



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

*Uma Nova Classe de Soluções da Equação  
de Langevin Generalizada e sua Aplicação  
na Modelagem do Cupom Cambial*

por

Wenersamy Ramos de Alcântara

Orientadora: Profa. Dra. Chang Chung Yu Dorea  
Co-orientador: Prof. Dr. Ary Vasconcelos Medino

Brasília/DF  
2019



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

*Uma Nova Classe de Soluções da Equação  
de Langevin Generalizada e sua Aplicação  
na Modelagem do Cupom Cambial*

por

**Wenersamy Ramos de Alcântara**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, PPGMat-UnB, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Uma Nova Classe de Soluções da Equação de Langevin Generalizada e sua Aplicação na Modelagem do Cupom Cambial

por

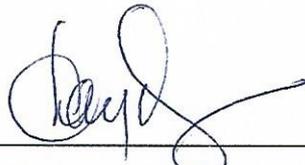
**Wenersamy Ramos de Alcântara**

*Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB,  
como requisito parcial para obtenção do grau de*

**DOUTOR EM MATEMÁTICA**

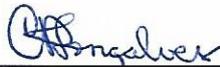
Brasília, 09 de agosto de 2019.

Comissão Examinadora:



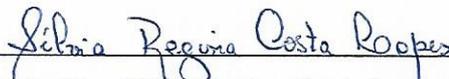
---

Prof. Dra. Chang Chung Yu Dorea – Orientadora (MAT-UnB)



---

Prof. Dra. Cátia Regina Gonçalves (MAT-UnB)



---

Prof. Dra. Sílvia Regina Costa Lopes (UFRGS)



---

Prof. Dr. Hugo Alexander de la Cruz Cansino (FGV/RJ)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

RW473n Ramos de Alcântara, Wenersamy  
Uma Nova Classe de Soluções da Equação de Langevin  
Generalizada e sua Aplicação na Modelagem do Cupom Cambial /  
Wenersamy Ramos de Alcântara; orientador Chang Chung Yu  
Dorea; co-orientador Ary Vasconcelos Medino. -- Brasília,  
2019.  
279 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) --  
Universidade de Brasília, 2019.

1. Equação de Langevin Generalizada. 2. Processo de  
Ornstein-Uhlenbeck Generalizado. 3. Processos Estocásticos.  
4. Mercado de Câmbio. 5. Cupom Cambial. I. Chung Yu Dorea,  
Chang, orient. II. Vasconcelos Medino, Ary, co-orient. III.  
Título.

## Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Chang Chung Yu Doria, e ao meu co-orientador, Prof. Dr. Ary Vasconcelos Medino, sempre presentes, acessíveis e grandes contribuidores para o sucesso deste trabalho.

Agradeço ao colega de UnB, Felipe Sousa Quintino, pelas discussões sobre a utilização da transformada de Laplace. Agradeço, ainda, à chefia do Departamento de Reservas Internacionais e aos colegas da Mesa de Câmbio do Banco Central do Brasil pelo estímulo ao projeto e pelas séries de cupom cambial e de CDS.

Agradeço ao Banco Central do Brasil pelo apoio financeiro através do Programa de Pós-Graduação e aos colegas que trabalham na gestão deste programa, pela presteza e disponibilidade para auxiliar e orientar os participantes.

Agradeço a meus pais, minha irmã e minha esposa, que enfrentaram emocionalmente este desafio junto comigo.

E agradeço a Deus, origem e fim de tudo.

## Dedicatória

À minha avó, Josefa Josina Ramos (*in memoriam*).

## Resumo

Apesar de ser um preço importante, o cupom cambial possui uma dinâmica muito pouco estudada e compreendida. Argumentamos que, uma vez que o real é uma moeda não-conversível, o dólar tem um comportamento análogo ao de uma *commodity* de uso quando se considera o ponto de vista de agentes econômicos que operam no mercado brasileiro de câmbio, de maneira que o cupom cambial pode ser estudado como um rendimento de conveniência. Modelos de Ornstein-Uhlenbeck (OU), que apresentam comportamento autorregressivo de ordem 1 em suas versões discretas, incluindo extensões com ruído não-gaussiano (Barndorff-Nielsen & Shephard, 2001), têm sido usados para descrever o rendimento de conveniência (e.g. Gibson & Schwartz (1990)) por mostrarem reversão à média e serem tratáveis em modelos de precificação em tempo contínuo de instrumentos financeiros. O cupom cambial, contudo, mostra um comportamento autorregressivo de ordem 2, e assim, com a motivação de desenvolver um processo em tempo contínuo capaz de reproduzir a dinâmica do cupom cambial, particularmente o comportamento autorregressivo de maior ordem, introduzimos uma nova classe de soluções para a Equação de Langevin Generalizada (ELG): o processo de OU Generalizado do Tipo Exponencial Flutuante. Essa generalização estende os resultados de Stein *et al.* (2016) e permite-nos considerar diversos tipos de ruídos do tipo Lévy, particularmente, os casos em que é  $\alpha$ -estável ou uma difusão com salto. Apresentamos, ainda, uma detalhada análise econométrica do cupom cambial, mostrando evidências do comportamento autorregressivo de ordem 2; a formulação teórica do modelo de OU Generalizado do Tipo Exponencial Flutuante; diversas metodologias de estimação e simulação; e, finalmente, estimamos os parâmetros do modelo para os dados observados de cupom cambial, mostrando que o processo proposto é capaz de adequadamente modelar processos estacionários que apresentam comportamento autorregressivo de maior ordem.

**Palavras-chaves:** Processos estocásticos, Processo de Lévy, Equação de Langevin Generalizada, Processo de Ornstein-Uhlenbeck Generalizado, mercado de câmbio no Brasil, cupom cambial, moeda não-conversível, paridade coberta da taxa de juros, *commodities*, rendimento de conveniência.

## Abstract

Although it is an important price, the so called *cupom cambial*, or "exchange rate coupon", has a dynamics that hasn't been well studied and understood. We argue that, since the real is a non-convertible currency, the dollar has a behavior similar to that of a consumption commodity from the point of view of economic agents operating in the Brazilian exchange rate market, so that the *cupom cambial* can be studied as a convenience yield. Ornstein-Uhlenbeck (OU) models, which present order 1 autoregressive behavior in their discrete versions, including extensions with non-Gaussian noise (Barndorff-Nielsen & Shephard, 2001), have been used to describe the convenience yield (e.g. Gibson & Schwartz (1990)), as they show mean reversion and are treatable in continuous time pricing models of financial instruments. The *cupom cambial*, however, shows an order 2 autoregressive behavior, and, therefore, with the motivation to develop a continuous time process capable of reproducing the dynamics of the *cupom cambial*, particularly, the higher-order autoregressive behavior, we introduce a new class of solutions for the Generalized Langevin Equation (ELG): The Generalized OU process of the Floating Exponential Type. This generalization extends the results of Stein *et al.* (2016), allows us to consider different kinds of Lévy type noise, particularly the cases where it is  $\alpha$ -stable or a diffusion with jumps. In addition, we present a thorough econometric analysis of the exchange coupon, showing evidence of the order 2 autoregressive dynamics; the theoretical formulation of the Generalized OU process of the Floating Exponential Type; several estimation and simulation methodologies; and, finally, we estimate the model parameters for the *cupom cambial*, showing that the proposed process is capable of properly modeling stationary processes that exhibit higher order autoregressive behavior.

