



**Universidade de Brasília**

**Geometria de Laguerre e  
hipersuperfícies de Dupin com  
curvatura de Laguerre constante em  
 $\mathbb{R}^{n+1}$**

**Fernanda Alves Caixeta**

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues

Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de  
*Mestre(a) em Matemática*

Brasília



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Geometria de Laguerre e hipersuperfícies de Dupin com curvatura de Laguerre constante em $\mathbb{R}^{n+1}$

por

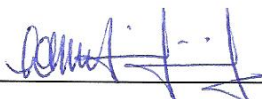
**Fernanda Alves Caixeta\***

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade  
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 10 de julho de 2019.

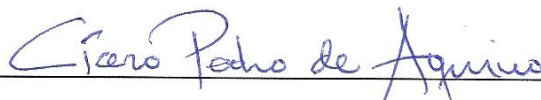
Comissão Examinadora:



\_\_\_\_\_  
Prof. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues - MAT/UnB (Orientadora)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Paulo dos Santos – MAT/UnB (Membro)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino - UFPI (Membro)

\* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.



Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ag           Alves Caixeta, Fernanda  
              Geometria de Laguerre e hipersuperfícies de Dupin com  
              curvatura de Laguerre constante em  $\mathbb{R}^{n+1}$  / Fernanda Alves  
              Caixeta; orientador Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues .  
              -- Brasília, 2019.  
              122 p.

              Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --  
              Universidade de Brasília, 2019.

              1. Geometria de Laguerre. 2. Hipersuperfícies de Dupin.  
              3. Curvatura de Laguerre. 4. Hipersuperfície isoparamétrica  
              de Laguerre. I. Maria Dias de Ávila Rodrigues , Luciana,  
              orient. II. Título.



Aos meus pais





## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado tanta força e esperança para conseguir concluir mais esta etapa da minha vida.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram em todos os meus sonhos acadêmicos e estiveram ao meu lado comemorando os momentos bons e me ajudando a seguir em frente nos momentos difíceis. Sou eternamente grata por serem pais tão maravilhosos.

Aos meus avôs, avós, padrinho e madrinhas por todas as orações que foram feitas em minha intenção, por todo incentivo e carinho.

Às minhas grandes amigas Conceição e Yana, pelas palavras de motivação.

À professora Luciana, por seus ensinamentos, pela orientação, pelo apoio, o incentivo e o esforço para a execução desde trabalho.

Aos membros da banca e os professores do Departamento de Matemática.

Aos meus colegas, em especial, a minha querida amiga Laís, que esteve ao meu lado em todos os momentos durante esses dois anos.



## Resumo

Nesta dissertação estudamos, inicialmente, a geometria de Laguerre no espaço Euclidiano. Considerando  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas, apresentamos uma caracterização, em termos dos invariantes de Laguerre, das hipersuperfícies de Dupin com curvatura de Laguerre constante. Mostramos que uma hipersuperfície de Dupin com curvatura de Laguerre constante é Laguerre equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre plana. Posteriormente, considerando uma hipersuperfície de Dupin própria em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , que admite um sistema de coordenadas principais com  $n$  curvaturas principais distintas e não nulas, apresentamos explicitamente todas essas hipersuperfícies que possuem curvatura de Laguerre constante.

**Palavras-chaves:** Geometria de Laguerre, hipersuperfície de Dupin, curvatura de Laguerre, hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre.



## Abstract

In this work, initially, we study Laguerre geometry in the Euclidean space. Considering  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  an oriented hypersurface with  $r \geq 3$  distinct nonvanishing principal curvatures, we present a characterization, in terms of Laguerre invariants, of Dupin hypersurfaces with constant Laguerre curvatures. We show that a Dupin hypersurface with constant Laguerre curvatures is Laguerre equivalent to a flat Laguerre isoparametric hypersurface. Subsequently, we consider a proper Dupin hypersurfaces of the Euclidean space  $\mathbb{R}^{n+1}$ , that admit principal coordinate systems and have  $n$  distinct nonvanishing principal curvatures and we present explicitly all such hypersurfaces that have constant Laguerre curvatures.

**Key words:** Laguerre geometry, Dupin hypersurfaces, Laguerre curvatures, Laguerre isoparametric hypersurfaces.



# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Geometria de Laguerre no espaço Euclidiano</b>	<b>5</b>
1.1 Geometria das esferas orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ . . . . .	5
1.2 Grupo das transformações de Laguerre . . . . .	18
1.3 Hipersuperfícies de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ . . . . .	24
1.4 Geometria de Laguerre para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ . . . . .	32
<b>2 Hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em <math>\mathbb{R}^{n+1}</math></b>	<b>49</b>
2.1 Tensores isoparamétricos . . . . .	49
2.2 Hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre . . . . .	52
2.3 Classificação das hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre . . . . .	58
<b>3 Hipersuperfícies de Dupin em <math>\mathbb{R}^{n+1}</math> com curvatura de Laguerre constante</b>	<b>73</b>
3.1 Hipersuperfície de Dupin com curvaturas principais distintas . . . . .	73
3.2 Hipersuperfície de Dupin com curvatura de Laguerre constante . . . . .	79
<b>Bibliografia</b>	<b>121</b>





# Introdução

Uma hipersuperfície  $M^n$  em uma forma espacial  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbb{S}^{n+1}$  ou  $\mathbb{H}^{n+1}$  é de Dupin se cada curvatura principal é constante ao longo da correspondente linha de curvatura. Uma hipersuperfície de Dupin  $M^n$  é dita própria se o número  $r$  de curvaturas principais é constante em  $M^n$ . Os primeiros exemplos dessas superfícies, obtidos por Dupin em 1822, foram as cíclides de Dupin. Desde então, as hipersuperfícies de Dupin passaram a ser objeto de estudo para muitos pesquisadores, sobretudo acerca de problemas envolvendo a classificação dessas hipersuperfícies (Ferro, Rodrigues e Tenenblat [9], Li e Wang [12], Li, Li e Wang [13], Li e Sun [14], Riveros, Rodrigues e Tenenblat [19], dentre outros).

Uma importante classe de exemplos de hipersuperfícies de Dupin, são as hipersuperfícies isoparamétricas em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbb{S}^{n+1}$  ou  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Uma hipersuperfície é dita isoparamétrica se ela possui curvaturas principais constantes. Num trabalho publicado em 1999, Corro, Ferreira e Tenenblat [8] aplicaram transformações de Ribaucour ao hiperplano, para obter uma família de hipersuperfícies de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 3$ , parametrizada por linhas de curvatura com  $n$  curvaturas principais distintas, dada, a menos de movimentos rígidos por,

$$x(u_1, u_2, \dots, u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n, 0) - \frac{\sum_{j=1}^n b_j u_j^2 + \gamma}{\sum_{j=1}^n b_j^2 u_j^2 + 1} (b_1 u_1, b_2 u_2, \dots, b_n u_n, -1), \quad (1)$$

em que  $b_j$  são números reais distintos e não nulos e  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Essa família de hipersuperfícies de Dupin tem curvatura de Lie constante, curvatura de Laguerre constante e curvatura de Möbius não constante.

Para as hipersuperfícies de Dupin com curvatura de Möbius constante, Riveros, Rodrigues e Tenenblat [19] provaram que uma hipersuperfície de Dupin  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 4$ , com  $n$  curvaturas principais distintas e curvatura de Möbius constante não pode ser parametrizada por linhas de curvatura. Além disso, mostraram que a menos de transformação de Möbius, existe uma única hipersuperfície de Dupin  $M^3 \subset \mathbb{R}^4$  com três curvaturas principais distintas que é parametrizada por linhas de curvatura e possui curvatura de Möbius constante. Recen-

temente, em [9], Ferro, Rodrigues e Tenenblat apresentaram a classificação completa das hipersuperfícies de Dupin em  $\mathbb{R}^5$ , com quatro curvaturas principais distintas, parametrizadas por linhas de curvatura.

Outros autores como Pinkall [18], Chern e Cecil [3] e [4] se dedicaram ao estudo das hipersuperfícies de Dupin no contexto das esferas de Lie. O primeiro deles provou, dentre outros resultados, que a propriedade de uma hipersuperfície ser de Dupin própria é invariante pela ação do grupo de transformações de Lie. Assim, a classificação das hipersuperfícies de Dupin é realizada a menos dessas transformações. O grupo das transformações de Lie pode ser visto como a união de dois importantes subgrupos, o subgrupo das transformações de Möbius e o subgrupo das transformações de Laguerre.

Na geometria diferencial de Laguerre, são estudadas as propriedades de hipersuperfícies de Laguerre invariantes pelo grupo das transformações de Laguerre em  $U\mathbb{R}^{n+1}$ . Em 2007, Li e Wang [11] estudaram a geometria de Laguerre para hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^{n+1}$  usando o método do referencial móvel de Cartan. Para  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  sem pontos umbílicos com curvaturas principais distintas não nulas, definiram os invariantes básicos de Laguerre, a saber, uma métrica invariante de Laguerre  $g$ , segunda forma fundamental de Laguerre  $\mathbb{B}$ , forma de Laguerre  $\mathbb{C}$  e o tensor de Laguerre  $\mathbb{L}$ .

Além de estudar a geometria de Laguerre, utilizando o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$ , o espaço semi-Euclidiano  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  e o espaço degenerado  $\mathbb{R}_0^{n+1}$  correspondendo ao hiperplano tipo-espaço, hiperplano semi-Euclidiano e hiperplano degenerado em  $\mathbb{R}_1^{n+2}$  respectivamente, Li e Wang [11] definiram as formas espaciais de Laguerre  $U\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $U\mathbb{R}_1^{n+1}$  e  $U\mathbb{R}_0^{n+1}$  e as imersões de Laguerre  $\sigma : U\mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$  e  $\tau : U\mathbb{R}_0^{n+1} \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ . Usando estas imersões de Laguerre, cada hipersuperfície  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$  ou  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}_0^{n+1}$  corresponde a uma hipersuperfície  $x' : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ .

Em 2010, Li, Li e Wang [13] introduziram o conceito de hipersuperfície com segunda forma fundamental de Laguerre  $\mathbb{B}$  paralela como sendo as hipersuperfícies tais que  $\nabla\mathbb{B} = 0$ , onde  $\nabla$  é a derivada covariante em relação à métrica  $g$ . Além disso, obtiveram a classificação completa dessas hipersuperfícies. Isto é, mostraram que a menos de transformação de Laguerre, as únicas hipersuperfícies com segunda forma fundamental  $\mathbb{B}$  paralela em  $\mathbb{R}^{n+1}$  são as cíclides de Dupin ou a imagem pela imersão de Laguerre  $\tau$  da hipersuperfície  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}_0^{n+1}$  que corresponde, a menos de uma translação em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , a hipersuperfície descrita em (1) quando  $\gamma = 0$ .

Posteriormente, Li e Sun em [14] definiram hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre como sendo as hipersuperfícies tais que os autovalores da segunda forma fundamental de Laguerre  $\mathbb{B}$  são constantes e a forma de Laguerre  $\mathbb{C}$  é nula e apresentaram uma classificação

dessas hipersuperfícies no caso  $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Mostraram também, que uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre é uma hipersuperfície de Dupin e reciprocamente, uma hipersuperfície de Dupin, com a hipótese adicional de ter a forma de Laguerre  $\mathbb{C}$  nula, é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre.

Em 2014, Cezana e Tenenblat [6] obtiveram a classificação completa das hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre com duas curvaturas principais distintas e não nulas. Além disso, motivados pelo resultado de Rodrigues e Tenenblat [20] para o caso de hipersuperfícies de Dupin com curvatura Möbius constante, mostraram que as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em  $\mathbb{R}^{n+1}$  são as cíclides de Dupin ou as hipersuperfícies de Dupin com curvaturas de Laguerre constante.

Posteriormente em 2015, Li e Wang [12] obtiveram um resultado semelhante. Considerando uma hipersuperfície  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas, então  $x$  é hipersuperfície de Dupin com curvatura de Laguerre constante se, e somente se,  $x$  é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. Outra informação importante apresentada por Li e Wang [12] foi que a condição de uma hipersuperfície ser isoparamétrica de Laguerre implica em ter segunda forma fundamental  $\mathbb{B}$  paralela. Esse resultado foi obtido por Cezana e Tenenblat [6] para o caso em que a hipersuperfície possui duas curvaturas principais distintas e não nulas.

Com isso, Li e Wang [12] provaram que uma hipersuperfície de Dupin  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas, é Laguerre equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre plana em  $\mathbb{R}^{n+1}$  se, e somente se, as curvaturas de Laguerre são constantes.

Em um trabalho recente, Cezana e Tenenblat [7] apresentaram algumas propriedades básicas de hipersuperfícies de Dupin com  $n$  curvaturas principais distintas. Em seguida, mostraram que qualquer hipersuperfície de Dupin própria em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com  $n$  curvaturas principais distintas e não nulas, que admite um sistema de coordenadas principais e curvatura de Laguerre constante é dada pela família descrita (1).

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar a demonstração do resultado proposto por Li e Wang [12], observando que as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre plana constituem uma classe contida no exemplo (1) quando  $\gamma = 0$ . Em seguida, descrevemos o resultado obtidos por Cezana e Tenenblat [7].

Agora, apresentamos uma breve descrição da estrutura do nosso trabalho.

No Capítulo 1, estudamos a geometria das esferas orientadas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  tendo como base o trabalho de Cecil [5]. Descrevemos a correspondência bijetiva, estabelecida por Lie,

entre o conjunto de todas as esferas orientadas e hiperplanos orientados em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  e os pontos da quádrlica de Lie  $\mathbb{Q}^{n+2}$ . Estudamos o grupo das transformações de Laguerre em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  e introduzimos o conceito de transformação de Laguerre. Além disso, definimos uma hipersuperfície de Laguerre em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  mostrando que a métrica de Laguerre é invariante por transformações de Laguerre. Concluimos este capítulo estudando a geometria de Laguerre em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , com base no artigo de Li e Wang [11].

No Capítulo 2, definimos as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre e mostramos que tais hipersuperfícies são de Dupin com curvaturas de Laguerre constante. Apresentamos exemplos de hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre, a saber, a cíclide de Dupin e as isoparamétricas de Laguerre plana. Usando a imersão de Laguerre  $\tau : U\mathbb{R}_0^{n+1} \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ , observamos que as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre plana  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}_0^{n+1}$  correspondem as hipersuperfícies dadas em (1), a menos de uma translação em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , quando  $\gamma = 0$ . Por fim, apresentamos o teorema de classificação de tais hipersuperfícies obtido por Li e Wang em [12].

No Capítulo 3, estudamos alguns resultados básicos sobre hipersuperfícies de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 3$ , que são parametrizadas por linhas de curvatura e com curvaturas principais distintas. Posteriormente, considerando uma hipersuperfície de Dupin própria  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  que admite um sistema de coordenadas principais e  $n$  curvaturas principais distintas e não nulas, apresentamos uma caracterização para que as curvaturas de Laguerre sejam constantes em termos dos raios de curvatura e também a caracterização em termos dos símbolos de Christoffel. Mostramos que  $M^n$  tem curvatura de Laguerre constante se, e somente se, existem  $n$  constantes reais e  $n$  funções diferenciáveis  $F_i(u_i)$ , com  $F_i' \neq 0$ , tal que a primeira e a segunda formas fundamentais de  $M^n$  são dadas em termos dessas constantes e dessas funções  $F_i$ . Concluimos este capítulo com a demonstração do teorema, proposto por Cezana e Tenenblat em [7], que afirma que as hipersuperfícies dadas por (1) são as únicas hipersuperfícies de Dupin com curvatura de Laguerre constante determinadas por  $n$  números reais, sendo elas,  $(n - 2)$  curvaturas de Laguerre e duas constantes reais, uma delas não nula.

# Capítulo 1

## Geometria de Laguerre no espaço Euclidiano

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns conceitos e resultados básicos da geometria das esferas de Lie. A teoria pode ser vista com mais detalhes em [5]. Estudamos o grupo das transformações de Laguerre, que é um importante subgrupo do grupo das transformações de Lie, consistindo de todos os elementos de  $O(n+2, 2)$  que fixam os vetores tipo luz em  $\mathbb{R}_2^{n+4}$ . Definimos uma hipersuperfície de Laguerre em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  e mostramos que a métrica de Laguerre é um invariante de Laguerre. Por invariantes de Laguerre, entendemos como objetos invariantes por transformações de Laguerre. Concluimos este capítulo, apresentando os invariantes básicos de Laguerre estudados por Li e Wang [11] para hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tais como a segunda forma fundamental de Laguerre  $\mathbb{B}$ , a forma de Laguerre  $\mathbb{C}$  e o tensor de Laguerre  $\mathbb{L}$ . Além disso, mostramos expressões que relacionam esses invariantes.

### 1.1 Geometria das esferas orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$

Iniciamos essa seção introduzindo o conceito de contato orientado entre esferas e hiperplanos orientados. Apresentamos a correspondência bijetiva, estabelecida por Lie, entre o conjunto de todas as esferas orientadas e hiperplanos orientados em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  e o conjunto dos pontos da quádrlica de Lie  $\mathbb{Q}^{n+2}$  contida no espaço projetivo real  $\mathbb{P}^{n+3}$ . Mostramos que a quádrlica  $\mathbb{Q}^{n+2}$  contém apenas retas projetivas mas nenhum subespaço de dimensão maior. Por fim, apresentamos o conceito de feixe de esferas, que consiste na família a 1-parâmetro de esferas orientadas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que corresponde a pontos de uma reta projetiva

em  $\mathbb{Q}^{n+2}$ . Observamos que o feixe de esferas consiste de todas as esferas orientadas em contato orientado.

Considere sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$  o fibrado tangente unitário, definido por:

$$U\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, \xi) / x \in \mathbb{R}^{n+1}, \xi \in \mathbb{S}^n\} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{2n+2}. \quad (1.1)$$

**Definição 1.** Uma esfera orientada em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  de centro  $p$  e raio  $r$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  dada por:

$$S(p, r) = \{(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}; x - p = r\xi\}. \quad (1.2)$$

Geometricamente,  $S(p, r)$  com  $r \neq 0$  corresponde a uma esfera orientada em  $\mathbb{R}^{n+1}$  de centro  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$  e raio  $r$ . Se  $r > 0$  (respectivamente  $r < 0$ ), o vetor normal unitário  $\xi$  de  $S(p, r)$  é exterior (respectivamente interior). Se  $r = 0$ , então  $S(p, 0)$  representa todos os vetores tangentes a  $p$ . Denotamos  $S(p, 0)$  o ponto esférico em  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Definição 2.** Dado  $\xi \in \mathbb{S}^n$  e uma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dizemos que um hiperplano orientado em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  dada por:

$$P(\xi, \lambda) = \{(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}; x \cdot \xi = \lambda\}, \quad (1.3)$$

em que “ $\cdot$ ” é a métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Geometricamente,  $P(\xi, \lambda)$  é o hiperplano  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x \cdot \xi = \lambda\}$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com normal unitário  $\xi$ .

Considere o conjunto  $\Sigma = \{\Gamma / \Gamma \text{ é esfera ou } \Gamma \text{ é hiperplano}\} \subset U\mathbb{R}^{n+1}$ . Denotamos os elementos de  $\Sigma$  por esferas orientadas, que podem ser esferas ou hiperplanos.

**Definição 3.** Sejam  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$ . Dizemos que  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  têm contato orientado se  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  ou se a intersecção  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  é um único ponto  $(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$ .

Geometricamente,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  têm contato orientado em  $(x, \xi)$  se, e somente se, elas são esferas orientadas (ou hiperplanos orientados) em  $\mathbb{R}^{n+1}$  tangentes a  $x$  com o mesmo normal unitário  $\xi$ . Com o objetivo de determinar uma condição analítica para o contato orientado entre elementos do conjunto  $\Sigma$  vamos apresentar algumas definições.

Seja  $\mathbb{R}_2^{n+4}$  o espaço  $\mathbb{R}^{n+4}$  munido com o produto interno

$$\langle X, Y \rangle = -X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_{n+3}Y_{n+3} - X_{n+4}Y_{n+4}. \quad (1.4)$$

A fim de demonstrar a proposição a seguir, apresentamos também a definição da métrica de Lorentz juntamente com algumas observações. Considere  $\mathbb{R}_1^{n+3}$  o espaço  $\mathbb{R}^{n+3}$  munido com a métrica de Lorentz

$$(X, Y) = -X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_{n+3}Y_{n+3}, \quad X, Y \in \mathbb{R}^{n+3}. \quad (1.5)$$

**Definição 4.** Dado  $Y \in \mathbb{R}_1^{n+3}$  dizemos que  $Y$  é um vetor

- tipo espaço, se  $(Y, Y) > 0$  ou se  $Y = 0$ ;
- tipo tempo, se  $(Y, Y) < 0$ ;
- tipo luz, se  $(Y, Y) = 0$  e  $Y \neq 0$ .

O conjunto de todos os vetores em  $\mathbb{R}_1^{n+3}$  tipo luz formam um cone de revolução, chamado *cone de luz*. O interior do cone (respectivamente o exterior) é formado pelo conjunto dos vetores tipo tempo (respectivamente tipo espaço). Se  $Y$  é tipo espaço, o complemento ortogonal  $Y^\perp \in \mathbb{R}_1^{n+3}$  é um hiperplano constituído por vetores tipo espaço, tipo tempo e tipo luz. Se  $Y$  é tipo tempo, o complemento ortogonal  $Y^\perp$  é um hiperplano formado por vetores tipo espaço intersectando o cone na origem. Se  $Y$  é tipo luz o complemento ortogonal  $Y^\perp$  é um hiperplano que contém vetores tipo espaço e luz.

Analogamente, dado o vetor  $X \in \mathbb{R}_2^{n+4}$  com a métrica (1.4), dizemos que  $X$  é um vetor

- tipo espaço, se  $\langle X, X \rangle > 0$  ou se  $X = 0$ ;
- tipo tempo, se  $\langle X, X \rangle < 0$ ;
- tipo luz, se  $\langle X, X \rangle = 0$  e  $X \neq 0$ .

**Definição 5.** Seja  $\mathbb{R}_2^{n+4}$  o espaço  $\mathbb{R}^{n+4}$  munido com a métrica (1.4). Definimos o cone de luz  $C^{n+3}$  em  $\mathbb{R}_2^{n+4}$  por

$$C^{n+3} = \{X \in \mathbb{R}^{n+4} \mid \langle X, X \rangle = 0\}. \quad (1.6)$$

Os pontos de  $\mathbb{P}^{n+3}$  são as classes de equivalência  $[X] \in \mathbb{P}^{n+3}$  e as coordenadas  $X = (X_1, X_2, \dots, X_{n+4})$  são chamadas coordenadas homogêneas de  $[X]$ .

**Definição 6.** No espaço projetivo real  $\mathbb{P}^{n+3}$ , definimos a quádrlica  $\mathbb{Q}^{n+2}$  por

$$\mathbb{Q}^{n+2} = \{[X] \in \mathbb{P}^{n+3} \mid \langle X, X \rangle = 0\}. \quad (1.7)$$

$\mathbb{Q}^{n+2}$  é denotada *Quádrlica de Lie*.

Com a finalidade de obter uma correspondência bijetiva entre os pontos de  $\mathbb{Q}^{n+2}$  e os elementos do conjunto  $\Sigma$ , vamos estabelecer uma correspondência entre os pontos tipo espaço de  $\mathbb{P}^{n+2}$  e os pontos do conjunto  $\Sigma$ . Consideramos inicialmente a imersão  $\varphi : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{P}^{n+2}$ , dada por

$$\varphi(v) = [(1, v)], \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n+2}. \quad (1.8)$$

Seja a projeção estereográfica  $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1} - \{P\}$ , dada por

$$\sigma(u) = \left( \frac{1 - u \cdot u}{1 + u \cdot u}, \frac{2u}{1 + u \cdot u} \right), \quad \forall u \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (1.9)$$

onde  $P = (-1, \vec{0}, 0)$ ,  $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$  e “ $\cdot$ ” é a métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Considere  $\mathbb{R}_1^{n+3}$  o espaço  $\mathbb{R}^{n+3}$  munido com a métrica de Lorentz (1.5). Defina o seguinte conjunto,

$$\Omega = \{[z] \in \mathbb{P}^{n+2} - \{[P]\} / (z, z) = 0\}, \quad (1.10)$$

onde  $[P] = [1, -1, \vec{0}, 0]$ ,  $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$  é o ponto em  $\mathbb{P}^{n+2}$  correspondente ao  $P = (-1, \vec{0}, 0) \in \mathbb{R}^{n+2}$ . Temos que  $\Omega$  é a chamada  $(n+1)$ -esfera de Möbius e denotada por  $\Omega^{n+1}$ . Fazendo a composição das aplicações (1.8) e (1.9) temos,  $\varphi \circ \sigma : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n+2}$  dada por,

$$\varphi(\sigma(u)) = \left[ \left( 1, \frac{1 - u \cdot u}{1 + u \cdot u}, \frac{2u}{1 + u \cdot u} \right) \right] = \left[ \left( \frac{1 + u \cdot u}{2}, \frac{1 - u \cdot u}{2}, u \right) \right]. \quad (1.11)$$

Então,  $\varphi \circ \sigma(\mathbb{R}^{n+1}) = \varphi(\mathbb{S}^{n+1} - \{P\})$  é a esfera de Möbius  $\Omega^{n+1} - \{[P]\}$ , dada pela equação  $(z, z) = 0$ .

De fato, seja  $[z] = \left[ \left( 1, \frac{1 - u \cdot u}{1 + u \cdot u}, \frac{2u}{1 + u \cdot u} \right) \right]$ , denote  $w = \left( \frac{1 - u \cdot u}{1 + u \cdot u}, \frac{2u}{1 + u \cdot u} \right)$ . Note que  $w \cdot w = 1$ . Como  $[z] = [(1, w)]$ , temos

$$(z, z) = ((1, w), (1, w)) = -1 + w \cdot w.$$

Portanto,  $(z, z) = 0$ .

Seja  $\alpha \in \mathbb{P}^{n+2} \subset \mathbb{R}_1^{n+3}$  um vetor tipo espaço. Afirmamos que o complemento ortogonal  $\alpha^\perp$  de  $[\alpha] \in \mathbb{P}^{n+2}$  intersecta a esfera  $\Omega$  em uma  $n$ -esfera  $\Omega^n$ . De fato, sem perda de generalidade, considere o vetor tipo espaço  $\alpha = (0, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}_1^{n+3}$ . Temos que  $\alpha^\perp = [(\alpha_1, 0, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+3})]$ , com  $\alpha_1 \neq 0$ . Como  $\alpha^\perp$  é classe de equivalência, dividindo



por  $\alpha_1$  temos,  $\alpha^\perp = [(1, 0, u)]$ , onde  $u = \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \dots, \frac{\alpha_{n+3}}{\alpha_1}\right)$ . Assim,

$$\left( (1, 0, u) \cdot \left( \frac{1+u \cdot u}{2}, \frac{1-u \cdot u}{2}, u \right) \right) = 0 \Leftrightarrow u \cdot u = 1, u \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Então,  $\Omega^n$  é a imagem pela composição  $\varphi \circ \sigma$  de uma  $n$ -esfera em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , a não ser que contenha o ponto  $[1, -1, \vec{0}, 0]$ , neste caso é a imagem pela composição  $\varphi \circ \sigma$  de um hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Então, temos uma correspondência bijetiva entre os pontos tipo espaço em  $\mathbb{P}^{n+2}$  e os elementos de  $\Sigma$ .

No que segue, vamos obter fórmulas específicas para estas correspondências. Primeiramente para as esferas. Considere a esfera em  $\mathbb{R}^{n+1}$  de centro  $p$  e raio  $r > 0$  dada por

$$(u - p) \cdot (u - p) = r^2, u \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (1.12)$$

Sejam  $\varphi(\sigma(u))$  dado em (1.11) e  $N$  e um vetor tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^{n+3}$  dado por

$$N = \left( \frac{1+p \cdot p - r^2}{2}, \frac{1-p \cdot p + r^2}{2}, p \right) \quad (1.13)$$

Um cálculo mostra que,

$$\begin{aligned} (N, \varphi(\sigma(u))) &= \left( \left( \frac{1+p \cdot p - r^2}{2}, \frac{1-p \cdot p + r^2}{2}, p \right), \left( \frac{1+u \cdot u}{2}, \frac{1-u \cdot u}{2}, u \right) \right) \\ &= - \left( \frac{(1+p \cdot p - r^2)(1+u \cdot u)}{4} \right) + \left( \frac{(1-p \cdot p + r^2)(1-u \cdot u)}{4} \right) + u \cdot p \\ &= -u \cdot u - p \cdot p + 2u \cdot p + r^2. \end{aligned}$$

Então,

$$(N, \varphi(\sigma(u))) = 0 \Leftrightarrow (u - p) \cdot (u - p) = r^2. \quad (1.14)$$

Observe que  $N_1 + N_2 \neq 0$ , onde  $N_i$ ,  $1 \leq i \leq n+3$ , são as coordenadas de  $N$ . Então  $(N, [P]) \neq 0$ , isto é,  $[P] \notin N^\perp$ . Segue, por (1.14), que  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$  está na esfera dada pela equação (1.12) se, e somente se,  $\varphi(\sigma(u)) \in N^\perp$ . Portanto, a esfera de Möbius  $\Omega$  corresponde a esfera em  $\mathbb{R}^{n+1}$  dada pela equação (1.12).

Reciprocamente, dado  $[\alpha] \in \mathbb{P}^{n+2}$  tipo espaço com  $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ , podemos determinar uma esfera correspondente em  $\mathbb{R}^{n+1}$  como segue. Seja  $N = \frac{\alpha}{\alpha_1 + \alpha_2} \Rightarrow N_1 + N_2 \neq 0$ . Então, pela expressão (1.13), o centro da esfera correspondente é o ponto  $p = (N_3, N_4, \dots, N_{n+3})$  e o raio é  $r = \sqrt{(N, N)}$ .

Agora, considere o hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por

$$x \cdot N' = \lambda, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ e } |N'| = 1. \quad (1.15)$$

Semelhante ao que foi feito para a esfera, seja  $\varphi(\sigma(u))$  como em (1.11) e  $\eta$  e um vetor tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^{n+3}$  dado por

$$\eta = (\lambda, -\lambda, N'). \quad (1.16)$$

Temos,

$$\begin{aligned} (\eta, \varphi(\sigma(u))) &= \left( (\lambda, -\lambda, N'), \left( \frac{1+u \cdot u}{2}, \frac{1-u \cdot u}{2}, u \right) \right) \\ &= -\left( \frac{(1+u \cdot u)\lambda}{2} \right) - \left( \frac{(1-u \cdot u)\lambda}{2} \right) + N' \cdot u. \end{aligned}$$

Então,

$$(\eta, \varphi(\sigma(u))) = 0 \Leftrightarrow u \cdot N' = \lambda. \quad (1.17)$$

Note que  $\eta_1 + \eta_2 = 0$  então,  $(\eta, [P]) = 0$ , ou seja,  $[P] \in \eta^\perp$ . Por (1.17)  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$  está no hiperplano dado por (1.15) se, e somente se,  $\varphi(\sigma(u)) \in \eta^\perp$ . Assim, o hiperplano (1.15) é representado em  $\mathbb{P}^{n+2}$  por  $[\eta] = [(\lambda, -\lambda, N)]$ .

Reciprocamente, seja  $[\theta] \in \mathbb{P}^{n+2}$  tipo espaço com  $\theta_1 + \theta_2 = 0 \Rightarrow (\theta, \theta) = v \cdot v$ , onde  $v = (\theta_3, \dots, \theta_{n+3})$ . Seja  $\eta = \frac{\theta}{|v|}$  temos,

$$\eta = \frac{\theta}{|v|} = \left( \frac{\theta_1}{|v|}, \frac{-\theta_1}{|v|}, \frac{v}{|v|} \right).$$

Portanto,  $\eta$  tem a forma dada em (1.16) e  $[\theta]$  corresponde ao hiperplano (1.15).

A proposição a seguir fornece uma correspondência entre os elementos do conjunto  $\Sigma$  e os pontos de  $\mathbb{Q}^{n+2}$ .

**Proposição 1.** *Podemos associar uma esfera orientada  $S(p, r) \in \Sigma$  a um ponto  $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$  por*

$$S(p, r) \longleftrightarrow [\gamma], \text{ onde } \gamma = \left[ \left( \frac{1+p \cdot p - r^2}{2}, \frac{1-p \cdot p + r^2}{2}, p, r \right) \right], \quad (1.18)$$

*e associar um hiperplano orientado  $P(\xi, \lambda) \in \Sigma$  a um ponto  $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$  por*

$$P(\xi, \lambda) \longleftrightarrow [\gamma], \text{ onde } \gamma = [(\lambda, -\lambda, \xi, 1)]. \quad (1.19)$$

*Demonstração.* Seja  $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ , em coordenadas homogêneas  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+3}, \gamma_{n+4}) \in \mathbb{R}_2^{n+4}$ . Suponha primeiro o caso em que  $\gamma_{n+4} \neq 0$ . Então,  $[\gamma]$  pode ser representado por

$$[\gamma] = [(\alpha, 1)], \quad \alpha \in \mathbb{P}^{n+2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 = \langle \gamma, \gamma \rangle &= \langle (\alpha, 1), (\alpha, 1) \rangle \\ &= \langle (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+3}, 1), (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+3}, 1) \rangle \\ &= -\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+3} - 1. \end{aligned}$$

Então,  $(\alpha, \alpha) = 1$ , ou seja,  $[\alpha] \in \mathbb{P}^{n+2}$  é tipo espaço.

Suponha primeiro que  $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$  então, pela correspondência estabelecida entre os pontos de  $\mathbb{P}^{n+2}$  com o conjunto das esferas e hiperplanos em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $[\alpha]$  representa uma esfera em  $\mathbb{R}^{n+1}$  de centro  $p$  e raio  $r$ . Seja  $N$  dado em (1.13). Como  $(\alpha, \alpha) = 1$  e  $(N, N) = r^2$  podemos representar  $[\alpha] = \left[ \pm \frac{N}{r} \right]$ . Logo, em  $\mathbb{P}^{n+3}$ , temos

$$[(\alpha, 1)] = \left[ \left( \pm \frac{N}{r}, 1 \right) \right] = [(N, \pm r)] = \left[ \left( \left( \frac{1 + p \cdot p - r^2}{2}, \frac{1 - p \cdot p + r^2}{2}, p \right), \pm r \right) \right].$$

Portanto, fica estabelecida a seguinte correspondência:

$$S(p, r) \longleftrightarrow [\gamma], \quad \text{onde } \gamma = \left[ \left( \frac{1 + p \cdot p - r^2}{2}, \frac{1 - p \cdot p + r^2}{2}, p, r \right) \right].$$

Agora, se  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$  então, pela correspondência estabelecida entre os pontos de  $\mathbb{P}^{n+2}$  com o conjunto das esferas e hiperplanos em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $[\alpha] \in \mathbb{P}^{n+2}$  representa um hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$  como em (1.15). Para  $\alpha = (\lambda, -\lambda, \xi)$  com  $|N'| = 1$  temos,

$$(\alpha, \alpha) = ((\lambda, -\lambda, \xi), (\lambda, -\lambda, \xi)) = 1.$$

Então, em  $\mathbb{P}^{n+3}$  temos

$$[(\alpha, 1)] = [(\lambda, -\lambda, \xi, \pm 1)].$$

Portanto, temos a correspondência

$$P(\xi, \lambda) \longleftrightarrow [\gamma], \quad \text{onde } \gamma = [(\lambda, -\lambda, \xi, 1)].$$

Suponha agora que  $\gamma_{n+4} = 0$ . Então,  $[\gamma]$  pode ser representado por

$$[\gamma] = [(u, 0)], \quad u \in \mathbb{P}^{n+2}.$$

Assim,

$$0 = \langle \gamma, \gamma \rangle = \langle (u, 0), (u, 0) \rangle = (u, u),$$

ou seja,  $[u]$  é um ponto da esfera de Möbius. Logo, temos a correspondência

$$u \in \mathbb{R}^{n+1} \longleftrightarrow [\gamma], \quad \text{onde } \gamma = \left[ \left( \frac{1+u \cdot u}{2}, \frac{1-u \cdot u}{2}, u, 0 \right) \right].$$

□

Portanto, obtemos a correspondência entre os elementos do conjunto  $\Sigma$  e os pontos da quádrlica de Lie  $\mathbb{Q}^{n+2}$  como segue:

$\Sigma$	$\mathbb{Q}^{n+2}$
$S(p, r)$	$\left[ \left( \frac{1+p \cdot p - r^2}{2}, \frac{1-p \cdot p + r^2}{2}, p, r \right) \right]$
$P(\xi, \lambda)$	$[(\lambda, -\lambda, \xi, 1)]$
$u \in \mathbb{R}^{n+1}$	$\left[ \left( \frac{1+u \cdot u}{2}, \frac{1-u \cdot u}{2}, u, 0 \right) \right]$

Chamamos  $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$  de coordenadas esféricas de  $S(p, r)$  e  $P(N, \lambda)$ .

Para qualquer  $\Gamma \in \Sigma$ , denotamos por  $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$  sua coordenada dada em (1.18) e (1.19). Como vimos na Proposição 1, a correspondência  $\Gamma \in \Sigma \longleftrightarrow [\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$  define uma bijeção de  $\Sigma$  em  $\mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ , onde

$$P = (1, -1, \vec{0}, 0), \quad \vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (1.20)$$

Geometricamente, o ponto  $[P]$  é a coordenada do ponto esférico no infinito de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , isto é,

$$[P] = \lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{1}{|p|^2} \left[ \left( \frac{1+p \cdot p}{2}, \frac{1-p \cdot p}{2}, p, 0 \right) \right].$$

**Observação 1.** Seja  $\Gamma \in \Sigma$  uma esfera orientada com coordenada esférica  $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ , então segue das expressões (1.18), (1.19) e pela maneira como obtivemos a correspondência dada pela Proposição 1 que:

- $\Gamma$  é uma esfera orientada se, e somente se,  $\langle \gamma, P \rangle \neq 0$ .

- $\Gamma$  é uma hiperplano orientado se, e somente se,  $\langle \gamma, P \rangle = 0$ .

Uma vez obtidas as correspondências dadas na Proposição 1, vamos fazer uma análise dos contatos orientados entre os elementos de  $\Sigma$  obtendo uma expressão analítica para a Definição 3. Em seguida, vamos estabelecer uma relação entre o contato orientado e suas respectivas coordenadas esféricas. Então, temos os seguintes casos:

- $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$  tal que  $\Gamma_1 = S(p, r) \neq S(q, s) = \Gamma_2$ .

