos que S é fechado, com dimensão $\dim(S) = 1$, e com $\phi^m(S) = S$. Podemos então considerar o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\phi^m"] \arrow[d, "\pi"'] & T \arrow[d, "\pi"] \\ T/S \arrow[r, "\varphi"'] & T/S \end{tikzcd}$$

onde π é a projeção canônica e φ é o endomorfismo induzido por ϕ^m no toro T/S. Como $\dim(T/S) = d - 1$, pela hipótese de indução, existe $k > 0$ tal que φ^k não tem par de Li-Yorke. Logo φ^k e $\phi^{mk}|_S$ não tem par de Li-Yorke e pela Proposição 4.3.3 temos que ϕ^{mk} não tem par de Li-Yorke. ■

A seguir generalizamos o resultado anterior para um grupo de Lie qualquer aplicando o Teorema 4.4.2.

Proposição 4.4.5. *Seja G um grupo de Lie e $\phi : G \to G$ um endomorfismo contínuo tal que $\phi(G_0) = G_0$. Então $h(\phi) > 0$ se, e somente se, ϕ^n tem um par de Li-Yorke para cada $n > 0$.*

Demonstração: Se $h(\phi) > 0$, então $h(\phi^n) = nh(\phi) > 0$ para cada $n > 0$. Então ϕ^n tem um par de Li-Yorke para cada $n > 0$. Por outro lado, assumindo que $h(\phi) = 0$, temos pelo Teorema 4.4.2 que $h\left(\phi|_{T(G)}\right) = 0$. Agora, pela Proposição 4.4.4, existe um $m > 0$ tal que $\phi^m|_{T(G)}$ não tem par de Li-Yorke. Podemos considerar o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/T(G) \arrow[r, "\varphi"'] & G/T(G) \end{tikzcd}$$

onde π é a projeção canônica e φ é o endomorfismo induzido por ϕ em $G/T(G)$. Pela Proposição 3.2.5, temos que $T\left(G/T(G)\right)$ é trivial. Então, pelo Corolário 4.3.6, temos que φ^k não tem par de Li-Yorke para algum $k > 0$. Logo φ^{mk} e $\phi^{mk}|_{T(G)}$ não tem par de Li-Yorke. E então, pela Proposição 4.3.3, temos que ϕ^{mk} não tem par de Li-Yorke. ■

Referências Bibliográficas

[1] R. Adler, A. Konheim and H. MacAndrew: *Topological entropy*. Trans. Americ. Math Soc. **114** (1965), 309-319.

[2] P. Billingsley: *Probability and Measure*. Wiley, John Wiley & Sons, New York, (2012).

[3] R. Bowen: *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*. Trans. Americ. Math Soc. **153** (1971), 401-414.

[4] Bredon: *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, New York, (1993).

[5] A. Caldas and M. Patrão: *Entropy and Its Variational Principle for Locally Compact Metrizable Systems*. Ergodic Theory and Dynamical Systems (2016), 1-26.

[6] A. Caldas and M. Patrão: *Entropy of Endomorphisms of Lie Groups*. Discrete and Continuous Dynamical Systems **33** (2013), 1351-1363.

[7] M-K. Chuah e M. Zhang: *Outer automorphism groups of simple Lie algebras and symmetries of painted diagrams*. Forum Mathematicum **29** (2017), 555-562.

[8] M. Denker, C. Grillenberger and K. Sigmund: *Ergodic Theory on Compact Spaces*. LNM 527, Springer-Verlag, Berlin, (1976).

[9] T. Ferraiol: *Entropia e Ações de Grupos de Lie*, Tese de Mestrado, Imecc, Campinas, (2008).

[10] E. Glasner: *Ergodic Theory via Joinings*. Mathematical Surveys and Monographs Vol. 101, (2003).

[11] J. Hilgert and K.-H. Neeb: *Structure and Geometry of Lie Groups*. SMM, Springer-Verlag, New York, (2012).

[12] P. Hulse: *On the sequence entropy of transformations with quasi-discrete spectrum*, Journal of the London Math. Soc. **20** (1979), 128-136.

[13] A. Katok: *Fifty years of entropy in dynamics: 1958-2007.* Journal of Modern Dynamics n.4 (2007), 545-596.

[14] A. Katok and B. Hasselblatt: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge University Press, New York, (1995).

[15] A. Kleppner: *Measurable Homomorphisms of locally compact groups.* Proceedings of the American Mathematical Society (1989), Vol. 106 n. 2.

[16] A. Koropecki: https://mathoverflow.net/questions/248020/can-a-zero-entropy-automorphism-of-the-torus-have-a-li-yorke-pair

[17] P. Lax: *Functional Analysis.* Wiley, John Wiley & Sons, New York, (2002).

[18] M. Patrão: *Entropy and its variational principle for non-compact metric spaces.* Ergodic Theory and Dynamical Systems **30** (2010), 1529-1542.

[19] M. Patrão: *The Topological Entropy of Endomorphisms of Lie Groups.* https://arxiv.org/abs/1711.02562, (2017) a ser publicado no Israel Journal of Mathematics.

[20] L. San Martin: *Grupos de Lie.* Ed. Unicamp, Campinas, (2017).

[21] Ya. Sinai: *On the Notion of Entropy of a Dynamical System.* Doklady of Russian Academy of Sciences, **124** (1959), 768–771.

[22] P. Walters: *An Introduction to Ergodic Theory.* Springer-Verlag, New York, (1982).