**Keywords:** Stochastic processes, Lévy Process, Generalized Langevin Equation, Generalized Ornstein-Uhlenbeck Process, "cupom cambial", exchange rate market in Brazil, non-convertible currency, covered interest rate parity, commodities, convenience yield.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos e Justificativa . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Motivação</b>	<b>10</b>
2.1	O Mercado de Câmbio no Brasil . . . . .	10
2.2	O Cupom Cambial como um <i>Convenience Yield</i> . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Modelos de Reversão à Média e o Processo de Ornstein-Uhlenbeck Generalizado (OUG)</b>	<b>20</b>
3.1	Processos Discretos Lineares, Reversão à Média e o Processo de Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	21
3.2	Processos de Lévy e o Processo de Difusão com Salto . . . . .	31
3.2.1	Processos de Difusão com Salto . . . . .	36
3.2.2	Estimação de um Processo de Difusão com Salto . . . . .	47
3.3	Processos de Ornstein-Uhlenbeck Generalizados . . . . .	50
3.3.1	Soluções Particulares da ELG . . . . .	54
3.3.2	Estimação de Processos de OUG . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Análise Econométrica do Cupom Cambial</b>	<b>61</b>
4.1	Descrição dos Dados . . . . .	62
4.2	Seleção das Amostras . . . . .	64
4.3	Identificação do Modelo Autorregressivo (AR) para as Séries Temporais de Cupom Cambial . . . . .	70
4.3.1	Identificação do modelo AR das Séries de Cupom Cambial na Amostra 1 . . . . .	71
4.3.2	Identificação do modelo AR das Séries de Cupom Cambial na Amostra 2 . . . . .	77
4.3.3	Identificação do modelo AR das Séries de Cupom Cambial na Amostra 3 . . . . .	78

<b>5</b>	<b>O Processo de OUG Exponencial Flutuante</b>	<b>80</b>
5.1	Validade da Solução $\rho(t)$ Proposta . . . . .	81
5.2	Equação de Recorrência do Processo de OUG Exponencial Flutuante . . . . .	88
5.3	Simulação do Processo de OUG do Tipo Exponencial Flutuante	110
5.3.1	Soma de Riemann . . . . .	112
5.3.2	Discretização de Euler-Maruyama . . . . .	112
5.3.3	Equação de Recorrência do Teorema 5.2 . . . . .	114
5.3.4	Processo ARMA do Teorema 5.3 . . . . .	115
5.3.5	Comparação das Alternativas de Simulação . . . . .	115
5.4	Estimação do Processo de OUG do Tipo Exponencial Flutuante	125
5.4.1	Estimação por Máxima Verossimilhança . . . . .	126
5.4.2	Estimação do Processo ARMA . . . . .	128
5.4.3	Teste das Metodologias de Estimação do Processo de OUG Exponencial Flutuante via Simulação . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Estimação do Processo de OUG Exponencial Flutuante para o Cupom Cambial</b>	<b>136</b>
6.1	Visualização do Ajuste . . . . .	139
6.2	Análise pela Função de Autocorrelação . . . . .	140
6.3	Testes Não-Paramétricos . . . . .	141
6.3.1	Qualidade do Ajuste da Estimação por Máxima Verossimilhança . . . . .	142
6.3.2	Qualidade do Ajuste da Estimação do Processo ARMA	143
6.4	Análise dos Resultados . . . . .	144
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>147</b>
<b>A</b>	<b>Resultados para a Análise Econométrica do Cupom Cambial</b>	<b>150</b>
A.1	Amostra 1 . . . . .	150
A.1.1	Série <i>c060d</i> . . . . .	150
A.1.2	Série <i>c090d</i> . . . . .	153
A.1.3	Série <i>c180d</i> . . . . .	156
A.1.4	Série <i>c360d</i> . . . . .	159
A.1.5	Série <i>c720d</i> . . . . .	162
A.2	Amostra 2 . . . . .	165
A.2.1	Série <i>c030d</i> . . . . .	166
A.2.2	Série <i>c060d</i> . . . . .	169
A.2.3	Série <i>c090d</i> . . . . .	172
A.2.4	Série <i>c180d</i> . . . . .	175
A.2.5	Série <i>c360d</i> . . . . .	178

A.2.6	Série <i>c720d</i> . . . . .	181
A.3	Amostra 3 . . . . .	184
A.3.1	Série <i>c030d</i> . . . . .	185
A.3.2	Série <i>c060d</i> . . . . .	188
A.3.3	Série <i>c090d</i> . . . . .	191
A.3.4	Série <i>c180d</i> . . . . .	194
A.3.5	Série <i>c360d</i> . . . . .	197
A.3.6	Série <i>c720d</i> . . . . .	200
<b>B</b>	<b>Códigos MATLAB<sup>®</sup></b>	<b>204</b>
B.1	Simulações do Processo de OUG Exponencial Flutuante com Ruído $\alpha$ -Estável . . . . .	204
B.2	Simulações do Processo de OUG Exponencial Flutuante com Ruído Dado por Difusão com Salto . . . . .	207
B.3	Simulações da Estimação por Máxima Verossimilhança do Processo de OUG Exponencial Flutuante com Ruído $\alpha$ -Estável . . . . .	210
B.4	Simulações da Estimação por Método de Hannan-Rissanen do Processo de OUG Exponencial Flutuante com Ruído Dado por Difusão com Saltos de Tamanhos Normalmente Distribuídos . . . . .	213
<b>C</b>	<b>Gráficos de Diagnóstico da Qualidade do Ajuste ao Cupom Cambial</b>	<b>223</b>
C.1	Gráficos de Visualização do Ajuste . . . . .	223
C.2	Gráficos da Análise de Autocorrelação . . . . .	236
C.3	Gráficos da Análise Não-Paramétrica . . . . .	248
C.3.1	Estimação por Máxima Verossimilhança . . . . .	248
C.3.2	Estimação do Processo ARMA por Hannan-Rissanen . . . . .	260

# Capítulo 1

## Introdução

Depois da própria taxa de câmbio, o cupom cambial é um dos mais importantes indicadores do funcionamento do mercado à vista de câmbio. O cupom cambial é usado por participantes de mercado para avaliar a liquidez do mercado à vista, a atratividade da arbitragem entre os mercados à vista e futuro, o impacto das intervenções do Banco Central do Brasil (BCB), entre outros aspectos. Desta maneira, a melhor compreensão da dinâmica e da precificação do cupom cambial, como buscamos nesta tese, além da contribuição direta para o entendimento de um mecanismo de formação de preços em um mercado peculiar e pouco estudado como o brasileiro, também cria novas possibilidades de análise de outros mercados cambiais que envolvem restrições de liquidez, do comportamento dos participantes destes mercados e até mesmo do impacto das intervenções dos bancos centrais.

Em vista das similaridades entre o comportamento da divisa, particularmente o Dólar, com uma *commodity* de uso, dada a possibilidade de obtenção de um retorno pela manutenção de "estoques" de moeda estrangeira, considerando a possibilidade de situações de crise e escassez, este trabalho desenvolve metodologias de modelagem do comportamento do cupom cambial como um *convenience yield*.<sup>1</sup> O modelo estocástico padrão para o comportamento do *convenience yield* de *commodities*, apresentando característica reversão à média, é o processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU):<sup>2</sup>

$$X(t) = X_0 e^{-\theta t} + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW(s),$$

---

<sup>1</sup>Esta analogia será melhor detalhada na seção 2.2.

<sup>2</sup>Proposto originalmente em Gibson & Schwartz (1990) como modelo para o *convenience yield* na análise do preço do petróleo, estendido e testado em Brennan (1991) para diversas outras *commodities* e apresentado como padrão para a modelagem do *convenience yield* com uma variável de estado na precificação de *commodities* na obra de referência de Geman (2005, p. 69).

solução da equação de Langevin:

$$\begin{cases} dX(t) = -\theta X(t)dt + dW(t); \\ X(0) = X_0; \end{cases}$$

em que  $W = (W(t); t \geq 0)$  é um processo de Wiener e  $\theta > 0$  é um parâmetro relacionado à velocidade de reversão à média.

No caso do cupom cambial, contudo, há desafios adicionais. Inicialmente, ao contrário do que geralmente ocorre com os estoques de *commodities*, cujo comportamento está associado ao seu *convenience yield*, os estoques e a disponibilidade de divisas, associados ao comportamento do cupom cambial, podem sofrer variações bruscas, como no caso de crises cambiais e fuga de capitais, quando a divisa torna-se bastante escassa, ou no caso de leilões de áreas de petróleo ou privatizações, que ensejam um grande influxo de capitais.