Sejam  $\Gamma_1 = S(p, r)$  e  $\Gamma_2 = S(q, s)$  duas esferas orientadas cujas coordenadas esféricas são

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left( \frac{1}{2}(1 + |p|^2 - r^2), \frac{1}{2}(1 - |p|^2 + r^2), p, -r \right), \\ \gamma_2 &= \left( \frac{1}{2}(1 + |q|^2 - s^2), \frac{1}{2}(1 - |q|^2 + s^2), q, -s \right).\end{aligned}$$

Como  $S(p, r)$  e  $S(q, s)$  são distintas, as duas esferas possuem contato orientado se existe um único ponto  $(x, \xi) \in S(p, r) \cap S(q, s)$ . Então, por (1.2) o ponto  $(x, \xi)$  deve satisfazer,

$$x - p = r\xi, \quad (1.21)$$

$$x - q = s\xi. \quad (1.22)$$

Subtraindo as equações (1.21), (1.22) e usando o fato que  $\xi \in \mathbb{S}^n$  obtemos,

$$|p - q| = |s - r|. \quad (1.23)$$

Note que esta situação inclui o caso de contato orientado entre dois pontos esféricos  $S(p, 0)$  e  $S(q, 0)$ , neste caso, a condição (1.23) se reduz a  $p = q$ . O caso de contato orientado entre um ponto esférico  $S(p, 0)$  e uma esfera orientada  $S(q, r)$ , corresponde ao caso em que a condição (1.23) se reduz a  $|p - q| = |r|$ .

- $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$  tal que  $\Gamma_1 = S(p, r)$  e  $\Gamma_2 = P(\xi, \lambda)$ .

Sejam  $\Gamma_1 = S(p, r)$  e  $\Gamma_2 = P(\xi, \lambda)$  uma esfera orientada e um hiperplano, respectivamente. Suas coordenadas esféricas são

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left( \frac{1}{2}(1 + |p|^2 - r^2), \frac{1}{2}(1 - |p|^2 + r^2), p, -r \right), \\ \gamma_2 &= (\lambda, -\lambda, \xi, 1).\end{aligned}$$

Já que neste caso o vetor normal de  $P(\xi, \lambda)$  não pode mudar,  $S(p, r)$  e  $P(\xi, \lambda)$  possuem contato orientado se existe um único ponto  $(x, \xi) \in S(p, r) \cap P(\xi, \lambda)$ . Então, por (1.2) e (1.3) o ponto  $(x, \xi)$  deve satisfazer,

$$x - p = r\xi, \quad (1.24)$$

$$x \cdot \xi = \lambda. \quad (1.25)$$

Substituindo (1.25) em (1.24) e usando o fato que  $\xi \in \mathbb{S}^n$  obtemos,

$$p \cdot \xi = -r + \lambda. \quad (1.26)$$

Note que esta situação inclui o caso de contato orientado entre o ponto esférico  $S(p, 0)$  e um hiperplano  $P(\xi, \lambda)$  e então a condição (1.26) se reduz a  $p \cdot \xi = \lambda$ , ou seja, o centro do ponto esférico pertence ao hiperplano.

$$\bullet \Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum \text{ tal que } \Gamma_1 = P(\xi_1, \lambda_1) \text{ e } \Gamma_2 = P(\xi_2, \lambda_2).$$

Sejam  $\Gamma_1 = P(\xi_1, \lambda_1)$  e  $\Gamma_2 = P(\xi_2, \lambda_2)$  dois hiperplanos orientados distintos. Suas coordenadas esféricas são

$$\gamma_1 = (\lambda_1, -\lambda_1, \xi_1, 1),$$

$$\gamma_2 = (\lambda_2, -\lambda_2, \xi_2, 1).$$

Os hiperplanos possuem contato orientado se existe um único ponto  $(x, \xi) \in P(\xi_1, \lambda_1) \cap P(\xi_2, \lambda_2)$ . Então, por (1.3) o ponto  $(x, \xi)$  deve satisfazer,

$$x \cdot \xi = \lambda_1,$$

$$x \cdot \xi = \lambda_2.$$

Logo,  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Então, dois hiperplanos orientados tem contato orientado no caso em coincidem.

**Proposição 2.** *Duas esferas orientadas  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$  têm contato orientado se, e somente se, suas coordenadas esféricas  $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$  satisfazem,*

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0.$$

*Demonstração.* Primeiro, considere  $\Gamma_1 = S(p, r)$  e  $\Gamma_2 = S(q, s)$  duas esferas distintas em  $\Sigma$  cujas coordenadas esféricas são

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left( \frac{1}{2}(1 + |p|^2 - r^2), \frac{1}{2}(1 - |p|^2 + r^2), p, -r \right), \\ \gamma_2 &= \left( \frac{1}{2}(1 + |q|^2 - s^2), \frac{1}{2}(1 - |q|^2 + s^2), q, -s \right).\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle &= \left\langle \left( \frac{1 + p^2 - r^2}{2}, \frac{1 - p^2 + r^2}{2}, p, r \right), \left( \frac{1 + q^2 - s^2}{2}, \frac{1 - q^2 + s^2}{2}, q, s \right) \right\rangle \\ &= - \left( \frac{1 + p^2 - r^2}{2} \right) \left( \frac{1 + q^2 - s^2}{2} \right) + \left( \frac{1 - p^2 + r^2}{2} \right) \left( \frac{1 - q^2 + s^2}{2} \right) + pq - rs \\ &= -p^2 + 2pq - q^2 + r^2 - 2rs + s^2 \\ &= -(p^2 - q^2)^2 + (r^2 - s^2)^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow |p - q| = |r - s|.$$

Assim, por (1.23) temos  $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$  se, e somente se,  $S(p, r)$  e  $S(q, s)$  estão em contato orientado. O mesmo resultado se verifica para os casos de contato orientado entre dois pontos esféricos e entre ponto esférico e esfera orientada.

Considere agora  $\Gamma_1 = S(p, r)$  e  $\Gamma_2 = P(\xi, \lambda)$  uma esfera orientada e um hiperplano, respectivamente. Suas coordenadas esféricas são

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left( \frac{1}{2}(1 + |p|^2 - r^2), \frac{1}{2}(1 - |p|^2 + r^2), p, -r \right), \\ \gamma_2 &= (\lambda, -\lambda, \xi, 1).\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle &= \left\langle \left( \frac{1 + p^2 - r^2}{2}, \frac{1 - p^2 + r^2}{2}, p, -r \right), (\lambda, -\lambda, \xi, 1) \right\rangle \\ &= -\lambda + p \cdot \xi + r.\end{aligned}$$

Logo, por (1.26) temos  $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$  se, e somente se,  $S(p, r)$  e  $P(\xi, \lambda)$  estão em contato orientado. Segue também o resultado para o caso em que  $\Gamma_1 = S(p, 0)$  e  $\Gamma_2 = P(\xi, \lambda)$ .

Por fim, se  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$  são dois hiperplanos orientados, eles tem contato orientado no caso em que coincidem, isto é,  $\Gamma_1 = P(\xi, \lambda) = \Gamma_2$ . Logo,  $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$  se, e somente se,  $P(\xi, \lambda)$  e  $P(\xi, \lambda)$  estão em contato orientado. Portanto, em qualquer caso  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$  têm contato orientado se, e somente se, suas coordenadas esféricas  $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ , respectivamente, satisfazem  $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$ .  $\square$

Note que qualquer ponto  $(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$  determina um único conjunto de esferas orientadas de contato orientado em  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  com o mesmo normal unitário  $\xi$ . Esse conjunto é denominado feixe de esferas orientadas.

Além disso, é determinado um único ponto esférico  $S(x, 0)$ , de coordenada esférica  $[\gamma_1]$ , e um único hiperplano orientado  $P(\xi, x \cdot \xi)$ , de coordenada esférica  $[\gamma_2]$ , neste feixe, onde

$$\gamma_1 = \left( \frac{1}{2}(1 + |x|^2), \frac{1}{2}(1 - |x|^2), x, 0 \right), \quad \gamma_2 = (x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1). \quad (1.27)$$

Os resultados a seguir têm por objetivo apresentar informações necessárias para demonstrarmos a proposição que caracteriza os pontos de uma reta em  $\mathbb{Q}^{n+2}$  com o correspondente feixe de esferas em  $U\mathbb{R}^{n+1}$ .

Usando um resultado de Álgebra Linear, vamos mostrar o fato importante de que  $\mathbb{Q}^{n+2}$  contém apenas retas projetivas, ou seja, contém apenas subespaços projetivos.

**Lema 2.** ([5]) *Seja  $\mathbb{R}_k^n$  um espaço vetorial real munido com uma métrica de assinatura  $(n - k, k)$ . Então, a dimensão máxima de um subespaço de luz (que contém apenas vetores tipo luz) é o mínimo entre os números  $k$  e  $n - k$ .*

**Teorema 3.** *A quádrlica de Lie  $\mathbb{Q}^{n+2}$  contém retas projetivas mas nenhum subespaço de dimensão maior.*

*Demonstração.* De fato, por definição  $\mathbb{Q}^{n+2} = \{[X] \in \mathbb{P}^{n+3} / \langle X, X \rangle = 0\}$ , em que  $\mathbb{P}^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}$ . Como  $\mathbb{R}_2^{n+4}$  é o espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n+4}$  munido com a métrica (1.4) de assinatura  $(n + 2, 2)$ , segue pelo Lema 2 que a dimensão máxima de um subespaço de luz de  $\mathbb{R}_2^{n+4}$  é  $k = 2$ . Então, o subespaço de luz de dimensão 2 em  $\mathbb{R}_2^{n+4}$  corresponde a um subespaço de luz linear  $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{n+3}$ . Note que  $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{Q}^{n+2}$ , pois  $\mathbb{Q}^{n+2}$  contém todos os vetores tipo luz de  $\mathbb{P}^{n+3}$ . Portanto,  $\mathbb{Q}^{n+2}$  contém apenas retas projetivas.  $\square$

**Proposição 3.** *Sejam  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$  com coordenadas esféricas  $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ , respectivamente. Então,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  possuem contato orientado se, e somente se, todas as retas projetivas*

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \{[\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2] / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}\} \quad (1.28)$$



pertencem a  $\mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ .

*Demonstração.* Suponha que  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$  possuem contato orientado, com coordenadas esféricas  $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ , respectivamente. Então, pela Proposição 2,  $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$ . Considere a reta projetiva

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \{[\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2] / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2, \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2 \rangle &= \lambda^2 \langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle + 2\lambda\mu \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle + \mu^2 \langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle \\ &= 2\lambda\mu \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $[\gamma_1, \gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ .

Reciprocamente, suponha que a reta descrita em (1.28) pertence a  $\mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ , então  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são, respectivamente, coordenadas esféricas de duas esferas orientadas  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$ . Como  $[\gamma_1, \gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$  e  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  temos,

$$0 = \langle \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2, \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2 \rangle = \lambda^2 \langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle + 2\lambda\mu \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle + \mu^2 \langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle = 2\lambda\mu \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle.$$

Portanto,  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$  possuem contato orientado.  $\square$

Denotamos  $[\gamma_1, \gamma_2]$  como a reta gerada por  $[\gamma_1]$  e  $[\gamma_2]$  dada por (1.28).

A próxima proposição estabelece uma relação entre os pontos de uma reta em  $\mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$  e o correspondente feixe de esferas em  $U\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposição 4.** *Sejam  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$  com coordenadas esféricas  $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ , respectivamente. Se a reta  $[\gamma_1, \gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$  então o feixe de esferas em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  correspondente a pontos da reta  $[\gamma_1, \gamma_2]$  é precisamente o conjunto de todas as esferas orientadas em  $\Sigma$  que possuem contato orientado com ambos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .*

*Demonstração.* Seja  $[\gamma_3] \in [\gamma_1, \gamma_2]$  então, podemos escrever  $\gamma_3 = \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2$ , com  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Como  $[\gamma_1, \gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ , pela Proposição 3 segue que  $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_3, \gamma_1 \rangle &= \langle \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2, \gamma_1 \rangle = 0 \\ \langle \gamma_3, \gamma_2 \rangle &= \langle \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2, \gamma_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\gamma_3$  é coordenada esférica de uma esfera orientada  $\Gamma_3 \in \Sigma$  que está em contato orientado com  $\Gamma_1 \in \Sigma$  e  $\Gamma_2 \in \Sigma$ .

Reciprocamente, seja  $\Gamma_3 \in \Sigma$  com respectiva coordenada esférica  $[\gamma_3] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ . Suponha que  $\Gamma_3$  está em contato orientado com  $\Gamma_1 \in \Sigma$  e  $\Gamma_2 \in \Sigma$ . Então,  $\langle \gamma_3, \gamma_1 \rangle = 0$  e  $\langle \gamma_3, \gamma_2 \rangle = 0$ . Logo,

$$\langle \gamma_3, \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2 \rangle = 0,$$

ou seja,  $[\gamma_3] \in [\gamma_1, \gamma_2]^\perp$ . Como  $[\gamma_3] \in \mathbb{Q}^{n+2}$  então,  $[\gamma_3] \in [\gamma_1, \gamma_2]$ , uma vez que pelo Teorema 3,  $\mathbb{Q}^{n+2}$  possui apenas retas projetivas e não contém subespaço de dimensão maior.  $\square$

Portanto, qualquer esfera  $\Gamma$  no feixe pode ser determinada mediante sua coordenada esférica  $[\gamma]$ , que pode ser escrita como

$$[\gamma] = [\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\} \quad (1.29)$$

para algum  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Assim, um ponto  $(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$  determina uma única reta projetiva em  $\mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$  dada por

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \{[\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2] / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}\}.$$

No que segue, defina  $\Lambda^{2n+1}$  o conjunto de todas as retas projetivas contidas em  $\mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ .

**Definição 7.** A aplicação  $L : U\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \Lambda^{2n+1}$  definida por

$$L((x, \xi)) = \{[\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\} / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}\} \quad (1.30)$$

é um difeomorfismo, chamado de difeomorfismo de Lie.

## 1.2 Grupo das transformações de Laguerre

Nesta seção vamos introduzir o conceito de transformação de Laguerre e apresentar o grupo das transformações de Laguerre em  $U\mathbb{R}^{n+1}$ , que consiste em um importante subgrupo do grupo das transformações de Lie.

Começamos com um breve comentário a respeito do grupo ortogonal e das transformações projetivas. Para maiores detalhes referimos à [5] e [16].

Considere  $\mathbb{R}^{n+4}$  munido com a métrica (1.4) e uma matriz real  $A \in \mathbb{M}_{(n+4) \times (n+4)}(\mathbb{R})$ . Dizemos que  $A$  preserva o produto interno se

$$\langle A(X), A(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}_2^{n+4}.$$

Denote por  $\mathbb{O}(n+2, 2)$  o conjunto das matrizes reais de ordem  $(n+4) \times (n+4)$  que preserva o produto interno (1.4). Então  $\mathbb{O}(n+2, 2)$  é um subgrupo fechado de  $GL(n+4)$ . Tome  $A \in GL(n+4)$ . A transformação linear associada a esta matriz induz uma transformação projetiva  $P(A)$  em  $\mathbb{P}^{n+3}$  dada por

$$\begin{aligned} P(A) : \mathbb{P}^{n+3} &\longrightarrow \mathbb{P}^{n+3} \\ [X] &\mapsto P(A)([X]) = [XA]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Vamos agora definir uma transformação de Laguerre.

Seja  $LG$  o subgrupo do grupo ortogonal  $\mathbb{O}(n+2, 2)$  em  $\mathbb{R}_2^{n+4}$  dado por

$$LG = \{T \in \mathbb{O}(n+2, 2) / PT = P\}, \quad (1.32)$$

onde  $P$  é o vetor tipo luz em  $\mathbb{R}_2^{n+4}$  dado por (1.20) e  $\mathbb{O}(n+2, 2)$  é formado pelo grupo ortogonal que deixa o produto interno (1.4) invariante.

Considere  $T \in LG$  então,  $T \in \mathbb{O}(n+2, 2)$ . Como  $\mathbb{O}(n+2, 2) \subset GL(n+4)$ , segue de (1.31) que  $T$  induz uma transformação projetiva em  $\mathbb{P}^{n+3}$ , que pode ser restrita a  $\mathbb{Q}^{n+2}$ , dada por

$$T([X]) = [XT], \quad X \in \mathbb{Q}^{n+2}.$$

Chamamos,  $T \in LG$  e  $T : \mathbb{Q}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{Q}^{n+2}$ , de *transformações de Laguerre* e  $LG$  o *grupo das transformações de Laguerre*.

Sejam  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Sigma$  duas esferas ou hiperplanos distintos em contato orientado, com coordenadas esféricas associadas  $[\gamma_1]$  e  $[\gamma_2]$ , respectivamente. Pela Proposição 3 temos que  $[\gamma_1, \gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ . Isto é,  $[\gamma_1]$  e  $[\gamma_2]$  definem uma reta projetiva em  $\mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$  por

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \{[\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2] / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}\} \in \Lambda^{2n+1}. \quad (1.33)$$

Como qualquer  $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$  pode ser escrito como em (1.33) e qualquer  $T \in LG$  induz uma transformação em  $\mathbb{Q}^{n+2}$  dada por (1.2), então qualquer  $T \in LG$  define uma

transformação  $T : \Lambda^{2n+1} \longrightarrow \Lambda^{2n+1}$  por

$$T([\gamma_1, \gamma_2]) = [[\gamma_1 T], [\gamma_2 T]]. \quad (1.34)$$

**Definição 8.** *Seja  $L : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \Lambda^{2n+1}$  o difeomorfismo dado em (1.30). Então, qualquer  $T \in L\mathbb{G}$  induz uma transformação*

$$\phi = L^{-1} \circ T \circ L : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}, \quad (1.35)$$

chamada de transformação de Laguerre em  $U\mathbb{R}^{n+1}$ . Assim, o grupo das transformações de Laguerre sobre  $U\mathbb{R}^{n+1}$  é dado por

$$L\mathbb{G} = \{\phi : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1} / \phi = L^{-1} \circ T \circ L, T \in \mathbb{O}(n+2, 2), PT = P\}.$$

**Proposição 5.** *Qualquer transformação de Laguerre  $\phi : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$  preserva esferas orientadas e hiperplanos orientados.*

*Demonstração.* Seja  $T \in L\mathbb{G}$  uma transformação de Laguerre. Então,  $T : \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\} \longrightarrow \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ ,  $T \in \mathbb{O}(n+2, 2)$  e  $PT = P$ . Considere  $\Gamma \in \sum$  uma esfera orientada com coordenadas esférica  $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ . Note que  $[\gamma] \in \Lambda^{2n+1}$ . Então,

$$\langle \gamma T, P \rangle = \langle \gamma T, \gamma P \rangle = \langle \gamma, P \rangle. \quad (1.36)$$

Logo, no caso de  $\Gamma$  ser uma esfera orientada, segue da Observação 1 que

$$\langle \gamma, P \rangle \neq 0. \quad (1.37)$$

Então, por (1.36) e (1.37) temos

$$\langle \gamma T, P \rangle \neq 0.$$

Logo,  $T([\gamma]) = [\gamma T]$  é a coordenada esférica de uma esfera orientada. Portanto,  $\phi(\Gamma) \in \sum$  continua sendo uma esfera orientada. O caso em que  $\Gamma$  é um hiperplano orientado é análogo.  $\square$

No que segue, vamos determinar a matriz que representa uma transformação  $T \in L\mathbb{G}$ . Como  $T \in L\mathbb{G}$  temos que  $PT = P$ , onde  $P = [1, -1, \vec{0}, 0]$ ,  $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$  então, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n+4)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n+4)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n+4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+4)1} & a_{(n+4)2} & a_{(n+4)3} & \cdots & a_{(n+4)(n+4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} a_{11} = 1 + a_{21}, \\ a_{22} = 1 + a_{12}, \\ a_{1i} = a_{2i}, \quad i \geq 3. \end{cases}$$

Desta forma,  $T$  é reescrita como

$$T = \begin{bmatrix} 1 + a_{21} & a_{12} & a & \rho \\ a_{21} & 1 + a_{12} & a & \rho \\ b & c & A & u \\ a_{(n+4)1} & a_{(n+4)2} & v & w \end{bmatrix}_{(n+4) \times (n+4)}, \quad (1.38)$$

onde

$$a := \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1(n+3)} \end{bmatrix}_{1 \times (n+1)},$$

$$v := \begin{bmatrix} a_{(n+4)3} & a_{(n+4)4} & \cdots & a_{(n+4)(n+3)} \end{bmatrix}_{1 \times (n+1)},$$

$$b := \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{41} \\ \vdots \\ a_{(n+3)1} \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1}, \quad c := \begin{bmatrix} a_{32} \\ a_{42} \\ \vdots \\ a_{(n+3)2} \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1}, \quad u := \begin{bmatrix} a_{3(n+4)} \\ a_{4(n+4)} \\ \vdots \\ a_{(n+3)(n+4)} \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1},$$

$$A := \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3(n+3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+3)3} & a_{(n+3)4} & \cdots & a_{(n+3)(n+3)} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}, \quad \rho := a_{1(n+4)} \text{ e } w := a_{(n+4)(n+4)}.$$

Como as colunas e as linhas da matriz  $T$ , dadas em (1.38), são pseudo-ortonormais segue que,

$$-1 - 2a_{21} - a_{21}^2 + a_{12}^2 + a^2 - \rho^2 = -1, \quad (1.39)$$

$$-a_{21} - a_{21}^2 + a_{12} + a_{12}^2 + a^2 - \rho^2 = 0, \quad (1.40)$$

$$-a_{21}^2 + 1 + 2a_{12} + a_{12}^2 + a^2 - \rho^2 = 1. \quad (1.41)$$

Subtraindo a equação (1.40) da equação (1.39) temos,

$$a_{12} = -a_{21}.$$

Usando o resultado acima na equação (1.41) obtemos que,

$$a_{12} = \frac{-a^2 + \rho^2}{2}. \quad (1.42)$$

Seja  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+4}\}$  uma base canônica para  $\mathbb{R}_2^{n+4}$ . Como  $T \in LG$  temos

$$\langle e_i T, P \rangle = \langle e_i T, PT \rangle = \langle e_i, P \rangle, \quad 1 \leq i \leq n+4. \quad (1.43)$$

Então, considerando  $3 \leq i \leq n+3$  em (1.43) e usando (1.38) temos,

$$\langle e_i T, P \rangle = \langle e_i, P \rangle \Rightarrow \langle (b_{i-2}, c_{i-2}, A_{i-2}, u_{i-2}), (1, -1, 0, 0) \rangle = 0 \Rightarrow b_{i-2} = -c_{i-2},$$

onde  $b_{i-2}, c_{i-2}, A_{i-2}, u_{i-2}$  são as  $(i-2)$ -ésima linhas das matrizes  $b, c, A$  e  $u$ . Logo,

$$b_{i-2} = -c_{i-2}, \quad \forall 3 \leq i \leq n+3 \Rightarrow b = -c. \quad (1.44)$$

Note que, considerando  $i = n+4$  em (1.43) e usando (1.38) obtemos

$$a_{(n+4)1} = -a_{(n+4)2}. \quad (1.45)$$

Usando as equações (1.42), (1.44) e (1.45) podemos reescrever a matriz  $T$  dada em (1.38) como sendo,

$$T = \begin{bmatrix} 1 + \frac{a^2 - \rho^2}{2} & \frac{-a^2 + \rho^2}{2} & a & \rho \\ \frac{a^2 - \rho^2}{2} & 1 + \frac{\rho^2 - a^2}{2} & a & \rho \\ b & -b & A & u \\ a_{(n+4)1} & -a_{(n+4)1} & v & w \end{bmatrix}_{(n+4) \times (n+4)}. \quad (1.46)$$

Novamente usando o fato que as linhas e as colunas da matriz  $T$  (1.46) são pseudo-ortonormais segue que,

$$-b \left( \frac{a^2 - \rho^2}{2} \right) - b \left( 1 + \frac{\rho^2 - a^2}{2} \right) + Aa^T - \rho u = 0 \Rightarrow b = Aa^T - pu,$$

$$-a_{(n+4)1} \left( \frac{a^2 - \rho^2}{2} \right) - a_{(n+4)1} \left( 1 + \frac{\rho^2 - a^2}{2} \right) + va^T - \rho w = 0 \Rightarrow a_{(n+4)1} = va^T - pw.$$

Portanto,

$$T = \begin{bmatrix} 1 + \frac{a^2 - \rho^2}{2} & \frac{-a^2 + \rho^2}{2} & a & \rho \\ \frac{a^2 - \rho^2}{2} & 1 + \frac{\rho^2 - a^2}{2} & a & \rho \\ Aa^T - pu & -Aa^T + pu & A & u \\ va^T - pw & -va^T + pw & v & w \end{bmatrix}_{(n+4) \times (n+4)}, \quad (1.47)$$

para alguma matriz

$$\begin{bmatrix} A & u \\ v & w \end{bmatrix} \in O(n+1, 1), \quad (a, \rho) \in \mathbb{R}^{n+2}, w \in \mathbb{R}.$$

No que segue, vamos obter uma relação entre os elementos da matriz  $T$  que será usada na próxima seção. Tomando o produto interno da terceira linha da matriz  $T$ , dada em (1.47), pela quarta linha e o produto da terceira linha por ela mesma obtemos,

$$\begin{aligned} \langle (Aa^T - pu, -Aa^T + pu, A, u), (va^T - pw, -va^T + pw, v, w) \rangle &= 0 \Rightarrow Av^T = uw, \\ \langle (Aa^T - pu, -Aa^T + pu, A, u), (Aa^T - pu, -Aa^T + pu, A, u) \rangle &= 0 \Rightarrow uu^T = 0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

### 1.3 Hipersuperfícies de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção introduzimos as hipersuperfícies de Laguerre em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  e o conceito de duas hipersuperfícies orientadas, com curvaturas principais que não se anulam, serem equivalentes por transformações de Laguerre. Além disso, mostramos que métrica de Laguerre  $g$  é invariante por transformações de Laguerre.

Sejam  $(x, \xi) : U\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{2n+2}$  imersão canônica,  $\gamma_1 : U\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_2^{n+4}$  e  $\gamma_2 : U\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_2^{n+4}$  dados em (1.27).

Considere  $T \in L\mathbb{G}$  uma transformação de Laguerre e

$$\begin{aligned} \phi = L^{-1} \circ T \circ L : U\mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1} \\ (x, \xi) &\mapsto \phi((x, \xi)) = (\tilde{x}, \tilde{\xi}). \end{aligned}$$

Vamos obter expressões para  $\tilde{\gamma}_1$  e  $\tilde{\gamma}_2$ , associados a  $\phi((x, \xi)) = (\tilde{x}, \tilde{\xi})$ , em termos de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  associados a  $(x, \xi)$ . Segue de (1.27) e (1.47) que

$$\begin{aligned} \gamma_1 T &= \left( \frac{1}{2}(1 + a^2 + x^2 - \rho^2) + xAa^T - \rho xu, \frac{1}{2}(1 - a^2 - x^2 + \rho^2) - xAa^T + \rho xu, a + xA, \bar{a} \right) \\ \gamma_2 T &= (x \cdot \xi + \xi Aa^T + va^T - vb, -x \cdot \xi - \xi Aa^T - va^T + vb, \xi A + v, b), \end{aligned} \quad (1.49)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \rho + xu \in \mathbb{R}, \\ b &= \xi u + w \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Como vimos na seção 1.1, um ponto  $(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \in U\mathbb{R}^{n+1}$  determina um único feixe de esferas que tem contato orientado em  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$  com o mesmo normal  $\tilde{\xi}$ . Com isso,  $\tilde{\gamma}_1$  e  $\tilde{\gamma}_2$  são coordenadas esféricas do único ponto esférico  $S(\tilde{x}, 0)$  e do único hiperplano orientado  $P(\tilde{\xi}, \tilde{x} \cdot \tilde{\xi})$  neste feixe, respectivamente. Assim,

$$\tilde{\gamma}_1 = \left( \frac{1}{2}(1 + |\tilde{x}|^2), \frac{1}{2}(1 - |\tilde{x}|^2), \tilde{x}, 0 \right), \quad \tilde{\gamma}_2 = (\tilde{x} \cdot \tilde{\xi}, -\tilde{x} \cdot \tilde{\xi}, \tilde{\xi}, 1).$$

Então, a fim de expressar  $\tilde{\gamma}_1$  e  $\tilde{\gamma}_2$  na forma anterior, utilizando as expressões (1.48), (1.49) e (1.50) obtemos a relação

$$\gamma_1 T - \frac{a}{b} \gamma_2 T = \left( \frac{1}{2}(1 + |\tilde{x}|^2), \frac{1}{2}(1 - |\tilde{x}|^2), \tilde{x}, 0 \right) = \tilde{\gamma}_1, \quad (1.51)$$



$$\frac{1}{b}\gamma_2 T = (\tilde{x} \cdot \tilde{\xi}, -\tilde{x} \cdot \tilde{\xi}, \tilde{\xi}, 1) = \tilde{\gamma}_2, \quad (1.52)$$

em que

$$\tilde{x} = a + xA - \bar{a}\tilde{\xi}, \quad \tilde{\xi} = \frac{\xi A + v}{b}.$$

Usando as expressões dadas em (1.27) e o produto interno dado em (1.4), segue que são satisfeitas as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle &= \langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle = 0, & \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle &= 0, \\ \langle d\gamma_1, d\gamma_1 \rangle &= dx \cdot dx, & \langle d\gamma_2, d\gamma_2 \rangle &= d\xi \cdot d\xi, \\ \langle d\gamma_1, d\gamma_2 \rangle &= dx \cdot d\xi, & \langle d\gamma_1, \gamma_2 \rangle &= dx \cdot \xi. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Assim, por (1.51), (1.52) e (1.53) temos

$$d\tilde{x} \cdot \tilde{\xi} = \langle d\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \rangle = \langle d(\gamma_1 T - \frac{a}{b}\gamma_2 T), \frac{1}{b}\gamma_2 T \rangle = \frac{1}{b} \langle d\gamma_1, \gamma_2 \rangle = \frac{1}{b} dx \cdot \xi, \quad (1.54)$$

$$d\tilde{\xi} \cdot d\tilde{\xi} = \langle d\tilde{\gamma}_2, d\tilde{\gamma}_2 \rangle = \frac{1}{b^2} \langle d\gamma_2, d\gamma_2 \rangle = \frac{1}{b^2} d\xi \cdot d\xi. \quad (1.55)$$

**Definição 9.** *Uma hipersuperfície  $f = (x, \xi) : M^n \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$  é uma hipersuperfície de Laguerre, se  $\xi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  é imersão e se  $dx \cdot d\xi = 0$ .*

Note que, pelas relações (1.54) e (1.55), considerando qualquer transformação de Laguerre  $\phi : U\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ , dada uma hipersuperfície de Laguerre  $f = (x, \xi) : M^n \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$  teremos que  $\tilde{f} = (\tilde{x}, \tilde{\xi}) : M^n \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$  também é uma hipersuperfície de Laguerre em  $U\mathbb{R}^{n+1}$ . Por (1.2) e (1.3) obtemos que as esferas orientadas e os hiperplanos são hipersuperfícies de Laguerre em  $U\mathbb{R}^{n+1}$ .

Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada com curvaturas principais que não se anulam. Então, a aplicação normal  $\xi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  é uma imersão. Assim,  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  induz unicamente uma hipersuperfície de Laguerre  $f = (x, \xi) : M^n \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ . Note que, para qualquer hipersuperfície de Laguerre  $f = (x, \xi) : M^n \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  pode não ser uma imersão. Mas em [18], Pinkall mostrou que a transformação paralela  $f_t = (x + t\xi, \xi)$  de  $f$  é uma imersão em qualquer ponto  $p \in M^n$  para quase todo  $t \in \mathbb{R}$ . Nesse sentido, podemos assumir que  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é uma imersão.

**Definição 10.** *Sejam  $x, \tilde{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  duas hipersuperfícies orientadas com curvaturas principais que não se anulam. Dizemos que  $x$  e  $\tilde{x}$  são equivalentes por transformações de Laguerre (Laguerre equivalentes), se as hipersuperfícies de Laguerre correspondentes*

$f = (x, \xi), \tilde{f} = (\tilde{x}, \tilde{\xi}) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$  são diferentes apenas por uma transformação de Laguerre, isto é,  $\tilde{f} = \phi \circ f$ , onde  $\phi = L^{-1} \circ T \circ L, T \in LG$ .

Na geometria diferencial de Laguerre são estudadas as propriedades de hipersuperfícies de Laguerre em  $U\mathbb{R}^{n+1}$  que são invariantes pelo grupo das transformações de Laguerre em  $U\mathbb{R}^{n+1}$ .

No que segue, apresentamos um critério para que hipersuperfícies orientadas sejam equivalentes por transformações de Laguerre. Em seguida, utilizamos esse resultado para mostrar que a métrica de Laguerre é um invariante de Laguerre.

Seja  $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada com normal unitário  $\xi$ . Considere

$$[y] : M^n \longrightarrow \mathbb{Q}^{n+2}, y = (x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1). \quad (1.56)$$

**Teorema 4.** *Sejam  $x, x^* : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  duas hipersuperfícies orientadas com curvaturas principais que não se anulam. Então  $x$  e  $x^*$  são equivalentes por transformações de Laguerre se, e somente se, existe  $T \in LG$  tal que  $[y^*] = [yT]$ .*

*Demonstração.* Por hipótese, temos que  $x, x^* : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  são duas hipersuperfícies orientadas com curvaturas principais que não se anulam. Suponha que  $x$  e  $\tilde{x}$  são equivalentes por transformações de Laguerre. Então, pela Definição 10, as hipersuperfícies de Laguerre correspondentes  $f = (x, \xi), f^* = (x^*, \xi^*) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$  são diferentes apenas por uma transformação de Laguerre, isto é,  $f^* = \phi \circ f$ , onde  $\phi = L^{-1} \circ T \circ L, \phi(x, \xi) = (x^*, \xi^*)$ . Como  $y = (x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1) = \gamma_2$ , segue de (1.52) que existe  $T \in LG$  tal que  $[y^*] = [yT]$ .

Reciprocamente, suponha que existe  $T \in LG$  tal que  $[y^*] = [yT]$ . Defina  $(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \phi(x, \xi)$  onde  $\phi = L^{-1} \circ T \circ L$ , isto é,  $f = (x, \xi), \tilde{f} = (\tilde{x}, \tilde{\xi}) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$  são hipersuperfícies de Laguerre, associadas a  $x, \tilde{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , diferentes apenas por uma transformação de Laguerre  $\phi$ , ou seja,  $x, \tilde{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  são equivalentes por transformações de Laguerre. Resta agora mostrar que  $(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = (x^*, \xi^*)$ , onde  $f^* = (x^*, \xi^*) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$  é a hipersuperfície de Laguerre associada a  $x^* : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . De fato, por (1.52) e pela hipótese temos,  $[\tilde{y}] = [yT] = [y^*]$ . Então,

$$(\tilde{x} \cdot \tilde{\xi}, -\tilde{x} \cdot \tilde{\xi}, \tilde{\xi}, 1) = (x^* \cdot \xi^*, -x^* \cdot \xi^*, \xi^*, 1) \Rightarrow \tilde{x} \cdot \tilde{\xi} = x^* \cdot \xi^*, \tilde{\xi} = \xi^*. \quad (1.57)$$

Seja  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  uma base local para  $TM$ . Como  $\xi^* : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$  é uma imersão temos que,  $\{e_1(\xi^*), \dots, e_n(\xi^*), \xi^*\}$  é uma base para  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Então, segue de (1.57) e da Definição 9

que

$$\begin{aligned} 0 &= d((\tilde{x} - x^*)\xi^*) \\ 0 &= d((\tilde{x} - x^*))\xi^* + (\tilde{x} - x^*)d\xi^* \\ 0 &= (\tilde{x} - x^*)d\xi^*. \end{aligned}$$

Logo,  $\tilde{x} = x^*$ . Portanto,  $(x^*, \xi^*) = (\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \phi(x, \xi)$ , o que implica que  $x, \tilde{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  são equivalentes por transformações de Laguerre.  $\square$

Por (1.56) temos que  $\langle dy, dy \rangle = d\xi \cdot d\xi = III$ , que é chamada terceira forma fundamental de  $x$ . Então, segue o corolário.

**Corolário 5.** *A classe conforme da terceira forma fundamental de uma hipersuperfície  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é um invariante de Laguerre.*

*Demonstração.* Sejam  $x, \tilde{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  duas hipersuperfícies orientadas com curvaturas principais não nulas. Considere  $III = d\xi \cdot d\xi$  e  $\tilde{III} = d\tilde{\xi} \cdot d\tilde{\xi}$  a terceira forma fundamental de  $x$  e  $\tilde{x}$ , respectivamente. Pelo Teorema 4,  $x$  e  $\tilde{x}$  são equivalentes por transformações de Laguerre se, e somente se, existe  $T \in L\mathbb{G}$  tal que  $[\tilde{y}] = [yT]$ . Logo,

$$\langle d\tilde{y}, d\tilde{y} \rangle = \frac{1}{b^2} \langle dyT, dyT \rangle = \frac{1}{b^2} \langle dy, dy \rangle \Rightarrow \tilde{III} = \frac{1}{b^2} (III).$$

Portanto,  $[\tilde{III}] = [III]$ .  $\square$

Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície com curvaturas principais não nulas, com campo normal unitário  $\xi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  e  $III = \langle dy, dy \rangle$  a terceira forma fundamental de  $x$ . Para qualquer base ortonormal  $\{E'_1, \dots, E'_n\}$  em relação a  $III$  definimos

$$\mathbb{V} = \text{span}\{y, \Delta y, E'_1(y), E'_2(y), \dots, E'_n(y)\},$$

onde  $\Delta$  é o operador Laplaciano em relação à  $III$ .