A possibilidade de saltos já foi analisada na literatura para modelar outras séries de dados que apresentam reversão à média, mas também podem ter variações bruscas, como é o caso da série de volatilidade implícita em mercados de opções, a exemplo do bem sucedido modelo para um processo de OU não gaussiano proposto por Barndorff-Nielsen & Shephard (2001), que considera a utilização de um processo de Lévy,  $L = (L(t); t \geq 0)$ , em lugar do processo de Wiener, para modelar o comportamento da variância no preço de ativos:

$$\begin{cases} dX(t) = -\theta X(t)dt + dL(t); \\ X(0) = X_0; \end{cases}$$

A estrutura de dependência dos dados gerados por este processo, contudo, com ou sem saltos, é de um processo autorregressivo de ordem 1 (AR(1)), com função de autocorrelação exponencialmente decrescente,<sup>3</sup> sendo às vezes chamado na literatura (e.g. Brockwell (2009)) de processo em tempo contínuo autorregressivo de ordem 1 (*continuous-time autoregression of order 1*, CAR(1)). De fato, mostraremos que a solução da Equação de Langevin dirigida por um processo de Lévy pode ser dada por:

$$X(t) = X_0 e^{-\theta t} + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dL(s),$$

---

<sup>3</sup>Um processo AR(1) fracamente estacionário (média e variância constantes e autocorrelação dada apenas em função do número de defasagens), representado genericamente por  $y_i = \beta_0 + \beta_1 y_{i-1} + \varepsilon_i$ , em que  $i$  é um índice que indica pontos amostrais sucessivos no tempo e  $\varepsilon_i$  é o erro, possui uma autocorrelação dada por  $\beta_1^n$ , em que  $n$  é o número de defasagens (Johnston & DiNardo, 2001, p. 232). Se  $1 > \beta_1 > 0$ , a autocorrelação pode ser reescrita como  $e^{n \log \beta_1}$ , que é uma exponencial decrescente. Discutiremos em mais detalhes algumas propriedades dos processos autorregressivos e de média móvel no capítulo 3.

e Stein *et al.* (2016) mostram que, para esta solução, é possível obter a seguinte relação de recorrência:

$$X((k+1)h) = e^{-\theta h} X(kh) + \varepsilon_{k,h},$$

em que  $h > 0$  é o passo de discretização nos tempos dados por  $t_k = kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , e  $\varepsilon_{k,h}$  tem a distribuição de uma integral estocástica de Lévy de 0 a  $h$ . Esta, no entanto, não corresponde à estrutura de dependência do cupom cambial, que é analisada e caracterizada econometricamente neste trabalho, sugerindo uma estrutura de autocorrelação característica de processos autorregressivos de maior ordem, oscilando de forma amortecida entre valores positivos e negativos.

Assim, propomos uma alternativa de modelagem para o cupom cambial através de um processo de Ornstein-Uhlenbeck Generalizado (OUG), solução da Equação de Langevin Generalizada (ELG), apresentada originalmente nos trabalhos de Mori (1965) e Kubo (1966):

$$\begin{cases} dX(t) = - \int_0^t \gamma(t-s)X(s)dsdt + dL(t); \\ X(0) = X_0; \end{cases}$$

que permite a modificação da função memória  $\gamma$ ,<sup>4</sup> alterando, assim, a estrutura de autocorrelação dos dados gerados e possibilitando a obtenção de um processo contínuo capaz de aproximar adequadamente o comportamento autorregressivo de ordem 2 observado nas séries de dados de cupom cambial.

Veja que o processo de OU não gaussiano é um tipo de processo de OUG, que chamaremos de Exponencial, e é obtido quando  $\gamma(t) = \theta\delta_0(t)$ , em que  $\delta_0(t)$  é a distribuição Delta de Dirac.

Quando a função memória é dada por  $\gamma(t) = \theta^2$ , obtemos um processo de OUG do tipo Cosseno:

$$X(t) = X_0 \cos(\theta t) + \int_0^t \cos(\theta(t-s))dL(s),$$

que pode ser modelado por uma relação de recorrência de segunda ordem, como mostrado por Stein *et al.* (2016):

$$X((k+1)h) = 2 \cos(\theta h)X(kh) - X((k-1)h) + \varepsilon_{k,h},$$

---

<sup>4</sup>A função memória é uma função generalizada, podendo ser dada por uma distribuição, como a Delta de Dirac. A função  $K(t-s) = -\int_0^t \gamma(u-s)du$  é chamada de núcleo de Volterra (dos Santos, 2011).

mas este processo não é estacionário, com o coeficiente do termo autorregressivo de segunda ordem sempre igual a  $-1$ , de modo que há oscilação na autocorrelação, mas não é amortecida.

O processo que propomos, que chamaremos de Exponencial Flutuante, é dado por:

$$X(t) = X_0 [(1 - \nu)e^{-\theta t} + \nu \cos(\theta t)] + \int_0^t (1 - \nu)e^{-\theta(t-s)} + \nu \cos(\theta(t-s)) dL(s),$$

e, como será demonstrado no Teorema 5.1, é solução da ELG quando o processo de Lévy possui primeiro e segundo momentos finitos ou é  $\alpha$ -estável,<sup>5</sup> com parâmetro de estabilidade  $1 < \alpha \leq 2$ , para uma função memória dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \kappa_1 \delta_0(t) + e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} [\kappa_2 \cos(\theta\nu_1 t) + \kappa_{3,1} \sin(\theta\nu_1 t)] & \text{se } \text{sinal}(\nu_0) = 1; \\ \kappa_1 \delta_0(t) + e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} [\kappa_2 \cosh(\theta\nu_1 t) + \kappa_{3,-1} \sinh(\theta\nu_1 t)] & \text{se } \text{sinal}(\nu_0) = -1; \\ \kappa_1 \delta_0(t) + e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} [\kappa_2 + \kappa_{3,0} t] & \text{se } \text{sinal}(\nu_0) = 0; \end{cases}$$

em que  $\theta > 0$ ,  $|\nu| \leq 1$ ,  $\nu_0 = 1 - \nu - \frac{\nu^2}{4}$ ,  $\nu_1 = \sqrt{|\nu_0|}$ ,  $\delta_0(t)$  é a distribuição Delta de Dirac centrada em 0 e:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \theta(1 - \nu); \\ \kappa_2 &= (\theta\nu)^2; \\ \kappa_{3,1} &= \frac{\theta^2}{\nu_1} - \frac{(\theta\nu)^2}{2\nu_1} - \theta(1 - \nu) \left( \theta\nu_1 - \frac{\theta\nu^2}{4\nu_1} \right); \\ \kappa_{3,-1} &= \frac{\theta^2}{\nu_1} - \frac{(\theta\nu)^2}{2\nu_1} + \theta(1 - \nu) \left( \theta\nu_1 + \frac{\theta\nu^2}{4\nu_1} \right); \\ \kappa_{3,0} &= \theta^3 - \frac{\theta^3\nu^2}{2} + \theta(1 - \nu) \frac{(\theta\nu)^2}{4}. \end{aligned}$$

Fazendo  $\nu = 0$ , recuperamos  $\gamma(t) = \theta\delta_0(t)$  e fazendo  $\nu = 1$ , recuperamos  $\gamma(t) = \theta^2$ , de maneira que tanto o processo de OUG Exponencial como o processo de OUG Cosseno são casos especiais desta classe de processos, que,

---

<sup>5</sup>Como mostrado em Medino *et al.* (2012), esta solução também vale para um processo de Lévy qualquer quando se define a integração estocástica por convergência em probabilidade.

como provaremos no Teorema 5.2, apresenta uma relação de recorrência de segunda ordem geral dada por:

$$X((k+1)h) = [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) + \varepsilon_{k,h}.$$

Note que o coeficiente do termo de segunda ordem não é fixo como no processo de OUG Cosseno, podendo, assim, apresentar um comportamento autorregressivo de segunda ordem com uma autocorrelação que oscila de forma amortecida entre valores positivos e negativos.

Também mostraremos que os erros  $\varepsilon_{k,h}$  são autocorrelacionados e podem ser modelados como uma média móvel de ordem 1, de maneira que o processo de OUG Exponencial Flutuante admite discretização aproximada como um processo autorregressivo e de média móvel ARMA(2,1) (teorema 5.3),<sup>6</sup> permitindo a utilização do ferramental de séries temporais desenvolvido no capítulo 3 para analisar as características deste processo, o que é feito nos corolários 5.4 e 5.5.

Descreveremos, ainda, como a integral estocástica  $\varepsilon_{k,h}$  pode ser modelada de acordo com o tipo de ruído de Lévy do Processo de OUG Exponencial Flutuante, seja ele uma difusão com salto, com primeiro e segundo momentos finitos, ou  $\alpha$ -estável com tendência. Os resultados obtidos, particularmente os corolários 5.2 e 5.3, a proposição 5.1 e o teorema 5.3, fornecem as seguintes alternativas de estimação dos parâmetros do processo de OUG Exponencial Flutuante a partir da equação de recorrência:

- **Processo de Lévy  $\alpha$ -estável com tendência:** o corolário 5.2 permite a estimação por máxima verossimilhança, usando a equação 3.81;
- **Processo de Lévy de difusão com salto, com primeiro e segundo momentos finitos:** o corolário 5.3 permite a estimação por máxima verossimilhança, usando a fórmula da inversão;
- **Processo de Lévy de difusão com salto, com tamanho dos saltos normalmente distribuídos:** a proposição 5.1 mostra que o processo de erros da equação de recorrência dada pelo teorema 5.2 pode ser visto como variações em intervalos constantes de um processo de difusão com salto e fornece uma função densidade de probabilidade aproximada para o tamanho destes saltos, permitindo uma alternativa de estimação por máxima verossimilhança;

---

<sup>6</sup>Este também é o caso do processo de OUG Cosseno.

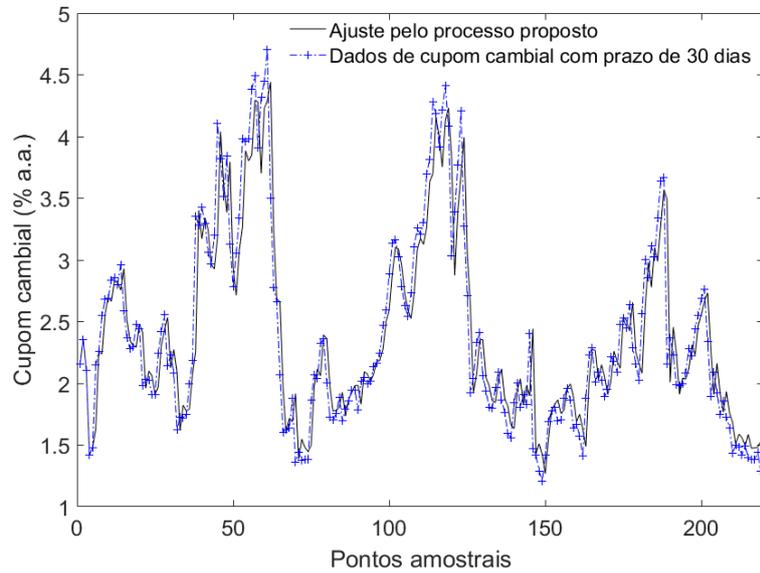
- **Processo de Lévy de difusão com salto, com primeiro e segundo momentos finitos:** quando a frequência de amostragem for suficientemente alta, o teorema 5.3 permite a utilização de qualquer técnica de estimação para processos ARMA, incluindo máxima verossimilhança e variações de métodos de mínimos quadrados ou de momentos, com as devidas alterações para levar em conta a hipótese sobre a distribuição do ruído branco e a informação contida na estrutura dos coeficientes, conforme os parâmetros do processo de OUG Exponencial Flutuante e do ruído de Lévy.

O teorema 5.2 e, no caso em que o ruído é dado por uma difusão com salto, o teorema 5.3 também permitem alternativas de simulação do processo de OUG Exponencial Flutuante, em adição a outras técnicas já conhecidas como o método de Euler-Maruyama ou da soma de Riemann-Stieltjes. Todas estas possibilidades de simulação também serão detalhadas neste trabalho, incluindo as listagens dos códigos MATLAB<sup>®</sup> correspondentes, apresentadas no apêndice B. A simulação permitirá, ainda, testar a estimação do processo de OUG Exponencial Flutuante.

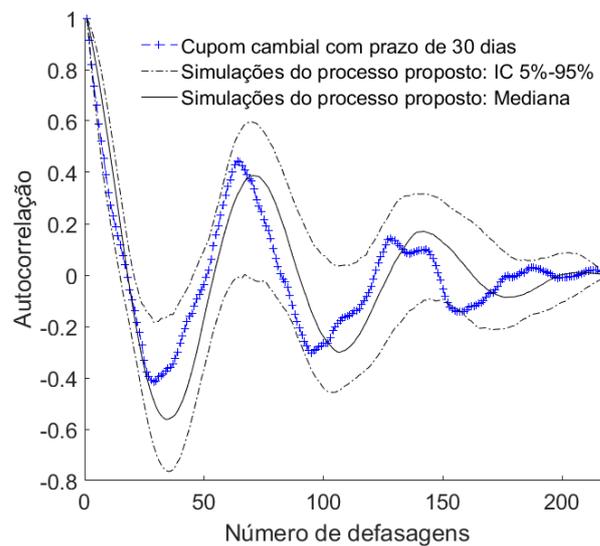
Por fim, estimamos o cupom cambial no capítulo 6, onde mostramos que o novo processo proposto é bem sucedido em descrever a dinâmica desta variável financeira. O caso do cupom cambial com prazo de 30 dias, estimado em uma amostra com 219 pontos amostrais, é particularmente útil para mostrar como o processo de OUG Exponencial Flutuante foi capaz de reproduzir a dinâmica dos dados, incluindo a estrutura de correlação: a figura 1.1 mostra a comparação entre os gráficos do cupom cambial e do processo proposto, em que são usados os parâmetros estimados e os resíduos da estimação, e a figura 1.2 mostra a autocorrelação empírica comparada com os valores da mediana e dos quantis de 5% e 95% obtidos em 1000 simulações do processo proposto, usando os parâmetros estimados.

É importante ressaltar que a modelagem formal do cupom cambial como um *convenience yield*, através de um processo de OUG, independentemente do tipo, já é uma inovação e possui aplicação direta na precificação de derivativos cambiais envolvendo o Real e o Dólar.

Em resumo, propomos uma classe de soluções da ELG, desenvolvida em conjunto com metodologias próprias para estimação e simulação, que gera processos contínuos capazes de replicar a oscilação amortecida da autocorrelação observada no comportamento empírico do cupom cambial, que também é analisado em detalhes neste trabalho.



**Figura 1.1:** Processo proposto ajustado aos dados de cupom cambial com prazo de 30 dias usando os parâmetros e resíduos estimados.



**Figura 1.2:** Função de autocorrelação empírica e intervalos de confiança definidos entre os quantis de 5% e 95% dos valores da função de autocorrelação para 1000 trajetórias simuladas do processo proposto.

## 1.1 Objetivos e Justificativa

É possível definir como objetivo geral deste trabalho a melhor compreensão da dinâmica estocástica do cupom cambial através da caracterização econométrica dos dados históricos e a proposta de um processo estocástico em tempo contínuo capaz de modelar estes dados, utilizando-se da analogia do comportamento do cupom cambial com um *convenience yield* como uma motivação para a escolha da classe de processos estocásticos com reversão à média a ser utilizada. Como parte deste objetivo geral, estariam os objetivos específicos: 1) analisar econometricamente os dados de cupom cambial e mostrar o comportamento autorregressivo e com reversão à média, consistente com um *convenience yield*, destacando a possível falta de adequação dos modelos usuais de reversão à média com saltos, baseados no processo de OU não gaussiano; 2) investigar novas soluções para a ELG capazes de apresentar as mesmas características observadas nos dados de cupom cambial, particularmente, uma dinâmica autorregressiva de segunda ordem com reversão à média; 3) desenvolver uma metodologia de estimação e simulação das soluções propostas; 4) utilizar a metodologia de estimação e simulação para testar a aderência do novo processo proposto aos dados empíricos.