Vamos agora determinar as relações de ortogonalidade na métrica (1.4). Pela ortogonalidade da base  $\{E'_1, \dots, E'_n\}$ , temos  $\langle E'_i(y), E'_j(y) \rangle = \delta_{ij}$ . Então,

$$\langle E'_i(y), E'_i(y) \rangle = 1 \Rightarrow \langle E'_i(E'_i(y)), E'_i(y) \rangle = 0. \quad (1.58)$$

Por (1.58), segue que

$$\langle \Delta y, E'_i(y) \rangle = \left\langle \sum_i E'_i(E'_i(y)), E'_i(y) \right\rangle = \sum_i \langle E'_i(E'_i(y)), E'_i(y) \rangle = 0.$$

Observe que  $[y] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ , isto é,

$$\langle y, y \rangle = 0. \quad (1.59)$$

Assim,

$$\langle y, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle E'_i(y), y \rangle = 0.$$

Como,  $\langle E'_i(y), y \rangle = 0$  e  $\langle E'_i(y), E'_i(y) \rangle = 1$  temos,

$$\langle E'_i(E'_i(y)), y \rangle + \langle E'_i(y), E'_i(y) \rangle = 0 \Rightarrow \langle E'_i(E'_i(y)), y \rangle = -1.$$

Então,

$$\langle \Delta y, y \rangle = \sum_i \langle E'_i(E'_i(y)), y \rangle = -n.$$

Portanto, temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} \langle y, E'_i(y) \rangle &= \langle \Delta y, E'_i(y) \rangle = 0, \\ \langle y, \Delta y \rangle &= -n, \\ \langle E'_i(y), E'_j(y) \rangle &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Logo, em cada ponto de  $\mathbb{V}$  temos um subespaço  $(n+2)$ -dimensional não degenerado em  $\mathbb{R}_2^{n+4}$ . Então, temos a seguinte decomposição ortogonal

$$\mathbb{R}_2^{n+4} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^\perp = \text{span}\{y, \Delta y, E'_1(y), E'_2(y), \dots, E'_n(y)\} \oplus \mathbb{V}^\perp.$$

Isto é,  $\mathbb{V}^\perp$  é um subespaço 2-dimensional não degenerado em  $\mathbb{R}_2^{n+4}$ .

Considere  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal com relação a métrica  $dx \cdot dx$  para  $TM$ , consistindo de vetores principais unitários. Escrevemos as seguintes equações

$$e_j(e_i(x)) = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k(x) + k_i \delta_{ij} \xi, \quad e_i(\xi) = -k_i e_i(x), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.61)$$

onde  $k_i \neq 0$  é a curvatura principal correspondente a  $e_i$ . Definimos

$$r_i = \frac{1}{k_i} \text{ e } r = \frac{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}{n}, \quad (1.62)$$

onde  $r_i$  é o raio de curvatura e  $r$  é o raio de curvatura média de  $x$ . Então a esfera da média dos raios de curvatura  $S(x + r\xi, r)$  de  $x$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , onde  $r$  é o raio de curvatura média de  $x$ , tem coordenadas esféricas dadas pela correspondência (1.18), e assim,

$$\begin{aligned} \eta &= \left( \frac{1}{2}(1 + |x + r\xi|^2 - r^2), \frac{1}{2}(1 - |x + r\xi|^2 + r^2), x + r\xi, r \right) \\ &= \left( \frac{1}{2}(1 + |x|^2), \frac{1}{2}(1 - |x|^2), x, 0 \right) + r(x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1). \end{aligned} \quad (1.63)$$

A aplicação  $\eta : M^n \rightarrow C^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}$  definida por (1.63) é chamada *aplicação normal de Laguerre*.

No que segue, vamos verificar que o subespaço 2-dimensional  $\mathbb{V}^\perp$  é  $\mathbb{V}^\perp = \text{span}\{\eta, P\}$ , onde  $P = (1, -1, \vec{0}, 0) \in \mathbb{R}_2^{n+4}$ ,  $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Primeiramente, observe que

$$e_i(x) \cdot \xi = -r_i e_i(\xi) \cdot \xi = -\frac{r_i}{2}(e_i(\xi \cdot \xi)) = 0. \quad (1.64)$$

Além disso, os elementos da base ortonormal  $\{E'_1, \dots, E'_n\}$  para  $III = \langle dy, dy \rangle$  podem ser escritos na forma

$$E'_i = r_i e_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.65)$$

De fato, como  $\{e_i\}$ ,  $1 \leq i \leq n$  é base ortonormal para  $TM$  com relação a  $dx \cdot dx$  tal que  $e_i(\xi) = -k_i e_i(x)$  temos,  $E'_i(\xi) \cdot E'_j(\xi) = r_i e_i(\xi) \cdot r_j e_j(\xi) = e_i(x) \cdot e_j(x) = \delta_{ij}$ .

A fim de verificar que  $\mathbb{V}^\perp = \text{span}\{\eta, P\}$ , vamos determinar algumas relações que também serão importantes para o desenvolvimento de cálculos do próximo capítulo.

Pelas equações (1.56), (1.61), (1.64) e (1.65) obtemos,

$$\begin{aligned} E'_i(y) = r_i e_i(y) &= r_i(e_i(x) \cdot \xi + x \cdot e_i(\xi), -e_i(x) \cdot \xi - x \cdot e_i(\xi), e_i(\xi), 0) \\ &= r_i(x \cdot e_i(\xi), -x \cdot e_i(\xi), e_i(\xi), 0) \\ &= (-x \cdot e_i(x), x \cdot e_i(x), -e_i(x), 0). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Então,

$$\begin{aligned}\langle E'_i(y), E'_i(y) \rangle &= \langle (-x \cdot e_i(x), x \cdot e_i(x), -e_i(x), 0), (-x \cdot e_i(x), x \cdot e_i(x), -e_i(x), 0) \rangle \\ &= e_i(x)e_i(x).\end{aligned}\quad (1.67)$$

Agora, por (1.63), (1.65) e (1.66) temos,

$$\begin{aligned}E'_i(\eta) = r_i e_i(\eta) &= r_i(x \cdot e_i(x), -x \cdot e_i(x), e_i(x), 0) + r_i e_i(r)y + r r_i e_i(y) \\ &= -r_i E'_i(y) + E'_i(r)y + r E'_i(y) \\ &= (r - r_i)E'_i(y) + E'_i(r)y.\end{aligned}\quad (1.68)$$

Por (1.60) e (1.68) temos,

$$\begin{aligned}\langle y, E'_i(\eta) \rangle &= 0, \\ \sum_i \langle E'_i(\eta), E'_i(\eta) \rangle &= \sum_i (r - r_i)^2.\end{aligned}\quad (1.69)$$

Reunindo as equações (1.56), (1.60), (1.63), (1.66) e (1.68) temos,

$$\begin{aligned}\langle y, \eta \rangle &= \left\langle (x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1), \left( \frac{1}{2}(1 + |x|^2), \frac{1}{2}(1 - |x|^2), x, 0 \right) \right\rangle + r \langle y, y \rangle \\ &= -\frac{1}{2}(x \cdot \xi)(1 + |x|^2) - \frac{1}{2}(x \cdot \xi)(1 - |x|^2) + x \cdot \xi = 0,\end{aligned}\quad (1.70)$$

$$\begin{aligned}\langle E'_i(y), \eta \rangle &= \left\langle (-x \cdot e_i(x), x \cdot e_i(x), -e_i(x), 0), \left( \frac{1}{2}(1 + |x|^2), \frac{1}{2}(1 - |x|^2), x, 0 \right) \right\rangle + r \langle E'_i(y), y \rangle \\ &= \frac{1}{2}(x \cdot e_i(x))(1 + |x|^2) + \frac{1}{2}(x \cdot e_i(x))(1 - |x|^2) - x \cdot e_i(x) = 0.\end{aligned}\quad (1.71)$$

Note que,

$$\langle E'_i(y), \eta \rangle = 0 \Rightarrow \langle E'_i(E'_i(y)), \eta \rangle + \langle E'_i(y), E'_i(\eta) \rangle = 0.\quad (1.72)$$

Utilizando (1.60), (1.67), (1.68) e (1.72), temos ainda

$$\begin{aligned}
\langle \Delta y, \eta \rangle &= \sum_i \langle E'_i(E'_i(y)), \eta \rangle = -\sum_i \langle E'_i(y), E'_i(\eta) \rangle \\
&= -\sum_i \langle E'_i(y), (r - r_i)E'_i(y) + E'_i(r)y \rangle \\
&= -\sum_i (r - r_i) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.73}$$

Logo,  $\langle y, \eta \rangle = 0$ ,  $\langle E'_i(y), \eta \rangle = 0$  e  $\langle \Delta y, \eta \rangle = 0$ . Portanto,  $\eta \in \mathbb{V}^\perp$ .

Seja  $P = (1, -1, \vec{0}, 0) \in \mathbb{R}_2^{n+4}$ , onde  $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Segue de (1.56), (1.63) e (1.66) que,

$$\langle y, P \rangle = \langle E'_i(y), P \rangle = \langle \Delta y, P \rangle = 0, \tag{1.74}$$

$$\langle \eta, P \rangle = \left\langle \left( \frac{1}{2}(1 + |x|^2), \frac{1}{2}(1 - |x|^2), x, 0 \right), (1, -1, \vec{0}, 0) \right\rangle + r \langle y, P \rangle = -1.$$

Portanto,  $\mathbb{V}^\perp = \text{span}\{\eta, P\}$ .

Sejam  $x, \tilde{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  duas hipersuperfícies orientadas, com curvaturas principais não nulas, equivalentes por transformações de Laguerre. Pelo Teorema 4 e pela relação (1.52) temos,

$$\tilde{y} = \frac{1}{b}yT, \tag{1.75}$$

para algum  $b \neq 0$ . Considere  $III = d\xi \cdot d\xi = \langle dy, dy \rangle$  e  $\tilde{III} = d\tilde{\xi} \cdot d\tilde{\xi} = \langle d\tilde{y}, d\tilde{y} \rangle$  a terceira forma fundamental de  $x$  e  $\tilde{x}$ , respectivamente. Então, pelo Corolário 5, temos que a terceira forma fundamental é um invariante de Laguerre, isto é,

$$\tilde{III} = \langle d\tilde{y}, d\tilde{y} \rangle = \frac{1}{b^2} \langle dy, dy \rangle = \frac{1}{b^2} III. \tag{1.76}$$

Além disso,  $\mathbb{V}$ ,  $\mathbb{V}^\perp$  e  $\eta$  também são invariantes de Laguerre, ou seja,

$$\tilde{\mathbb{V}} = \mathbb{V}T, \tilde{\mathbb{V}}^\perp = \mathbb{V}^\perp T, \tilde{\eta} = \eta T. \tag{1.77}$$

Como  $\{E'_1, \dots, E'_n\}$  é uma base ortonormal para  $III = \langle dy, dy \rangle$ , temos que  $\{\tilde{E}'_1, \dots, \tilde{E}'_n\}$  é uma base ortonormal para  $\tilde{III} = \langle d\tilde{y}, d\tilde{y} \rangle$ , onde

$$\tilde{E}'_i = bE'_i, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{1.78}$$

Então, por (1.77) e (1.78) obtemos,

$$\sum_i \langle \tilde{E}'_i(\tilde{\eta}), \tilde{E}'_i(\tilde{\eta}) \rangle = b^2 \sum_i \langle E'_i(\eta), E'_i(\eta) \rangle. \quad (1.79)$$

Logo, por (1.76) e (1.79) temos,

$$\tilde{g} = \left( \sum_i \langle \tilde{E}'_i(\tilde{\eta}), \tilde{E}'_i(\tilde{\eta}) \rangle \right) III = b^2 \sum_i \langle E'_i(\eta), E'_i(\eta) \rangle \frac{1}{b^2} III = \left( \sum_i \langle E'_i(\eta), E'_i(\eta) \rangle \right) III = g.$$

Portanto, segue de (1.69) que a métrica

$$g = \left( \sum_i (r - r_i)^2 \right) III \quad (1.80)$$

é uma métrica invariante de Laguerre em qualquer ponto não umbílico de  $x$ . A métrica  $g$  é denominada *métrica de Laguerre de  $x$* .

## 1.4 Geometria de Laguerre para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção, apresentamos alguns invariantes básicos de Laguerre para hipersuperfícies de Laguerre em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , estudados pelos autores Li e Wang [11], tais como, a segunda forma fundamental de Laguerre  $\mathbb{B}$ , a forma de Laguerre  $\mathbb{C}$  e o tensor de Laguerre  $\mathbb{L}$ . Além disso, mostramos expressões que relacionam esses invariantes.

Vamos obter um referencial móvel e as equações de estrutura de uma hipersuperfície orientável  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , com curvaturas principais não nulas e sem pontos umbílicos, para a métrica invariante de Laguerre  $g = \rho^2 d\xi \cdot \xi$ , onde  $\xi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  é o campo normal unitário de  $x$  e  $\rho^2 = \sum_i (r - r_i)^2$ . Em seguida, obtemos três invariantes de Laguerre e algumas relações entre esses invariantes. Por invariantes de Laguerre entendemos como objetos invariantes por transformações de Laguerre.

Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Definimos a aplicação

$$Y = \rho(x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1) : M^n \rightarrow C^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}, \quad (1.81)$$



onde  $\rho = \sqrt{\sum_i (r - r_i)^2}$ , como em (1.69). O vetor  $Y$  é denotado o *vetor posição de Laguerre da imersão  $x$*  sendo responsável por identificar a hipersuperfície  $x$  no cone de luz de  $\mathbb{R}_2^{n+4}$ .

Observe que  $\rho$  nunca se anula, pois  $x$  não possui pontos umbílicos. Além disso, podemos escrever

$$Y = \rho y, \quad (1.82)$$

onde  $y = (x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1)$  dado em (1.56).

O teorema seguinte fornece uma equivalência entre hipersuperfícies de Laguerre em termos dos seus respectivos vetores posição.

**Teorema 6.** *Sejam  $x, \tilde{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  duas hipersuperfícies sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Então  $x$  e  $\tilde{x}$  são equivalentes por uma transformação de Laguerre se, e somente se, existe  $T \in L\mathbb{G}$  tal que  $\tilde{Y} = YT$ .*

*Demonstração.* Considere  $x, \tilde{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  duas hipersuperfícies de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que não possuem pontos umbílicos e cujas curvaturas principais não se anulam. Considere  $Y$  e  $\tilde{Y}$  os vetores posição de  $x$  e  $\tilde{x}$ , respectivamente. Suponha que  $x$  e  $\tilde{x}$  são equivalentes por transformações de Laguerre. Pelo Teorema 4, existe  $T \in L\mathbb{G}$  tal que  $[\tilde{y}] = [yT]$ . Então, as equações (1.75) e (1.79) se verificam. Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \tilde{\rho} \tilde{y} \\ &= \sqrt{\sum_i \langle \tilde{E}'_i(\tilde{\eta}), \tilde{E}'_i(\tilde{\eta}) \rangle} \tilde{y} \\ &= \sqrt{b^2 \sum_i \langle E'_i(\eta), E'_i(\eta) \rangle} \frac{1}{b} yT \\ &= \sqrt{\sum_i \langle E'_i(\eta), E'_i(\eta) \rangle} yT \\ &= \rho yT = YT. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que exista  $T \in L\mathbb{G}$  tal que  $\tilde{Y} = YT$ . Como  $\tilde{\rho} > 0$  temos,

$$\tilde{\rho} \tilde{y} = \tilde{Y} = YT = \rho yT \Rightarrow [\tilde{y}] = [yT].$$

Logo, pelo Teorema 4 temos que  $x$  e  $\tilde{x}$  são equivalentes por transformações de Laguerre.  $\square$

Considere  $Y$  o vetor posição de Laguerre da hipersuperfície  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Utilizando (1.82) temos que a métrica de Laguerre  $g$ , que é conforme à terceira forma fundamental

como em (1.80), pode ser escrita

$$g = \langle dY, dY \rangle = \rho^2 d\xi \cdot d\xi. \quad (1.83)$$

A partir de agora, quando referirmos à métrica de Laguerre, estaremos considerando  $g$  dada pela expressão em (1.83).

Seja  $\Delta$  o operador Laplaciano de  $g$ , definimos

$$N = \frac{1}{n} \Delta Y + \frac{1}{2n^2} \langle \Delta Y, \Delta Y \rangle Y. \quad (1.84)$$

Sejam  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  em  $\mathbb{R}_2^{n+4}$  campos tangentes a  $Y$  consistindo de uma base ortonormal na métrica  $g$  com base dual  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ . Em (1.65), consideramos  $\{E'_1, E'_2, \dots, E'_n\}$  uma base ortonormal para  $III = \langle dy, dy \rangle = d\xi \cdot d\xi$ , onde os elementos dessa base podem ser escritos como  $E'_i = r_i e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Então, obtemos uma relação entre os elementos da base referente à métrica  $g$  e os elementos da base ortonormal para  $III$ , ou seja, se  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  consiste de uma base ortonormal na métrica  $g$ , então

$$E_i = \rho^{-1} E'_i = \rho^{-1} r_i e_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.85)$$

Vamos agora determinar as relações de ortogonalidade na métrica (1.4). Por (1.59) e (1.82) temos,

$$\langle Y, Y \rangle = \langle \rho y, \rho y \rangle = \rho^2 \langle y, y \rangle = 0. \quad (1.86)$$

Analogamente ao cálculos feitos para obter as relações de ortogonalidade dadas em (1.60) temos,

$$\begin{aligned} \langle Y, E_i(Y) \rangle &= \langle \Delta Y, E_i(Y) \rangle = 0, \\ \langle Y, \Delta Y \rangle &= -n, \\ \langle E_i(Y), E_j(Y) \rangle &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Pelas equações (1.63) e (1.70), temos que

$$\begin{aligned}
\langle \eta, \eta \rangle &= \left\langle \left( \frac{1}{2}(1 + |x|^2), \frac{1}{2}(1 - |x|^2), x, 0 \right), \eta \right\rangle + r \langle y, \eta \rangle \\
&= \left\langle \left( \frac{1}{2}(1 + |x|^2), \frac{1}{2}(1 - |x|^2), x, 0 \right), \left( \frac{1}{2}(1 + |x|^2), \frac{1}{2}(1 - |x|^2), x, 0 \right) \right\rangle \\
&+ r \left\langle \left( \frac{1}{2}(1 + |x|^2), \frac{1}{2}(1 - |x|^2), x, 0 \right), (x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{4}(1 + |x|^2)^2 + \frac{1}{4}(1 - |x|^2)^2 + x^2 + r \left( -\frac{x \cdot \xi (1 + |x|^2)}{2} - \frac{x \cdot \xi (1 - |x|^2)}{2} + x \cdot \xi \right) = 0.
\end{aligned}$$

Utilizando (1.84) e (1.87), segue que

$$\begin{aligned}
\langle N, N \rangle &= \left\langle \frac{1}{n} \Delta Y + \frac{1}{2n^2} \langle \Delta Y, \Delta Y \rangle Y, \frac{1}{n} \Delta Y + \frac{1}{2n^2} \langle \Delta Y, \Delta Y \rangle Y \right\rangle = \\
&= \frac{1}{n^2} \langle \Delta Y, \Delta Y \rangle - \frac{1}{n^3} \langle \Delta Y, \Delta Y \rangle n = 0, \\
\langle Y, N \rangle &= \left\langle Y, \frac{1}{n} \Delta Y + \frac{1}{2n^2} \langle \Delta Y, \Delta Y \rangle Y \right\rangle = \frac{1}{n} \langle Y, \Delta Y \rangle = -1, \\
\langle N, E_i(Y) \rangle &= \left\langle \frac{1}{n} \Delta Y + \frac{1}{2n^2} \langle \Delta Y, \Delta Y \rangle Y, E_i(Y) \right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Por fim, vamos obter as últimas relações. Por (1.70), (1.74) e (1.82),

$$\langle Y, \eta \rangle = \rho \langle y, \eta \rangle = 0,$$

$$\langle Y, P \rangle = \rho \langle y, P \rangle = 0,$$

onde  $P = (1, -1, \vec{0}, 0) \in \mathbb{R}^{n+4}$ ,  $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Além disso, utilizando que  $\langle Y, P \rangle = 0$  e  $\langle \Delta Y, P \rangle = 0$  temos,

$$\begin{aligned}
\langle \Delta Y, P \rangle &= \left\langle \sum_i E_i(E_i(Y)), P \right\rangle = \sum_i \langle E_i(E_i(Y)), P \rangle = 0, \\
\langle N, P \rangle &= \left\langle \frac{1}{n} \Delta Y + \frac{1}{2n^2} \langle \Delta Y, \Delta Y \rangle Y, P \right\rangle = \frac{1}{n} \langle \Delta Y, P \rangle + \frac{1}{2n^2} \langle \Delta Y, \Delta Y \rangle \langle Y, P \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Segue de (1.70), (1.71), (1.82) e (1.85), que

$$\begin{aligned}\langle E_i(Y), \eta \rangle &= \langle \rho^{-1}(yE'_i(\rho) + \rho E'_i(y)), \eta \rangle \\ &= \rho^{-1}E'_i(\rho)\langle y, \eta \rangle + \langle E'_i(y), \eta \rangle = 0.\end{aligned}$$

Então,

$$\langle E_i(Y), \eta \rangle = 0 \Rightarrow \langle E_i(E_i(Y)), \eta \rangle = -\langle E_i(Y), E_i(\eta) \rangle. \quad (1.88)$$

Logo, utilizando (1.69), (1.72), (1.73), (1.85) e (1.88) temos,

$$\begin{aligned}\langle \Delta Y, \eta \rangle &= \sum_i \langle E_i(E_i(Y)), \eta \rangle \\ &= -\sum_i \langle E_i(Y), E_i(\eta) \rangle \\ &= -\sum_i \langle \rho^{-1}(yE'_i(\rho) + \rho E'_i(y)), \rho^{-1}E'_i(\eta) \rangle \\ &= -\rho^{-1} \sum_i \langle E'_i(y), E'_i(\eta) \rangle \\ &= \rho^{-1} \sum_i \langle E'_i(E'_i(y)), \eta \rangle \\ &= \rho^{-1} \langle \Delta y, \eta \rangle = 0.\end{aligned}$$

Dáí,

$$\langle N, \eta \rangle = \left\langle \frac{1}{n}\Delta Y + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta Y, \Delta Y \rangle Y, \eta \right\rangle = \frac{1}{n}\langle \Delta Y, \eta \rangle + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta Y, \Delta Y \rangle \langle Y, \eta \rangle = 0.$$

Portanto, são satisfeitas as seguintes relações de ortogonalidade na métrica (1.4)

$$\begin{aligned}\langle \Delta Y, E_i(Y) \rangle &= 0, \quad \langle Y, \Delta Y \rangle = -n, \quad \langle E_i(Y), E_j(Y) \rangle = \delta_{ij}, \\ \langle Y, Y \rangle &= \langle Y, E_i(Y) \rangle = 0, \quad \langle Y, \eta \rangle = \langle Y, P \rangle = 0, \quad \langle Y, N \rangle = -1, \\ \langle N, N \rangle &= 0, \quad \langle N, \eta \rangle = \langle N, P \rangle = \langle N, E_i(Y) \rangle = 0, \\ \langle \eta, \eta \rangle &= \langle P, P \rangle = \langle \eta, E_i(Y) \rangle = 0, \quad \langle \eta, P \rangle = -1.\end{aligned} \quad (1.89)$$

Então, temos a seguinte decomposição ortogonal

$$\mathbb{R}_2^{n+4} = \text{span}\{Y, N\} \oplus \text{span}\{E_1(Y), E_2(Y), \dots, E_n(Y)\} \oplus \{\eta, P\}.$$

Chamamos  $\{Y, N, E_1(Y), E_2(Y), \dots, E_n(Y), \eta, P\}$  de *referencial móvel de Laguerre* em  $\mathbb{R}_2^{n+4}$  de  $x$ . As equações de estrutura para este referencial são dadas por

$$\begin{aligned} dY &= \sum_i \omega_i E_i(Y), \\ dN &= \sum_i \psi_i E_i(Y) + \phi P, \\ dE_i(Y) &= \psi_i Y + \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} E_j(Y) + \beta_i P, \\ d\eta &= -\phi Y + \sum_i \beta_i E_i(Y), \end{aligned} \tag{1.90}$$

onde  $\{\psi_i, \omega_{ij}, \phi_i, \beta_i\}$  são funções diferenciáveis em  $M^n$  com  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ . Queremos agora obter expressões para das funções diferenciáveis  $\psi_i, \beta_i, \phi$  utilizando o Lema de Cartan.

**Proposição 6.** *Considere  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Sejam, as equações de estrutura de  $x$ , com relação à métrica de Laguerre  $g$ , dadas em (1.90). Tomando a derivada exterior das equações (1.90), obtemos*

$$\begin{aligned} \sum_i \omega_i \wedge \psi_i &= 0, \\ \sum_i \omega_i \wedge \beta_i &= 0, \\ d\omega_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j &= 0, \\ d\psi_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \psi_j &= 0, \\ d\phi - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i &= 0, \\ d\beta_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \beta_j - \omega_i \wedge \phi &= 0, \\ d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} &= \psi_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \psi_j. \end{aligned} \tag{1.91}$$

*Demonstração.* Tomando a derivada exterior da primeira equação de (1.90) e substituindo a terceira equação de (1.90) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= d(dY) = \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge dE_i(Y) \\ &= \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \left( \psi_i Y + \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} E_j(Y) + \beta_i P \right) \\ &= \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \psi_i Y - \sum_{i,j} \omega_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \beta_i P. \end{aligned} \tag{1.92}$$

Tomando o produto interno de (1.92) com  $N$  e utilizando as relações de ortogonalidade (1.89) obtemos,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \psi_i Y - \sum_{i,j} \omega_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \beta_i P, N \right\rangle \\
&= - \sum_i \omega_i \wedge \psi_i \langle Y, N \rangle \\
&= \sum_i \omega_i \wedge \psi_i.
\end{aligned}$$

Considerando o produto interno de (1.92) com  $\eta$  temos,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \psi_i Y - \sum_{i,j} \omega_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \beta_i P, \eta \right\rangle \\
&= - \sum_i \omega_i \wedge \beta_i \langle P, \eta \rangle \\
&= \sum_i \omega_i \wedge \beta_i.
\end{aligned}$$

Fazendo o produto interno de (1.92) com  $E_i(Y)$  e usando as relações de ortogonalidade (1.89) segue que,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \psi_i Y - \sum_{i,j} \omega_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \beta_i P, E_i(Y) \right\rangle \\
&= \sum_i d\omega_i \langle E_i(Y), E_i(Y) \rangle - \sum_{i,j} \omega_j \wedge \omega_{ji} \langle E_i(Y), E_i(Y) \rangle \\
&= d\omega_i - \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji} \\
&= d\omega_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo a derivada exterior da segunda equação de (1.90) e substituindo a terceira equação de (1.90) temos,

$$\begin{aligned}
0 &= d(dN) = \sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge dE_i(Y) + d\phi P \\
&= \sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \left( \psi_i Y + \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} E_j(Y) + \beta_i P \right) + d\phi P \\
&= \sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \omega_i N - \sum_{i,j} \psi_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i P + d\phi P. \quad (1.93)
\end{aligned}$$

Tomando, primeiramente, o produto interno de (1.93) com  $\eta$  e utilizando as relações de ortogonalidade (1.89) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \omega_i N - \sum_{i,j} \psi_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i P + d\phi P, \eta \right\rangle \\ &= - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i \langle P, \eta \rangle + d\phi \langle P, \eta \rangle \\ &= d\phi - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i. \end{aligned}$$

Analogamente, considerando o produto interno de (1.93) com  $E_i(Y)$  e usando as relações de ortogonalidade (1.89) obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \omega_i N - \sum_{i,j} \psi_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i P + d\phi P, E_i(Y) \right\rangle \\ &= \sum_i d\psi_i \langle E_i(Y), E_i(Y) \rangle - \sum_{i,j} \psi_j \wedge \omega_{ji} \langle E_i(Y), E_i(Y) \rangle \\ &= d\psi_i - \sum_i \omega_{ij} \wedge \psi_j. \end{aligned}$$

Considerando a derivada exterior da terceira equação de (1.90) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= d(dE_i(Y)) = d\psi_i Y - \psi_i \wedge dY + d\omega_i N - \omega_i \wedge dN + \sum_i d\omega_{ij} E_i(Y) \\ &\quad - \sum_i \omega_{ij} \wedge dE_i(Y) + d\beta_i P. \end{aligned} \tag{1.94}$$

Substituindo as três primeiras equações de (1.90) em (1.94) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi_i Y - \sum_j \psi_i \wedge \omega_j E_j(Y) + d\omega_i N - \sum_j \omega_i \wedge \psi_j E_j(Y) - \omega_i \wedge \phi P + \sum_i d\omega_{ij} E_j(Y) \\ &\quad - \sum_j \omega_{ij} \wedge \psi_j Y - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j N - \sum_j \omega_{ij} \wedge \beta_j P + d\beta_i P - \sum_{jk} \omega_{ij} \wedge \omega_{jk} E_k(Y). \end{aligned}$$

Em seguida tomando o produto interno com  $\eta$  e  $E_j(Y)$ , utilizando as relações de ortogonalidade (1.89), temos

$$\begin{aligned} d\beta_i &- \sum_j \omega_{ij} \wedge \beta_j - \omega_i \wedge \phi = 0, \\ d\omega_{ij} &- \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \psi_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \psi_j, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

Note que  $\{\omega_i\}$  é um conjunto linearmente independente e pelas equações (1.91) temos  $\sum_i \omega_i \wedge \psi_i = 0$  e  $\sum_i \omega_i \wedge \beta_i = 0$ . Então, pelo Lema de Cartan, podemos escrever

$$\begin{aligned}\psi_i &= \sum_j L_{ij} \omega_j, \\ \beta_i &= \sum_j B_{ij} \omega_j, \\ \phi &= \sum_i C_i \omega_i,\end{aligned}\tag{1.95}$$

onde  $L_{ij}$ ,  $B_{ij}$  e  $C_i$  são funções diferenciáveis em  $M^n$ , satisfazendo  $L_{ij} = L_{ji}$  e  $B_{ij} = B_{ji}$ .

**Definição 11.** Definimos os invariantes  $\mathbb{B} = \sum_{ij} B_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$ ,  $\mathbb{L} = \sum_{ij} L_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  e  $\mathbb{C} = \sum_i C_i \omega_i$  denominados *tensor segunda forma fundamental de Laguerre*, *tensor de Laguerre* e *forma de Laguerre*, respectivamente.

Por (1.90) e (1.95) as equações de estrutura para este referencial são escritas por

$$\begin{aligned}E_i(N) &= \sum_j L_{ij} E_j(Y) + C_i P, \\ E_j(E_i(Y)) &= L_{ij} Y + \delta_{ij} N + \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k(Y) + B_{ij} P, \\ E_i(\eta) &= -C_i Y + \sum_j B_{ij} E_j(Y),\end{aligned}\tag{1.96}$$

onde  $C_i$ ,  $L_{ij} = L_{ji}$ ,  $B_{ij} = B_{ji}$ ,  $\Gamma_{ij}^k$  são funções diferenciáveis definidas em  $M^n$ .

As derivadas covariantes dos tensores  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{L}$ , e a forma de curvatura, com relação à métrica  $g$ , são dados por,

$$\begin{aligned}dC_i + \sum_j C_j \omega_{ji} &= \sum_j C_{i,j} \omega_j, \\ dL_{ij} + \sum_k L_{ik} \omega_{kj} + \sum_k L_{kj} \omega_{ki} &= \sum_k L_{ij,k} \omega_k, \\ dB_{ij} + \sum_k B_{ik} \omega_{kj} + \sum_k B_{kj} \omega_{ki} &= \sum_k B_{ij,k} \omega_k, \\ d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} &= \Omega_{ij} = - \sum_{k<l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l,\end{aligned}\tag{1.97}$$

onde  $\Omega_{ij}$  é a forma de curvatura e as funções  $R_{ijkl}$  são as componentes do operador curvatura. No que segue, vamos obter relações entre os invariantes de Laguerre.



**Proposição 7.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Considere as equações de estrutura de  $x$ , com relação à métrica de Laguerre  $g$ , dadas em (1.90). Tomando a derivada exterior das equações dadas em (1.95), obtemos as seguintes relações entre estes invariantes:*

$$\begin{aligned} L_{ij,k} &= L_{ik,j}, \\ C_{i,j} - C_{j,i} &= \sum_k (B_{ki}L_{kj} - B_{jk}L_{ik}), \\ B_{ij,k} - B_{ik,j} &= C_j\delta_{ik} - C_k\delta_{ij}, \\ R_{ijkl} &= L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik}, \end{aligned}$$

onde  $R_{ijkl}$  é o tensor curvatura da métrica  $g$ .

*Demonstração.* Tomando a derivada exterior de  $\psi_i$  dado em (1.95) e utilizando a terceira equação de (1.91) temos

$$\begin{aligned} d\psi_i &= d\left(\sum_j L_{ij}\omega_j\right) = \sum_j dL_{ij} \wedge \omega_j + \sum_j L_{ij}d\omega_j \\ &= \sum_j dL_{ij} \wedge \omega_j + \sum_k L_{ik}d\omega_k \\ &= \sum_j dL_{ij} \wedge \omega_j + \sum_{jk} L_{ik}\omega_{kj} \wedge \omega_j. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Substituindo  $\psi_k = \sum_j L_{kj}\omega_j$  na quarta equação de (1.91), obtemos

$$d\psi_i = \sum_{ij} L_{kj}\omega_{ik} \wedge \omega_j. \quad (1.99)$$

Igualando as expressões (1.98) e (1.99) e utilizando (1.97) temos

$$\begin{aligned} \sum_{jk} L_{ij,k}\omega_k \wedge \omega_j &= 0 \\ \sum_{j<k} L_{ij,k}\omega_k \wedge \omega_j + \sum_{j>k} L_{ij,k}\omega_k \wedge \omega_j &= 0 \\ \sum_{j<k} L_{ij,k}\omega_k \wedge \omega_j - \sum_{k>j} L_{ik,j}\omega_k \wedge \omega_j &= 0. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Como o conjunto  $\{\omega_k \wedge \omega_j\}_{j<k}$  é L.I, segue de (1.100) que

$$L_{ij,k} = L_{ik,j}.$$

Fazendo a derivada exterior de  $\phi$ , dado em (1.95), utilizando a terceira equação de (1.91) e a primeira expressão de (1.97) temos

$$\begin{aligned}
 d\phi &= d\left(\sum_i C_i \omega_i\right) = \sum_i dC_i \wedge \omega_i + \sum_i C_i d\omega_i \\
 &= \sum_i dC_i \wedge \omega_i + \sum_{ij} C_i \omega_{ij} \wedge \omega_j \\
 &= \sum_i dC_i \wedge \omega_i + \sum_{ij} C_j \omega_{ji} \wedge \omega_i \\
 &= \sum_{ij} C_{i,j} \omega_j \wedge \omega_i.
 \end{aligned} \tag{1.101}$$

Utilizando (1.95) na quinta equação de (1.91) segue que

$$\begin{aligned}
 d\phi &= \sum_k \psi_k \wedge \beta_k \\
 &= -\sum_{ijk} B_{kj} L_{ki} \omega_j \wedge \omega_i.
 \end{aligned} \tag{1.102}$$

Igualando (1.101) com (1.102) e lembrando que  $L_{ij} = L_{ji}$  e  $B_{ij} = B_{ji}$  obtemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{ij} C_{i,j} \omega_j \wedge \omega_i &= -\sum_{ijk} B_{kj} L_{ki} \omega_j \wedge \omega_i \\
 \sum_{ij} \left( C_{i,j} + \sum_k B_{kj} L_{ki} \right) \omega_j \wedge \omega_i &= 0 \\
 \sum_{i<j} \left( C_{i,j} + \sum_k B_{kj} L_{ki} \right) \omega_j \wedge \omega_i + \sum_{i>j} \left( C_{i,j} + \sum_k B_{kj} L_{ki} \right) \omega_j \wedge \omega_i &= 0 \\
 \sum_{i<j} \left( C_{i,j} + \sum_k B_{kj} L_{ki} \right) \omega_j \wedge \omega_i - \sum_{i<j} \left( C_{j,i} + \sum_k B_{ki} L_{kj} \right) \omega_j \wedge \omega_i &= 0 \\
 \sum_{i<j} \left( C_{i,j} + \sum_k B_{kj} L_{ki} \right) \omega_j \wedge \omega_i &= \sum_{i<j} \left( C_{j,i} + \sum_k B_{ki} L_{kj} \right) \omega_j \wedge \omega_i,
 \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
 C_{i,j} + \sum_k B_{kj} L_{ki} &= C_{j,i} + \sum_k B_{ki} L_{kj} \\
 C_{i,j} - C_{j,i} &= \sum_k B_{ki} L_{kj} - \sum_k B_{kj} L_{ki} \\
 C_{i,j} - C_{j,i} &= \sum_k (B_{ki} L_{kj} - B_{jk} L_{ik}).
 \end{aligned} \tag{1.103}$$

Considere a derivada exterior de  $\beta_i$ , dado em (1.95), utilizando a terceira equação de (1.91) segue

$$\begin{aligned} d\beta_i &= d\left(\sum_j B_{ij}\omega_j\right) = \sum_j dB_{ij} \wedge \omega_j + \sum_j B_{ij}d\omega_j \\ &= \sum_j dB_{ij} \wedge \omega_j + \sum_{jk} B_{ij}\omega_{jk} \wedge \omega_k. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Substituindo as expressões de  $\phi$  e  $\beta$  na sexta equação de (1.91) temos

$$\begin{aligned} d\beta_i &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \beta_j + \omega_i \wedge \phi \\ &= \sum_{jk} B_{jk}\omega_{ij} \wedge \omega_k + \sum_k C_k \omega_i \wedge \omega_k. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Igualando (1.104) e (1.105) usando (1.97) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_j dB_{ij} \wedge \omega_j + \sum_{jk} B_{ij}\omega_{jk} \wedge \omega_k &= \sum_{jk} B_{jk}\omega_{ij} \wedge \omega_k + \sum_k C_k \omega_i \wedge \omega_k \\ \sum_j dB_{ij} \wedge \omega_j + \sum_{kj} B_{ik}\omega_{kj} \wedge \omega_j - \sum_{kj} B_{kj}\omega_{ik} \wedge \omega_j &= \sum_k C_k \omega_i \wedge \omega_k \\ \sum_j dB_{ij} \wedge \omega_j + \sum_{jk} B_{ik}\omega_{kj} \wedge \omega_j + \sum_{jk} B_{kj}\omega_{ki} \wedge \omega_j &= \sum_k C_k \omega_i \wedge \omega_k \\ \sum_{jk} B_{ij,k}\omega_k \wedge \omega_j &= \sum_k C_k \omega_i \wedge \omega_k \\ \sum_{jk} (-B_{ij,k} - C_k \delta_{ij}) \omega_j \wedge \omega_k &= 0 \\ \sum_{j<k} (-B_{ij,k} - C_k \delta_{ij}) \omega_j \wedge \omega_k + \sum_{j>k} (-B_{ij,k} - C_k \delta_{ij}) \omega_j \wedge \omega_k &= 0 \\ \sum_{j<k} (-B_{ij,k} - C_k \delta_{ij}) \omega_j \wedge \omega_k &= \sum_{k>j} (-B_{ik,j} - C_j \delta_{ik}) \omega_j \wedge \omega_k. \end{aligned}$$

Então, usando um argumento análogo ao usado em (1.103) segue que

$$\begin{aligned} -B_{ij,k} - C_k \delta_{ij} &= -B_{ik,j} - C_j \delta_{ik} \\ B_{ij,k} - B_{ik,j} &= C_j \delta_{ik} - C_k \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Por fim, vamos obter a última relação entre esses invariantes. Igualando a expressão do tensor de curvatura dada em (1.97) com a última equação de (1.91) e substituindo  $\psi_i = \sum_j L_{ij}\omega_j$

temos

$$\begin{aligned}
d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} &= \psi_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \psi_j \\
- \sum_{k<l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l &= \psi_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \psi_j \\
- \sum_{k<l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l &= \sum_k L_{ik} \omega_k \wedge \omega_j + \sum_k L_{jk} \omega_i \wedge \omega_k \\
- \sum_{k<l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l &= \sum_{kl} L_{ik} \delta_{jl} \omega_k \wedge \omega_l - \sum_{kl} L_{jk} \delta_{il} \omega_k \wedge \omega_l.
\end{aligned}$$

Usando um argumento similar ao usado em (1.103) obtemos

$$\begin{aligned}
- \sum_{k<l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l &= \sum_{kl} L_{ik} \delta_{jl} \omega_k \wedge \omega_l + \sum_{kl} L_{jk} \delta_{il} \omega_l \wedge \omega_k \\
- \sum_{k<l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l &= \sum_{k<l} L_{ik} \delta_{jl} \omega_k \wedge \omega_l + \sum_{l>k} L_{il} \delta_{jk} \omega_l \wedge \omega_k - \sum_{k<l} L_{jk} \delta_{il} \omega_k \wedge \omega_l \\
&\quad - \sum_{l>k} L_{jl} \delta_{ik} \omega_l \wedge \omega_k \\
- \sum_{k<l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l &= \sum_{k<l} (L_{ik} \delta_{jl} - L_{il} \delta_{jk} - L_{jk} \delta_{il} + L_{jl} \delta_{ik}) \omega_k \wedge \omega_l.
\end{aligned}$$

Logo,

$$R_{ijkl} = L_{jk} \delta_{il} + L_{il} \delta_{jk} - L_{ik} \delta_{jl} - L_{jl} \delta_{ik}.$$

Portanto, temos as seguintes relações entre os invariantes

$$\begin{aligned}
L_{ij,k} &= L_{ik,j}, \\
C_{i,j} - C_{j,i} &= \sum_k (B_{ki} L_{kj} - B_{jk} L_{ik}), \\
B_{ij,k} - B_{ik,j} &= C_j \delta_{ik} - C_k \delta_{ij}, \\
R_{ijkl} &= L_{jk} \delta_{il} + L_{il} \delta_{jk} - L_{ik} \delta_{jl} - L_{jl} \delta_{ik}.
\end{aligned} \tag{1.106}$$

□

Na proposição seguinte, apresentamos algumas identidades satisfeitas pelos invariantes de Laguerre da imersão  $x$ .