A compreensão do cupom cambial como um *convenience yield* tem implicações importantes para a análise econômica do mercado de câmbio no Brasil; para a adequada interpretação das oscilações de preços e da influência de fatores internos e externos; para a formulação de política cambial e para a regulação dos mercados de câmbio, pois estabelece os fundamentos da formação deste preço e de sua relação com outros preços da economia, como a importância da tributação, do diferencial de prêmio de liquidez e de outros custos dos instrumentos financeiros utilizados na arbitragem do cupom cambial. Para além do caso brasileiro, a análise destes fatores também pode ajudar na explicação de episódios recentes de aparentes violações da paridade coberta da taxa de juros (*Covered Interest Rate Parity*, CIRP) quando os custos de arbitragem não são corretamente considerados (e.g. UBS Global Macro Strategy (2017), Sushko *et al.* (2016), Avdjiev *et al.* (2016) e BIS CCA Consultative Group of Directors of Operations (2017)).

Ainda mais relevantes, os resultados da análise econométrica detalhada e a formulação de um modelo em tempo contínuo para o cupom cambial oferecem uma contribuição para a adequada simulação e precificação de instrumentos derivativos que dependem da dinâmica do cupom cambial, auxiliando no aumento da eficiência dos mecanismos de descoberta de informação e compartilhamento de risco de acordo com as preferências dos agentes econômicos, papéis dos mais fundamentais desempenhados pelos mercados financeiros.

O roteiro desta tese é como segue: no capítulo 2, apresentamos as pe-

culiaries características do nosso mercado de câmbio, com particular ênfase na descrição da formação do cupom cambial, além de uma discussão mais detalhada da analogia entre o cupom cambial e um *convenience yield*, como motivação para esta pesquisa; no capítulo 3, tratamos em maiores detalhes dos processos com reversão à média dados por modelos discretos autorregressivos e de média móvel (ARMA), adequados à modelagem do *convenience yield*, e mostramos a conexão entre processos autorregressivos de ordem 1 e o processo de OU, o que leva à investigação dos processos de OUG direcionados por processos de Lévy como possíveis versões contínuas de processos ARMA de maior ordem, apresentando, em seguida, a solução da ELG para o processo de OUG Exponencial (i.e., para o processo de OU não gaussiano), a solução mais geral de Kannan (1977), expandida em Medino (2005) e dos Santos (2011) para processos de Lévy  $\alpha$ -estáveis e por Medino *et al.* (2012) para processos de Lévy com primeiro momento finito usando uma integral estocástica definida por convergência em probabilidade, as equações de recorrência para soluções particulares obtidas por Stein *et al.* (2016), a descrição e a estimação de processos de Lévy do tipo difusão com salto, entre outros resultados que serão utilizados neste trabalho; no capítulo 4, fazemos a análise econométrica da série temporal de valores para o cupom cambial, indicando a possibilidade de falta de aderência do processo de OU não gaussiano; no capítulo 5, propomos uma classe de processos de OUG que chamamos do tipo Exponencial Flutuante, da qual os processos de OUG Exponencial e Cosseno são casos particulares, adequada para modelar o comportamento empiricamente observado do cupom cambial, demonstramos que essa classe de processos é solução da ELG e que apresenta uma relação de recorrência de segunda ordem geral, correspondente a um processo ARMA(2, 1), e também analisamos seu comportamento quando o processo de Lévy é uma difusão com salto ou tem distribuição  $\alpha$ -estável, propondo, finalmente, alternativas para estimação dos parâmetros e simulação de processos desta classe; no capítulo 6, estimamos e testamos a aderência aos dados dos processos de OUG proposto no capítulo anterior; no capítulo 7, discutimos os resultados obtidos e suas implicações práticas, sugerimos próximos tópicos de pesquisa com base nos nossos resultados e apresentamos as conclusões finais do trabalho.

# Capítulo 2

## Motivação

Nas seções a seguir, detalharemos os aspectos práticos do funcionamento do mercado cambial no Brasil e as características de liquidez deste mercado que levam a considerar a modelagem do cupom cambial como um *convenience yield*, motivando o modelo estocástico utilizado.

### 2.1 O Mercado de Câmbio no Brasil

Décadas de alta inflação afetaram fundamentalmente a maneira como operações financeiras são realizadas no Brasil, das convenções de mercado para a representação das taxas de juros à demanda por infraestruturas de tecnologia de informação mais eficientes. No setor externo, crises sucessivas no balanço de pagamentos levaram a um ambiente regulatório desenhado para proteger o nível de reservas e dificultar saídas de capital. Embora muito tenha mudado nas últimas duas décadas, inflação alta e a necessidade de proteger as reservas modelaram os mercados cambiais no Brasil de forma única e peculiar.

Com fundamentos macroeconômicos mais sólidos, incluindo o câmbio flutuante, e um nível de reservas internacionais sem precedentes, a realidade econômica brasileira mudou bastante e muito tem sido feito recentemente para modernizar a regulação cambial de modo que acompanhe essa mudança.<sup>1</sup> Subsistem, contudo, numerosos desafios e um legado importante da legislação de proteção ao nível de reservas é a segmentação de mercados.

O regime regulatório vigente discrimina entre as operações cambiais que afetam o balanço de pagamentos, organizadas no mercado primário, e as demais operações, organizadas no mercado secundário, o que inclui operações entre instituições financeiras (operações interbancárias), negociações de

---

<sup>1</sup>Vide BCB (2015).

derivativos cambiais em bolsa ou balcão e a negociação de instrumentos financeiros denominados em moeda nacional, mas que possuam risco cambial. A participação no mercado interbancário é limitada a instituições explicitamente autorizadas pelo BCB. Cada operação no mercado primário deve possuir uma instituição financeira autorizada como uma das contrapartes: indivíduos, empresas e demais investidores, residentes ou não, são proibidos de realizar transações diretamente entre si. Adicionalmente, todas as operações no mercado à vista precisam ter um correspondente contrato de câmbio, devidamente registrado nos sistemas de informações do BCB.

Não existem tais limitações à participação no mercado de derivativos cambiais, particularmente, na compra e venda de contratos futuros de dólar. Decorre que, enquanto o mercado à vista é bastante regulado, o que, é possível argumentar, dificultaria a participação dos agentes econômicos e limitaria a liquidez, o mercado futuro pode ser facilmente acessado pelos mais diversos participantes, de pessoas naturais a investidores estrangeiros.

De fato, em um dia típico de negociação, o volume no mercado futuro é várias vezes maior que o volume negociado no mercado à vista interbancário, como mostrado na Tabela 1. O cálculo de volume no mercado interbancário à vista considera apenas as operações com vencimento em dois dias úteis (vencimentos em "D+2"), que representam a grande maioria das operações à vista e são as taxas consideradas na determinação da taxa PTAX.

Ano	Volume Médio Diário (US\$ Bilhões)		
	À Vista (D+2)	Futuro (1o. + 2o.)	Futuro/À Vista
2006	1,7	10,1	5,9
2007	2,7	17,0	6,2
2008	2,8	17,2	6,2
2009	2,3	13,5	5,9
2010	2,6	16,6	6,4
2011	2,0	17,2	8,7
2012	1,8	17,0	9,4
2013	1,9	16,8	8,7
2014	1,3	16,5	12,3

**Tabela 2.1:** Volume diário negociado nos mercados futuro e à vista. Fonte: BCB e B3.

Outra possível razão para a diferença entre a liquidez no mercado futuro e no mercado à vista é histórica. Até 1999, os mercados futuro e à vista tinham tamanhos comparáveis, com o mercado futuro ocasionalmente representando o dobro do volume. O câmbio flutuante, introduzido em janeiro de 1999, aumentou o risco das operações cambiais à vista, especialmente quando se

considera que o País havia passado por uma crise bancária fazia apenas quatro anos. Neste contexto, quando era necessário apenas *hedge* cambial e não a moeda estrangeira, dava-se preferência à utilização de contratos futuros. Os contratos futuros sempre foram negociados em um sistema com contraparte central, o que era mais seguro, embora mais caro, que contratos bilaterais de câmbio, usualmente ocorrendo, neste caso, a necessidade de aprovação prévia de limites de crédito entre as contrapartes. A então bolsa de derivativos brasileira, BM&F,<sup>2</sup> criou uma *clearing* para transações à vista de câmbio em maio de 2002, mas a esta altura o volume diário transacionado no mercado futuro já era mais de quatro vezes maior que o volume de transações à vista.