**Proposição 8.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Considere as equações de estrutura de  $x$ , com relação à métrica de Laguerre  $g$ , dadas em (1.90). As seguintes identidades são satisfeitas:*

$$\sum_{ij} B_{ij}^2 = 1, \quad \sum_i B_{ii} = 0, \quad \sum_i B_{ij,i} = (n-1)C_j. \tag{1.107}$$

*Demonstração.* De fato, pelas equações de estrutura (1.96) e as relações de ortogonalidade (1.89) temos

$$\begin{aligned}
 \langle E_i(\eta), E_i(\eta) \rangle &= \langle -C_i Y + \sum_j B_{ij} E_j(Y), -C_i Y + \sum_j B_{ij} E_j(Y) \rangle \\
 &= \langle \sum_j B_{ij} E_j(Y), \sum_j B_{ij} E_j(Y) \rangle \\
 &= \sum_j (B_{ij})^2.
 \end{aligned} \tag{1.108}$$

Substituindo (1.69) e (1.85) em (1.108) segue

$$\begin{aligned}
 \sum_{ij} (B_{ij})^2 &= \sum_i \langle E_i(\eta), E_i(\eta) \rangle \\
 &= \rho^{-2} \sum_i \langle E'_i(\eta), E'_i(\eta) \rangle \\
 &= \rho^{-2} \sum_i (r - r_i)^2 = 1.
 \end{aligned}$$

Da terceira equação de (1.96), temos que o operador Laplaciano  $\Delta$  do vetor posição  $Y$  de  $x$ , com relação à métrica  $g$ , é dado por

$$\Delta Y = \sum_i E_i(E_i(Y)) = \sum_i L_{ii} Y + nN + \sum_{ik} \Gamma_{ii}^k E_k(Y) + \sum_i B_{ii} P. \tag{1.109}$$

Como  $\langle \Delta Y, E_k(Y) \rangle = 0$ , segue de (1.109) que

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle \Delta Y, E_k(Y) \rangle = \left\langle \sum_i L_{ii} Y + \sum_i \delta_{ii} N + \sum_{ik} \Gamma_{ii}^k E_k(Y) + \sum_i B_{ii} P, E_k(Y) \right\rangle \\
 &= \sum_i L_{ii} \langle Y, E_k(Y) \rangle + n \langle N, E_k(Y) \rangle + \sum_{ik} \Gamma_{ii}^k \langle E_k(Y), E_k(Y) \rangle + \sum_i B_{ii} \langle P, E_k(Y) \rangle \\
 &= \sum_{ik} \Gamma_{ii}^k.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\Delta Y = \sum_i E_i(E_i(Y)) = \sum_i L_{ii} Y + nN + \sum_i B_{ii} P. \tag{1.110}$$

Tomando o produto interno de (1.110) e usando que  $\langle \Delta Y, \eta \rangle = 0$ , e as demais relações de ortogonalidade (1.89), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Delta Y, \eta \rangle = \left\langle \sum_i E_i(E_i(Y)), \eta \right\rangle = \left\langle \sum_i L_{ii}Y + nN + \sum_i B_{ii}P, \eta \right\rangle \\ &= -\sum_i B_{ii}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_i B_{ii} = 0. \quad (1.111)$$

Por fim, pela relação  $B_{ij,k} - B_{ik,j} = C_j \delta_{ik} - C_k \delta_{ij}$  e usando (1.111) temos,

$$\begin{aligned} \sum_{ik} (B_{ij,k} - B_{ik,j}) &= \sum_{ik} (C_j \delta_{ik} - C_k \delta_{ij}) \\ \sum_i (B_{ij,i} - B_{ii,j}) &= \sum_i (C_j \delta_{ii} - C_i \delta_{ij}) \\ \sum_i B_{ij,i} &= nC_j - \sum_i C_i \delta_{ij} \\ \sum_i B_{ij,i} &= (n-1)C_j. \end{aligned}$$

□

A seguir, vamos obter relações entre os invariantes de Laguerre  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{C}$  e os invariantes Euclidianos de  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposição 9.** *Considere  $\{e_i\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , uma base ortonormal com relação a métrica  $dx \cdot dx$  para  $TM$ , consistindo de vetores principais unitários, isto é,  $e_i(\xi) = -k_i e_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , onde  $k_i$  é a curvatura principal correspondente a  $e_i$ . Seja  $E_i' = r_i e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  base ortonormal para  $d\xi \cdot d\xi$ . Além disso, os campos  $E_i = \rho^{-1} E_i'$ ,  $1 \leq i \leq n$ , formam uma base ortonormal na métrica de Laguerre  $g = \rho^2 d\xi \cdot d\xi$  com base dual  $\omega_i$ . Então, as seguintes igualdades se verificam*

$$B_{ij} = \rho^{-1}(r - r_i) \delta_{ij}, \quad (1.112)$$

$$C_i = -\rho^{-2} r_i \{e_i(r) - (r - r_i) e_i(\log \rho)\}.$$

*Demonstração.* Temos de (1.89) e (1.96) que

$$B_{ij} = \langle E_i(\eta), E_j(Y) \rangle, \quad C_i = \langle E_i(\eta), N \rangle. \quad (1.113)$$

Como  $E_i = \rho^{-1}E'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $Y = \rho y$ , usando (1.60), (1.67) e (1.68) temos

$$\begin{aligned}
B_{ij} &= \langle E_i(\eta), E_j(Y) \rangle \\
&= \rho^{-2} \langle E'_i(\eta), E'_j(\rho y) \rangle \\
&= \rho^{-2} \langle ((r - r_i)E'_i(y) + E'_i(r)y), (\rho E'_j(y) + E'_j(\rho)y) \rangle \\
&= \rho^{-2} [ (r - r_i)\rho \langle E'_i(y), E'_j(y) \rangle + (r - r_i)E'_j(\rho) \langle E'_i(y), y \rangle + \\
&\quad + E'_i(r)\rho \langle y, E'_j(y) \rangle + E'_j(\rho)E'_i(r) \langle y, y \rangle ] \\
&= \rho^{-1} (r - r_i) \langle E'_i(y), E'_j(y) \rangle \\
&= \rho^{-1} (r - r_i) e_i(x) e_j(x) \\
&= \rho^{-1} (r - r_i) \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

No que segue, vamos determinar a expressão de  $C_i$ . Usando que  $E_i = \rho^{-1}E'_i$ ,  $E'_i = r_i e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $Y = \rho y$  e (1.68) temos

$$\begin{aligned}
E_i(\eta) &= \rho^{-1}E'_i(\eta) = \rho^{-1} ((r - r_i)E'_i(y) + E'_i(r)y) \\
&= \rho^{-1} (r - r_i) r_i e_i(y) + \rho^{-1} r_i e_i(r) y \\
&= \rho^{-1} (r - r_i) r_i e_i \left( \frac{Y}{\rho} \right) + \rho^{-1} r_i e_i(r) \frac{Y}{\rho} \\
&= \rho^{-1} (r - r_i) r_i \left( \frac{e_i(Y)\rho - Y e_i(\rho)}{\rho^2} \right) + \rho^{-2} r_i e_i(r) Y \\
&= \rho^{-1} (r - r_i) r_i (e_i(Y)\rho^{-1} - \rho^{-1} Y \rho^{-1} e_i(\rho)) + \rho^{-2} r_i e_i(r) Y \\
&= \rho^{-2} (r - r_i) r_i e_i(Y) - \rho^{-2} (r - r_i) r_i e_i(\log \rho) Y + \rho^{-2} r_i e_i(r) Y \\
&= \rho^{-1} (r - r_i) E_i(Y) - \rho^{-2} (r - r_i) r_i e_i(\log \rho) Y + \rho^{-2} r_i e_i(r) Y. \quad (1.114)
\end{aligned}$$

Segue das relações de ortogonalidade (1.89) e (1.114) que

$$\begin{aligned}
C_i &= \langle E_i(\eta), N \rangle \\
&= \langle \rho^{-1} (r - r_i) E_i(Y) - \rho^{-2} (r - r_i) r_i e_i(\log \rho) Y + \rho^{-2} r_i e_i(r) Y, N \rangle \\
&= \rho^{-1} (r - r_i) \langle E_i(Y), N \rangle - \rho^{-2} (r - r_i) r_i e_i(\log \rho) \langle Y, N \rangle + \rho^{-2} r_i e_i(r) \langle Y, N \rangle \\
&= -\rho^{-2} r_i (e_i(r) - (r - r_i) e_i(\log \rho)).
\end{aligned}$$

□

Para finalizarmos esta seção vamos definir curvatura de Laguerre e observar que esse conceito é também um invariante de Laguerre.

Denotamos os autovalores do operador da segunda forma fundamental de Laguerre  $\mathbb{B}$  por curvaturas principais de Laguerre de  $x$ . Então, por (1.112), as curvaturas principais de Laguerre são

$$b_i = \rho^{-1}(r - r_i). \quad (1.115)$$

**Definição 12.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos e com curvaturas principais não nulas. Para quaisquer três curvaturas principais  $k_i$ ,  $k_j$  e  $k_l$ , distintas, definimos*

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{(k_i - k_j)k_l}{(k_l - k_j)k_i} \quad (1.116)$$

como sendo a curvatura de Laguerre de  $x$ .

Para cada curvatura principal que não se anula, seja  $r_i = \frac{1}{k_i}$  o raio de curvatura de  $x$ . Desta forma, podemos escrever as curvaturas de Laguerre de  $x$  como:

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{r_i - r_j}{r_l - r_j}. \quad (1.117)$$

Consequentemente, substituindo (1.115) em (1.117) temos,

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{r_i - r_j}{r_l - r_j} = \frac{b_i - b_j}{b_l - b_j}. \quad (1.118)$$

Portanto, temos que as curvaturas de Laguerre  $\mathcal{L}^{ijl}$  são invariantes de Laguerre.

Apresentamos, no Capítulo 3, exemplo de uma família de hipersuperfícies de Dupin que possuem curvatura de Laguerre constante.



# Capítulo 2

## Hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$

Neste capítulo introduzimos os conceitos de tensores isoparamétricos, hipersuperfícies de Dupin, hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre e hipersuperfícies com segunda forma fundamental paralela. Apresentamos exemplos de hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre. Mostramos os resultados apresentados em Li e Wang [12], que caracterizam as hipersuperfícies de Dupin com curvaturas de Laguerre constante em termos dos invariantes de Laguerre. Concluimos este capítulo mostrando que uma hipersuperfície de Dupin com curvatura de Laguerre constante é Laguerre equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre plana.

### 2.1 Tensores isoparamétricos

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre tensores isoparamétricos, considerando uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ , baseados no artigo de Li e Wang [12].

**Definição 13.** Dizemos que um tensor simétrico  $T = \sum_{ij} T_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$ , isto é,  $T_{ij} = T_{ji}$  é um tensor de Codazzi, se

$$T_{ij,k} = T_{ik,j}. \quad (2.1)$$

**Definição 14.** Seja  $T = \sum_{ij} T_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  um tensor de Codazzi em uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ . Dizemos que  $T$  é um tensor isoparamétrico se seus autovalores são todos constantes.

Seja  $T = \sum_{ij} T_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  um tensor simétrico em uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ . Então, podemos escolher uma base ortonormal local formada por autovetores  $\{E_1, \dots, E_n\}$  tal que

$$(T_{ij}) = \text{diag}(t_1, \dots, t_1, t_2, \dots, t_2, \dots, t_n, \dots, t_n). \quad (2.2)$$

A derivada covariante de  $T$  é definida por

$$\sum_k T_{ij,k} \omega_k = dT_{ij} + \sum_k T_{kj} \omega_{ki} + \sum_k T_{ik} \omega_{kj}. \quad (2.3)$$

Então, segue de (2.2) e (2.3) que

$$\begin{aligned} \sum_k T_{ij,k} \omega_k &= dT_{ij} + \sum_k T_{kj} \omega_{ki} + \sum_k T_{ik} \omega_{kj} \\ \sum_k T_{ij,k} \omega_k &= T_{jj} \omega_{ji} + T_{ii} \omega_{ij} \\ \sum_k T_{ij,k} \omega_k &= -t_j \omega_{ij} + t_i \omega_{ij} \\ \sum_k T_{ij,k} \omega_k &= (t_i - t_j) \omega_{ij}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\omega_{ij} = \frac{\sum_k T_{ij,k} \omega_k}{(t_i - t_j)}, \text{ quando } \{i\} \neq \{j\}. \quad (2.4)$$

Se  $T$  for tensor isoparamétrico temos que

$$T_{ij,k} = 0, \text{ quando } \{i\} = \{j\}, \text{ ou } \{j\} = \{k\}, \text{ ou } \{i\} = \{k\}, \quad (2.5)$$

onde  $\{i\} := \{m \in \{1, 2, \dots, n\} / t_m = t_i\}$ . Além disso, a seguinte relação é satisfeita

$$R_{ijij} = \sum_{k \notin \{i\}, \{j\}} \frac{2T_{ij,k}^2}{(t_k - t_i)(t_k - t_j)}. \quad (2.6)$$

Note que, se  $T$  é paralelo segue da equação (2.6), que

$$R_{ijij} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2.7)$$

**Proposição 10.** *Seja  $T = \sum_{ij} T_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  um tensor isoparamétrico em uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ . Se  $T$  é tensor isoparamétrico com apenas dois autovalores distintos então,  $T$  é paralelo.*

*Demonstração.* Considere  $T = \sum_{ij} T_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  um tensor isoparamétrico com apenas dois autovalores distintos  $t_1$  e  $t_2$  com multiplicidades  $s$  e  $n - s$ , respectivamente. Fixemos a seguinte convenção de índices:

$$1 \leq i, j \leq s, s+1 \leq \alpha, \beta \leq n, 1 \leq a, b, c \leq n.$$

Seja  $\{E_1, \dots, E_n\}$  uma base ortonormal para  $TM$  com relação à métrica  $g$  formada por autovetores com base dual  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ . Então,  $T$  é dado por

$$T_{ij} = t_1 \delta_{ij}, T_{\alpha\beta} = t_2 \delta_{\alpha\beta}, t_{\alpha i} = 0. \quad (2.8)$$

Como  $T$  é isoparamétrico temos que  $t_1$  e  $t_2$  são constantes. Vamos mostrar que  $T_{ab,c} = 0$  para  $1 \leq a, b, c \leq n$ . De fato, a derivada covariante de  $T$  é definida por,

$$dT_{ab} + \sum_{c=1}^n T_{ac} \omega_{cb} + \sum_{c=1}^n T_{cb} \omega_{ca} = \sum_{c=1}^n T_{ab,c} \omega_c.$$

e de (2.8), segue que

$$\begin{aligned} dT_{ij} + \sum_{a=1}^n T_{ia} \omega_{aj} + \sum_{a=1}^n T_{aj} \omega_{ai} &= \sum_{a=1}^n T_{ij,a} \omega_a \\ T_{ii} \omega_{ij} + T_{jj} \omega_{ji} &= \sum_{a=1}^n T_{ij,a} \omega_a \\ t_1 \omega_{ij} + t_1 \omega_{ji} &= \sum_{a=1}^n T_{ij,a} \omega_a. \end{aligned}$$

Então, obtemos

$$T_{ij,a} = 0, 1 \leq i, j \leq s, 1 \leq a \leq n. \quad (2.9)$$

Analogamente, temos também

$$\begin{aligned}dT_{\alpha\beta} + \sum_{a=1}^n T_{\alpha a} \omega_{a\beta} + \sum_{a=1}^n T_{a\beta} \omega_{a\alpha} &= \sum_{a=1}^n T_{\alpha\beta,a} \omega_a \\T_{\alpha\alpha} \omega_{\alpha\beta} + T_{\beta\beta} \omega_{\beta\alpha} &= \sum_{a=1}^n T_{\alpha\beta,a} \omega_a \\t_2 \omega_{\alpha\beta} + t_2 \omega_{\beta\alpha} &= \sum_{a=1}^n T_{\alpha,a} \omega_a.\end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$T_{\alpha\beta,a} = 0, \quad s+1 \leq \alpha, \beta \leq n, \quad 1 \leq a \leq n. \quad (2.10)$$

Portanto, de (2.9) e (2.10) concluímos,

$$T_{ab,c} = 0, \quad 1 \leq a, b, c \leq n,$$

isto é,  $T$  é paralelo. □

**Teorema 7.** ([12]) *Seja  $T = \sum_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  um tensor isoparamétrico em uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ . Se  $M^n$  possui curvatura seccional não-negativa (ou não positiva), então  $T$  é paralelo.*

**Teorema 8.** ([12]) *Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M^n$  com um  $T = \sum_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  um tensor isoparamétrico, então temos a seguinte identidade de Cartan generalizada*

$$\sum_{j \notin \{i\}} \frac{R_{ijij}}{t_i - t_j} = 0, \quad (2.11)$$

onde  $R_{ijij}$  é a curvatura seccional do subespaço bidimensional  $\sigma \subset T_p M$ , gerado por  $e_i$  e  $e_j$ .

## 2.2 Hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre

Nesta seção, consideramos hipersuperfícies  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  e introduzimos os conceitos de hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre, hipersuperfícies de Dupin e hipersuperfícies com segunda forma fundamental paralela. Apresentamos a caracterização das hipersuperfícies de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvaturas de Laguerre constante em termos dos invariantes de Laguerre obtida por Li e Wang [12].

**Definição 15.** Uma hipersuperfície  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é Dupin se suas curvaturas principais forem constantes ao longo de suas correspondentes linhas de curvatura, isto é,  $e_i(k_i) = 0$ , onde  $k_i$  é curvatura principal de  $x$ . Uma hipersuperfície de Dupin  $x$  é dita própria se o número de curvaturas principais distintas for constante.

Observamos que propriedades de hipersuperfícies de Dupin também são consideradas no Capítulo 3.

**Definição 16.** Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Considere a métrica de Laguerre  $g = \langle dY, dY \rangle$  e a segunda forma fundamental  $\mathbb{B} = \sum_{ij} B_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$ . Dizemos que  $x$  possui segunda forma fundamental de Laguerre paralela se  $\nabla \mathbb{B} = 0$ , onde  $\nabla$  é a derivada covariante em relação à métrica  $g$ .

**Definição 17.** Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Dizemos que  $x$  é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre se a forma de Laguerre  $\mathbb{C}$  é nula e as curvaturas principais de Laguerre, dadas em (1.115), forem todas constantes.

**Definição 18.** Uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é dita hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre plana se

$$R_{ijkl} = 0, \text{ para todos } 1 \leq i, j, k, l \leq n,$$

onde  $R_{ijkl}$  é o tensor de curvatura de  $g$ .

A fim de apresentar uma caracterização das hipersuperfícies de Dupin com curvatura de Laguerre constante, mostraremos o seguinte lema.

**Lema 9.** Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas. Então as curvaturas de Laguerre  $\mathcal{L}^{ijl}$  são constantes se, e somente se, as curvaturas principais de Laguerre  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dadas em (1.115) forem constantes.

*Demonstração.* Suponha que  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  seja uma hipersuperfície orientável com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas. Para quaisquer três curvaturas principais distintas  $k_i$ ,  $k_j$  e  $k_l$ , segue da relação (1.118) que a curvatura de Laguerre de  $x$  é dada por

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{b_i - b_j}{b_l - b_j}. \quad (2.12)$$

Temos também

$$\mathcal{L}^{ilj} = \frac{b_i - b_l}{b_j - b_l}. \quad (2.13)$$

Suponha que as curvaturas de Laguerre são constantes. Então, para qualquer vetor tangente  $X \in TM$  temos,

$$0 = X(\mathcal{L}^{ijl}) = \frac{1}{(b_l - b_j)^2} ((X(b_i) - X(b_j))(b_l - b_j) - (X(b_l) - X(b_j))(b_i - b_j)),$$

então,

$$\frac{X(b_i) - X(b_j)}{b_i - b_j} = \frac{X(b_j) - X(b_l)}{b_j - b_l}. \quad (2.14)$$

Analogamente para (2.13) obtemos,

$$\frac{X(b_j) - X(b_l)}{b_j - b_l} = \frac{X(b_i) - X(b_l)}{b_i - b_l}. \quad (2.15)$$

Igualando (2.14) e (2.15), temos que

$$\frac{X(b_i) - X(b_j)}{b_i - b_j} = \frac{X(b_j) - X(b_l)}{b_j - b_l} = \frac{X(b_i) - X(b_l)}{b_i - b_l}. \quad (2.16)$$

Considerando, sem perda de generalidade, a primeira igualdade de (2.16) e isolando  $X(b_i)$  temos,

$$\begin{aligned} \frac{X(b_i) - X(b_j)}{b_i - b_j} &= \frac{X(b_j) - X(b_l)}{b_j - b_l} \\ X(b_i)(b_j - b_l) &= b_i(X(b_j) - X(b_l)) + X(b_l)b_j - X(b_j)b_l \\ X(b_i) &= b_i \left( \frac{X(b_j) - X(b_l)}{(b_j - b_l)} \right) + \frac{X(b_l)b_j - X(b_j)b_l}{(b_j - b_l)}. \end{aligned}$$

Então,

$$X(b_i) = b_i \mu_i + d_i,$$

onde

$$\mu_i = \left( \frac{X(b_j) - X(b_l)}{(b_j - b_l)} \right) \text{ e } d_i = \frac{X(b_l)b_j - X(b_j)b_l}{(b_j - b_l)}.$$

Analogamente isolando  $X(b_j)$  e  $X(b_l)$  na primeira igualdade de (2.16) obtemos,

$$X(b_j) = b_j\mu_j + d_j, \quad X(b_l) = b_l\mu_l + d_l,$$

onde

$$\mu_j = \left( \frac{X(b_l) - X(b_i)}{b_l - b_i} \right) \text{ e } d_j = \frac{X(b_i)b_l - X(b_l)b_i}{b_l - b_i},$$

$$\mu_l = \left( \frac{X(b_i) - X(b_j)}{b_i - b_j} \right) \text{ e } d_l = \frac{X(b_j)b_i - X(b_i)b_j}{b_i - b_j}.$$

Note que, por (2.16)  $\mu_i = \mu_j = \mu_l = \mu$ . Vamos mostrar que  $d_i = d_j = d_l$ .

Primeiro, vamos verificar que  $d_i - d_j = 0$ . De fato,

$$d_i - d_j = \frac{X(b_l)b_j - X(b_j)b_l}{b_j - b_l} - \frac{X(b_i)b_l - X(b_l)b_i}{b_l - b_i}. \quad (2.17)$$

Por (2.16), obtemos

$$\frac{X(b_i) - X(b_j)}{b_i - b_j} = \frac{X(b_i) - X(b_l)}{b_i - b_l} \Rightarrow X(b_i) - X(b_j) = -(X(b_i) - X(b_l)) \left( \frac{b_i - b_j}{b_l - b_i} \right), \quad (2.18)$$

$$\frac{X(b_i) - X(b_l)}{b_i - b_l} = \frac{X(b_j) - X(b_l)}{b_j - b_l} \Rightarrow X(b_j) - X(b_l) = -(X(b_i) - X(b_l)) \left( \frac{b_j - b_l}{b_l - b_i} \right). \quad (2.19)$$

Substituindo (2.18) e (2.19) em (2.17) segue que,  $d_i - d_j = 0$ . Analogamente, obtemos que  $d_j - d_l = 0$ .

Então,  $d_i = d_j = d_l = d$ . Logo, existe  $\mu$  e  $d$  tal que

$$X(b_j) = b_j\mu + d, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.20)$$

Por (1.107), (1.112), (1.115) e (2.20) temos,

$$\sum_i B_{ii} = 0, \quad \sum_{ij} B_{ij}^2 = 0 \text{ e } B_{ij} = b_i\delta_{ij}.$$

Então,

$$\begin{aligned} B_{11} + B_{22} + \cdots + B_{nn} &= 0 \\ b_1 + b_2 + \cdots + b_n &= 0 \\ X(b_1) + X(b_2) + \cdots + X(b_n) &= 0 \\ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\mu + nd &= 0. \end{aligned}$$

Como  $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0$ , temos  $d = 0$ . Logo, (2.20) se reduz a

$$X(b_j) = b_j\mu, \text{ para } j = 1, \dots, n. \quad (2.21)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} B_{11}^2 + B_{22}^2 + \cdots + B_{nn}^2 &= 0 \\ b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 &= 0 \\ b_1X(b_1) + b_2X(b_2) + \cdots + b_nX(b_n) &= 0 \\ (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)\mu &= 0. \end{aligned}$$

Donde se conclui que  $\mu = 0$ , logo segue de (2.21) que

$$X(b_j) = 0, \text{ para } j = 1, \dots, n, \quad (2.22)$$

Portanto,  $b_j$  são constantes para todo  $j = 1, \dots, n$ . Reciprocamente, se as curvaturas principais de Laguerre são constantes, segue de (2.12) que as curvaturas de Laguerre são constantes.  $\square$

**Proposição 11.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas. Então  $x$  é hipersuperfície de Dupin com curvatura de Laguerre constante se, e somente se,  $x$  é hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre.*

*Demonstração.* Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas. Suponha que  $x$  é hipersuperfície de Dupin com curvatura de Laguerre constante. Utilizando o Lema 9, precisamos apenas mostrar que a forma de Laguerre  $\mathbb{C}$  é nula, ou seja,  $C_i = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Como  $b_i$  são constantes para todo  $i = 1, \dots, n$ , derivando a expressão em (1.115) com relação a  $i$  temos,

$$\begin{aligned} 0 = e_i(b_i) &= e_i(\rho^{-1})(r - r_i) + \rho^{-1}e_i(r) - \rho^{-1}e_i(r_i) \\ &= -\rho^{-1}(e_i(\log \rho)(r - r_i) - e_i(r) + e_i(r_i)). \end{aligned} \quad (2.23)$$



Note que  $\rho \neq 0$  então, por (2.23)

$$(r - r_i)e_i(\log \rho) - e_i(r) + e_i(r_i) = 0 \Rightarrow e_i(r_i) = e_i(r) - (r - r_i)e_i(\log \rho). \quad (2.24)$$

Como  $x$  é hipersuperfície de Dupin temos,

$$e_i(k_i) = 0 \Rightarrow e_i(r_i) = 0. \quad (2.25)$$

Logo, por (1.112), (2.24) e (2.25) obtemos,

$$C_i = -\rho^{-2}r_i\{e_i(r) - (r - r_i)e_i(\log \rho)\} \Rightarrow C_i = 0, \forall i. \quad (2.26)$$

Portanto,  $x$  é hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre.

Reciprocamente, suponha que a forma de Laguerre  $\mathbb{C}$  é nula e as curvaturas principais de Laguerre são constantes. Pelo Lema 9, basta mostrar que  $e_i(k_i) = 0$ . Com efeito, segue de (1.112)

$$0 = C_i = -\rho^{-2}r_i\{e_i(r) - (r - r_i)e_i(\log \rho)\} \Rightarrow e_i(r) - (r - r_i)e_i(\log \rho) = 0. \quad (2.27)$$

Por outro lado, como  $b_i$  são constantes para todo  $i = 1, \dots, n$  a equação (2.24) é satisfeita e usando (2.27) temos,

$$(r - r_i)e_i(\log \rho) - e_i(r) + e_i(r_i) = 0 \Rightarrow e_i(r_i) = 0.$$

Portanto,  $e_i(k_i) = 0$ , ou seja,  $x$  é hipersuperfície de Dupin com curvaturas de Laguerre constantes.  $\square$

Um resultado semelhante a Proposição 11, foi obtido por Cezana e Tenenblat [6]. Mais precisamente eles mostraram o seguinte teorema.

**Teorema.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão própria, sem pontos umbílicos, com curvaturas principais não nulas. Então,  $x$  é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre se, e somente se, é uma cíclide de Dupin ou uma hipersuperfície de Dupin com curvatura de Laguerre constante.*

Apesar de semelhantes, os resultados foram obtidos de maneiras independentes e usam técnicas distintas.

## 2.3 Classificação das hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre

Nesta seção, apresentamos exemplos de hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre. Em seguida, mostramos alguns resultados preliminares utilizando tensores isoparamétricos, necessários na demonstração do teorema principal deste capítulo, dado em [12].

No que segue, vamos apresentar exemplos de hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre, a saber, a cíclide de Dupin e  $x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada tipo-espaço em  $\mathbb{R}_0^{n+1}$ . Estes exemplos foram utilizados primeiramente por Li, Li e Wang em [13], onde classificaram todas as hipersuperfícies orientadas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com segunda forma fundamental paralela.

**Exemplo 10.** Para qualquer inteiro  $m$  com  $1 \leq m \leq n - 1$  denotamos por

$$\mathbb{H}^{n-m} = \{(v, w) \in \mathbb{R}^{n-m+1} / v \cdot v - w^2 = -1, w > 0\}$$

o espaço hiperbólico imerso no espaço de Minkowski  $\mathbb{R}_1^{n-m+1}$ . Definimos  $x : \mathbb{S}^m \times \mathbb{H}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  por

$$x(u, v, w) = \left( \frac{u}{w}(1+w), \frac{v}{w} \right), \quad u \in \mathbb{S}^m, (v, w) \in \mathbb{H}^{n-m}. \quad (2.28)$$

A hipersuperfície  $x$  possui duas curvaturas principais distintas dadas por  $k_1 = -\frac{1}{w+1}$  e  $k_2 = -1$  com multiplicidades  $m$  e  $n - m$ , respectivamente (ver [13]). Assim temos,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{m(n-m)(r_1 - r_2)^2}{n} = c_1, \\ b_i &= \sqrt{\frac{(n-m)}{nm}} = c_2, \quad 1 \leq i, j \leq m, \\ b_i &= -\sqrt{\frac{m}{n(n-m)}} = c_3, \quad m+1 \leq i, j \leq n, \end{aligned}$$

onde  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  são constantes. Então os invariantes de  $x$  são dados por

$$\begin{aligned} C_i &= -\rho^{-2} r_i \{e_i(r) - e_i(\log \rho)(r - r_i)\} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \\ L_{ij} &= \rho^{-2} \{\text{Hess}_{ij}(\log \rho) - r_i r_j e_i(\log \rho) e_j(\log \rho) + \frac{1}{2} |\nabla \log \rho|^2 \delta_{ij}\} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \\ B_{ij} &= b_i \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \end{aligned}$$

Logo,  $x$  é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre com duas curvaturas principais distintas e com segunda forma fundamental de Laguerre paralela.

As hipersuperfícies de Dupin no espaço Euclidiano com duas curvaturas principais distintas são conhecidas como cíclides de Dupin.

Antes do próximo exemplo, vamos apresentar algumas informações sobre imersões de Laguerre  $\tau : U\mathbb{R}_0^{n+1} \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ , para mais detalhes referimos [11]. Seja  $\mathbb{R}_1^{n+2}$  o espaço de Minkowski com o produto interno

$$\langle X, Y \rangle = X_1 Y_1 + \cdots + X_{n+1} Y_{n+1} - X_{n+2} Y_{n+2}. \quad (2.29)$$

Seja  $\nu = (1, \vec{0}, 1)$  o vetor tipo-luz em  $\mathbb{R}_1^{n+2}$  com  $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ . Considere  $\mathbb{R}_0^{n+1}$  o hiperplano degenerado em  $\mathbb{R}_1^{n+2}$  definido por

$$\mathbb{R}_0^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+2} / \langle x, \nu \rangle = 0\}.$$

Definimos o fibrado  $U\mathbb{R}_0^{n+1}$  por

$$U\mathbb{R}_0^{n+1} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}_1^{n+2} \times \mathbb{R}_1^{n+2} / \langle x, \nu \rangle = 0, \langle \xi, \xi \rangle = 0, \langle \xi, \nu \rangle = 1\}. \quad (2.30)$$

e a imersão de Laguerre  $\tau : U\mathbb{R}_0^{n+1} \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$  dada por

$$\tau(x, \xi) = (x', \xi') \in U\mathbb{R}^{n+1},$$

onde  $x = (x_1, x_0, x_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,  $\xi = (\xi_1 + 1, \xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  e

$$x' = \left( -\frac{x_1}{\xi_1}, x_0 - \frac{x_1}{\xi_1} \xi_0 \right), \quad \xi' = \left( 1 + \frac{1}{\xi_1}, \frac{\xi_0}{\xi_1} \right). \quad (2.31)$$

Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}_0^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada tipo-espaço no espaço degenerado  $\mathbb{R}_0^{n+1}$  e  $\xi$  o único vetor em  $\mathbb{R}_1^{n+2}$  satisfazendo

$$\langle \xi, dx \rangle = 0, \quad \langle \xi, \xi \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \xi, \nu \rangle = 1,$$

onde  $\nu = (1, \vec{0}, 1) \in \mathbb{R}_1^{n+2}$  é o vetor tipo-luz com  $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal para  $TM$  com relação a  $\langle dx, dx \rangle$  tal que

$$e_i(\xi) = -k_i e_i(x), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.32)$$

Supondo que  $k_i \neq 0$ , definimos  $r_i = \frac{1}{k_i}$  o raio de curvatura de  $x$  e  $r = \frac{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)}{n}$  como o raio de curvatura média de  $x$ . Podemos relacionar a imersão  $x$  com a correspondente hipersuperfície  $x' : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  como segue.

De  $\tau(x, \xi) = (x', \xi') \in U\mathbb{R}^{n+1}$ , obtemos uma hipersuperfície  $x' : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , onde  $x'$  e  $\xi'$  são dados por (2.31). Queremos agora determinar a relação entre as curvaturas principais das hipersuperfícies  $x$  e  $x'$ . Por (2.31) e (2.32) obtemos que,

$$\begin{aligned} -(r_i \xi_1 + x_1) e_i(\xi') &= -(r_i \xi_1 + x_1) \left( \frac{-e_i(\xi_1)}{\xi_1^2}, \frac{e_i(\xi_0)}{\xi_1} - \frac{e_i(\xi_1) \xi_0}{\xi_1^2} \right) \\ &= \left( \frac{r_i e_i(\xi_1)}{\xi_1} + \frac{x_1 e_i(\xi_1)}{\xi_1^2}, -r_i e_i(\xi_0) + \frac{r_i \xi_0 e_i(\xi_1)}{\xi_1} - \frac{x_1 e_i(\xi_0)}{\xi_1} + \frac{x_1 \xi_0 e_i(\xi_1)}{\xi_1^2} \right) \\ &= \left( \frac{-e_i(x_1)}{\xi_1} + \frac{x_1 e_i(\xi_1)}{\xi_1^2}, e_i(x_0) - \frac{\xi_0 e_i(x_1)}{\xi_1} + \frac{x_1 \xi_0 e_i(\xi_1)}{\xi_1^2} - \frac{x_1 e_i(\xi_0)}{\xi_1} \right) \\ &= e_i(x'), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Segue que  $e_i$  é um vetor principal para a hipersuperfície de Laguerre  $(x', \xi') : M^n \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$  correspondente ao raio de curvatura

$$r'_i = r_i \xi + x_1. \quad (2.33)$$

A seguir apresentamos o exemplo de hipersuperfícies isoparamétrica de Laguerre plana dado por Li e Wang [12].

**Exemplo 11.** Para quaisquer inteiros  $m_1, m_2, \dots, m_s$ , com  $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$  ( $s \geq 2$ ) e constantes distintas não nulas  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , definimos  $x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada tipo-espaço em  $\mathbb{R}_0^{n+1}$  dada por

$$x = \left( \frac{\lambda_1 |u_1|^2 + \lambda_2 |u_2|^2 + \dots + \lambda_s |u_s|^2}{2}, u_1, u_2, \dots, u_s, \frac{\lambda_1 |u_1|^2 + \lambda_2 |u_2|^2 + \dots + \lambda_s |u_s|^2}{2} \right),$$

onde  $(u_1, u_2, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_s} = \mathbb{R}^n$ ,  $|u_i|^2 = u_i \cdot u_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  e

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\lambda_1 |u_1|^2 + \lambda_2 |u_2|^2 + \dots + \lambda_s |u_s|^2}{2}, \\ x_0 &= u_1, u_2, \dots, u_s. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Neste caso, temos que o campo normal unitário  $\xi$  de  $x$  é dado por,

$$\xi = \left( \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \dots - |\lambda_s u_s|^2 + 1}{2}, -\lambda_1 u_1, \dots, -\lambda_s u_s, \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \dots - |\lambda_s u_s|^2 - 1}{2} \right),$$

onde

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \dots - |\lambda_s u_s|^2 - 1}{2}, \\ \xi_0 &= -\lambda_1 u_1, \dots, -\lambda_s u_s.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Temos,

$$dx = (\lambda_1 u_1 du_1 + \lambda_2 u_2 du_2 + \dots + \lambda_s u_s du_s, du_1, du_2, \dots, du_s, \lambda_1 u_1 du_1 + \lambda_2 u_2 du_2 + \dots + \lambda_s u_s du_s).$$

e

$$d\xi = (-(\lambda_1)^2 u_1 du_1 - \dots - (\lambda_s)^2 u_s du_s, -\lambda_1 du_1, -\dots, -\lambda_s du_s, -(\lambda_1)^2 u_1 du_1 - \dots - (\lambda_s)^2 u_s du_s).$$

Note que  $d\xi$  satisfaz as condições dadas em (2.30), onde o produto interno é dado por (2.29):

$$\begin{aligned}\langle \xi, dx \rangle &= (\lambda_1 u_1 du_1 + \dots + \lambda_s u_s du_s) \left( \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \dots - |\lambda_s u_s|^2 + 1}{2} \right) - \lambda_1 u_1 du_1 \\ &\quad - \dots - \lambda_s u_s du_s - (\lambda_1 u_1 du_1 + \dots + \lambda_s u_s du_s) \left( \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \dots - |\lambda_s u_s|^2 - 1}{2} \right) \\ &= (\lambda_1 u_1 du_1 + \dots + \lambda_s u_s du_s) \left( \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \dots - |\lambda_s u_s|^2}{2} \right) + \frac{(\lambda_1 u_1 du_1 + \dots + \lambda_s u_s du_s)}{2} \\ &\quad - \lambda_1 u_1 du_1 - \dots - \lambda_s u_s du_s - (\lambda_1 u_1 du_1 + \dots + \lambda_s u_s du_s) \left( \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \dots - |\lambda_s u_s|^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{(\lambda_1 u_1 du_1 + \dots + \lambda_s u_s du_s)}{2} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \xi, \xi \rangle &= \left( \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \dots - |\lambda_s u_s|^2 + 1}{2} \right) \left( \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \dots - |\lambda_s u_s|^2 + 1}{2} \right) + (\lambda_1 u_1)^2 \\ &\quad + \dots + (\lambda_s u_s)^2 - \left( \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \dots - |\lambda_s u_s|^2 - 1}{2} \right) \left( \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \dots - |\lambda_s u_s|^2 - 1}{2} \right) \\ &= \left( \frac{|\lambda_1 u_1|^2 + \dots + |\lambda_s u_s|^2}{4} \right)^2 - \frac{(|\lambda_1 u_1|^2 + \dots + |\lambda_s u_s|^2)}{2} + \frac{1}{4} \\ &\quad + |\lambda_1 u_1|^2 + \dots + |\lambda_s u_s|^2 - \left( \frac{|\lambda_1 u_1|^2 + \dots + |\lambda_s u_s|^2}{4} \right)^2 - \frac{(|\lambda_1 u_1|^2 + \dots + |\lambda_s u_s|^2)}{2} - \frac{1}{4} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \xi, \nu \rangle &= \left( \frac{-|\lambda_1 u_1|^2 - \cdots - |\lambda_s u_s|^2 + 1}{2} \right) + \left( \frac{|\lambda_1 u_1|^2 + \cdots + |\lambda_s u_s|^2 + 1}{2} \right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

A primeira e segunda formas fundamentais de  $x$  são, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned}I &= dx \cdot dx = (\lambda_1 u_1 du_1 + \cdots + \lambda_s u_s du_s)^2 + du_1 du_1 + \cdots + du_s du_s - (\lambda_1 u_1 du_1 + \cdots + \lambda_s u_s du_s)^2 \\ &= du_1 du_1 + \cdots + du_s du_s,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}II &= -dx \cdot d\xi = -(\lambda_1 u_1 du_1 + \cdots + \lambda_s u_s du_s) (-(\lambda_1)^2 u_1 du_1 - \cdots - (\lambda_s)^2 u_s du_s) \\ &\quad + \lambda_1 u_1 du_1 + \cdots + \lambda_s u_s du_s + (\lambda_1 u_1 du_1 + \cdots + \lambda_s u_s du_s) (-(\lambda_1)^2 u_1 du_1 - \cdots - (\lambda_s)^2 u_s du_s) \\ &= \lambda_1 u_1 du_1 + \cdots + \lambda_s u_s du_s.\end{aligned}$$

Note que  $x$  está parametrizada por linhas de curvatura e suas curvaturas principais são  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  com multiplicidade  $m_1, m_2, \dots, m_s$ . Assim,

$$r_i = \frac{1}{\lambda_i}, \quad r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots + m_s r_s}{n}.$$

Então, obtemos que os invariantes de  $x$  são dados por

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \sum_i m_i (r_i - r)^2 = c_1, \\ C_i &= -\rho^{-2} r_i \{e_i(r) - e_i(\log \rho)(r - r_i)\} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \\ L_{ij} &= \rho^{-2} \{\text{Hess}_{ij}(\log \rho) - r_i r_j e_i(\log \rho) e_j(\log \rho) + \frac{1}{2} |\nabla \log \rho|^2 \delta_{ij}\} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \\ B_{ij} &= b_i \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,\end{aligned}$$

onde

$$b_i = \frac{r - r_i}{\sqrt{\sum_j m_j (r_j - r)^2}} = c_2, \quad (2.36)$$

com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  são constantes. Logo,  $x$  é hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. Além disso, por (1.106) temos,

$$R_{ijkl} = L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik} = 0, \quad 1 \leq i, j, k, l \leq n,$$

ou seja,  $x$  é hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre plana.

Considerando a imersão de Laguerre  $\tau : U\mathbb{R}_0^{n+1} \rightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ . Por (2.31), (2.34) e (2.35) obtemos a hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre  $x' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , dada por

$$x' = (0, u_1, \dots, u_s) + \frac{\sum_{i=1}^s \lambda_i |u_i|^2}{\sum_{i=1}^s \lambda_i^2 |u_i|^2 + 1} (1, -\lambda_1 u_1, \dots, -\lambda_s u_s), \quad (2.37)$$

e sua normal unitária  $\xi' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$

$$\xi' = \frac{1}{\sum_{i=1}^s \lambda_i^2 |u_i|^2 + 1} \left( \sum_{i=1}^s \lambda_i^2 |u_i|^2 - 1, 2\lambda_1 u_1, \dots, 2\lambda_s u_s \right).$$

Além disso, segue de (2.33) que as curvaturas principais de  $x'$  são dadas por

$$\lambda'_i = \frac{2\lambda_i}{-\sum_j (\lambda_j u_j)^2 + \lambda_i \sum_j \lambda_j (u_j)^2 - 1}, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Em [13], os autores Li, Li e Wang obtiveram um teorema de classificação das hipersuperfícies com segunda forma fundamental paralela em termos das hipersuperfícies dadas no Exemplo 10 e no Exemplo 11. Mais precisamente, mostraram o seguinte teorema:

**Teorema 12.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos com curvaturas principais que não se anulam. Se sua segunda forma fundamental de Laguerre  $\mathbb{B}$  é paralela então  $x$  é Laguerre equivalente a um subconjunto de umas das seguintes hipersuperfícies:*

1. A cíclide de Dupin  $x : \mathbb{S}^k \times \mathbb{H}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada por (2.28);
2. A hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre  $x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada por (2.37).

No próximo exemplo, apresentamos a família de hipersuperfícies de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$  encontradas por Corro, Ferreira e Tenenblat [8] aplicando transformações de Ribaucour a um hiperplano. Retornamos a mencionar este exemplo no Capítulo 3.

**Exemplo 13.** Aplicando transformações de Ribaucour ao hiperplano, Corro, Ferreira e Tenenblat em [8], obtiveram uma família de hipersuperfícies de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$  dada por

$$x(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, 0) - \frac{2\sum_{j=1}^n f_j}{\sum_{j=1}^n (f'_j)^2 + b^2} (f'_1, \dots, f'_n, -b) \quad (2.38)$$

onde  $(u_1, \dots, u_n) \in U\mathbb{R}^n$  e

$$f_j = b_{j2}u_j^2 + b_{j1}u_j + b_{j0}, \text{ para } b \neq 0, b_{j2}, b_{j1}, b_{j0} \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leq j \leq n, \quad (2.39)$$

e  $b_{j2} \neq 0$  são números reais distintos. Fazendo uma translação de cada coordenada  $u_j$  por  $\frac{b_{j1}}{2b_{j2}}$  e considerando  $b_j = \frac{2b_{j2}}{b}$  temos,

$$\begin{aligned} f_j &= b_{j2}u_j^2 + b_{j1}u_j + b_{j0} \\ &= b_{j2} \left( u_j - \frac{b_{j1}}{2b_{j2}} \right)^2 + b_{j1} \left( u_j - \frac{b_{j1}}{2b_{j2}} \right) + b_{j0} \\ &= b_{j2}u_j^2 - \frac{b_{j1}^2}{4b_{j2}} + b_{j0}, \\ f'_j &= 2b_{j2}u_j + b_{j1} \\ &= 2b_{j2} \left( u_j - \frac{b_{j1}}{2b_{j2}} \right) + b_{j1} \\ &= 2b_{j2}u_j. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões de  $f_j$  e  $f'_j$  obtidas acima na hipersuperfície dada em (2.38) temos,

$$x(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, 0) - \frac{\sum_{j=1}^n 2b_{j2}u_j^2 + \frac{b_{j1}^2}{2b_{j2}} + 2b_{j0}}{\sum_{j=1}^n 4b_{j2}^2u_j + b^2} (2b_{12}u_1, \dots, 2b_{n2}u_n, -b) - B,$$



em que  $B = \left( \frac{b_{11}}{2b_{12}}, \dots, \frac{b_{n1}}{2b_{n2}}, 0 \right)$ . Usando que  $b_j = \frac{2b_{j2}}{b}$  obtemos,

$$\begin{aligned} x(u_1, \dots, u_n) &= (u_1, \dots, u_n, 0) - \frac{\sum_{j=1}^n bb_j u_j^2 + \frac{b_{j1}^2}{bb_j} + 2b_{j0}}{\sum_{j=1}^n b^2 b_j^2 u_j + b^2} (bb_1 u_1, \dots, bb_n u_n, -b) - B \\ &= (u_1, \dots, u_n, 0) - \frac{\sum_{j=1}^n b \left( b_j u_j^2 - \frac{b_{j1}^2}{b^2 b_j} + \frac{2b_{j0}}{b} \right)}{\sum_{j=1}^n b^2 (b_j^2 u_j + 1)} b(b_1 u_1, \dots, b_n u_n, -1) - B \\ &= (u_1, \dots, u_n, 0) - \frac{\sum_{j=1}^n b_j u_j^2 + \sum_{j=1}^n \left( \frac{b_{j1}^2}{b^2 b_j} - \frac{2b_{j0}}{b} \right)}{\sum_{j=1}^n b_j^2 u_j + 1} (b_1 u_1, \dots, b_n u_n, -1) - B. \end{aligned}$$

Logo, a hipersuperfície dada em (2.38) se reduz, a menos de movimento rígido, a

$$x(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, 0) - \frac{\sum_{j=1}^n b_j u_j^2 + \gamma}{\sum_{j=1}^n b_j^2 u_j^2 + 1} (b_1 u_1, \dots, b_n u_n, -1) \quad (2.40)$$

onde  $b_j$  são números reais distintos e não nulos e  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

**Observação 14.** *O exemplo encontrado por Corro, Ferreira e Tenenblat [8] engloba o exemplo dado por Li e Wang [12]. De fato, basta observar que quando  $\gamma = 0$ , a família dada em (2.40) do Exemplo 13 é, a menos de uma translação em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , a família dada em (2.37) do Exemplo 11.*

No que segue, considerando uma hipersuperfície  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , utilizamos os resultados sobre tensores isoparamétricos, vistos na seção 2.1, a fim de provar o teorema de classificação das hipersuperfícies de Dupin com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nula proposto por Li e Wang [12].

**Lema 15.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. Então, o tensor segunda forma fundamental de Laguerre  $\mathbb{B}$  e o tensor de Laguerre  $\mathbb{L}$ , dados na Definição 11 são tensores isoparamétricos.*

*Demonstração.* Considere  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. Primeiramente, note que os tensores  $\mathbb{B} = B_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  e  $\mathbb{L} = L_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  são tensores simétricos, pois por (1.95) temos que  $B_{ij} = B_{ji}$  e  $L_{ij} = L_{ji}$ . Vamos mostrar que  $\mathbb{B} = B_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  é tensor

isoparamétrico. Por hipótese,  $x$  é hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre então,

$$\mathbb{C} = 0 \Rightarrow C_i = 0, \forall i, \quad (2.41)$$

e as curvaturas principais de Laguerre  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  são todas constantes. Como os autovalores do tensor  $\mathbb{B}$  são as curvaturas principais de Laguerre, resta verificar que  $\mathbb{B}$  é um tensor de Codazzi. De fato, por (1.106) e (2.41) temos,

$$B_{ij,k} - B_{ik,j} = C_j \delta_{ik} - C_k \delta_{ij} \Rightarrow B_{ij,k} = B_{ik,j}.$$

Logo,  $\mathbb{B} = B_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  é tensor isoparamétrico. Por fim, vamos verificar que  $\mathbb{L} = L_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$  é tensor isoparamétrico. Segue diretamente de (1.106) que  $\mathbb{L}$  é tensor de Codazzi, pois  $L_{ij,k} = L_{ik,j}$ . Precisamos mostrar que os autovalores do tensor de Laguerre são todos constantes. Considere  $\{E_1, \dots, E_n\}$  uma base ortonormal de  $TM$  com relação à métrica de Laguerre  $g$  formada por autovetores, assim

$$(L_{ij}) = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n). \quad (2.42)$$

Suponha que  $x$  tenha  $r = 2$  curvaturas principais distintas. Note que, se  $x$  tem duas curvaturas principais distintas,  $k_1$  e  $k_2$ , então  $\mathbb{B}$  possui apenas dois autovalores distintos  $b_1$  e  $b_2$  com respectivas multiplicidades  $s$  e  $n - s$ , pois  $b_i = \rho^{-1}(r - r_i)$ . Então, pela Proposição 10 segue que  $\mathbb{B}$  é paralela e por (2.7) temos

$$R_{ijij} = 0, \quad 1 \leq i \leq s, \quad s+1 \leq j \leq n. \quad (2.43)$$

Por outro lado, por (1.106) temos

$$R_{ijkl} = L_{jk} \delta_{il} + L_{il} \delta_{jk} - L_{ik} \delta_{jl} - L_{jl} \delta_{ik} \Rightarrow R_{ijij} = -\tau_i - \tau_j. \quad (2.44)$$

Então, segue de (2.43) e (2.44) que

$$0 = R_{ijij} = -\tau_i - \tau_j \Rightarrow \tau = \tau_i = -\tau_j, \quad 1 \leq i \leq s, \quad s+1 \leq j \leq n. \quad (2.45)$$

Logo, (2.42) se reduz a

$$(L_{ij}) = \text{diag}(\underbrace{\tau, \dots, \tau}_k, \underbrace{-\tau, \dots, -\tau}_{n-k}). \quad (2.46)$$

Suponha que  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$  e  $k \in \{s+1, s+2, \dots, n\}$  então,

$$\tau = \tau_i = -\tau_j = -\tau_k. \quad (2.47)$$

Por (2.4) e (2.47) temos,

$$\omega_{ik} = \sum_i \frac{B_{ik,i} \omega_i}{(b_1 - b_2)} \quad (2.48)$$

$$\omega_{ik} = \sum_i \frac{L_{ik,i} \omega_i}{(\tau_i - \tau_k)} = \sum_i \frac{L_{ik,i} \omega_i}{(2\tau)}.$$

Igualando as expressões dadas em (2.48), segue que

$$L_{ik,i} = \frac{2\tau}{(b_1 - b_2)} B_{ik,i}. \quad (2.49)$$

Logo, como  $L_{ij,k} = L_{ik,j}$ ,  $\mathbb{B}$  é paralela e por (2.49) segue que,

$$E_k(\tau) = E_k(\tau_i) = L_{ii,k} = L_{ik,i} = \frac{2\tau}{(b_1 - b_2)} B_{ik,i} = 0,$$

para  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$  se  $k \in \{s+1, s+2, \dots, n\}$ . Agora, suponha que  $k \in \{1, 2, \dots, s\}$  e  $j \in \{s+1, s+2, \dots, n\}$  então,

$$\tau = -\tau_j = \tau_k. \quad (2.50)$$

Assim,

$$\omega_{jk} = \sum_j \frac{B_{jk,j} \omega_j}{(b_2 - b_1)} \quad (2.51)$$

$$\omega_{jk} = \sum_j \frac{L_{jk,j} \omega_j}{(\tau_j - \tau_k)} = - \sum_j \frac{L_{jk,j} \omega_j}{(2\tau)}.$$

Igualando as expressões dadas em (2.51),

$$-L_{jk,j} = \frac{2\tau}{(b_2 - b_1)} B_{jk,j}. \quad (2.52)$$

Então, utilizando que  $L_{ij,k} = L_{ik,j}$ ,  $\mathbb{B}$  é paralela e a expressão (2.52) obtemos,

$$E_k(\tau) = E_k(\tau_i) = -E_k(\tau_j) = -L_{jj,k} = -L_{jk,j} = \frac{2\tau}{(b_2 - b_1)} B_{jk,j} = 0,$$

para  $j \in \{s+1, s+2, \dots, n\}$  se  $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Logo,  $E_k(\tau) = 0$ , para todo  $1 \leq k \leq n$ .

Agora suponha que  $x$  tenha  $r \geq 2$  curvaturas principais distintas. Então,  $\mathbb{B}$  tem mais que dois autovalores distintos. Usando (2.4) para o tensor simétrico  $\mathbb{L}$  e o tensor isoparamétrico  $\mathbb{B}$  temos

$$L_{ij,k} = \frac{(\tau_i - \tau_j)}{(b_i - b_j)} B_{ij,k}, \quad \{i\} \neq \{j\}. \quad (2.53)$$

Como  $L_{ij,k} = L_{ik,j}$ , segue de (2.5) e (2.53), que

$$E_i(\tau_j) = L_{jj,i} = L_{ji,j} = L_{ij,j} = \frac{(\tau_i - \tau_j)}{(b_i - b_j)} B_{ij,j} = 0, \quad \{i\} \neq \{j\}. \quad (2.54)$$

Vamos mostrar que  $E_i(\tau_j) = 0$ ,  $i \in \{j\}$ . Para  $p \in M^n$  fixado e  $j = \{1, \dots, n\}$  temos  $B_{jk,l} = 0$ , para  $1 \leq k, l \leq n$  ou  $B_{jk,l} \neq 0$ , para  $1 \leq k, l \leq n$  distintos. Primeiro suponha que  $B_{jk,l} \neq 0$  em uma vizinhança de  $p$  tal que  $j, k, l$  estão associados a três curvaturas principais de Laguerre distintas  $b_j, b_k$  e  $b_l$ . Então, por (2.53) temos

$$\frac{(\tau_j - \tau_k)}{(b_j - b_k)} = \frac{L_{jk,l}}{B_{jk,l}} = \frac{L_{jl,k}}{B_{jl,k}} = \frac{L_{lj,k}}{B_{lj,k}} = \frac{L_{lk,j}}{B_{lk,j}} = \frac{(\tau_l - \tau_k)}{(b_l - b_k)}.$$

Daí,

$$\tau_j = \frac{(b_j - b_k)}{(b_l - b_k)} (\tau_l - \tau_k) + \tau_k.$$

Logo, usando que as curvaturas principais de Laguerre são todas constantes e o caso (2.54) temos  $E_i(\tau_j) = 0$ ,  $i \in \{j\}$ .

Por fim, suponha que  $B_{jk,l} = 0$ , para  $1 \leq k, l \leq n$ . Se tiver uma sequência de pontos  $p_i \rightarrow p$  em  $M^n$  tal que o caso anterior acontece nos  $p_i$  para algum  $1 \leq k, l \leq n$  então  $E_i(\tau_j) = 0$ ,  $i \in \{j\}$  acontece em  $p$  pela continuidade. Caso contrário existe um aberto  $U \subset M^n$  de  $p$  tal que  $B_{jk,l} = 0$ , para  $1 \leq k, l \leq n$ . Assim, por (2.6) temos

$$R_{jkjk} = \sum_{l \notin \{j, \{k\}\}} \frac{2B_{jk,l}^2}{(b_j - b_l)(b_k - b_l)} = 0,$$

para  $\{j\} \neq \{k\}$  em  $U$ . Por outro lado, usando (1.106), temos que  $R_{jkkj} = -\tau_j - \tau_k$ . Então,  $\tau_j = -\tau_k$ , para  $k \notin \{j\}$ . Logo, para  $i \in \{j\}$  temos, pelo caso (2.54), que

$$E_i(\tau_j) = -E_i(\tau_k) = 0.$$

Portanto, os autovalores de  $\mathbb{L}$  são todos constantes, ou seja,  $\mathbb{L}$  é um tensor isoparamétrico.  $\square$

**Teorema 16.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. Então a segunda forma fundamental de Laguerre é paralela.*

*Demonstração.* Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. Considere  $\{E_1, \dots, E_n\}$  uma base ortonormal de  $TM$  com relação à métrica de Laguerre  $g$  formada por autovetores, assim

$$\begin{aligned} (B_{ij}) &= \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n), \\ (L_{ij}) &= \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_2, \dots, \tau_t, \dots, \tau_t), \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde  $t$  denota o número de autovalores distintos de  $\mathbb{L}$ . Defina o conjunto de índices

$$\{i\} = \{k \in \{1, 2, \dots, n\} / \tau_k = \tau_i\}. \quad (2.56)$$

Como  $x$  é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre, pelo Lema 15 temos que  $\mathbb{L}$  e  $\mathbb{B}$  são isoparamétricos. Então, por (1.106), segue que

$$R_{ijkl} = L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik} \Rightarrow R_{ijij} = -\tau_i - \tau_j. \quad (2.57)$$

Utilizando a identidade de Cartan (2.11) e (2.57) temos,

$$0 = \sum_{j \notin \{i\}} \frac{R_{ijij}}{\tau_j - \tau_i} = \sum_{j \notin \{i\}} \frac{-\tau_i - \tau_j}{\tau_j - \tau_i} = \sum_{j \notin \{i\}} \frac{\tau_i^2 - \tau_j^2}{(\tau_j - \tau_i)^2}. \quad (2.58)$$

Na equação (2.58), considere  $\tau_{i_0}^2 = \max\{\tau_1^2, \dots, \tau_n^2\}$  e seja  $i = i_0$  então,

$$0 = \sum_{j \notin \{i_0\}} \frac{\tau_{i_0}^2 - \tau_j^2}{(\tau_j - \tau_{i_0})^2}, \quad (2.59)$$

ou seja,  $\tau_{i_0}^2 - \tau_j^2 = 0$ , para  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Assim, ou  $\mathbb{L}$  possui apenas um autovalor  $\tau_{i_0}$ , isto é,  $t = 1$  e  $\tau_{i_0} = \tau_1 = \dots = \tau_n$ , ou  $t = 2$  e os autovalores são  $\tau_{i_0} \neq \tau_j$  com multiplicidades  $s$  e

$n - s$ , respectivamente. Suponha que  $t = 2$ , então,

$$(L_{ij}) = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \text{diag}(\underbrace{\tau, \dots, \tau}_s, \underbrace{-\tau, \dots, -\tau}_{n-s}),$$

para alguma constante  $\tau \neq 0$ . Com isso, temos que  $\mathbb{L}$  é tensor isoparamétrico com dois autovalores distintos. Então, pela Proposição 10,  $\mathbb{L}$  é paralelo e por (2.7) temos

$$R_{ijij} = 0, \quad 1 \leq i \leq s, \quad s+1 \leq j \leq n. \quad (2.60)$$

Agora, reordenamos a base  $\{E_1, \dots, E_s\}$  tal que

$$(B_{ij})_{1 \leq i, j \leq s} = \text{diag}(b_1, \dots, b_s) = \text{diag}(b_1, \dots, b_1, b_2, \dots, b_2, \dots, b_l, \dots, b_l).$$

Queremos verificar que  $l = 1$ . Para isso, suponha que  $l \geq 2$ . Como  $\mathbb{B}$  é tensor isoparamétrico, pela identidade de Cartan (2.11) temos,

$$0 = \sum_{1 \leq j \leq s, b_j \neq b_1} \frac{R_{1j1j}}{b_j - b_1}. \quad (2.61)$$

Note que, para  $1 \leq j \leq s$  com  $b_j \neq b_1$  segue de (2.57) que

$$R_{1j1j} = L_{j1}\delta_{1j} + L_{1j}\delta_{j1} - L_{11}\delta_{jj} - L_{jj}\delta_{11} \Rightarrow R_{1j1j} = -\tau_1 - \tau_j = -2\tau. \quad (2.62)$$

Utilizando as expressões (2.61) e (2.62) obtemos,

$$0 = \sum_{1 \leq j \leq s, b_j \neq b_1} \frac{R_{1j1j}}{b_j - b_1} = \sum_{1 \leq j \leq s, b_j \neq b_1} \frac{-2\tau}{b_j - b_1} \Rightarrow \tau = 0$$

o que é uma contradição, pois estamos considerando constantes  $\tau \neq 0$ . Portanto,  $l = 1$ . Analogamente, reordenando a base  $\{E_{s+1}, \dots, E_n\}$  tal que

$$(B_{ij})_{s+1 \leq i, j \leq n} = \text{diag}(b_{s+1}, \dots, b_n) = \text{diag}(b_{s+1}, \dots, b_{s+1}, b_{s+2}, \dots, b_{s+2}, \dots, b_{\bar{l}}, \dots, b_{\bar{l}}).$$

Suponha que  $\bar{l} \geq 2$ . Pela identidade de Cartan (2.11) temos,

$$0 = \sum_{s+1 \leq j \leq n, b_j \neq b_n} \frac{R_{n j n j}}{b_j - b_n}. \quad (2.63)$$

Para  $s + 1 \leq j \leq n$  com  $b_j \neq b_n$  segue de (2.57) que

$$R_{n j n j} = L_{j n} \delta_{n j} + L_{n j} \delta_{j n} - L_{n n} \delta_{j j} - L_{j j} \delta_{n n} \Rightarrow R_{n j n j} = -\tau_n - \tau_j = 2\tau. \quad (2.64)$$

Logo, segue das expressões (2.61) e (2.62) que

$$0 = \sum_{s+1 \leq j \leq n, b_j \neq b_n} \frac{R_{n j n j}}{b_j - b_n} = \sum_{s+1 \leq j \leq n, b_j \neq b_n} \frac{2\tau}{b_j - b_n} \Rightarrow \tau = 0,$$

o que é uma contradição.

Logo  $\bar{l} = 1$ . Portanto,  $\mathbb{B}$  possui no máximo dois autovalores distintos, um com multiplicidade  $s$  e outro com multiplicidade  $n - s$ . Portanto, pela Proposição 10, a segunda forma fundamental é paralela.

Agora, se  $t = 1$  então,  $L_{ij} = \tau \delta_{ij}$ . Seja  $b_1$  o menor autovalor de  $\mathbb{B}$ . Por (1.106) e a identidade de Cartan (2.11) temos

$$0 = \sum_{1 \leq j \leq n, b_j \neq b_1} \frac{R_{1 j 1 j}}{b_j - b_1} = \sum_{1 \leq j \leq n, b_j \neq b_1} \frac{-2\tau}{b_j - b_1} \Rightarrow \tau = 0.$$

Então  $L_{ij} = 0$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ . Logo,

$$R_{ijkl} = L_{jk} \delta_{il} + L_{il} \delta_{jk} - L_{ik} \delta_{jl} - L_{jl} \delta_{ik} = 0.$$

Portanto, pelo Teorema 7, concluímos que a segunda forma fundamental é paralela e isto conclui a prova.  $\square$

Finalizamos a seção com o teorema a seguir, proposto por Li e Wang em [12] que classifica as hipersuperfícies de Dupin com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas

**Teorema 17.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas. Então,  $M^n$  é Laguerre equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre plana em  $\mathbb{R}^{n+1}$  se, e somente se, as curvaturas de Laguerre são todas constantes.*

*Demonstração.* Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície de Dupin com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não-nulas. Suponha que  $x$  é Laguerre equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre plana  $\tilde{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Como  $\tilde{x}$  é hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre, segue da Proposição 11 que  $\tilde{x}$  é Dupin com curvaturas de Laguerre constantes. Mas as curvaturas de Laguerre são invariantes por transformações de Laguerre então, as

curvaturas de Laguerre de  $x$  são constantes.

Reciprocamente, suponha que as curvaturas de Laguerre de  $x$  sejam constantes. Pela Proposição 11,  $x$  é hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. Então, segue do Teorema 16 que a segunda forma fundamental de Laguerre é paralela. Assim,  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é uma hipersuperfície com  $r \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas com segunda forma fundamental de Laguerre paralela. Então, pelo Teorema 12, localmente  $x$  é Laguerre equivalente a hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre plana  $\tilde{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada em (2.37).  $\square$

**Observação 18.** *No próximo capítulo, apresentamos o Teorema 22, provado por Cezana e Tenbenblat [7], que consiste em um resultado mais geral que o Teorema 17. Eles mostraram que qualquer hipersuperfície de Dupin própria em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , com  $n \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas, que admite um sistema de coordenadas principais e curvaturas de Laguerre constantes é dada, a menos de movimento rígido no espaço Euclidiano, pela família de hipersuperfícies dadas por (2.40) no Exemplo 13.*



## Capítulo 3

# Hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura de Laguerre constante

Neste capítulo apresentamos os resultados propostos por Cezana e Tenenblat [7]. Considerando uma hipersuperfície de Dupin própria  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  que admite um sistema de coordenadas principais e  $n$  curvaturas principais distintas e não nulas, mostramos uma caracterização para que as curvaturas de Laguerre sejam constantes em termos dos símbolos de Christoffel, de seus raios de curvatura e de sua primeira forma fundamental. Concluimos este capítulo apresentando explicitamente todas as hipersuperfícies que tem curvatura de Laguerre constante, sendo elas dadas pela família (2.40) no Exemplo 13.

### 3.1 Hipersuperfície de Dupin com curvaturas principais distintas

Nesta seção, apresentamos resultados necessários para o estudo sobre as hipersuperfícies de Dupin com curvaturas principais distintas no espaço Euclidiano. A partir de agora, fixaremos a notação subscrito  $\cdot_i$  para denotar a derivada com relação a  $u_i$ .

Seja  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $p = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U$ . Considere  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície de Dupin, própria, parametrizada por linhas de curvatura, com  $n$  curvaturas principais  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , distintas que não se anulam e seja  $\xi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  o campo vetorial normal unitário de  $x$ . Então, temos as seguintes condições,

$$\langle x_{,i}, x_{,j} \rangle = \delta_{ij} g_{ii}, \quad (3.1)$$

$$\xi_{,i} = -k_i x_i, \quad (3.2)$$

$$k_{i,i} = 0, \quad (3.3)$$

onde  $1 \leq i, j \leq n$ . Além disso, temos a equação

$$x_{,ij} - \Gamma_{ij}^i x_{,i} - \Gamma_{ij}^j x_{,j} = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \neq j \leq n, \quad (3.4)$$

em que  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel. Considerando as derivadas de (3.2) com relação a  $u_j$  para  $i \neq j$ , obtemos

$$\xi_{,ij} = -k_{i,j} x_{,i} - k_i x_{,ij}. \quad (3.5)$$

Analogamente, temos

$$\xi_{,ji} = -k_{j,i} x_{,j} - k_j x_{,ji}. \quad (3.6)$$

Subtraindo as equações (3.5) e (3.6) e substituindo (3.4) temos,

$$\begin{aligned} \xi_{,ij} - \xi_{,ji} &= 0 \\ -k_{i,j} x_{,i} + x_{,ij} (k_j - k_i) + k_{j,i} x_{,j} &= 0 \\ -k_{i,j} x_{,i} + (\Gamma_{ij}^i x_{,i} + \Gamma_{ij}^j x_{,j}) (k_j - k_i) + k_{j,i} x_{,j} &= 0 \\ \Gamma_{ij}^i (x_{,i} (k_j - k_i)) &= -\Gamma_{ij}^j (x_{,j} (k_j - k_i)) - k_{j,i} x_{,j} + k_{i,j} x_{,i} \end{aligned}$$

Tomando o produto interno com  $x_{,i} (k_j - k_i)$  em ambos os lados da igualdade anterior segue que,

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{k_{i,j}}{(k_j - k_i)}, \quad \text{para } 1 \leq i \neq j \leq n. \quad (3.7)$$

Como o raio de curvatura é dado por  $r_i = \frac{1}{k_i}$ ,  $k_i \neq 0$ , diferenciando com relação a  $u_j$  temos,

$$r_{i,j} = -\frac{k_{i,j}}{(k_i)^2} = -k_{i,j} r_i^2.$$

Logo,

$$k_{i,j} = \frac{r_{i,j}}{r_i^2}, \quad i \neq j. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) em (3.7), temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^i &= \frac{k_{i,j}}{(k_{j,j} - k_{i,i})} \\ &= \left( -\frac{r_{i,j}}{r_i^2} \right) \left( \frac{r_i - r_j}{r_i r_j} \right) \\ &= \frac{r_{i,j} r_j}{(r_i - r_j) r_i} \text{ para } 1 \leq i \neq j \leq n. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pelas equações (3.4) temos,

$$\begin{aligned} x_{,ii} &= \Gamma_{ii}^i x_{,i} + \sum_{k \neq i} \Gamma_{ii}^k x_{,k} + k_i g_{ii} \xi, \\ x_{,ij} &= \Gamma_{ij}^i x_{,i} + \Gamma_{ij}^j x_{,j}, \\ x_{,jj} &= \Gamma_{jj}^i x_{,i} + \sum_{k \neq j} \Gamma_{jj}^k x_{,k} + k_j g_{jj} \xi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Fazendo o produto interno de cada uma das equações (3.10) com  $x_{,i}$  e  $x_{,j}$  tem-se as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \langle x_{,ii}, x_{,i} \rangle &= \Gamma_{ii}^i g_{ii}, \\ \langle x_{,ii}, x_{,j} \rangle &= \Gamma_{ii}^j g_{jj}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \langle x_{,ij}, x_{,i} \rangle &= \Gamma_{ij}^i g_{ii}, \\ \langle x_{,ij}, x_{,j} \rangle &= \Gamma_{ij}^j g_{jj}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \langle x_{,jj}, x_{,i} \rangle &= \Gamma_{jj}^i g_{ii}, \\ \langle x_{,jj}, x_{,j} \rangle &= \Gamma_{jj}^j g_{jj}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Derivando (3.1) com relação a  $u_i$  e utilizando a primeira equação de (3.11) temos,

$$\begin{aligned} 2\langle x_{,ii}, x_{,i} \rangle &= g_{ii,i} \\ 2\Gamma_{ii}^i g_{ii} &= g_{ii,i} \\ \Gamma_{ii}^i &= \frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}}. \end{aligned}$$

Fazendo a derivada de (3.1) com relação a  $u_j$  e utilizando a primeira equação de (3.12) obtemos,

$$\begin{aligned} 2\langle x_{,ij}, x_{,i} \rangle &= g_{ii,j} \\ 2\Gamma_{ij}^i g_{ii} &= g_{ii,j} \\ \Gamma_{ij}^i &= \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}}. \end{aligned}$$

Note que,

$$\langle x_{,i}, x_{,i} \rangle = g_{ii} \Rightarrow 2\langle x_{,i}, x_{,ij} \rangle = g_{ii,j}. \quad (3.14)$$

Derivando  $\langle x_{,i}, x_{,j} \rangle = 0$  com relação a  $u_i$ , usando a segunda equação de (3.12) e (3.14) segue que

$$\begin{aligned} \langle x_{,ii}, x_{,j} \rangle + \langle x_{,i}, x_{,ji} \rangle &= 0 \\ \Gamma_{ii}^j g_{jj} + \langle x_{,i}, x_{,ji} \rangle &= 0 \\ \Gamma_{ii}^j &= -\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Gamma_{ii}^j = -\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}}. \quad (3.15)$$

Portanto, os símbolos de Christoffel em termos da métrica (3.1) são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \Gamma_{ii}^i = \frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}}, \Gamma_{ii}^j = -\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}}, \Gamma_{ij}^i = \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}}, \quad (3.16)$$

em que  $i, j, k$  são distintos.

Para hipersuperfície de Dupin com curvaturas principais distintas e que não se anulam, as curvaturas de Laguerre, definidas em (1.117), são dadas por

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{(k_i - k_j)k_l}{(k_l - k_j)k_i} = \frac{r_i - r_j}{r_l - r_j}, \text{ para } i, j, l \text{ distintos.} \quad (3.17)$$

Como todas as curvaturas principais  $k_i$  são distintas, temos que  $\mathcal{L}^{ijl} \notin \{0, 1\}$ .

No que segue, obtemos as relações entre as curvaturas de Laguerre,

$$\begin{aligned}
 1 - \mathcal{L}^{ilj} &= 1 - \frac{r_i - r_l}{r_j - r_l} = \frac{r_i - r_j}{r_l - r_j} = \mathcal{L}^{ijl}, \\
 1 - \frac{1}{\mathcal{L}^{ilj}} &= 1 - \frac{r_j - r_l}{r_i - r_l} = \frac{r_j - r_i}{r_l - r_i} = \mathcal{L}^{jil}, \\
 \frac{1}{\mathcal{L}^{lji}} &= \frac{r_i - r_j}{r_l - r_j} = \mathcal{L}^{ijl}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Logo, para todos  $i, j, l$  distintos, temos

$$1 - \mathcal{L}^{ilj} = \mathcal{L}^{ijl}, \quad 1 - \frac{1}{\mathcal{L}^{ilj}} = \mathcal{L}^{jil}, \quad \frac{1}{\mathcal{L}^{lji}} = \mathcal{L}^{ijl}. \tag{3.19}$$

Quando  $n \geq 4$ , temos também a seguinte relação,

$$\mathcal{L}^{ilj} = \mathcal{L}^{ils} \mathcal{L}^{slj}, \tag{3.20}$$

para  $i, j, s, l$  distintos.