Dada essa notável diferença, é razoável argumentar que a taxa de câmbio seja equilibrada no mercado futuro e então transmitida ao mercado à vista. Há, de fato, estudos que sugerem esta dinâmica. Garcia & Urban (2004), por exemplo, usam causalidade Granger para mostrar que há evidência estatística de que, no Brasil, os preços no mercado futuro precedem os preços no mercado à vista.

Um outro indício nesse sentido vem do uso disseminado do contrato informal de **casado**. A cotação de um contrato de casado é dada pela diferença entre a taxa de câmbio no mercado futuro (usualmente para o vencimento seguinte) e a taxa de câmbio no mercado à vista. Assim, o que é efetivamente negociado é um diferencial de preços, e o fechamento da operação à vista é dado pela cotação da taxa de câmbio futura no momento menos o casado negociado:

$$USD_{\hat{a} \text{ vista}} = USD_{\text{futuro}} - \text{casado}. \quad (2.1)$$

Para entendermos a motivação por trás do uso de contratos de casado, é importante quantificarmos a relação entre o valor do casado e os demais preços de mercado. Como as partes efetivamente negociam o casado e não diretamente o preço no mercado à vista, este mecanismo de fato modifica a dinâmica normal da formação de preços pela paridade coberta da taxa de juros (*Covered Interest Rate Parity*, CIRP). Na formulação tradicional da CIRP, considera-se que as taxas de juros locais, as taxas de juros em moeda estrangeira e a taxa de câmbio à vista são formadas em seus respectivos mercados, o que determina uma taxa de câmbio a termo na ausência de oportunidades arbitragem. Apesar de haver diferenças na precificação de contratos a termo e futuros, para os efeitos deste trabalho consideraremos que são aproximadamente os mesmos, de modo que o preço futuro de US\$ 1,

---

<sup>2</sup>Hoje B3, resultado da fusão entre a Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), a Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) e a Central de Custódia e Liquidação Financeira de Títulos (CETIP).

expresso em reais, de acordo com a CIRP e com as convenções dos mercados cambiais brasileiros, é:

$$USD_{futuro} = USD_{\grave{a} vista} \frac{(1 + r_d)^{\frac{du}{252}}}{(1 + r_{e, local} \times \frac{dc}{360})} \quad (2.2)$$

em que  $USD_{\grave{a} vista}$  é o preço de US\$ 1 expresso em reais,  $r_d$  é a taxa de juros doméstica no período de  $du$  dias úteis até o vencimento do contrato futuro e  $r_{e, local}$  é a taxa de juros em moeda estrangeira para o período de  $dc$  dias corridos até o vencimento do contrato futuro, na convenção de contagem de dias  $actual/360$ . O índice local foi adicionado porque o custo local de financiamento em moeda estrangeira, chamado no Brasil de *cupom cambial*, é diferente do custo de financiamento de um agente no país de origem do capital.

É possível argumentar que qualquer custo que dificulte a arbitragem do cupom cambial também limita a validade da CIRP, já que resulta numa diferença entre a taxa de juros em moeda estrangeira e o custo local de captação nesta mesma moeda. Por exemplo, podem ser razões para essa diferença os impostos para internalização dos recursos e mais quaisquer outros custos resultantes de o agente estar realizando a captação no Brasil ou aí estar utilizando instrumentos financeiros que sintetizem esta captação, sejam eles custos financeiros diretos ou custos de oportunidade, inclusive decorrentes do risco da operação. Uma componente deste custo é a diferença entre os prêmios de risco de liquidez das captações locais e das captações por um agente no país de origem do capital. Essa diferença entre os prêmios de liquidez é normalmente positiva, dada a baixa liquidez do mercado à vista local,<sup>3</sup> mas pode tornar-se negativa caso haja uma redução importante na disponibilidade de linhas de financiamento externas não acompanhadas por uma redução da liquidez no mercado à vista local. Também cabe considerar a possibilidade de riscos de crédito diferentes nas captações domésticas e externas, além de um risco de conversibilidade, que é apenas da moeda doméstica, já que a moeda estrangeira é considerada conversível. Este risco de conversibilidade incluiria a possibilidade de mudança na tributação ou na legislação cambial, o risco de controles de capital, o risco de uma *sudden stop* e um consequente processo de *flight to quality*, entre outras possibilidades. Por fim, também cabe considerar a existência de outros custos, inclusive de oportunidade, que

---

<sup>3</sup>Se uma instituição financeira precisa de recursos em moeda estrangeira por um certo período, ela pode comprar moeda estrangeira no mercado à vista com compromisso de venda em uma data futura. Se os preços de compra e venda são definidos ao mesmo tempo no início da operação, então compra e venda equivalem a um empréstimo em moeda estrangeira. Se há baixa liquidez no mercado à vista, o prêmio de liquidez deve ser adicionado ao custo de obter-se este tipo de financiamento.

também dificultariam a arbitragem do cupom cambial, como, por exemplo, o descasamento entre os prazos do cupom e do instrumento usado para *hedge*, exigências regulatórias sobre o balanço das instituições financeiras que realizam a arbitragem, entre outros.

Assim,

$$r_{e,local} = r_e + impostos + r_{conv} + DRC + DPL + r_{CA}, \quad (2.3)$$

em que  $r_e$  é a taxa de juros em moeda estrangeira no país da divisa, *impostos* são os custos oriundos da tributação de entradas e saídas de recursos externos,  $r_{conv}$  é o risco de conversibilidade,  $DPL = r_{L,e} - r_{L,local}$  é a diferença entre os prêmios de risco de liquidez externo ( $r_{L,e}$ ) e local ( $r_{L,local}$ ),  $DRC = r_{C,e} - r_{C,local}$  é a diferença entre os prêmios de risco de crédito externo ( $r_{C,e}$ ) e local ( $r_{C,local}$ ) e  $r_{CA}$  representa os demais custos de arbitragem do cupom cambial.

Considerando que a maior parte das operações ou possuem alguma forma de garantia ou são liquidadas em uma *clearing*, espera-se que o risco de crédito tenha pouca variabilidade. Episódios de estresse nos mercados financeiros, contudo, podem mudar a percepção de risco mesmo de operações com alguma garantia, bem como afetar  $r_{conv}$ . Impostos e o custo de transação das operações de arbitragem podem sofrer mudanças pontuais, mas, em geral, também possuem pouca variabilidade. Assim, é possível argumentar que as principais fontes de variação no cupom cambial são o risco de conversibilidade,  $r_{conv}$ , e o prêmio de liquidez local,  $r_{L,local}$ , uma vez que, exceto em situações muito extremas, como na crise imobiliária de 2008, a liquidez em dólar externa é bastante alta.

Note que, usando 2.1 em 2.2 e isolando  $r_{e,local}$ , é possível expressar o cupom cambial em termos do preço futuro do dólar e da correspondente cotação do contrato de casado:

$$r_{e,local} = \left[ \left( \frac{USD_{futuro} - casado}{USD_{futuro}} \right) (1 + r_d)^{\frac{du}{252}} - 1 \right] \frac{360}{dc}. \quad (2.4)$$

Como a maioria das operações à vista são, de fato, contratos de casado,<sup>4</sup> os preços que são obtidos pelo equilíbrio de mercado são o da taxa de juros doméstica,  $r_d$ , do contrato futuro do dólar,  $USD_{futuro}$ , e do contrato de casado. Este último, pela equação 2.4, corresponde a um único cupom cambial,  $r_{e,local}$ .

Logo, destes três preços: dólar futuro ( $USD_{futuro}$ ), cupom cambial ( $r_{e,local}$ ) e taxa de juros doméstica ( $r_d$ ), todos para o mesmo prazo, medido em dias

---

<sup>4</sup>Uma pesquisa informal realizada pela Mesa de Câmbio do BCB com alguns dos maiores participantes do mercado brasileiro de câmbio à vista revela que a participação de contratos de casado no volume total de operações à vista pode chegar a 80%.