Observe que para uma hipersuperfície de Dupin, própria,  $M^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , com  $n$  curvaturas principais distintas não nulas, as curvaturas de Laguerre são determinadas por  $(n-2)$  funções. De fato, considerando em particular as curvaturas de Laguerre  $\mathcal{L}^{132}$  e  $\mathcal{L}^{s23}$ , qualquer outra curvatura de Laguerre pode ser obtida utilizando as relações (3.19) e (3.20).

Visando demonstrar resultados futuros, vamos obter as derivadas dos símbolos de Christoffel e as equações de Gauss e Codazzi para uma hipersuperfície de Dupin própria parametrizada por linhas de curvatura e com curvaturas principais distintas.

Pela relação (3.16) temos,

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} \Rightarrow g_{ii,j} = 2\Gamma_{ij}^i g_{ii} \tag{3.21}$$

$$\Gamma_{ii}^j = -\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}} \Rightarrow g_{ii,j} = -2\Gamma_{ii}^j g_{jj} \tag{3.22}$$

Substituindo (3.22) em (3.21) temos,

$$\Gamma_{ii}^j = -\Gamma_{ij}^i \frac{g_{ii}}{g_{jj}}, \quad \text{para } 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{3.23}$$

Derivando (3.7) em relação a  $u_i$  e  $u_j$ , respectivamente e utilizando (3.3) segue,

$$\Gamma_{ij,i}^i = \frac{k_{j,i}(k_j - k_i) - k_{i,j}(k_{j,i} - k_{i,i})}{(k_j - k_i)^2} = \frac{k_{i,j}}{(k_j - k_i)} \frac{k_{j,i}}{(k_i - k_j)} = \Gamma_{ij}^i \Gamma_{ij}^j, \quad (3.24)$$

e

$$\Gamma_{ij,j}^j = \frac{k_{j,i}(k_i - k_j) - k_{j,i}(k_{i,j} - k_{j,j})}{(k_j - k_i)^2} = \frac{k_{j,i}}{(k_i - k_j)} \frac{k_{i,j}}{(k_j - k_i)} = \Gamma_{ij}^j \Gamma_{ij}^i. \quad (3.25)$$

Logo, por (3.24) e (3.25) temos,

$$\Gamma_{ij,i}^i = \Gamma_{ij}^j \Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ij,j}^j, \quad \text{para } 1 \leq i \neq j \leq n. \quad (3.26)$$

Pela equação (3.4) e por (3.23) temos,

$$x_{,ii} = \Gamma_{ii}^i x_{,i} + \sum_{k \neq i} \Gamma_{ii}^k x_{,k} + k_i g_{ii} \xi \quad (3.27)$$

$$x_{,ii} = \Gamma_{ii}^i x_{,i} - \Gamma_{ik}^i \sum_{k \neq i} \frac{g_{ii}}{g_{kk}} x_{,k} + k_i g_{ii} \xi \quad (3.28)$$

Agora, derivando (3.23) com relação a  $u_j$  e usando (3.16) obtemos,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii,j}^j &= - \left[ \Gamma_{ij,j}^i \frac{g_{ii}}{g_{jj}} + \Gamma_{ij}^i \frac{(g_{ii,j} g_{jj} - g_{ii} g_{jj,j})}{g_{jj}^2} \right] \\ \Gamma_{ii,j}^j &= \frac{g_{ii}}{g_{jj}} \left( -\Gamma_{ij,j}^i - \Gamma_{ij}^i \frac{g_{ii,j}}{g_{ii}} + \Gamma_{ij}^i \frac{g_{jj,j}}{g_{jj}} \right) \\ \Gamma_{ii,j}^j &= \frac{g_{ii}}{g_{jj}} \left( -\Gamma_{ij,j}^i - 2(\Gamma_{ij}^i)^2 + 2\Gamma_{ij}^i \Gamma_{jj}^j \right), \quad \text{para } 1 \leq i \neq j \leq n. \end{aligned}$$

Além disso, comparando as equações (3.9) e (3.16) obtemos a Equação de Codazzi,

$$\frac{r_{i,j} r_j}{(r_j - r_i) r_i} = \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}}, \quad \text{para } 1 \leq i \neq j \leq n. \quad (3.29)$$

A Proposição a seguir fornece a equação de Gauss dessas hipersuperfícies e sua demonstração pode ser encontrada em [19].

**Proposição 12.** ([19]) *Seja  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície de Dupin, própria, parametrizada por linhas de curvaturas cujas curvaturas principais  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  são distintas.*

Então, a equação de Gauss de  $x$  é dada por:

$$k_i k_j + \frac{A_{ji}}{g_{ii}} + \frac{A_{ij}}{g_{jj}} + \sum_{k \neq i \neq j} \frac{\Gamma_{ik}^i \Gamma_{jk}^j}{g_{kk}} = 0, \quad (3.30)$$

onde  $i \neq j$  e  $A_{ji} = \Gamma_{ji,i}^j + \Gamma_{jk}^j (\Gamma_{ji}^j - \Gamma_{ii}^i)$ .

## 3.2 Hipersuperfície de Dupin com curvatura de Laguerre constante

Nesta seção apresentamos as caracterizações das hipersuperfícies de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , parametrizadas por linhas de curvatura com  $n$  curvaturas principais distintas e não nulas e curvatura de Laguerre constante.

Cezana e Tenenblat [6], mostraram que as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre no espaço Euclidiano  $(n+1)$ -dimensional, com  $n \geq 3$  curvaturas principais distintas e não nulas são hipersuperfícies de Dupin com curvaturas de Laguerre constantes. Desta forma, as hipersuperfícies consideradas nessa seção, são em particular, hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre.

A primeira proposição apresenta condições para que as curvaturas de Laguerre sejam constantes em termos de seus raios de curvatura.

**Proposição 13.** *Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , com  $n \geq 3$ , uma hipersuperfície própria de Dupin parametrizada por linhas de curvaturas e que possua  $n$  curvaturas principais  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , distintas que não se anulam. As curvaturas de Laguerre de  $M^n$  são constantes se, e somente se, a menos de reordenação do índices, os raios de curvatura são dados por*

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{k_1} = -(D-1)h_2 + h_3 + \sum_{s \geq 4} \left(1 - \frac{1}{D_s}\right) h_s, \\ r_2 &= \frac{1}{k_2} = \left(1 - \frac{1}{D}\right) h_2 + \frac{1}{D} h_3 + \sum_{s \geq 4} h_s, \\ r_3 &= \frac{1}{k_3} = h_1 + h_2 + \sum_{s \geq 4} \left(1 + \frac{1}{D_s(D-1)}\right) h_s, \\ r_s &= \frac{1}{k_s} = D_s r_1 + (1 - D_s) r_2 \text{ para } s \geq 4, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde

$$D = \mathcal{L}^{132}, \quad D_s = \mathcal{L}^{s21},$$

satisfazendo

$$D, D_s \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, \quad D_s \neq \frac{1}{(1-D)}, \quad D_s \neq D_t, \quad \text{para } s \neq t, \quad s, t \geq 4, \quad (3.32)$$

e  $h_i(u_i)$  para  $i = 1, \dots, n$  são funções diferenciáveis tais que,

$$H = h_1 + Dh_2 - h_3 + \sum_{s \geq 4} \left( \frac{D}{D_s(D-1)} \right) h_s \neq 0. \quad (3.33)$$

*Demonstração.* Suponha que as curvaturas de Laguerre são constantes. Pela relação (3.17) temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{ikj} &= \frac{r_k - r_i}{r_k - r_j} \\ r_k - r_i &= \mathcal{L}^{ikj}(r_k - r_j) \\ r_i + (\mathcal{L}^{ikj} - 1)r_k - \mathcal{L}^{ikj}r_j &= 0, \quad \forall i, j, l \text{ distintos.} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Como  $r_k = \frac{1}{k_k}$  e  $M^n$  é uma hipersuperfície de Dupin própria, diferenciando  $r_k$  com relação a  $u_k$  temos,

$$r_{k,k} = \frac{-k_{k,k}}{(k_k)^2} = 0. \quad (3.35)$$

Além disso, por hipótese, as curvaturas de Laguerre são constantes então suas derivadas são nulas. A partir dessas informações, diferenciando (3.34) com relação a  $u_k$ , temos,

$$\begin{aligned} r_{i,k} + (\mathcal{L}_{,k}^{ikj})r_k + (\mathcal{L}^{ikj} - 1)r_{k,k} - (\mathcal{L}_{,k}^{ikj})r_j - (\mathcal{L}^{ikj})r_{j,k} &= 0 \\ r_{i,k} - (\mathcal{L}^{ikj})r_{j,k} &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Derivando  $r_j = \frac{1}{k_j}$  com relação a  $u_k$  temos,  $r_{j,k} = \frac{-k_{j,k}}{k_j k_j}$ . Diferenciando novamente com relação a  $u_j$  e usando (3.3) obtemos,

$$r_{j,kj} = \frac{-k_{j,kj}k_j^2 + 2k_{j,k}k_{j,j}k_j}{(k_j)^4} = 0. \quad (3.37)$$



Fazendo a derivada de (3.36) com relação a  $u_j$  e utilizando (3.37) temos,

$$\begin{aligned} r_{i,kj} - (\mathcal{L}_{,j}^{ikj})r_{j,k} - (\mathcal{L}^{ikj})r_{j,kj} &= 0 \\ r_{i,kj} - (\mathcal{L}^{ikj})r_{j,kj} &= 0 \\ r_{i,kj} &= 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Portanto,

$$r_i = \sum_{k \neq i} f_{ik}(u_k), \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (3.39)$$

Fixamos os índices  $i = 1$ ,  $j = 2$  e  $k = 3$ , e tomando  $D = \mathcal{L}^{132}$  segue de (3.34) e (3.39) que,

$$\begin{aligned} r_1 + (\mathcal{L}^{132} - 1)r_3 - \mathcal{L}^{132}r_2 &= 0 \\ \sum_{l \neq 1} f_{1l}(u_l) + (D - 1) \sum_{s \neq 3} f_{3s}(u_s) - D \sum_{t \neq 2} f_{2t}(u_t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Expandindo os somatórios da equação (3.40) e considerando estas expressões como uma soma de funções de variáveis distintas, temos

$$\begin{aligned} 0 &= (D - 1)f_{31}(u_1) - Df_{21}(u_1) + f_{12}(u_2) + (D - 1)f_{32}(u_2) + f_{13}(u_3) - Df_{23}(u_3) \\ &+ f_{14}(u_4) + (D - 1)f_{34}(u_4) - Df_{24}(u_4) + \dots \\ &+ f_{1n}(u_n) + (D - 1)f_{3n}(u_n) - Df_{2n}(u_n) \\ 0 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \\ 0 &= \sum_{s=1}^n a_s, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= (D - 1)f_{31}(u_1) - Df_{21}(u_1), \\ a_2 &= f_{12}(u_2) + (D - 1)f_{32}(u_2), \\ a_3 &= f_{13}(u_3) - Df_{23}(u_3), \\ a_s &= f_{1s}(u_s) + (D - 1)f_{3s}(u_s) - Df_{2s}(u_s), \text{ para } s \geq 4. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Com a finalidade de simplificar a notação, omitiremos as coordenadas  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Reescrevendo as expressões (3.41) temos,

$$\begin{aligned} f_{12} &= a_2 - (D-1)f_{32}, \\ f_{13} &= a_3 + Df_{23}, \\ f_{1s} &= a_s - (D-1)f_{3s} + Df_{2s}, \text{ para } s \geq 4. \\ f_{21} &= \frac{[(D-1)f_{31} - a_1]}{D}. \end{aligned}$$

Denotando  $a = a_1$ , segue das relações (3.34), (3.39) e do fato que  $\sum_{s=1}^n a_s = 0$  que,

$$\begin{aligned} r_1 + (D-1)r_3 - Dr_2 &= 0 \\ r_1 &= -(D-1) \sum_{s \neq 3} f_{3s} + D \sum_{s \neq 2} f_{2s} \\ r_1 &= -(D-1)f_{31} - (D-1)f_{32} - (D-1) \sum_{s \geq 4} f_{3s} + Df_{21} + Df_{23} + D \sum_{s \geq 4} f_{2s}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Assim,

$$f_{21} = \frac{[(D-1)f_{31} - a]}{D} \Rightarrow -(D-1)f_{31} + Df_{21} = -a. \quad (3.43)$$

Substituindo (3.43) em (3.42) temos,

$$r_1 = -(D-1)f_{32} + Df_{23} - a + D \sum_{s \geq 4} f_{2s} - (D-1) \sum_{s \geq 4} f_{3s}. \quad (3.44)$$

Utilizando as relações (3.19), (3.34), (3.39) e (3.44), obtemos,

$$\begin{aligned} r_2 + (\mathcal{L}^{231} - 1)r_3 - \mathcal{L}^{231}r_1 &= 0 \\ r_2 &= \frac{1}{D}r_1 + \frac{(D-1)}{D}r_3 \\ r_2 &= -\frac{(D-1)}{D}f_{32} + \frac{1}{D}(Df_{23} - a) + \sum_{s \geq 4} f_{2s} - \frac{(D-1)}{D} \sum_{s \geq 4} f_{3s} + \frac{(D-1)}{D} \sum_{s \neq 3} f_{3s} \quad (3.45) \\ r_2 &= -\frac{(D-1)}{D}f_{32} + \frac{1}{D}(Df_{23} - a) + \sum_{s \geq 4} f_{2s} - \frac{(D-1)}{D} \sum_{s \geq 4} f_{3s} \\ &\quad + \frac{(D-1)}{D}f_{31} + \frac{(D-1)}{D}f_{32} + \frac{(D-1)}{D} \sum_{s \geq 4} f_{3s} \\ r_2 &= \frac{(D-1)}{D}f_{31} + \frac{1}{D}(Df_{23} - a) + \sum_{s \geq 4} f_{2s}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Analogamente, de (3.19), (3.34), (3.39), (3.44) e (3.45), segue que

$$\begin{aligned}
r_3 &+ (\mathcal{L}^{321} - 1)r_2 - \mathcal{L}^{321}r_1 = 0 \\
r_3 &= -\frac{1}{(D-1)}r_1 + \frac{D}{(D-1)}r_2 \\
r_3 &= f_{32} - \frac{D}{(D-1)}f_{23} + \frac{1}{(D-1)}a - \frac{D}{(D-1)}\sum_{s \geq 4} f_{2s} + \sum_{s \geq 4} f_{3s} \\
&+ f_{31} + \frac{1}{(D-1)}(Df_{23} - a) + \frac{D}{(D-1)}\sum_{s \geq 4} f_{2s} \\
r_3 &= f_{31} + f_{32} + \sum_{s \geq 4} f_{3s}. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Por fim, tomando  $D_s = \mathcal{L}^{s21}$  segue de (3.34) que

$$r_s = D_s r_1 + (1 - D_s) r_2, \quad s \geq 4. \tag{3.48}$$

Como as curvaturas principais são todas distintas, segue que os raios de curvatura são todos distintos. Logo, temos a condição que  $D, D_s \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ . Além disso,  $D_s \neq \frac{1}{1-D}$ , para todo  $s \geq 4$ . De fato, suponha que  $D_s = \frac{1}{1-D}$ . Substituindo na expressão (3.48) e usando (3.44) e (3.45) temos,

$$\begin{aligned}
r_s &= D_s r_1 + (1 - D_s) r_2 \\
r_s &= \frac{1}{1-D} r_1 + \left(1 - \frac{1}{1-D}\right) r_2 \\
r_s &= \frac{-(D-1)f_{32} + Df_{23} - a + D\sum_{s \geq 4} f_{2s} - (D-1)\sum_{s \geq 4} f_{3s}}{-(D-1)} + \\
&+ \frac{D}{(D-1)} \left( \frac{(D-1)}{D} f_{31} + \frac{1}{D} (Df_{23} - a) + \sum_{s \geq 4} f_{2s} \right) \\
r_s &= f_{31} + f_{32} + \sum_{s \geq 4} f_{3s} \\
r_s &= r_3.
\end{aligned}$$

Então,  $k_s = k_3$  o que é uma contradição, pois  $M^n$  possui  $n$  curvaturas principais distintas. Portanto,  $D_s \neq \frac{1}{1-D}$ , para todo  $s \geq 4$ .

Temos também a condição que  $D_s \neq D_t$ , para  $t \geq 4$ , com  $t \neq s$ , uma vez que  $r_s \neq r_t$ ,  $t \neq s$ .

Agora, diferenciando (3.44) e (3.45) com relação a  $s$ , para  $s \geq 4$ , lembrando  $f_{ij}(u_j)$  é uma função diferenciável que depende de  $u_j$ ,  $a = a_1$  dada por (3.41) e  $D = \mathcal{L}^{132}$  são constantes,

temos

$$\begin{aligned} r_{1,s} &= -(D-1)f_{32,s} + Df_{23,s} - a_{,s} + D \sum_{s \geq 4} f_{2s,s} - (D-1) \sum_{s \geq 4} f_{3s,s} \\ r_{1,s} &= Df_{2s,s} - (D-1)f_{3s,s}. \end{aligned}$$

e (3.49)

$$\begin{aligned} r_{2,s} &= \frac{(D-1)}{D} f_{31,s} + f_{23,s} - \frac{a_{,s}}{D} + \sum_{s \geq 4} f_{2s,s} \\ r_{2,s} &= f_{2s,s}. \end{aligned}$$

Como  $r_s$  não depende de  $u_s$ , para  $s \geq 4$ , segue de (3.48) e de (3.49) que

$$\begin{aligned} 0 &= r_{s,s} \\ &= D_s r_{1,s} + r_{2,s} - D_s r_{2,s} \\ &= D_s (Df_{2s,s} - (D-1)f_{3s,s}) + f_{2s,s} - D_s f_{2,s} \\ &= D_s Df_{2s,s} - D_s (D-1)f_{3s,s} + (1 - D_s)f_{2,s} \\ &= (D_s D + 1 - D_s)f_{2s,s} - D_s (D-1)f_{3s,s} \\ &= D_s \left[ \left( D-1 + \frac{1}{D_s} \right) f_{2s,s} - (D-1)f_{3s,s} \right]. \end{aligned}$$

Como  $D_s \neq 0$  temos,

$$\left( D-1 + \frac{1}{D_s} \right) f_{2s,s} - (D-1)f_{3s,s} = 0,$$

donde segue que

$$(D-1)f_{3s} = \left( D-1 + \frac{1}{D_s} \right) f_{2s} - b_s,$$

isto é,

$$f_{3s} = \left( 1 + \frac{1}{D_s(D-1)} \right) f_{2s} - \frac{b_s}{(D-1)}, \quad (3.50)$$

onde  $b_s$  é constante.

Introduzindo as seguintes funções

$$\begin{aligned} h_1(u_1) &= f_{31}(u_1), \\ h_2(u_2) &= f_{32}(u_2) - \sum_{s \geq 4} \frac{b_s}{(D-1)}, \\ h_3(u_3) &= Df_{23}(u_3) - a, \\ h_s(u_s) &= f_{2s}(u_s), \quad s \geq 4. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Novamente, com a finalidade de simplificar a notação, omitiremos as variáveis  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Substituindo (3.50) e (3.51) em (3.44) temos,

$$\begin{aligned} r_1 &= -(D-1)f_{32} + Df_{23} - a + D \sum_{s \geq 4} f_{2s} - (D-1) \sum_{s \geq 4} f_{3s} \\ r_1 &= -(D-1) \left( h_2 + \sum_{s \geq 4} \frac{b_s}{(D-1)} \right) + h_3 + D \sum_{s \geq 4} h_s - (D-1) \sum_{s \geq 4} \left[ f_{2s} + \frac{f_{2s}}{D_s(D-1)} - \frac{b_s}{(D-1)} \right] \\ r_1 &= -(D-1) \left( h_2 + \sum_{s \geq 4} \frac{b_s}{(D-1)} \right) + h_3 + D \sum_{s \geq 4} h_s - (D-1) \sum_{s \geq 4} h_s - \frac{1}{D} \sum_{s \geq 4} h_s + \sum_{s \geq 4} b_s. \end{aligned}$$

Portanto,

$$r_1 = -(D-1)h_2 + h_3 + \sum_{s \geq 4} \left( 1 - \frac{1}{D_s} \right) h_s. \quad (3.52)$$

Substituindo (3.51) em (3.45), obtemos

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{(D-1)}{D} f_{31} + \frac{1}{D} (Df_{23} - a) + \sum_{s \geq 4} f_{2s} \\ r_2 &= \frac{(D-1)}{D} h_1 + \frac{1}{D} h_3 + \sum_{s \geq 4} h_s. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Substituindo (3.50) e (3.51) em (3.47) temos,

$$\begin{aligned} r_3 &= f_{31} + f_{32} + \sum_{s \geq 4} f_{3s} \\ r_3 &= h_1 + h_2 + \sum_{s \geq 4} \frac{b_s}{(D-1)} + \sum_{s \geq 4} \left( f_{2s} + \frac{1}{D_s(D-1)} f_{2s} - \frac{b_s}{(D-1)} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$r_3 = h_1 + h_2 + \sum_{s \geq 4} \left( 1 + \frac{1}{D_s(D-1)} \right) h_s. \quad (3.54)$$

Portanto, das equações (3.48), (3.52), (3.53) e (3.54) temos que as equações (3.31) são satisfeitas. Por fim, fazendo a diferença entre as equações (3.48), (3.52), (3.53) e (3.54) temos as seguintes relações entre os raios de curvatura,

$$\begin{aligned}
r_2 - r_1 &= \frac{(D-1)}{D}H, & r_3 - r_1 &= H, \\
r_2 - r_3 &= \frac{-1}{D}H, & r_s - r_1 &= \frac{-(D_s-1)(D-1)}{D}H, \\
r_2 - r_s &= \frac{D_s(D-1)H}{D}, & r_3 - r_s &= \frac{(1+D_sD-D_s)H}{D}, \\
r_s - r_t &= \frac{-(D_s-D_t)(D-1)H}{D}, \text{ para } s, t \geq 4 \text{ com } t \neq s,
\end{aligned} \tag{3.55}$$

onde

$$H = h_1 + Dh_2 - h_3 + \sum_{s \geq 4} \left( \frac{D}{D_s(D-1)} \right) h_s. \tag{3.56}$$

Note que  $H \neq 0$ , pois caso contrário teríamos  $r_3 = r_1 \Rightarrow k_3 = k_1$ , o que não ocorre.

Reciprocamente, se os raios de curvatura são dados por (3.31) então a diferença dessas funções é dada por (3.55) em termos das constantes  $D$ ,  $D_s$  e da função  $H$  dada por (3.56).

Além disso, pelas diferenças dadas em (3.55) temos,

$$\begin{aligned}
\frac{r_1 - r_3}{r_2 - r_3} &= H \frac{D}{H} = D, \\
\frac{r_s - r_2}{r_1 - r_2} &= \frac{D_s(D-1)H}{D} \frac{D}{(D-1)H} = D_s.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Portanto, por (3.17) segue que

$$D = \frac{r_1 - r_3}{r_2 - r_3} = \mathcal{L}^{132} \text{ e } D_s = \frac{r_s - r_2}{r_1 - r_2} = \mathcal{L}^{s21}, \tag{3.58}$$

isto é, as curvaturas de Laguerre  $\mathcal{L}^{132}$  e  $\mathcal{L}^{s21}$  são iguais as constantes  $D$  e  $D_s$ , respectivamente. Logo,  $\mathcal{L}^{132}$  e  $\mathcal{L}^{s21}$  são constantes. Como qualquer curvatura de Laguerre é obtida a partir de  $\mathcal{L}^{132}$  e  $\mathcal{L}^{s21}$ , usando as relações (3.19) e (3.20), segue que todas as curvaturas de Laguerre são constantes.  $\square$

A próxima proposição caracteriza as hipersuperfícies de Dupin com curvatura de Laguerre constante em termos dos símbolos de Christoffel.

**Proposição 14.** *Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , com  $n \geq 3$ , uma hipersuperfície própria de Dupin parametrizada por linhas de curvaturas e que possua  $n$  curvaturas principais  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , distintas que não se anulam. As curvaturas de Laguerre de  $M^n$  são constantes se, e somente se,*

$$r_i \Gamma_{ik}^i = r_j \Gamma_{jk}^j \text{ para } i, j, k \text{ distintos,} \quad (3.59)$$

onde  $r_i = \frac{1}{k_i}$  é o raio de curvatura de  $M^n$ .

*Demonstração.* Suponha que as curvaturas de Laguerre de  $M^n$  são constantes. Pela expressão (3.9) temos,

$$r_j \Gamma_{jk}^j - r_i \Gamma_{ik}^i = \frac{r_j r_{j,k} r_k}{(r_k - r_j) r_j} - \frac{r_i r_{i,k} r_k}{(r_k - r_i) r_i} = r_k \left( \frac{r_{j,k}}{(r_k - r_j)} - \frac{r_{i,k}}{(r_k - r_i)} \right). \quad (3.60)$$

Por outro lado, diferenciando (3.17) com relação a  $u_k$  e lembrando que  $M^n$  é de Dupin temos,

$$(\mathcal{L}^{ikj})_{,k} = \left( \frac{r_i - r_k}{r_j - r_k} \right)_{,k} = \frac{r_{i,k}}{(r_j - r_k)} - \frac{(r_i - r_k) r_{j,k}}{(r_j - r_k)^2}. \quad (3.61)$$

Logo, segue de (3.17), (3.60) e (3.61) que

$$\begin{aligned} (\log \mathcal{L}^{ikj})_{,k} &= \frac{1}{\mathcal{L}^{ikj}} (\mathcal{L}^{ikj})_{,k} = \left( \frac{r_j - r_k}{r_i - r_k} \right) \left( \frac{r_{i,k}}{(r_j - r_k)} - \frac{(r_i - r_k) r_{j,k}}{(r_j - r_k)^2} \right) \\ &= \frac{1}{r_k} (r_j \Gamma_{jk}^j - r_i \Gamma_{ik}^i). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Como as curvaturas de Laguerre são constantes,  $(\mathcal{L}^{ikj})_{,k} = 0$ . Portanto, concluímos de (3.62) que  $r_j \Gamma_{jk}^j = r_i \Gamma_{ik}^i$ , para  $i, j, k$  distintos.

Reciprocamente, suponha que  $r_j \Gamma_{jk}^j = r_i \Gamma_{ik}^i$ , para  $i, j, k$  distintos. Por (3.62) temos,

$$\frac{1}{\mathcal{L}^{ikj}} (\mathcal{L}^{ikj})_{,k} = \frac{1}{r_k} (r_j \Gamma_{jk}^j - r_i \Gamma_{ik}^i) = \frac{1}{r_k} (r_j \Gamma_{jk}^j - r_j \Gamma_{jk}^j) = 0, \quad (3.63)$$

isto é,  $(\mathcal{L}^{ikj})_{,k} = 0$ . Então, pelas relações (3.19) temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{ikj} &= 1 - \mathcal{L}^{ijk} \\ \mathcal{L}^{jik} &= 1 - \frac{1}{\mathcal{L}^{ikj}}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Diferenciando (3.64) com relação a  $u_k$  e usando que  $(\mathcal{L}^{ikj})_{,k} = 0$  obtemos,

$$\begin{aligned} -(\mathcal{L}^{ijk})_{,k} &= (\mathcal{L}^{ikj})_{,k} = 0 \\ (\mathcal{L}^{jik})_{,k} &= \frac{(\mathcal{L}^{ikj})_{,k}}{(\mathcal{L}^{ikj})^2} = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, reordenando os índices da expressão (3.63) temos,

$$(\mathcal{L}^{jik})_{,i} = 0, \quad (\mathcal{L}^{ijk})_{,j} = 0.$$

Então, diferenciando (3.64) em relação a  $u_i$  e  $u_j$  e usando que  $(\mathcal{L}^{jik})_{,i} = 0$  e  $(\mathcal{L}^{ijk})_{,j} = 0$  obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^{ikj})_{,i} &= 0, \quad (\mathcal{L}^{ijk})_{,i} = 0, \\ (\mathcal{L}^{ikj})_{,j} &= 0, \quad (\mathcal{L}^{jik})_{,j} = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{L}^{ijk}$  não depende de  $u_i$ ,  $u_j$  e  $u_k$ . Se  $n = 3$ , então todas as curvaturas de Laguerre são constantes. Se  $n \geq 4$ , seja  $s$  qualquer índice distinto de  $i, j, k$ , segue da relação (3.20) que  $\mathcal{L}^{ikj} = \mathcal{L}^{iks} \mathcal{L}^{skj}$ . Como  $\mathcal{L}^{iks}$  e  $\mathcal{L}^{skj}$  não dependem de  $u_s$ , então  $\mathcal{L}^{ikj}$  não depende de  $u_s$  para todo  $s$  distinto de  $i, j, k$ . Portanto,  $\mathcal{L}^{ikj}$  é constante.  $\square$

O lema seguinte será usado para provar o resultado principal desta seção.

**Lema 19.** *Seja  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , com  $n \geq 3$ , uma hipersuperfície própria de Dupin parametrizada por linhas de curvaturas e que possua  $n$  curvaturas principais  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , distintas que não se anulam. Se todas as curvaturas de Laguerre são constantes então,*

$$\sqrt{g_{ii}} \left( 1 - \frac{r_j}{r_i} \right) = G_{ji}(u_i) = \mathcal{L}^{jik} G_{ki}(u_i) \text{ para } i, j, k \text{ distintos}, \quad (3.65)$$

onde  $r_i = \frac{1}{k_i}$  e  $G_{ji}(u_i)$  são funções diferenciável de  $u_i$  que não nulas.

*Demonstração.* Pelas equações (3.7) e (3.16) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_j} \ln(\sqrt{g_{ii}} |k_i - k_j|) &= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}(k_i - k_j)} (\sqrt{g_{ii}}(k_i - k_j))_{,j} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}(k_i - k_j)} \left[ \frac{g_{ii,j}(k_i - k_j)}{2\sqrt{g_{ii}}} + \sqrt{g_{ii}}(k_{i,j} - k_{j,j}) \right] \\ &= \Gamma_{ij}^i - \Gamma_{ij}^j = 0, \quad \forall i \neq j. \end{aligned}$$



Assim,

$$\sqrt{g_{ii}}(k_j - k_i) = F_{ji}(\hat{u}_j), \quad (3.66)$$

onde  $F_{ji}(\hat{u}_j)$  é independente de  $u_j$ . Como  $k_j = \frac{1}{r_j}$ , obtemos,

$$\begin{aligned} F_{ji}(\hat{u}_j) &= \sqrt{g_{ii}}(k_j - k_i) = \sqrt{g_{ii}} \left( \frac{r_i - r_j}{r_i r_j} \right), \\ F_{ki}(\hat{u}_k) &= \sqrt{g_{ii}}(k_k - k_i) = \sqrt{g_{ii}} \left( \frac{r_i - r_k}{r_i r_k} \right), \quad \forall i, j, k, \text{ distintos.} \end{aligned} \quad (3.67)$$

De (3.67) temos,

$$\begin{aligned} F_{ji}(\hat{u}_j) &= \sqrt{g_{ii}} \left( \frac{r_i - r_j}{r_i r_j} \right) \Rightarrow \sqrt{g_{ii}} = F_{ji}(\hat{u}_j) \frac{r_i r_j}{(r_i - r_j)}, \\ F_{ki}(\hat{u}_k) &= \sqrt{g_{ii}} \left( \frac{r_i - r_k}{r_i r_k} \right) \Rightarrow \sqrt{g_{ii}} = F_{ki}(\hat{u}_k) \frac{r_i r_k}{(r_i - r_k)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$F_{ji}(\hat{u}_j) \frac{r_i r_j}{(r_i - r_j)} = F_{ki}(\hat{u}_k) \frac{r_i r_k}{(r_i - r_k)},$$

ou seja,

$$r_j F_{ji}(\hat{u}_j) = \mathcal{L}^{jik} r_k F_{ki}(\hat{u}_k), \quad \forall i, j, k \text{ distintos.} \quad (3.68)$$

Por hipótese, todas as curvaturas de Laguerre são constantes. Como  $r_k F_{ki}(\hat{u}_k)$  não depende de  $u_k$ , pela igualdade (3.68) temos que  $r_j F_{ji}(\hat{u}_j)$  também não depende de  $u_k$ , onde  $k$  é distinto de  $i$  e  $j$ . Então,  $r_j F_{ji}(\hat{u}_j)$ , que já não dependia de  $u_j$ , também não depende de  $u_k$ . Logo,  $r_j F_{ji}(\hat{u}_j)$  depende apenas de  $u_i$ . Definindo  $G_{ji} = r_j F_{ji}$  segue das expressões (3.66) e (3.68), que

$$\sqrt{g_{ii}}(r_i - r_j) = r_i F_{ji}(\hat{u}_j) r_j = \mathcal{L}^{jik} r_k F_{ki}(\hat{u}_k) r_i \Rightarrow \sqrt{g_{ii}} \left( 1 - \frac{r_j}{r_i} \right) = G_{ji}(u_i) = \mathcal{L}^{jik} G_{ki}(u_i),$$

para  $i, j, k$  distintos. □

Com o propósito de provar o próximo resultado, relembremos as equações de Gauss e Codazzi para uma hipersuperfície parametrizada por linhas de curvatura, cuja curvaturas principais são funções  $k_i$ . Vamos reescrever as equações de Gauss e Codazzi dadas em (3.29) e (3.30) no contexto de formas diferenciais.

Primeiramente, apresentamos uma sucinta observação sobre imersões no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Considere  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície e  $p \in M^n$ . Seja  $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$  um referencial ortonormal móvel em uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$  de  $x(p)$  adaptado a  $x$ . Como a forma dual  $\omega_{n+1} = 0$ , pela equação de estrutura temos,

$$0 = d\omega_{n+1} = \sum_i \omega_i \wedge \omega_{i(n+1)}.$$

Então, pelo Lema de Cartan, existem funções  $h_{ij}^{n+1}$ , com  $h_{ij} = h_{ji}$ , tal que

$$\omega_{i(n+1)} = \sum_j h_{ij}^{n+1} \omega_j. \quad (3.69)$$

A forma quadrática  $II^{n+1} = \sum_{i,j} h_{ij} \omega_i \omega_j$  é chamada segunda forma fundamental com relação a  $e_{n+1}$ . Sendo  $II^{n+1}$  uma forma quadrática, fica associado um operador auto-adjunto  $-A^{n+1}$  tal que a matriz de  $A^{n+1}$  nesse referencial adaptado é dada por  $(-h_{ij}^{n+1})$ .

Considere agora, um referencial adaptado de direções principais, isto é,  $\{e_i\}_{i=1}^n$  são os autovetores associados ao operador  $-A^{n+1}$ . Como  $h_{ij}^{n+1}$  são as componentes da matriz  $-A^{n+1}$  temos,

$$h_{ii}^{n+1} = k_i \text{ e } h_{ij}^{n+1} = 0, \text{ } i \neq j. \quad (3.70)$$

Logo, por (3.69) e (3.70) temos,  $\omega_{i(n+1)} = k_i \omega_i$ .

Vamos agora determinar a forma dual  $\omega_i$  e a forma de conexão  $\omega_{ij}$  para a métrica (3.1), dada por  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} g_{ii}$ . Primeiramente, escolha o referencial

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} x_{,i}. \quad (3.71)$$

Dado o referencial móvel (3.71), consideramos a forma dual  $\omega_i$  associada a  $\{e_i\}_{i=1}^n$ , onde  $\omega_i$  são 1-forma, ou seja,  $\omega_i = a du_i$  tais que  $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ . Assim, obtemos

$$1 = \omega_i(e_i) = a du_i \left( \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} x_{,i} \right) = a \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}.$$

Logo,

$$\omega_i = \sqrt{g_{ii}} du_i. \quad (3.72)$$

Vamos determinar a forma de conexão  $\omega_{ij}$ . Tomando a derivada exterior da expressão (3.72) temos,

$$\begin{aligned}
d\omega_i &= d(\sqrt{g_{ii}}) \wedge du_i \\
&= \frac{1}{2\sqrt{g_{ii}}} \sum_j \frac{\partial g_{ii}}{\partial u_j} du_j \wedge du_i \\
&= -\sum_j \frac{1}{2\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} g_{ii,j} du_i \wedge \sqrt{g_{jj}} du_j \\
&= -\sum_j \ell_{ji} du_i \wedge \sqrt{g_{jj}} du_j \\
&= \sum_j (\ell_{ij} du_j - \ell_{ji} du_i) \wedge \sqrt{g_{jj}} du_j \\
&= \sum_j (\ell_{ij} du_j - \ell_{ji} du_i) \wedge \omega_j.
\end{aligned}$$

Então,

$$\omega_{ij} = \ell_{ij} du_j - \ell_{ji} du_i,$$

onde

$$\ell_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial \sqrt{g_{jj}}}{\partial u_i}. \quad (3.73)$$

No que segue, vamos reescrever a equação de Codazzi dada em (3.29) e a equação de Gauss (3.30) no contexto de formas diferenciais.

Primeiramente, reescrevendo a equação de Codazzi dada em (3.29) e usando a definição de raio de curvatura temos,

$$\frac{r_{i,j} r_j}{(r_j - r_i) r_i} = \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} \Rightarrow \left( \frac{1}{k_i} \right)_{,j} \left( \frac{(k_i)^2}{(k_i - k_j)} \right) = \frac{\partial}{\partial u_j} (\ln \sqrt{g_{ii}}).$$

Logo,

$$\frac{\partial k_i}{\partial u_j} + (k_i - k_j) \frac{\partial \ln(\sqrt{g_{ii}})}{\partial u_j} = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (3.74)$$

Em (3.30) a equação de Gauss é dada por,

$$k_i k_j + \frac{A_{ji}}{g_{ii}} + \frac{A_{ij}}{g_{jj}} + \sum_{k \neq i \neq j} \frac{\Gamma_{ik}^i \Gamma_{jk}^j}{g_{kk}} = 0, \quad (3.75)$$

onde  $i \neq j$  e  $A_{ji} = \Gamma_{ji,i}^j + \Gamma_{ji}^j (\Gamma_{ji}^j - \Gamma_{ii}^i)$ .

Pelas expressões (3.16) e (3.73) seguem os seguintes cálculos,

$$\begin{aligned}
\frac{A_{ji}}{g_{ii}} &= \frac{\Gamma_{ji,i}^j + \Gamma_{ji}^j (\Gamma_{ji}^j - \Gamma_{ii}^i)}{g_{ii}} = \frac{2g_{jj}g_{jj,ii} - 2g_{jj,i}^2}{4g_{jj}^2g_{ii}} + \frac{g_{jj,i}}{2g_{jj}g_{ii}} \left( \frac{g_{jj,i}}{2g_{jj}} - \frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} \left( -\frac{g_{jj,i}g_{ii,i}}{4g_{ii}\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} + \frac{g_{jj,ii}\sqrt{g_{jj}}}{2g_{jj}\sqrt{g_{ii}}} - \frac{(g_{jj,i})^2}{4g_{jj}\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} \left( \frac{\partial \ell_{ij}}{\partial u_i} \right). \tag{3.76}
\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
\frac{A_{ij}}{g_{jj}} &= \frac{\Gamma_{ij,j}^i + \Gamma_{ij}^i (\Gamma_{ij}^i - \Gamma_{jj}^j)}{g_{jj}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} \left( \frac{\partial \ell_{ji}}{\partial u_j} \right). \tag{3.77}
\end{aligned}$$

Além disso, por (3.16) e (3.73) temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \neq i \neq j} \frac{\Gamma_{ik}^i \Gamma_{jk}^j}{g_{kk}} &= \sum_{k \neq i \neq j} \frac{1}{g_{kk}} \left( \frac{g_{ii,k}}{2g_{ii}} \right) \left( \frac{g_{jj,k}}{2g_{jj}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} \sum_{k \neq i \neq j} \ell_{ki} \ell_{kj}. \tag{3.78}
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (3.76), (3.77) e (3.78) em (3.30) obtemos,

$$\frac{\partial \ell_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial \ell_{ji}}{\partial u_j} + \sum_{k \neq i \neq j} \ell_{ki} \ell_{kj} + k_i k_j \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} = 0, \quad i \neq j. \tag{3.79}$$

e

$$\frac{\partial \ell_{ji}}{\partial u_k} - \ell_{ik} \ell_{kj} = 0, \quad \forall i, j, k \text{ distintos}. \tag{3.80}$$

O Teorema a seguir fornece uma caracterização das hipersuperfícies de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 3$ , com todas as curvaturas principais distintas e curvaturas de Laguerre constantes, que admitem uma parametrização por linhas de curvatura, em termos de seus raios de curvatura e de sua primeira forma fundamental.

**Teorema 20.** *Seja  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , com  $n \geq 3$ , uma hipersuperfície de Dupin própria, parametrizada por linhas de curvaturas  $x(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , com  $n$  curvaturas principais  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  distintas e não nulas e curvaturas de Laguerre constantes. Então, existem funções*

diferenciáveis  $F_i(u_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  com  $F_i' \neq 0$  e  $n$  constantes  $\tilde{c}$ ,  $C \neq 0$ ,  $D$  e  $D_s$ ,  $s \geq 4$ , quando  $n \geq 3$  satisfazendo

$$D, D_s \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, D_s \neq \frac{1}{(1-D)}, D_s \neq D_t, \text{ para } s \neq t, s, t \geq 4, \quad (3.81)$$

tal que, a menos de reordenação dos índices, os raios de curvatura  $r_i = \frac{1}{k_i}$  são dados por

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{D}{4C(D-1)} \left[ -F_2^2 - \left( \frac{D-1}{D} \right) F_3^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{1}{(D_s-1)} F_s^2 \right] - C + \tilde{c} \\ r_2 &= \frac{D}{4C(D-1)} \left[ F_1^2 - \left( \frac{D-1}{D^2} \right) F_3^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{D_s}{(D_s-1)^2} F_s^2 \right] - \frac{C}{D} + \tilde{c} \\ r_3 &= \frac{D}{4C(D-1)^2} \left[ DF_1^2 + F_2^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{DD_s - D_s + 1}{(D_s-1)^2} F_s^2 \right] + \tilde{c} \\ r_s &= D_s r_1 - (D_s - 1) r_2, \text{ para } s \geq 4, \end{aligned} \quad (3.82)$$

onde  $D = \mathcal{L}^{132}$ ,  $D_s = \mathcal{L}^{s21}$  e a métrica diagonal dada por

$$\sqrt{g_{11}} = \frac{-F_1' r_1}{r_2 - r_1} \text{ e } \sqrt{g_{jj}} = \frac{F_j' r_j}{r_j - r_1}, \quad j \geq 2. \quad (3.83)$$

Reciprocamente, dadas funções diferenciáveis  $F_i(u_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 3$ , com  $F_i' \neq 0$  e  $n$  constantes  $\tilde{c}$ ,  $C \neq 0$ ,  $D$  e  $D_s$ ,  $s \geq 4$  satisfazendo (3.81), a menos de movimento rígido, existe uma única hipersuperfície de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvatura de Laguerre constante  $D = \mathcal{L}^{132}$ ,  $D_s = \mathcal{L}^{s21}$ , parametrizada por linhas de curvatura, cujos raios de curvatura e a métrica são dadas por (3.82) e (3.83), respectivamente.

*Demonstração.* Considere  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , com  $n \geq 3$ , uma hipersuperfície de Dupin própria parametrizada por linhas de curvaturas e que possua  $n$  curvaturas principais  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , distintas que não se anulam. Suponha que as curvaturas de Laguerre sejam constante. Então, pela Proposição 13, a menos de reordenação dos índices, os raios de

curvatura são dados por,

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{k_1} = -(D-1)h_2 + h_3 + \sum_{s \geq 4} \left(1 - \frac{1}{D_s}\right) h_s \\ r_2 &= \frac{1}{k_2} = \left(1 - \frac{1}{D}\right) h_2 + \frac{1}{D} h_3 + \sum_{s \geq 4} h_s \\ r_3 &= \frac{1}{k_3} = h_1 + h_2 + \sum_{s \geq 4} \left(1 + \frac{1}{D_s(D-1)}\right) h_s \\ r_s &= \frac{1}{k_s} = D_s r_1 + (1 - D_s) r_2 \text{ para } s \geq 4, \end{aligned} \quad (3.84)$$

onde

$$D = \mathcal{L}^{132}, \quad D_s = \mathcal{L}^{s21},$$

satisfazendo

$$D, D_s \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, \quad D_s \neq \frac{1}{(1-D)}, \quad D_s \neq D_t, \text{ para } s \neq t, s, t \geq 4,$$

e  $h_i(u_i)$  para  $i = 1, \dots, n$  são funções diferenciáveis tais que

$$H = h_1 + Dh_2 - h_3 + \sum_{s \geq 4} \left(\frac{D}{D_s(D-1)}\right) h_s \neq 0. \quad (3.85)$$

Além disso, a diferença entre os raios de curvaturas satisfazem (3.55). Note que as curvaturas de Laguerre  $\mathcal{L}^{ijk} \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ , uma vez que todas as curvaturas principais são distintas e não nulas. Como as curvaturas de Laguerre são constantes, segue pelo Lema 19

$$\sqrt{g_{ii}} \left(1 - \frac{r_j}{r_i}\right) = G_{ji}(u_i) = \mathcal{L}^{jik} G_{ki}(u_i) \text{ para } i, j, k \text{ distintos}, \quad (3.86)$$

onde  $G_{ji}(u_i)$  são funções diferenciável de  $u_i$  que não se anulam. Defina  $F_i(u_i)$ , onde  $F_i$  são funções diferenciáveis que dependem apenas de  $u_i$  para  $i = 1, \dots, n$ , como segue,

$$F'_1(u_1) = G_{21}(u_1) \text{ e } F'_j(u_j) = G_{1j}(u_j), \quad j \geq 2. \quad (3.87)$$

Então, das expressões (3.86) e (3.87) temos a métrica dada em (3.83) como segue,

$$\sqrt{g_{11}} \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) = G_{21}(u_1) \Rightarrow \sqrt{g_{11}} = -\frac{F'_1(u_1)r_1}{(r_2 - r_1)}, \quad (3.88)$$

e

$$\sqrt{g_{jj}} \left(1 - \frac{r_1}{r_j}\right) = G_{1j}(u_j) \Rightarrow \sqrt{g_{jj}} = \frac{F'_j(u_j)r_j}{(r_j - r_1)}, \quad j \geq 2. \quad (3.89)$$

A fim de utilizar a equação de Gauss dada em (3.79), queremos obter expressões para  $\ell_{ij}$  definidas por (3.73) em termos das funções  $H_i$ ,  $F'_i$  e dos raios de curvatura. De acordo com as expressões obtidas em (3.55), temos que  $r_j - r_i$  são múltiplos de  $H$ , conseqüentemente podemos escrever  $\ln(H)_{,i} = (\ln(r_j - r_i))_{,i}$ . Então,

$$\begin{aligned} \ln(H)_{,i} &= (\ln(r_j - r_i))_{,i} \\ \frac{H_{,i}}{H} &= \frac{(r_j - r_i)_{,i}}{(r_j - r_i)} \\ \frac{H_{,i}}{H} &= \frac{r_{j,i}}{(r_j - r_i)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$r_{j,i} = \frac{H_{,i}}{H}(r_j - r_i), \quad i \neq j. \quad (3.90)$$

Segue de (3.73) e (3.83) que se  $i \neq j$  e  $i, j \geq 2$  temos,

$$\begin{aligned} \ell_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial \sqrt{g_{jj}}}{\partial u_i} \\ \ell_{ij} &= \left( \frac{(F'_j r_{j,i})(r_j - r_1) - (F'_j r_j)(r_{j,i} - r_{1,i})}{(r_j - r_1)^2} \right) \frac{(r_i - r_1)}{F'_i r_i} \\ \ell_{ij} &= \frac{F'_j (r_i - r_1)}{F'_i r_i (r_j - r_1)^2} (-r_{j,i} r_1 + r_{1,i} r_j). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Substituindo (3.90) em (3.91),

$$\begin{aligned} \ell_{ij} &= \frac{F'_j (r_i - r_1)}{F'_i r_i (r_j - r_1)^2} (-r_{j,i} r_1 + r_{1,i} r_j) \\ \ell_{ij} &= \frac{F'_j (r_i - r_1)}{F'_i r_i (r_j - r_1)^2} \left( -\frac{H_{,i}}{H} (r_j - r_i) r_1 + r_{1,i} r_j \right) \\ \ell_{ij} &= \frac{F'_j (r_i - r_1)}{F'_i r_i (r_j - r_1)^2} \left( -\frac{H_{,i} r_1 r_j}{H} + \frac{H_{,i} r_1 r_i}{H} - \frac{H_{,i} r_j}{H} (r_i - r_1) \right) \\ \ell_{ij} &= \frac{F'_j}{F'_i} \left( \frac{-r_i r_1 r_j H_{,i} + r_i^2 r_1 H_{,i} + r_1^2 r_j H_{,i} - r_1^2 r_i H_{,i}}{r_i (r_j - r_1)^2 H} - \frac{H_{,i} r_j}{H r_i (r_j - r_1)^2} (r_i - r_1)^2 \right) \\ \ell_{ij} &= \frac{F'_j}{F'_i} \left( \frac{H_{,i}}{H (r_j - r_1)^2} \left[ \frac{-r_i r_1 r_j + r_i^2 r_1 + r_1^2 r_j - r_1^2 r_i - r_j (r_1 - r_i)^2}{r_i} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\frac{-r_i r_1 r_j + r_i^2 r_1 + r_1^2 r_j - r_1^2 r_i - r_j(r_1 - r_i)^2}{r_i} &= \frac{r_j[-r_i r_1 + r_1^2 - (r_1 - r_i)^2] - r_1(r_1 r_i - r_i^2)}{r_i} \\
&= \frac{r_j[(r_1 - r_i)(r_1 - (r_1 - r_i))] - r_1(r_i(r_1 - r_i))}{r_i} \\
&= \frac{r_j(r_1 - r_i)r_i - r_1 r_i(r_1 - r_i)}{r_i} \\
&= (r_1 - r_i)(r_j - r_1). \tag{3.93}
\end{aligned}$$

Logo, substituindo (3.93) em (3.92) temos,

$$\ell_{ij} = \frac{F'_j H_i}{F'_i H(r_j - r_1)^2} (r_1 - r_i)(r_j - r_1) = \frac{-F'_j H_i (r_i - r_1)}{F'_i H(r_j - r_1)}, \quad i \neq j, \quad i, j \geq 2. \tag{3.94}$$

Analogamente, utilizando as expressões (3.73), (3.83) e (3.90) obtemos,

$$\ell_{1j} = \frac{F'_j H_{,1}(r_2 - r_1)}{F'_1 H(r_j - r_1)}, \quad \ell_{j1} = \frac{F'_1 H_{,j}(r_j - r_1)}{F'_j H(r_2 - r_1)}, \quad j \geq 2. \tag{3.95}$$

Note que as expressões de  $\ell_{ij}$  para o caso  $i = 1$  e  $j = 1$  foram obtidas separadamente pois se  $i = 1$  em (3.94) temos  $\ell_{1j} = 0$  e se  $j = 1$ , trocando  $i$  por  $j$  em (3.94), temos  $\ell_{j1} = 0$ .

No que segue, como a equação de Gauss (3.30) é válida, podemos reescrever a equação de Gauss utilizando as equações (3.94) e (3.95) como segue.

Primeiro, considere  $i = 1$  e  $j = 2$ . Por (3.95) temos,

$$\ell_{12} = \frac{F'_2 H_{,1}}{F'_1 H}, \quad \ell_{21} = \frac{F'_1 H_{,2}}{F'_2 H}. \tag{3.96}$$

Diferenciando  $\ell_{12}$  e  $\ell_{21}$ , dadas em (3.96), com relação a  $u_1$  e  $u_2$ , respectivamente temos

$$\frac{\partial \ell_{12}}{\partial u_1} = \frac{F'_2}{F'_1 H} \frac{\partial H_{,1}}{\partial u_1} - \frac{F'_2 H_{,1} F''_1}{(F'_1)^2 H} - \frac{F'_2 (H_{,1})^2}{F'_1 H^2}, \tag{3.97}$$

$$\frac{\partial \ell_{21}}{\partial u_2} = \frac{F'_1}{F'_2 H} \frac{\partial H_{,2}}{\partial u_2} - \frac{F'_1 H_{,2} F''_2}{(F'_2)^2 H} - \frac{F'_1 (H_{,2})^2}{F'_2 H^2}.$$

Temos ainda,

$$\ell_{k1} \ell_{k2} = \frac{-F'_1 F'_2 (H_{,k})^2 (r_k - r_1)^2}{(F'_k)^2 H^2 (r_2 - r_1)^2}. \tag{3.98}$$



Por (3.83), obtemos

$$k_1 k_2 \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} = \frac{-F_1' F_2'}{(r_2 - r_1)^2}. \quad (3.99)$$

Então, pelas expressões (3.79) e (3.97) a (3.99) temos que a equação de Gauss se reduz a,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \ell_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \ell_{21}}{\partial u_2} + \sum_{k \neq i, k \neq j} \ell_{k1} \ell_{k2} + k_1 k_2 \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \\ 0 &= \frac{F_2'}{H} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F_1'} \right) \right) + \frac{F_1'}{H} \left( \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F_2'} \right) \right) - \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{F_1' F_2' (H_{,k})^2 (r_k - r_1)^2}{(F_k')^2 H^2 (r_2 - r_1)^2} - \frac{F_2' (H_{,1})^2}{F_1' H^2} \\ &\quad - \frac{F_1' (H_{,2})^2}{F_2' H^2} - \frac{F_1' F_2'}{(r_2 - r_1)^2}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Multiplicando a expressão (3.100) por  $\frac{(r_2 - r_1)^2 H^2}{F_1' F_2'}$  obtemos,

$$0 = (r_2 - r_1)^2 \left[ \frac{H}{F_1'} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F_1'} \right) + \frac{H}{F_2'} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F_2'} \right) \right] - Q,$$

onde

$$Q = (r_2 - r_1)^2 \left( \frac{H_{,1}}{F_1'} \right)^2 + \sum_{k \geq 2} \left( \frac{H_{,k}}{F_k'} \right)^2 (r_k - r_1)^2 + H^2. \quad (3.101)$$

De maneira análoga, considerando  $i = 1$  e  $j \geq 3$  e substituindo as expressões (3.83), (3.94) e (3.95) na equação de Gauss (3.79) temos,

$$(r_2 - r_1)^2 \frac{H}{F_1'} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F_1'} \right) + (r_j - r_1)^2 \frac{H}{F_j'} \frac{\partial}{\partial u_j} \left( \frac{H_{,j}}{F_j'} \right) - Q = 0, \quad (3.102)$$

onde  $Q$  é dado por (3.101). Considerando  $i \geq 2$  e  $j \geq 3$ ,  $i \neq j$ , e fazendo os mesmos cálculos para obter as equações (3.101) e (3.102), temos

$$(r_i - r_1)^2 \frac{H}{F_i'} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{H_{,i}}{F_i'} \right) + (r_j - r_1)^2 \frac{H}{F_j'} \frac{\partial}{\partial u_j} \left( \frac{H_{,j}}{F_j'} \right) - Q = 0, \quad (3.103)$$

onde  $Q$  é dado por (3.101). Subtraindo (3.101) de (3.102), com  $j = 3$  e usando (3.55), segue que existe uma constante tal que,

$$\begin{aligned} 0 &= (r_2 - r_1)^2 \left[ \frac{H}{F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) + \frac{H}{F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) \right] - Q \\ &\quad - (r_2 - r_1)^2 \frac{H}{F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) - (r_3 - r_1)^2 \frac{H}{F'_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_{,3}}{F'_3} \right) + Q \\ 0 &= (r_2 - r_1)^2 \frac{H}{F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) - (r_3 - r_1)^2 \frac{H}{F'_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_{,3}}{F'_3} \right) \\ 0 &= \frac{(D-1)^2 H^2}{D^2} \frac{H}{F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) - H^2 \frac{H}{F'_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_{,3}}{F'_3} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{(D-1)^2}{D^2 F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) = A, \quad (3.104)$$

$$\frac{1}{F'_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_{,3}}{F'_3} \right) = A. \quad (3.105)$$

Subtraindo (3.101) de (3.103), com  $i = 2$ ,  $j = 3$  e usando (3.55) segue que,

$$\begin{aligned} 0 &= (r_2 - r_1)^2 \left[ \frac{H}{F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) + \frac{H}{F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) \right] - Q \\ &\quad - (r_2 - r_1)^2 \frac{H}{F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) - (r_3 - r_1)^2 \frac{H}{F'_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_{,3}}{F'_3} \right) + Q \\ 0 &= (r_2 - r_1)^2 \frac{H}{F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) - (r_3 - r_1)^2 \frac{H}{F'_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_{,3}}{F'_3} \right) \\ 0 &= \frac{(D-1)^2 H^2}{D^2} \frac{H}{F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) - H^2 \frac{H}{F'_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_{,3}}{F'_3} \right). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Então, utilizando (3.105) em (3.106) obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{(D-1)^2}{D^2 F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) &= \frac{1}{F'_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_{,3}}{F'_3} \right) \\ \frac{(D-1)^2}{D^2 F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) &= A. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Subtraindo (3.101) de (3.102), com  $s = j \geq 4$  e usando (3.55), temos

$$\begin{aligned}
0 &= (r_2 - r_1)^2 \left[ \frac{H}{F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) + \frac{H}{F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) \right] - Q \\
&\quad - (r_2 - r_1)^2 \frac{H}{F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) - (r_s - r_1)^2 \frac{H}{F'_s} \frac{\partial}{\partial u_s} \left( \frac{H_{,s}}{F'_s} \right) + Q \\
0 &= (r_2 - r_1)^2 \frac{H}{F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) - (r_s - r_1)^2 \frac{H}{F'_s} \frac{\partial}{\partial u_s} \left( \frac{H_{,s}}{F'_s} \right) \\
0 &= \frac{(D-1)^2 H^2}{D^2} \frac{H}{F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) - \left( \frac{-(D_s-1)(D-1)H}{D} \right)^2 \frac{H}{F'_s} \frac{\partial}{\partial u_s} \left( \frac{H_{,s}}{F'_s} \right) \quad (3.108)
\end{aligned}$$

Logo, usando (3.104) em (3.108) temos,

$$\begin{aligned}
\frac{(D-1)^2}{D^2 F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) &= \frac{-(D_s-1)^2 (D-1)^2}{D^2 F'_s} \frac{\partial}{\partial u_s} \left( \frac{H_{,s}}{F'_s} \right) \\
\frac{-(D_s-1)^2 (D-1)^2}{D^2 F'_s} \frac{\partial}{\partial u_s} \left( \frac{H_{,s}}{F'_s} \right) &= A. \quad (3.109)
\end{aligned}$$

Note que  $A \neq 0$ . De fato, suponha que  $A = 0$ . Por (3.55), (3.101), (3.104) e (3.107) temos,

$$\begin{aligned}
(r_2 - r_1)^2 \left[ \frac{H}{F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) + \frac{H}{F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) \right] - Q &= 0 \\
\frac{(D-1)^2 H^3}{D^2 F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) + \frac{(D-1)^2 H^3}{D^2 F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) - Q &= 0 \\
H^3 A + H^3 A - Q &= 0 \\
Q &= 0.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
0 &= Q = (r_2 - r_1)^2 \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right)^2 + \sum_{k \geq 2} \left( \frac{H_{,k}}{F'_k} \right)^2 (r_k - r_1)^2 + H^2. \\
0 &= \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right)^2 \frac{(D-1)^2}{D^2} H^2 + \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right)^2 \frac{(D-1)^2}{D^2} H^2 + \left( \frac{H_{,3}}{F'_3} \right)^2 H^2 + \\
&\quad + \sum_{s \geq 4} \left( \frac{H_{,s}}{F'_s} \right)^2 \frac{(D-1)^2 (D_s - 1)^2}{D^2} H^2 + H^2 \\
0 &= H^2 \left( \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right)^2 \frac{(D-1)^2}{D^2} + \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right)^2 \frac{(D-1)^2}{D^2} + \left( \frac{H_{,3}}{F'_3} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s \geq 4} \left( \frac{H_{,s}}{F'_s} \right)^2 \frac{(D-1)^2 (D_s - 1)^2}{D^2} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Logo,  $H = 0$ , o que é uma contradição. Portanto,  $A \neq 0$ .

Integrando as equações (3.104), (3.105), (3.107) e (3.109) com relação a  $u_2, u_3, u_1$ , e  $u_s$   $s \geq 4$ , respectivamente obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{(D-1)^2}{D^2 F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) &= A \Rightarrow H_{,2} = \frac{AD^2}{(D-1)^2} F_2 F'_2 + b_2 F'_2, \\
\frac{1}{F'_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_{,3}}{F'_3} \right) &= A \Rightarrow H_{,3} = A F_3 F'_3 + b_3 F'_3, \\
\frac{(D-1)^2}{D^2 F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) &= A \Rightarrow H_{,1} = \frac{AD^2}{(D-1)^2} F_1 F'_1 + b_1 F'_1, \\
\frac{(D_s - 1)^2 (D-1)^2}{D^2 F'_s} \frac{\partial}{\partial u_s} \left( \frac{H_{,s}}{F'_s} \right) &= A \Rightarrow H_{,s} = \frac{AD^2}{(D_s - 1)^2 (D-1)^2} F_s F'_s + b_s F'_s,
\end{aligned} \tag{3.110}$$

onde  $b_i \in \mathbb{R}$ . Agora, considere as seguintes constantes não nulas,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{D^2}{2(D-1)^2}, & A_2 &= \frac{D}{2(D-1)^2}, \\
A_3 &= \frac{-1}{2}, & A_s &= \frac{DD_s}{2(D-1)(D_s-1)^2} \quad s \geq 4.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

No que segue, vamos obter uma expressão  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  em termos da função  $F_i$  e das constantes  $A$ ,  $b_i$  e  $A_i$ . Temos que  $H$  é dada por,

$$H = h_1 + Dh_2 - h_3 + \sum_{s \geq 4} \frac{D}{D_s(D-1)} h_s. \quad (3.112)$$

Derivando (3.112) com relação a  $u_1$  e utilizando (3.110) e (3.111) temos,

$$h'_1 = H_{,1} = \frac{AD^2}{(D-1)^2} F_1 F'_1 + b_1 F'_1 = \frac{AD^2}{2(D-1)^2} (F_1^2)' + b_1 F'_1 = AA_1 (F_1^2)' + b_1 F'_1,$$

isto é,

$$h'_1 = AA_1 (F_1^2)' + b_1 F'_1. \quad (3.113)$$

Integrando a equação (3.113) com relação a  $u_1$  obtemos,

$$h_1 = AA_1 (F_1)^2 + b_1 F_1 + c_1,$$

onde  $c_1 \in \mathbb{R}$ .

Derivando (3.112) com relação a  $u_2$  e utilizando (3.110) e (3.111) temos,

$$Dh'_2 = H_{,2} = \frac{AD^2}{(D-1)^2} F_2 F'_2 + b_2 F'_2 \Rightarrow h'_2 = \frac{AD}{(D-1)^2} F_2 F'_2 + b_2 F'_2,$$

então,

$$h'_2 = AA_2 (F_2^2)' + b_2 F'_2. \quad (3.114)$$

Integrando (3.114) com relação a  $u_2$ ,

$$h_2 = AA_2 (F_2)^2 + b_2 F_2 + c_2,$$

onde  $c_2 \in \mathbb{R}$ .

Analogamente derivando (3.112) com relação a  $u_3$  e  $u_s$ ,  $s \geq 4$  e utilizando as expressões (3.110) e (3.111) obtemos,

$$h_3 = AA_3 (F_3)^2 + b_3 F_3 + c_3, \text{ e } h_s = AA_s (F_s)^2 + b_s F_s + c_s, \text{ } s \geq 4,$$

onde  $c_3, c_s \in \mathbb{R}$ . Portanto, podemos reescrever as expressões anteriores de maneira geral como sendo,

$$h_i = AA_i (F_i)^2 + b_i F_i + c_i, \quad (3.115)$$

onde  $c_i \in \mathbb{R}$ . Como a métrica  $g_{ii}$  é dada, por (3.83), em termos das derivadas de  $F_i$  e  $A \neq 0$  podemos considerar, sem perda de generalidade,  $b_i = 0$ , isto é,

$$h_i = AA_i(F_i)^2 + c_i, \quad c_i \in \mathbb{R}. \quad (3.116)$$

Com a finalidade de simplificar a notação, denote

$$T_i = \delta_{i1}A_1 + \delta_{i2}DA_2 - \delta_{i3}A_3 + \delta_{is} \sum_{s \geq 4} \frac{DA_s}{D_s(D-1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.117)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Então, por (3.55), (3.111) e (3.117) temos,

$$T_1(r_2 - r_1)^2 = A_1 \frac{(D-1)^2 H^2}{D^2} = \frac{D^2}{2(D-1)^2} \frac{(D-1)^2 H^2}{D^2} = \frac{H^2}{2}, \quad i \neq 1. \quad (3.118)$$

Além disso, por (3.117) segue que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{h_i T_i}{A_i} &= \frac{h_1 T_1}{A_1} + \frac{h_2 T_2}{A_2} + \frac{h_3 T_3}{A_3} + \frac{h_4 T_4}{A_4} + \dots + \frac{h_n T_n}{A_n} \\ &= \frac{h_1 A_1}{A_1} + \frac{h_2 DA_2}{A_2} - \frac{h_3 A_3}{A_3} + \frac{h_4 DA_4}{(D_4(D-1))A_4} + \dots + \frac{h_n DA_n}{D_n(D-1)A_n} \\ &= h_1 + Dh_2 - h_3 + \sum_{s \geq 4} \frac{h_s D}{D_s(D-1)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_i \frac{h_i T_i}{A_i} = H. \quad (3.119)$$

Derivando (3.116) em relação a  $u_i$  e usando (3.117), temos para todo  $i$ ,

$$H_{,i} = h'_i = 2AA_i F_i F'_i \Rightarrow \frac{H_{,i}}{F'_i} = 2AF_i T_i. \quad (3.120)$$

Portanto, a partir de (3.118) e (3.120), reescrevemos a expressão de  $Q$  dada em (3.101) como segue,

$$\begin{aligned} Q &= (r_2 - r_1)^2 \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right)^2 + \sum_{k \geq 2} \left( \frac{H_{,k}}{F'_k} \right)^2 (r_k - r_1)^2 + H^2 \\ Q &= (2AF_1 T_1)^2 (r_2 - r_1)^2 + \sum_{k \geq 2} (2AF_k T_k)^2 (r_k - r_1)^2 + H^2 \\ Q &= 2A^2 H^2 \sum_{i=1}^n F_i^2 T_i + H^2. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Segue de (3.55), (3.101), (3.104), (3.107), (3.116) e (3.121) que,

$$\begin{aligned}
0 &= (r_2 - r_1)^2 \left[ \frac{H}{F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) + \frac{H}{F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) \right] - Q \\
0 &= (r_2 - r_1)^2 \left[ \frac{H}{F'_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_{,1}}{F'_1} \right) + \frac{H}{F'_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_{,2}}{F'_2} \right) \right] - 2A^2 H^2 \sum_i^n F_i^2 T_i - H^2 \\
0 &= 2AH^3 - 2A^2 H^2 \sum_i^n F_i^2 T_i - H^2 \\
0 &= 2AH^3 - 2AH^2 \sum_i^n \left( \frac{(h_i - c_i)}{A_i} \right) T_i - H^2.
\end{aligned} \tag{3.122}$$

Note que, por (3.117) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{c_i T_i}{A_i} &= \frac{c_1 T_1}{A_1} + \frac{c_2 T_2}{A_2} + \frac{c_3 T_3}{A_3} + \frac{c_4 T_4}{A_4} + \dots + \frac{c_n T_n}{A_n} \\
&= c_1 + Dc_2 - c_3 + \sum_{s \geq 4} \frac{c_s D}{D_s(D-1)}.
\end{aligned}$$

Logo, denotamos

$$\mathcal{C} := c_1 + Dc_2 - c_3 + \sum_{s \geq 4} \frac{c_s D}{D_s(D-1)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i T_i}{A_i}. \tag{3.123}$$

Usando as expressões dadas em (3.119), (3.122) e (3.123) temos,

$$2AH^3 - 2AH^2 \left( \sum_i^n \frac{h_i T_i}{A_i} - \sum_i^n \frac{c_i T_i}{A_i} \right) - H^2 = 0 \tag{3.124}$$

$$2AH^3 - 2AH^2 (H - \mathcal{C}) - H^2 = 0. \tag{3.125}$$

Então,

$$A = \frac{1}{2\mathcal{C}},$$

isto é,  $\mathcal{C} \neq 0$ . Logo, reescrevendo (3.116) temos,

$$h_i = AA_i(F_i)^2 + c_i \Rightarrow h_i = \frac{A_i}{2\mathcal{C}}(F_i)^2 + c_i. \tag{3.126}$$

Por fim, vamos obter as expressões dos raios de curvaturas dada em (3.82) a partir das equações (3.31), (3.111) e (3.126) como segue.

$$\begin{aligned}
r_1 &= -(D-1)h_2 + h_3 + \sum_{s \geq 4} \left(1 - \frac{1}{D_s}\right) h_s \\
&= -(D-1) \left( \frac{A_2(F_2)^2}{2\mathcal{C}} + c_2 \right) + \frac{A_3(F_3)^2}{2\mathcal{C}} + c_3 + \sum_{s \geq 4} \left( \frac{D_s - 1}{D_s} \right) \left( \frac{A_s(F_s)^2}{2\mathcal{C}} + c_s \right) \\
&= \frac{-D}{4\mathcal{C}(D-1)} (F_2)^2 - c_2(D-1) - \frac{(F_3)^2}{4\mathcal{C}} + c_3 + \sum_{s \geq 4} \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)(D_s-1)} (F_s)^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{(D_s-1)}{D_s} c_s \\
&= \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \left[ -F_2^2 - \left( \frac{D-1}{D} \right) F_3^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{1}{(D_s-1)} F_s^2 \right] - c_2(D-1) + c_3 + \sum_{s \geq 4} \frac{(D_s-1)}{D_s} c_s \\
&= \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \left[ -F_2^2 - \left( \frac{D-1}{D} \right) F_3^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{1}{(D_s-1)} F_s^2 \right] - \mathcal{C} + \tilde{c},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= \left(1 - \frac{1}{D}\right) h_1 + \frac{1}{D} h_3 + \sum_{s \geq 4} h_s \\
&= \left( \frac{D-1}{D} \right) \left( \frac{A_1(F_1)^2}{2\mathcal{C}} + c_1 \right) + \frac{1}{D} \left( \frac{A_3(F_3)^2}{2\mathcal{C}} + c_3 \right) + \sum_{s \geq 4} \left( \frac{A_s(F_s)^2}{2\mathcal{C}} + c_s \right) \\
&= \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} (F_1)^2 + \frac{(D-1)}{D} c_1 - \frac{(F_3)^2}{4\mathcal{C}D} + \frac{c_3}{D} + \sum_{s \geq 4} \frac{DD_s}{4\mathcal{C}(D-1)(D_s-1)} (F_s)^2 + \sum_{s \geq 4} c_s \\
&= \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \left[ F_1^2 - \left( \frac{D-1}{D^2} \right) F_3^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{D_s}{(D_s-1)} F_s^2 \right] + \frac{(D-1)}{D} c_1 + \frac{c_3}{D} + \sum_{s \geq 4} c_s \\
&= \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \left[ F_1^2 - \left( \frac{D-1}{D^2} \right) F_3^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{D_s}{(D_s-1)} F_s^2 \right] - \frac{\mathcal{C}}{D} + \tilde{c},
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
r_3 &= h_1 + h_2 + \sum_{s \geq 4} \left(1 + \frac{1}{D_s(D-1)}\right) h_s \\
&= \left(\frac{A_1(F_1)^2}{2\mathcal{C}} + c_1\right) + \left(\frac{A_2(F_2)^2}{2\mathcal{C}} + c_2\right) + \sum_{s \geq 4} \left(1 + \frac{1}{D_s(D-1)}\right) \left(\frac{A_s(F_s)^2}{2\mathcal{C}} + c_s\right) \\
&= \frac{D^2}{4\mathcal{C}(D-1)^2}(F_1)^2 + c_1 + \frac{D(F_2)^2}{4\mathcal{C}(D-1)^2} + c_2 + \sum_{s \geq 4} \frac{(F_s)^2 D(D_s(D-1) + 1)}{4\mathcal{C}(D-1)^2(D_s-1)^2} \\
&\quad + \sum_{s \geq 4} c_s \left(1 + \frac{1}{D_s(D-1)}\right) \\
&= \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)^2} \left[ DF_1^2 + F_2^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{(DD_s - D_s + 1)}{(D_s - 1)^2} F_s^2 \right] + c_1 + c_2 + \sum_{s \geq 4} c_s \left(1 + \frac{1}{D_s(D-1)}\right) \\
&= \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)^2} \left[ DF_1^2 + F_2^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{(DD_s - D_s + 1)}{(D_s - 1)^2} F_s^2 \right] + \tilde{c},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= c_1 + Dc_2 - c_3 + \sum_{s \geq 4} \frac{c_s D}{D_s(D-1)}, \\
\tilde{c} &= c_1 + c_2 + \sum_{s \geq 4} \left(1 + \frac{1}{D_s(D-1)}\right) c_s.
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Além disso, por (3.82) temos,

$$r_s = D_s r_1 - (D_s - 1)r_2, \text{ para } s \geq 4.$$

Reciprocamente, dadas  $n$  funções  $F_i(u_i)$  tal que  $F_i' \neq 0$  e  $n$  constantes denotadas por  $\mathcal{C} \neq 0$ ,  $\tilde{c}$  e  $D$ ,  $D_s$   $s \geq 4$  satisfazendo (3.81), definimos as funções  $r_i$  como em (3.82), uma métrica diagonal dada por (3.83) e curvaturas principais dadas por  $k_i = \frac{1}{r_i}$ .