úteis ou corridos, conforme as respectivas convenções, decorre a taxa à vista "justa", no sentido de ser aquela que garante a validade da CIRP:

$$USD_{\text{à vista}} = USD_{\text{futuro}} \frac{\left(1 + r_{e,local} \times \frac{dc}{360}\right)}{\left(1 + r_d\right)^{\frac{du}{252}}}, \quad (2.5)$$

Assim, em vez da dinâmica tradicional em que a taxa de câmbio à vista é um dos preços formados livremente em seus respectivos mercados, se a maioria das operações à vista ocorre através de contratos de casado, a taxa de câmbio à vista é uma consequência do argumento de ausência de arbitragem implícito na CIRP, enquanto a descoberta de preços ocorre nos mercados de juros doméstico, de casado (que é, virtualmente, um mercado local de juros em moeda estrangeira) e de câmbio futuro.

Resta entender por que os contratos de casado são tão frequentemente usados. Tanto a falta de liquidez no mercado à vista como a grande liquidez do mercado futuro são razão importantes. Em um dia normal de negócios, uma instituição financeira relutaria em comprar ou vender uma posição muito grande em dólares, já que seria difícil encontrar contrapartes no mercado à vista para desfazer esta posição. Usualmente, *market makers* em uma situação semelhante simplesmente aumentam o *bid-offer spread* para compensar o risco cambial que são forçados a suportar até que finalmente consigam encerrar a posição, o que pode ser especialmente perigoso em períodos de alta volatilidade. Contudo, como o mercado futuro no Brasil é atipicamente maior que o mercado à vista, sempre é possível fazer o *delta hedge* do risco cambial das operações primárias através do mercado futuro, em vez de aumentar o *bid-offer spread*.

No jargão de mercado, "comprar casado" corresponde a comprar dólar à vista e vender uma posição correspondente no mercado futuro, i.e., assumir uma posição "comprada" (*long*) à vista (*spot*) e uma posição "vendida" (*short*) no mercado futuro. Correspondentemente, "vender casado" significa vender dólar à vista e comprar uma posição correspondente no mercado futuro, i.e., assumir uma posição "vendida" à vista e "comprada" em futuro. Em resumo, "compra" ou "venda" de contrato de casado corresponde à compra ou venda da ponta *spot* do contrato, respectivamente.

Como resultado, ao comprar um contrato de casado o *market maker* virtualmente elimina o risco de câmbio e fica apenas com o risco de base, que corresponde ao risco de variação no casado ou, equivalentemente, no cupom cambial,  $r_{e,local}$ , conforme mostrado no exemplo abaixo de uma compra e posterior venda de um contrato de casado. Os resultados da variação cambial compensam-se na compra e na venda, zerando o resultado final:

Mais formalmente, para cada 1 R\$/US\$ de aumento na taxa de câmbio,

Operação	Cotação do casado	Preço no mercado futuro (R\$/US\$)		Registro da operação à vista (R\$/US\$)	
Compra	10	1,7540	Venda	1,7530	Compra
Venda	10	1,7380	Compra	1,7370	Venda
Resultado		0,0160	≈ 1%	-0,0160	≈ -1%

**Tabela 2.2:** Exemplo de como o risco de variação no câmbio é eliminado entre uma operação de compra de casado e sua venda posterior.

o resultado da compra e posterior venda de um contrato de casado será, *coeteris paribus*, o ganho na posição comprada à vista menos a perda na posição vendida no mercado futuro, i.e.:

$$\begin{aligned}
\Delta_{casado} &= \frac{\partial(USD_{\acute{a} vista} - P_{futuro})}{\partial USD_{\acute{a} vista}} = 1 - \frac{\partial P_{futuro}}{\partial USD_{\acute{a} vista}} \\
&= 1 - \frac{\partial \left( \frac{USD_{futuro} - F}{(1+r_d)^{\frac{du}{252}}} \right)}{\partial USD_{\acute{a} vista}} = 1 - \frac{\partial \left( \frac{USD_{\acute{a} vista}}{1+r_{e,local} \times \frac{dc}{360}} - \frac{F}{(1+r_d)^{\frac{du}{252}}} \right)}{\partial USD_{\acute{a} vista}} \\
&= \frac{r_{e,local} \times \frac{dc}{360}}{1 + r_{e,local} \times \frac{dc}{360}} \tag{2.6}
\end{aligned}$$

que é muito pequena e tanto menor quanto menor for  $r_{e,local}$ , implicando em uma sensibilidade muito baixa ao risco cambial. Note que  $P_{futuro}$  é o valor de mercado de um contrato futuro após sua contratação e  $F$  é o preço futuro ao qual esse contrato foi fechado.

Como a maioria das operações primárias começou a ser "casada" desta forma com uma operação inversa no mercado futuro para imunizar o risco cambial, tornou-se usual entre os *market makers* negociar simplesmente a diferença entre o câmbio futuro e à vista, originando o mercado de casado.

## 2.2 O Cupom Cambial como um *Convenience Yield*

Brennan (1991, p. 33-34) define *convenience yield* como "the flow of services which accrues to the owner of a physical inventory but not to the owner of a contract for future delivery", detalhando, em seguida, que este fluxo de serviços, ou vantagens, inclui "both the reduction in costs of acquiring inventory, and the value of being able to profit from temporary local shortages".

Dadas as restrições de liquidez no mercado à vista de câmbio no Brasil, analisadas na seção anterior, o presente trabalho discute a hipótese de que as limitações ao câmbio de reais por moeda estrangeira possa trazer benefícios a agentes econômicos que mantenham disponibilidades ("estoques") em dólar, seja porque necessitem da moeda em suas operações ("reduction in costs of acquiring inventory") ou porque esperam obter retornos em momentos de escassez ("profit from temporary local shortages"). Desta maneira, o dólar, para os agentes econômicos que operam no mercado doméstico, comporta-se como uma *commodity* de uso, abrindo a possibilidade para a análise do cupom cambial como um *convenience yield*, particularmente no que diz respeito ao comportamento do componente de prêmio de liquidez local,  $r_{L,local}$ , em 2.3.

Assim, propõe-se a modelagem do dólar no mercado doméstico de câmbio como uma *commodity* de uso, o que ajuda a entender a dinâmica entre os preços futuro e à vista ao eliminar uma confusão frequente entre fluxos para arbitragem, que apenas ajustam a relação entre o preço à vista e o preço futuro, mas não têm efeito sobre a tendência do câmbio, e fluxos que efetivamente afetam as expectativas sobre a tendência.

Em um modelo deste tipo, o cupom cambial funciona como um *convenience yield*; os fluxos de entrada ou a disponibilidade de linhas de captação externa como a produção da *commodity*; os fluxos de saída<sup>5</sup> como o consumo da *commodity*; e as disponibilidades em dólar de residentes mais as reservas internacionais mantidas pelo BCB como os estoques da *commodity*.

Enquanto se acredita que existem estoques – dólar na conta de residentes e reservas internacionais – ou produção – fluxo de entrada e facilidade de captação – suficientes para suprir a demanda doméstica da *commodity*, os agentes econômicos que necessitam apenas de *hedge*, mas não de caixa, pelo menos imediatamente, estarão bem atendidos com instrumentos derivativos, mesmo com liquidação financeira em reais, como é o caso dos futuros e dos *swaps* cambiais oferecidos pelo BCB. Neste cenário, o mercado à vista funciona com liquidez, girando a demanda normal da *commodity*. As intervenções em derivativos afetam o preço futuro e este impacto é transmitido ao preço à vista via arbitragem do *convenience yield*: quanto menor a diferença entre o preço futuro e o preço à vista, maior o *convenience yield* e fica mais atrativo realizar estoques ou produzir mais – vender posição ou realizar captação externa para venda doméstica – contra a compra de dólares no mercado futuro. Como o mercado futuro é mais líquido, isso move mais o preço à vista, aumentando a diferença entre a taxa futura e a taxa à vista e diminuindo o

---

<sup>5</sup>Fluxos de saída tanto de não residentes com capital no Brasil para remeter lucros ou para liquidar posições, quanto de residentes, como importadores ou empresas com dívidas em dólar, que não podem fazer pagamentos externos em moeda local.