Queremos mostrar que, a menos de movimento rígido, existe uma única hipersuperfície de Dupin própria em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvaturas de Laguerre constantes  $D = \mathcal{L}^{132}$  e  $D_s = \mathcal{L}^{s21}$  onde os raios de curvatura e a métrica satisfazem (3.82) e (3.83). Para isso, vamos verificar que a equação de Gauss e a equação de Codazzi são satisfeitas. Primeiramente, fazendo a diferença entre os raios de curvatura dados em (3.82) temos,

$$\begin{aligned}
r_2 - r_1 &= \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \left[ F_1^2 + F_2^2 + \frac{F_3^2(D-1)^2}{D^2} + \sum_{s \geq 4} F_s^2 \frac{1}{(D_s-1)^2} \right] + \frac{(D-1)\mathcal{C}}{D} \\
&= \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \sum_{i=1}^n F_i^2 B_i + \frac{(D-1)\mathcal{C}}{D} =: V,
\end{aligned} \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned}
r_3 - r_1 &= \frac{D}{(D-1)} \left[ \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \left( F_1^2 + F_2^2 + \frac{F_3^2(D-1)^2}{D^2} + \sum_{s \geq 4} F_s^2 \frac{1}{(D_s-1)^2} \right) + \frac{(D-1)\mathcal{C}}{D} \right] \\
&= \frac{D}{(D-1)} \left[ \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \sum_{i=1}^n F_i^2 B_i + \frac{(D-1)\mathcal{C}}{D} \right] = \frac{D}{(D-1)} V, \tag{3.129}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_3 - r_2 &= \frac{1}{(D-1)} \left[ \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \left( F_1^2 + F_2^2 + \frac{F_3^2(D-1)^2}{D^2} + \sum_{s \geq 4} F_s^2 \frac{1}{(D_s-1)^2} \right) + \frac{(D-1)\mathcal{C}}{D} \right] \\
&= \frac{1}{(D-1)} \left[ \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \sum_{i=1}^n F_i^2 B_i + \frac{(D-1)\mathcal{C}}{D} \right] = \frac{1}{(D-1)} V, \tag{3.130}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_s - r_1 &= D_s r_1 + (D_s - 1) r_2 - r_1 \\
&= -(D_s - 1)(r_2 - r_1) = -(D_s - 1)V, \tag{3.131}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_s - r_2 &= D_s r_1 + (D_s - 1) r_2 - r_2 \\
&= -D_s(r_2 - r_1) = -D_s V, \tag{3.132}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_s - r_3 &= D_s r_1 + (D_s - 1) r_2 - r_3 \\
&= -(D_s - 1)(r_2 - r_1) - (r_3 - r_2) = - \left( D_s + \frac{1}{(D-1)} \right) V, \tag{3.133}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_s - r_t &= D_s r_1 + (D_s - 1) r_2 - D_t r_1 + (D_t - 1) r_2 \\
&= r_1(D_s - D_t) - r_2(D_s - D_t) \\
&= (D_s - D_t)(r_2 - r_1) = (D_s - D_t)V, \tag{3.134}
\end{aligned}$$

onde,

$$V = \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \sum_{i=1}^n F_i^2 B_i + \frac{(D-1)\mathcal{C}}{D} \tag{3.135}$$

e  $B_i$  são constantes dadas por

$$B_i = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \frac{(D-1)^2}{D^2} \delta_{i3} + \sum_{s \geq 4} \frac{1}{(D_s-1)^2} \delta_{is}. \tag{3.136}$$

Diferenciando  $V$  com relação a  $u_i$ , lembrando que  $D, D_s$  e  $C$  são constantes temos,

$$V_{,i} = \frac{D}{4C(D-1)} 2F_i F_i' B_i \Rightarrow \frac{V_{,i}}{F_i'} = \frac{DF_i B_i}{2C(D-1)}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (3.137)$$

Além disso,

$$B_1(r_2 - r_1)^2 = V^2, \quad B_j(r_j - r_1)^2 = V^2, \quad \forall j \neq 1. \quad (3.138)$$

Note que,  $k_i - k_j = \frac{(r_j - r_i)}{r_i r_j}$ . Além disso, segue das expressões (3.82) que  $r_{i,i} = 0$ , pois  $D, D_s, \tilde{c}$  e  $C$  são constantes e  $F_i(u_i)$  são funções diferenciáveis que dependem apenas de  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Vejamos que a equação de Codazzi (3.74) é satisfeita. Por (3.83) temos que

$$g_{11} = \frac{(F_1')^2 r_1^2}{(r_2 - r_1)^2}. \quad (3.139)$$

Diferenciando a equação (3.139) em relação a  $u_j$ ,  $j \neq 1$  e dividindo por  $2g_{11}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{g_{11,j}}{2g_{11}} &= \left( \frac{2(F_1')^2 r_1 (r_2 - r_1) [r_{1,j}(r_2 - r_1) - r_1(r_{2,j} - r_{1,j})]}{(r_2 - r_1)^4} \right) \frac{(r_2 - r_1)^2}{2(F_1')^2 r_1^2} \\ &= \frac{r_{1,j}(r_2 - r_1) - r_1(r_{2,j} - r_{1,j})}{r_1(r_2 - r_1)}. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Por outro lado, segue das diferenças dos raios de curvatura dadas por (3.128)-(3.134) que  $\frac{r_2 - r_1}{r_j - r_1}$ ,  $j \neq 1$  é constante, logo, diferenciando com relação a  $u_j$  e usando que  $r_{j,j} = 0$ , obtemos

$$(r_{2,j} - r_{1,j}) = \frac{-(r_2 - r_1)r_{1,j}}{(r_j - r_1)}. \quad (3.141)$$

Substituindo (3.141) em (3.140), segue que

$$\begin{aligned} \frac{g_{11,j}}{2g_{11}} &= \frac{r_{1,j}(r_2 - r_1) - r_1(r_{2,j} - r_{1,j})}{r_1(r_2 - r_1)} \\ &= \frac{r_{1,j}(r_2 - r_1) + r_{1,j}r_1(r_2 - r_1)}{r_1(r_2 - r_1)(r_j - r_1)} \\ &= \frac{r_j r_{1,j}}{r_1(r_j - r_1)} \end{aligned} \quad (3.142)$$

Logo, substituindo (3.142) na equação de Codazzi (3.74) obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_1}{\partial u_j} + (k_1 - k_j) \frac{\partial \ln \sqrt{g_{11}}}{\partial u_j} &= -\frac{r_{1,j}}{r_1^2} + \left( \frac{r_j - r_1}{r_1 r_j} \right) \left( \frac{r_j r_{1,j}}{r_1(r_j - r_1)} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.143)$$

Então, a equação de Codazzi é satisfeita para  $i = 1$ . Para  $i \geq 2$  e  $j \neq i$ , temos

$$g_{ii} = \frac{(F_i')^2 r_i^2}{(r_i - r_1)^2}. \quad (3.144)$$

Diferenciando a equação (3.144) em relação a  $u_j$ ,  $j \neq 1$  e dividindo por  $2g_{ii}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} &= \left( \frac{2(F_i')^2 r_i (r_i - r_1) [r_{i,j}(r_i - r_1) - r_i(r_{i,j} - r_{1,j})]}{(r_i - r_1)^4} \right) \frac{(r_i - r_1)^2}{2(F_i')^2 r_i^2} \\ &= \frac{r_{i,j}(r_i - r_1) - r_i(r_{i,j} - r_{1,j})}{r_i(r_i - r_1)}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Por outro lado, segue de (3.128)-(3.134) que  $\frac{r_1 - r_i}{r_j - r_i}$  é constante, logo, diferenciando com relação a  $u_j$  e usando que  $r_{j,j} = 0$ , obtemos

$$(r_{1,j} - r_{i,j}) = \frac{-(r_1 - r_i)r_{i,j}}{(r_j - r_i)}. \quad (3.146)$$

Substituindo (3.146) em (3.145), segue que

$$\begin{aligned} \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} &= \frac{r_{i,j}(r_i - r_1) - r_i(r_{i,j} - r_{1,j})}{r_i(r_i - r_1)} \\ &= \frac{r_{i,j}(r_i - r_1) + r_{i,j}r_i(r_1 - r_i)}{r_i(r_i - r_1)(r_j - r_i)} \\ &= \frac{r_j r_{i,j}}{r_i(r_j - r_i)} \end{aligned} \quad (3.147)$$

Então, usando (3.147) segue que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_i}{\partial u_j} + (k_i - k_j) \frac{\partial \ln \sqrt{g_{ii}}}{\partial u_j} &= -\frac{r_{i,j}}{r_i^2} + \left( \frac{(r_j - r_i)}{r_i r_j} \right) \left( \frac{r_j r_{i,j}}{r_i(r_j - r_i)} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.148)$$

Logo, a equação de Codazzi é satisfeita para  $i \neq 1$ . Portanto, de (3.143) e (3.148), temos que a equação de Codazzi esta verificada.

A fim de provar a equação de Gauss, obteremos as expressões de  $\ell_{ij}$  em termos das constantes  $D$ ,  $V$ ,  $B_i$ , dos raios de curvatura e das funções diferencias  $F_i$ . Lembre-se que

$\ell_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial \sqrt{g_{jj}}}{\partial u_i}$ , então, usando (3.83) para  $i, j \geq 2, i \neq j$  temos,

$$\begin{aligned}
 \ell_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial \sqrt{g_{jj}}}{\partial u_i} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{g_{jj,i}}{2\sqrt{g_{jj}}} \\
 &= \left( \frac{2(F'_j)^2 r_j (r_j - r_1) [r_{j,i}(r_j - r_1) - r_j(r_{j,i} - r_{1,j})]}{(r_j - r_1)^4} \right) \frac{(r_j - r_1)(r_i - r_1)}{2F'_j r_j F'_i r_i} \\
 &= \frac{-F'_j (r_{j,i} r_1 - r_{1,i} r_j) (r_i - r_1)}{F'_i r_i (r_j - r_1)^2}. \tag{3.149}
 \end{aligned}$$

Segue de (3.128)-(3.134) que  $\frac{r_j - r_1}{r_i - r_1}$  é constante, então diferenciando com relação a  $u_i$

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{(r_{j,i} - r_{1,i})(r_i - r_1) + (r_j - r_1)r_{1,i}}{(r_i - r_1)^2} \\
 0 &= r_{j,i}r_1 - r_{1,i}r_j - r_{j,i}r_i + r_{1,i}r_i \Rightarrow r_{j,i}r_1 - r_{1,i}r_j = -r_i(r_{1,i} - r_{j,i}). \tag{3.150}
 \end{aligned}$$

Substituindo (3.150) em (3.149) e usando (3.137) e (3.138) segue,

$$\begin{aligned}
 \ell_{ij} &= \frac{-F'_j (r_{j,i}r_1 - r_{1,i}r_j) (r_i - r_1)}{F'_i r_i (r_j - r_1)^2} \\
 &= \frac{F'_j ((r_{1,i} - r_{j,i})) (r_i - r_1)}{F'_i (r_j - r_1)^2} \\
 &= -\frac{F'_j V V_i (r_i - r_1)}{F'_i B_j (r_j - r_1)^2 (r_j - r_1)} \\
 &= -\frac{F'_j D F_i B_i (r_i - r_1)}{2C(D-1)V(r_j - r_1)}, \quad i \neq j, i, j \geq 2. \tag{3.151}
 \end{aligned}$$

Analogamente, para  $i = 1$  e  $j \geq 2$  obtemos,

$$\begin{aligned}
 \ell_{1j} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{jj}}}{\partial u_1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{g_{jj,1}}{2\sqrt{g_{jj}}} \\
 &= \frac{F'_j r_{j,1} (r_2 - r_1)}{F'_1 (r_j - r_1)^2}.
 \end{aligned}$$

Usando (3.137) e (3.138) em (3.152) temos,

$$\begin{aligned}\ell_{1j} &= \frac{F'_j r_{j,1}(r_2 - r_1)}{F'_1(r_j - r_1)^2} \\ &= \frac{F'_j V V_1(r_2 - r_1)}{F'_1 B_j(r_j - r_1)^2(r_j - r_1)} \\ &= \frac{F'_j D F_1 B_1(r_2 - r_1)}{2\mathcal{C}(D-1)V(r_j - r_1)}, \quad j \geq 2.\end{aligned}\quad (3.152)$$

Analogamente, obtemos

$$\ell_{j1} = \frac{F'_j D F_1 B_j(r_j - r_1)}{2\mathcal{C}(D-1)V(r_2 - r_1)}, \quad j \geq 2. \quad (3.153)$$

Vamos agora provar que a equação (3.79) é satisfeita para  $i \neq j$  e  $i, j \geq 2$ . Diferenciando (3.151) com relação a  $u_i$  e usando (3.137) e o fato do quociente da diferença dos raios de curvatura ser constante temos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell_{ij}}{\partial u_i} &= \frac{-D F'_j B_i(r_i - r_1) F'_i}{2\mathcal{C}(D-1)V(r_j - r_1)} + \frac{D F'_j B_i(r_i - r_1) F_i V_i}{2\mathcal{C}(D-1)V^2(r_j - r_1)} \\ &= \frac{-D F'_j B_i(r_i - r_1) F'_i}{2\mathcal{C}(D-1)V(r_j - r_1)} + \frac{D F'_j B_i(r_i - r_1) F_i D F'_i F_i B_i}{4\mathcal{C}^2(D-1)^2 V^2(r_j - r_1)} \\ &= \frac{-F'_i F'_j B_i(r_i - r_1) D}{2\mathcal{C}(D-1)(r_j - r_1)} \left[ \frac{1}{V} - \frac{D F_i^2 B_i}{2\mathcal{C}(D-1)V^2} \right].\end{aligned}\quad (3.154)$$

Novamente por (3.151) e (3.138) segue que,

$$\begin{aligned}\sum_{k \neq i \neq j} \ell_{ki} \ell_{kj} &= \frac{D^2 F'_j F'_i B_k B_k (r_k - r_1)^2 F_k^2}{4\mathcal{C}^2(D-1)^2 V^2(r_j - r_1)(r_i - r_1)} \\ &= \frac{D^2 F'_j F'_i}{4\mathcal{C}^2(D-1)^2 (r_j - r_1)(r_i - r_1)} \sum_{k \neq i \neq j} F_k^2 B_k.\end{aligned}\quad (3.155)$$

Substituindo (3.154) e (3.155) em (3.79) obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial \ell_{ji}}{\partial u_j} + \sum_{k \neq i \neq j} \ell_{ki} \ell_{kj} + k_i k_j \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} &= \frac{-F'_i F'_j B_i (r_i - r_1) D}{2C(D-1)(r_j - r_1)} \left[ \frac{1}{V} - \frac{DF_i^2 B_i}{2C(D-1)V^2} \right] \\ &- \frac{F'_j F'_i B_j (r_j - r_1) D}{2C(D-1)(r_i - r_1)} \left[ \frac{1}{V} - \frac{DF_j^2 B_j}{2C(D-1)V^2} \right] \\ &+ \frac{D^2 F'_j F'_i}{4C^2(D-1)^2(r_j - r_1)(r_i - r_1)} \sum_{k \neq i \neq j} F_k^2 B_k + \frac{F'_i F'_j}{(r_i - r_1)(r_j - r_1)}. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Multiplicando a equação (3.156) por  $\frac{4C^2(D-1)^2(r_j - r_1)(r_i - r_1)}{F'_i F'_j}$  temos,

$$\begin{aligned} \frac{4C^2(D-1)^2(r_j - r_1)(r_i - r_1)}{F'_i F'_j} \left( \frac{\partial \ell_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial \ell_{ji}}{\partial u_j} + \sum_{k \neq i \neq j} \ell_{ki} \ell_{kj} + k_i k_j \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \right) &= \\ -\frac{DB_i(r_i - r_1)^2 2C(D-1)}{V} + \frac{D^2 B_i^2 (r_i - r_1)^2 F_i^2}{V^2} - \frac{DB_j(r_j - r_1)^2 2C(D-1)}{V} + \frac{D^2 B_j^2 (r_j - r_1)^2 F_j^2}{V^2} \\ &+ D^2 \sum_{k \neq i \neq j} F_k^2 B_k + 4C^2(D-1)^2. \end{aligned}$$

Agora, utilizando (3.137) e (3.138) na expressão anterior segue

$$\begin{aligned} \frac{4C^2(D-1)^2(r_j - r_1)(r_i - r_1)}{F'_i F'_j} \left( \frac{\partial \ell_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial \ell_{ji}}{\partial u_j} + \sum_{k \neq i \neq j} \ell_{ki} \ell_{kj} + k_i k_j \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \right) &= \\ -2DVC(D-1) + D^2 B_i F_i^2 - 2DVC(D-1) + D^2 B_j F_j^2 + D^2 \sum_{k \neq i \neq j} F_k^2 B_k + 4C^2(D-1)^2 \\ &= D^2 \sum_{k \neq i \neq j} F_k^2 B_k - 4CD(D-1)V + 4C^2(D-1)^2 + D^2 F_i^2 B_i + D^2 F_j^2 B_j \\ &= D^2 \sum_{k \neq i \neq j} F_k^2 B_k - 4CD(D-1) \left[ \frac{D}{4C(D-1)} \sum_i F_i^2 B_i + \frac{(D-1)C}{D} \right] \\ &+ 4C^2(D-1)^2 + D^2 F_i^2 B_i + D^2 F_j^2 B_j \\ &= D^2 \sum_{k \neq i \neq j} F_k^2 B_k - D^2 \sum_i F_i^2 B_i + DF_i^2 B_i + D^2 F_j^2 B_j = 0. \end{aligned}$$

Como pelas hipóteses,  $\frac{4\mathcal{C}^2(D-1)^2(r_j-r_1)(r_i-r_1)}{F_i'F_j'} \neq 0$  concluímos,

$$\frac{\partial \ell_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial \ell_{ji}}{\partial u_j} + \sum_{k \neq i \neq j} \ell_{ki} \ell_{kj} + k_i k_j \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j \geq 2. \quad (3.157)$$

Por cálculos essencialmente análogos, a equação (3.79) é satisfeita quando  $i = 1$  e  $j \neq 1$ . Por fim, note que a partir das diferenças obtidas entre os raios de curvatura dadas pelas equações (3.128)-(3.134) temos,

$$\mathcal{L}^{132} = \frac{r_1 - r_3}{r_2 - r_3} = \left( \frac{-DV}{D-1} \right) \left( \frac{-(D-1)}{V} \right) = D$$

e

$$\mathcal{L}^{s21} = \frac{r_s - r_2}{r_1 - r_2} = \left( \frac{D_s V}{V} \right) = D_s$$

Logo, as equações de Gauss e Codazzi são satisfeitas. Portanto, pelo Teorema Fundamental das hipersuperfícies de  $\mathbb{R}^{n+1}$  existe, a menos de movimento rígido, uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvaturas de Laguerre constantes,  $\mathcal{L}^{132} = D$  e  $\mathcal{L}^{s21} = D_s$  onde os raios de curvatura e a métrica satisfazem (3.82) e (3.83).  $\square$

**Corolário 21.** *Uma hipersuperfície de Dupin própria de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 3$ , com  $n$  curvaturas principais  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , distintas e não nulas e com curvaturas de Laguerre constante, que admite sistema de coordenadas principal é determinada por  $n$  números reais, a saber,  $(n-2)$  curvaturas de Laguerre  $\mathcal{L}^{132}$  e  $\mathcal{L}^{s21}$ ,  $s = 4, \dots, n$  e dois números reais  $\tilde{c}$  e  $\mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C}$  é não nulo.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 20 temos que qualquer hipersuperfície de Dupin é determinada por suas primeira e segunda formas fundamentais, onde o raio de curvatura e a métrica são dados por (3.31) e (3.83), onde  $F_i(u_i)$  são funções diferenciáveis tais que  $F_i' \neq 0$ . Além disso,  $D = \mathcal{L}^{132}$ ,  $D^s = \mathcal{L}^{s21}$ ,  $s = 4, \dots, n$  e  $\tilde{c}, \mathcal{C} \neq 0$  são  $n$  números reais. Concluímos a prova mudando cada coordenada independente separadamente, tal que  $F_i(u_i) = u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

No teorema seguinte mostraremos que a família de hipersuperfícies de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$  dada no Exemplo 13 por (2.40) são as únicas hipersuperfícies de Dupin com curvatura de Laguerre constante descritas no Corolário 21.

**Teorema 22.** *Qualquer hipersuperfície de Dupin própria de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , com  $n$  curvaturas principais distintas e não nulas, que tem sistema de coordenadas principais e curvatura de*



Laguerre constante, é dada por (2.40), a menos de movimento rígido e a menos de mudança de cada variável independente separadamente.

i) As constantes associadas a esta hipersuperfície são então  $(n-2)$  curvaturas de Laguerre

$$D = \mathcal{L}^{132} = \frac{(b_1 - b_3)b_2}{(b_2 - b_3)b_1}, D_s = \mathcal{L}^{s21} = \frac{(b_s - b_2)b_1}{(b_1 - b_2)b_s}, s = 4 \dots n, \quad (3.158)$$

e duas constantes

$$C = \frac{b_1 - b_3}{2b_1b_3}, \tilde{c} = \frac{1}{2b_3} - \gamma. \quad (3.159)$$

ii) Reciprocamente, dado  $n$  constantes  $\tilde{c}$ ,  $C \neq 0$ ,  $D$  e  $D_s$ ,  $s \geq 4$  satisfazendo (3.32), seja  $X(0) = (0, \dots, 0, \gamma) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que

$$(\gamma + \tilde{c}) \notin \left[ 0, C, \frac{C}{D}, \frac{[(D-1)D_s + 1]C}{D} \right]. \quad (3.160)$$

Seja

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2(\gamma + \tilde{c} + C)}, & b_2 &= \frac{D}{2[D(\gamma + \tilde{c}) - C]}, \\ b_3 &= \frac{1}{2(\gamma + \tilde{c})}, & b_s &= \frac{D}{2\{D(\gamma + \tilde{c}) - C[D_s(D-1) + 1]\}}. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Então, a família a 2 parâmetros da hipersuperfície definida por (2.40) tem curvatura de Laguerre constante  $D$  e  $D_s$ .

*Demonstração.* Os raios de curvatura da hipersuperfície (2.40) são dados por ([8])

$$r_i = \frac{M_i}{2b_i}, \text{ onde } M_i = \sum_{j=1}^n b_j(b_j - b_i)u_j^2 - 2b_i\gamma + 1, \quad i \neq j. \quad (3.162)$$

Como  $k_i = \frac{1}{r_i}$  temos

$$k_i = \frac{2b_i}{M_i}, \text{ onde } M_i = \sum_{j=1}^n b_j(b_j - b_i)u_j^2 - 2b_i\gamma + 1. \quad (3.163)$$

Introduzindo a notação

$$S = \sum_{j=1}^n b_j(b_j - b_i)u_j^2 = \sum_{j=1}^n b_j^2u_j^2 - b_i \sum_{j=1}^n b_ju_j^2 = S_1 - b_iS_2, \quad (3.164)$$

a expressão de  $M_i$ , dada em (3.163), se reduz a  $M_i = S - 2b_i\gamma + 1$ . Segue de (3.163) e  $M_i = S - 2b_i\gamma + 1$  que,

$$\begin{aligned}
 k_l - k_i &= \frac{2b_l}{M_l} - \frac{2b_i}{M_i} \\
 &= \frac{2b_l(S - 2b_i\gamma + 1) - 2b_i(S - 2b_l\gamma + 1)}{M_i M_l} \\
 &= \frac{-2(b_i S - b_l S + b_i - b_l)}{M_i M_l} \\
 &= \frac{-2(S + 1)(b_i - b_l)}{M_i M_l}.
 \end{aligned} \tag{3.165}$$

Como  $b_j$  são distintos e não-nulos, para todo  $j$ , as curvaturas principais não se anulam e terão multiplicidade um. Segue de (3.17) e (3.165) que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{ijl} &= \frac{(k_i - k_j)k_l}{(k_l - k_j)k_i} \\
 &= \left( \frac{4b_l(S + 1)(b_j - b_i)}{M_i M_l M_j} \right) \left( \frac{M_i M_l M_j}{4b_i(S + 1)(b_j - b_l)} \right) \\
 &= \frac{(b_j - b_i)b_l}{(b_j - b_l)b_i}.
 \end{aligned} \tag{3.166}$$

Como  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  são constantes, temos que as curvaturas de Laguerre são todas constantes. Além disso, por (3.166) temos,

$$D = \mathcal{L}^{132} = \frac{(b_3 - b_1)b_2}{(b_3 - b_2)b_1} = \frac{(b_1 - b_3)b_2}{(b_2 - b_3)b_1} \tag{3.167}$$

$$D_s = \mathcal{L}^{s21} = \frac{(b_2 - b_s)b_1}{(b_2 - b_1)b_s} = \frac{(b_s - b_2)b_1}{(b_1 - b_2)b_s}, \quad s = 4, \dots, n. \tag{3.168}$$

Logo, as  $(n - 2)$  curvaturas de Laguerre  $D = \mathcal{L}^{132}$  e  $D_s = \mathcal{L}^{s21}$ ,  $s = 4, \dots, n$  são constantes associadas a hipersuperfície.

Vamos agora obter as constantes  $\mathcal{C}$  e  $\tilde{c}$ . Para isso usaremos o Teorema 20. Note que estamos nas hipóteses do teorema, pois temos uma hipersuperfície de Dupin própria em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com  $n$  curvaturas principais distintas e não nulas e curvaturas de Laguerre constantes. Primeiramente, vamos calcular as funções  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  dadas no Teorema 20. De (2.40) segue que

$$x_{,i} = \left[ 1 - \frac{b_i(S_2 + \gamma)}{S_1 + 1} \right] \left[ e_i - \frac{2b_i u_i}{(S_1 + 1)} (b_1 u_1, \dots, b_n u_n, -1) \right],$$

onde  $S_1$  e  $S_2$  são dados em (3.164) e  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  é base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Logo, usando (3.163) e (3.164) segue que

$$g_{ii} = \langle x_{,i}, x_{,i} \rangle = \left( \frac{M_i}{S_1 + 1} \right)^2. \quad (3.169)$$

Substituindo (3.169) em (3.65), obtemos usando (3.162) que

$$G_{21} = \sqrt{g_{11}} \left( 1 - \frac{r_2}{r_1} \right) = \left( \frac{M_1}{S_1 + 1} \right) \left( 1 - \frac{M_2 b_1}{M_1 b_2} \right) = \left( 1 - \frac{b_1}{b_2} \right). \quad (3.170)$$

Como  $F_1' = G_{21}$ , integrando (3.170) em  $u_1$ , temos

$$F_1 = \left( 1 - \frac{b_1}{b_2} \right) u_1 + \alpha_1,$$

onde  $\alpha_1$  é uma constante real. Para  $i \neq 1$ , segue de (3.65), (3.169) e (3.162) que

$$G_{1i} = \sqrt{g_{ii}} \left( 1 - \frac{r_1}{r_i} \right) = \left( \frac{M_i}{S_1 + 1} \right) \left( 1 - \frac{M_1 b_i}{M_i b_1} \right) = \left( 1 - \frac{b_i}{b_1} \right). \quad (3.171)$$

Como  $F_i' = G_{1i}$ , para  $i \neq 1$ , integrando em  $u_i$ , temos

$$F_i = \left( 1 - \frac{b_i}{b_1} \right) u_i + \alpha_i,$$

onde  $2 \leq i \leq n$  são constantes reais. Por uma translação no sistema de coordenadas se for necessário, podemos supor sem perda de generalidade que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . Logo, em geral, temos que

$$F_i = \left( 1 - \frac{b_i}{b_j} \right) u_i, \quad (3.172)$$

onde  $j = 2$ , se  $i = 1$  e  $j = 1$ , se  $2 \leq i \leq n$ .

Pelas expressões (3.82), dadas no Teorema 20, e por (3.162) temos,

$$\frac{M_2}{2b_2} = r_2 = \frac{D}{4C(D-1)} \left[ F_1^2 - \left( \frac{D-1}{D^2} \right) F_3^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{D_s}{(D_s-1)^2} F_s^2 \right] - \frac{C}{D} + \tilde{c} \quad (3.173)$$

Considerando os termos envolvendo  $u_1$  em (3.162) e (3.173) e usando a expressão de  $D$  dada em (3.158) temos,

$$\begin{aligned} \frac{M_2}{2b_2} &= \frac{D}{4C(D-1)} F_1^2 \Rightarrow \frac{b_1(b_1-b_2)u_1^2}{2b_2} = \frac{D}{4C(D-1)} F_1^2 \\ &\Rightarrow \frac{b_1(b_1-b_2)u_1^2}{2b_2} = \frac{b_2(b_1-b_3)}{4Cb_3(b_1-b_2)} F_1^2 \\ &\Rightarrow \frac{2b_1b_3(b_1-b_2)^2Cu_1^2}{b_2^2(b_1-b_3)} = F_1^2(u_1) \end{aligned} \quad (3.174)$$

Como por (3.172) temos que

$$F_i = \left(1 - \frac{b_i}{b_j}\right) u_i, \quad (3.175)$$

onde  $j = 2$  se  $i = 1$  e  $j = 1$  se  $2 \leq i \leq n$ , segue de (3.174) e (3.175) que,

$$\begin{aligned} F_1^2(u_1) &= \frac{2b_1b_3(b_1-b_2)^2Cu_1^2}{b_2^2(b_1-b_3)} \\ F_1^2(u_1) &= \frac{2b_1b_3Cu_1^2}{(b_1-b_3)} F_1^2(u_1) \\ C &= \frac{(b_1-b_3)}{2b_1b_3}. \end{aligned}$$

Similarmente, considerando em (3.173) os termos envolvendo  $u_3$  e  $u_s$  temos,  $C = \frac{(b_1-b_3)}{2b_1b_3}$ . Considerando os termos independentes da variável  $u_i$  em (3.173) e as expressões de  $C$  e  $D$  temos,

$$\begin{aligned} \frac{M_2}{2b_2} &= -\frac{C}{D} + \tilde{c} \Rightarrow \frac{-2b_2\gamma+1}{2b_2} = \frac{-(b_2-b_3)}{2b_2b_3} + \tilde{c} \\ &\Rightarrow \tilde{c} = \frac{1}{2b_3} - \gamma. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos as duas constantes  $C$  e  $\tilde{c}$  dadas em (3.159). Agora, devemos verificar que as expressões para os raios de curvaturas, dadas em (3.82), são satisfeitas considerando as constantes (3.158) e (3.159), onde  $F_i$  são dadas em (3.175). De fato,

$$\begin{aligned} & \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \left[ -F_2^2 - \left( \frac{D-1}{D} \right) F_3^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{1}{(D_s-1)} F_s^2 \right] - \mathcal{C} + \tilde{c} = \\ & = \frac{b_2(b_2-b_1)u_2^2 + b_3(b_3-b_1)u_3^2 + \sum_{s \geq 4} b_s(b_s-b_1)u_s^2}{2b_1} + \frac{1}{2b_1} - \gamma = \frac{M_1}{2b_1} = r_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)} \left[ F_1^2 - \left( \frac{D-1}{D^2} \right) F_3^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{D_s}{(D_s-1)^2} F_s^2 \right] - \frac{\mathcal{C}}{D} + \tilde{c} = \\ & = \frac{b_1(b_1-b_2)u_1^2 + b_3(b_3-b_2)u_3^2 + \sum_{s \geq 4} b_s(b_s-b_2)u_s^2}{2b_2} + \frac{1}{2b_2} - \gamma = \frac{M_2}{2b_2} = r_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{4\mathcal{C}(D-1)^2} \left[ DF_1^2 + F_2^2 + \sum_{s \geq 4} \frac{DD_s - D_s + 1}{(D_s-1)^2} F_s^2 \right] + \tilde{c} = \\ & = \frac{b_1(b_1-b_3)u_1^2 + b_2(b_2-b_3)u_2^2 + \sum_{s \geq 4} b_s(b_s-b_3)u_s^2}{2b_3} + \frac{1}{2b_3} - \gamma = \frac{M_3}{2b_3} = r_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_s r_1 - (D_s - 1)r_2 = D_s(r_1 - r_2) + r_2 &= \frac{-b_1(b_s - b_2)}{b_s(b_2 - b_1)} \frac{(b_2 - b_1)(S + 1)}{2b_1 b_2} + \frac{S - 2b_s \gamma + 1}{2b_2} \\ &= \frac{M_s}{2b_s} = r_s. \end{aligned}$$

Reciprocamente, dadas  $n$  constantes  $\tilde{c}$ ,  $\mathcal{C} \neq 0$ ,  $D$  e  $D_s$ ,  $s = 4, \dots, n$  satisfazendo (3.32), podemos obter a hipersuperfície (2.40) definindo as constantes  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $\gamma$ . Escolhendo um ponto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  para ser  $X(0) = (0, \dots, 0, \gamma)$  tal que a condição (3.160) seja satisfeita. Então, pela expressão (3.159) temos,

$$\mathcal{C} = \frac{b_1 - b_3}{2b_1 b_3} \Rightarrow b_1 = (2\mathcal{C}b_1 + 1)b_3 \quad (3.176)$$

e

$$\tilde{c} = \frac{1}{2b_3} - \gamma \Rightarrow b_3 = \frac{1}{2(\tilde{c} + \gamma)}. \quad (3.177)$$

Substituindo (3.177) em (3.176), segue que

$$\begin{aligned} b_1 = (2Cb_1 + 1)b_3 &\Rightarrow b_1 = (2Cb_1 + 1)\frac{1}{2(\tilde{c} + \gamma)} \\ &\Rightarrow 2Cb_1 + 1 = 2b_1(\tilde{c} + \gamma) \\ &\Rightarrow b_1(2(\tilde{c} + \gamma) - 2C) = 1 \\ &\Rightarrow b_1 = \frac{1}{2(\gamma + \tilde{c} - C)}. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Utilizando (3.158), (3.159) e (3.177), temos

$$\begin{aligned} D = \frac{(b_1 - b_3)b_2}{(b_2 - b_3)b_1} &\Rightarrow D = \frac{2b_2b_3C}{(b_2 - b_3)} \\ &\Rightarrow D = \frac{2b_2C}{2(\tilde{c} + \gamma)b_2 - 1} \\ &\Rightarrow b_2(2C - 2D(\tilde{c} + \gamma)) = -D \\ &\Rightarrow b_2 = \frac{D}{2[D(\gamma + \tilde{c}) - C]}. \end{aligned} \quad (3.179)$$

Por fim, segue de (3.158), (3.178) e (3.179), que

$$\begin{aligned}
D_s = \frac{(b_s - b_2)b_1}{(b_1 - b_2)b_s} &\Rightarrow D_s = \frac{(b_s - b_2)}{b_s \left(1 - \frac{b_2}{b_1}\right)} \\
&\Rightarrow D_s = \frac{(b_s - b_2)}{b_s \left(1 - \frac{D(\gamma + \tilde{c} - \mathcal{C})}{D(\gamma + \tilde{c}) - \mathcal{C}}\right)} \\
&\Rightarrow D_s b_s \left(1 - \frac{D(\gamma + \tilde{c} - \mathcal{C})}{D(\gamma + \tilde{c}) - \mathcal{C}}\right) - b_s = -b_2 \\
&\Rightarrow b_s \left(D_s \left(1 - \frac{D(\gamma + \tilde{c} - \mathcal{C})}{D(\gamma + \tilde{c}) - \mathcal{C}}\right) - 1\right) = \frac{-D}{2[D(\gamma + \tilde{c}) - \mathcal{C}]} \\
&\Rightarrow b_s = \left(\frac{-D}{2[D(\gamma + \tilde{c}) - \mathcal{C}]}\right) \left(\frac{1}{D_s - \frac{DD_s(\gamma + \tilde{c} - \mathcal{C})}{D(\gamma + \tilde{c}) - \mathcal{C}} - 1}\right) \\
&\Rightarrow b_s = \frac{D}{2\{D(\gamma + \tilde{c}) - \mathcal{C}[D_s(D - 1) + 1]\}}.
\end{aligned}$$

Logo, as constantes  $b_i$  são definidas por (3.161). Além disso, usando as expressões (3.158), (3.159) e (3.161) as curvaturas de Laguerre são dadas por,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{132} &= \frac{(b_1 - b_3)b_2}{(b_2 - b_3)b_1} = \frac{2b_2\mathcal{C}}{2b_2(\gamma + \mathcal{C}) - 1} = D. \\
\mathcal{L}^{s21} &= \frac{(b_s - b_2)b_1}{(b_1 - b_2)b_s} = \frac{1 - \frac{b_2}{b_s}}{1 - \frac{b_2}{b_s}} = \frac{CD_s(D - 1)}{D(\gamma + \tilde{c}) - D(\gamma + \tilde{c} - \mathcal{C}) - \mathcal{C}} = D_s.
\end{aligned}$$

Como  $D$  e  $D_s$  são constantes, as curvaturas de Laguerre são constantes.

□

**Observação 23.** Usando técnicas distintas, os autores Li e Wang [12] e Cezana e Tenenblat [7] encontraram exemplos de hipersuperfícies de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvaturas de Laguerre constantes. Li e Wang [12], em 2015, mostraram (Teorema 17) que uma hipersuperfície de Dupin com curvatura de Laguerre constante é Laguerre equivalente a isoparamétrica de Laguerre plana dada por (2.37) no Exemplo 11.

Em 2017, Cezana e Tenenblat [7] mostraram um resultado mais geral (Teorema 22) que afirma que qualquer hipersuperfície de Dupin em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com  $n$  curvaturas principais distintas e não nulas, que admite um sistema de coordenadas principal, com curvaturas de Laguerre

*constante é dada pela hipersuperfície (2.40) no Exemplo 13. Observamos que (2.37), no Exemplo 11, é um caso particular de (2.40), dada no Exemplo 13, quando  $\gamma = 0$ .*



# Bibliografia

- [1] Blaschke, W.: *Vorlesungen über Differential Geometrie*, vol. 3. Berlin Heidelberg, New York (1929).
- [2] Carmo, M. P.: *O método do referencial móvel*, Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, ISBN: 978-85-244- 0281-4, 2012.
- [3] Cecil, T. E.; Chern, S.S.: *Tautness and Lie sphere geometry*, Math. Ann., 278 (1987), 381-399.
- [4] Cecil, T. E.; Chern, S.S.: *Dupin submanifolds in Lie sphere geometry*, Differential geometry and topology, pp. 1-48, Lecture Notes in Math., vol. 1369. Springer, Berlin (1989).
- [5] Cecil, T. E.: *Lie Sphere Geometry: with applications to submanifolds*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York (1992).
- [6] Cezana, M. J.; Tenenblat K., *A characterization of Laguerre isoparametric hypersurfaces of the Euclidean space*, Monatsh. Math., 175, (2014), 187-194.
- [7] Cezana, M. J.; Tenenblat K., *Dupin hypersurfaces with constant Laguerre curvatures*, Manuscripta Math., 154, (2017), 169-184.
- [8] Corro, A.V.; Ferreira, W.; Tenenblat, K.: *On Ribaucour transformations for hypersurfaces*, Mat. Contemp., 17 (1999), 137-160.
- [9] Ferro, M.L.; Rodrigues, L.A.; Tenenblat, K.: *On Dupin Hypersurfaces in  $\mathbb{R}^5$  parametrized by lines of curvature*, Results. Math, 70 (2016), 499-531.
- [10] Lie, S.: *Über Komplexe, insbesondere Linien und Kugelkomplexe, mit Anwendung auf der Theorie der partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann. 5 (1872), 145-208, 209-256 (Ges. Abh. 2, 1-121).
- [11] Li, T.Z.; Wang C.P.: *Laguerre geometry of hypersurfaces en  $\mathbb{R}^n$* , Manuscripta Math., 122 (2007), 73-95.
- [12] Li, T.Z.; Qing, Jie.; Wang C.P.: *Möbius and Laguerre geometry of Dupin hypersurface*, UC Santa Cruz Previously Published Works, 122 (2015).
- [13] Li, T.Z.; Li, H.; Wang C.P.: *Classification of hypersurfaces with parallel Laguerre second fundamental form in  $\mathbb{R}^n$* , Differential Geom. Appl., 28 (2010), 148-157.

- 
- [14] Li, T.Z.; Sun, H. F.: *Laguerre isoparametric hypersurfaces in  $\mathbb{R}^4$* , Acta Math. Sinica, English Series 28 (2011), 1179-1186.
- [15] Li, H.Z.: *Generalized Cartan identities on isoparametric manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom., 15 (1997), 45-50.
- [16] Marques, C.H.; Mendes, L.O.; Bortotti, M. F.A; Montanho, S. B.; Souza, J. A.: *Isometrias no espaço de Minkowski: grupo ortogonal generalizado e grupo de Poincaré*, Bol.Soc. Paran. Mat., vol. 34 1 (2016), 99-128.
- [17] Pinkall, U.: *Dupin'sche Hyperflächen*, Dissertation, Univ. Freiburg, 1981.
- [18] Pinkall, U.: *Dupin hypersurfaces*, Math. Ann., 270 (1985), 427-440.
- [19] Riveros, C.M.C.;Rodrigues, L.A.; Tenenblat, K.: *On Dupin hypersurfaces with constant Möbius curvature*, Pacific Journal of Mathematic, 236, nº 1 (2008), 89-103.
- [20] Rodrigues, L.A.; Tenenblat, K.: *A characterization of Möbius isoparametric hypersurfaces on the sphere*, Monatshefte fur Mathematic, 158 (2009), 321-327.