*convenience yield* até que ele deixe de ser atrativo. Note que o que significa "ser atrativo" depende da liquidez. Pouca liquidez à vista pode tornar mais interessante manter o dólar em vez de fazer a arbitragem, que, por outro lado, não é uma arbitragem sem risco: as linhas externas raramente têm o mesmo prazo que o contrato futuro e a liquidação no mercado futuro é em reais, de modo que a conversão destes reais para dólar na liquidação, dependendo da liquidez do mercado à vista, pode mover a taxa de câmbio e trazer perdas, especialmente em situações de crise. Assim, existe efetivamente um mercado doméstico de cupom cambial, cujo preço de equilíbrio está associado às expectativas de liquidez do mercado à vista, e não apenas à taxa de juros externa.

Por outro lado, se alguém acredita que a escassez da *commodity* será exacerbada o suficiente para disparar um movimento de mercado semelhante a uma corrida, como no caso de *sudden stops*, *flight to quality*, expectativa de mudanças regulatórias e controles de capitais, entre outros, aqueles que realmente precisam da *commodity* para realizar pagamentos estarão dispostos a aceitar qualquer preço pelo caixa efetivo em moeda estrangeira e nenhum *hedge* com liquidação em moeda local pode satisfazer esta demanda. Desta forma, ficam claras as implicações da compreensão da dinâmica do cupom cambial não apenas para a formação de preços nos mercados futuros e à vista, como também para a estabilidade financeira e para a formulação de políticas cambiais.

Finalmente, cabe ressaltar que a analogia que estamos propondo entre o dólar e uma *commodity*, do ponto de vista de um agente econômico realizando operações dentro do Brasil, não é exatamente uma inovação, tendo sido citada por Nassim Taleb, no prefácio de Geman (2005), que sugeriu a negociação de moedas não conversíveis como uma das possíveis aplicações gerais de um conhecimento mais aprofundado sobre os derivativos de *commodities*, embora tenha feito a analogia sob a perspectiva contrária de um investidor com balanço em dólares, em que a *commodity* é a moedas não conversível. Por outro lado, a elaboração formal desta analogia, com o desenvolvimento de um modelo quantitativo e sua adequada aplicação às peculiaridades de um mercado cambial (o brasileiro, neste trabalho), até onde é do nosso conhecimento, trata-se, sim, de uma inovação. Portanto, ainda não existe uma literatura que consolide a nomenclatura para esta abordagem. Seria perfeitamente aceitável, por exemplo, considerar o diferencial de taxa de juros  $r_d - r_e$  (tomando ambas como taxas contínuas) como um *carry cost* ou *inventory cost* e apenas os prêmios pelos riscos de conversibilidade e de liquidez como um *convenience yield*, em analogia, por exemplo, à equação 5.19 em Hull (2018,

p. 127).<sup>6</sup> Contudo, como o cupom cambial atende perfeitamente à definição de Brennan (1991), optamos por tratar o próprio cupom cambial como um *convenience yield*. De qualquer maneira, nada impede que a metodologia desenvolvida neste trabalho seja usada para modelar apenas o prêmio por liquidez no mercado local,  $r_{L,local}$ . De fato, conceitualmente, é precisamente o que faremos no capítulo 4.

---

<sup>6</sup>A equação citada relaciona o preço à vista de uma *commodity* de uso (ou de consumo, como utilizado pelo autor),  $S_0$ , e o preço de um contrato futuro sobre esta *commodity*,  $F_0$ , com vencimento em um prazo  $T$ , dado um *carry cost*  $c$  e um *convenience yield*  $y$ , ambos em taxas contínuas, através da fórmula:  $F_0 = S_0 e^{(c-y)T}$ .

## Capítulo 3

# Modelos de Reversão à Média e o Processo de Ornstein-Uhlenbeck Generalizado (OUG)

Conforme discutido no capítulo 1, é padrão na literatura a utilização de modelos com reversão à média para o *convenience yield*, o que é obtido, tradicionalmente, através da solução da Equação de Langevin, dada pelo processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU) <sup>1</sup> e, como analisado na seção 2.2, é possível tratar o cupom cambial como um *convenience yield*. Contudo, os estoques de moeda estrangeira, que afetam o cupom cambial, estão sujeitos a variações bruscas. Alterações nas condições econômicas, políticas, financeiras e jurídicas internas e externas podem mudar rapidamente a liquidez e disponibilidade de divisas, ocasionando saltos no cupom cambial não capturados pela integral estocástica em relação a um processo de Wiener, como é o caso do processo de OU clássico.

Neste capítulo, analisaremos uma alternativa de modelagem estocástica para o *convenience yield* através da Equação de Langevin Generalizada (ELG), proposta por Mori e Kubo (vide Mori (1965), Kubo (1966) e Pechukas (1967)), particularmente quando a integral estocástica correspondente é em relação a um processo de Lévy, o que permite a possibilidade de saltos. É importante ressaltar que não se trata apenas da possibilidade de saltos. A ELG também tem flexibilidade suficiente para que se modele a estrutura de autocorrelação dos dados, através da função memória, definida neste tópico, o que será crucial no caso do cupom cambial.

Chamaremos a solução da ELG de processo de Ornstein-Uhlenbeck Gene-

---

<sup>1</sup>Vide, por exemplo, Gibson & Schwartz (1990), Brennan (1991), Schwartz (1997), Casassus & Collin-Dufresne (2005) e Geman (2005).

realizado (OUG), para distingui-lo dos processos de Ornstein-Uhlenbeck não gaussianos (Barndorff-Nielsen & Shephard, 2001), que também generalizam os processos de OU, ao permitir saltos, mas têm um grau de generalidade menor, uma vez que a função memória é fixa.

O fato do processo de OU ser a versão contínua de um processo autorregressivo de primeira ordem, AR(1),<sup>2</sup> motiva o estudo dos processos de OUG na busca de aproximações em tempo contínuo para processos autorregressivos de maior ordem, havendo, neste trabalho, particular interesse no processo AR(2), mais adequado à dinâmica do cupom cambial, como será mostrado no capítulo 4.

Nas próximas seções, detalharemos o conceito de reversão à média, sua relação com processos autorregressivos e de média móvel e os aspectos teóricos mais relevantes dos processos de OUG, candidatos a modelos em tempo contínuo para séries financeiras que apresentam reversão à média com ordem da relação de recorrência maior que 1.

### 3.1 Processos Discretos Lineares, Reversão à Média e o Processo de Ornstein-Uhlenbeck

Nesta seção, adaptamos de Hayashi (2000, caps. 2, 6 e 9) definições e resultados relacionados ao conceito de reversão à média e a processos discretos lineares fracamente estacionários, incluindo processos autorregressivos e de média móvel, e, a partir destas definições e resultados, concluímos que qualquer processo discreto linear apresenta reversão à média. Também apresentamos algumas características relevantes dos processos autorregressivos e de média móvel, particularmente a relação entre processos AR(1), em tempo discreto, e o processo de OU, em tempo contínuo, seguindo Gouriéroux & Jasiak (2001, cap. 2). As definições, proposições e demonstrações a seguir referem-se a um espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \mathbb{P})$  com medida de probabilidade completa e processos estocástico discretos adaptados a  $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

**Definição 3.1.** *Um processo estocástico discreto  $(X_k; k \in \mathbb{Z})$  é **fracamente estacionário, estacionário em covariância ou estacionário de segunda ordem se:***

---

<sup>2</sup>Gouriéroux & Jasiak (2001, p. 35) mostram que se pode chegar a um processo de OU a partir de um processo AR(1) quando o intervalo de amostragem tende a zero. Stein *et al.* (2016), por outro lado, mostram que o processo de OU pode ser discretizado através de uma relação de recorrência de primeira ordem, de modo que é possível interpretar esta discretização como um processo AR(1).

1.  $\mathbb{E}[X_k]$  não depende de  $k$ ;
2.  $\text{Cov}(X_k, X_{k-j})$  existe, é finita e depende apenas de  $j \in \mathbb{Z}_+$ ;

O primeiro processo discreto fracamente estacionário que definiremos será uma peça importante na nossa análise:

**Definição 3.2.** Um processo estocástico discreto  $(\varepsilon_k; k \in \mathbb{Z})$  é um **ruído branco em covariância**, **ruído branco em sentido fraco** ou **ruído branco em sentido amplo** se é fracamente estacionário com  $\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0$ ,  $\text{Var}(\varepsilon_k) = \sigma^2$  e  $\mathbb{E}(\varepsilon_k \varepsilon_{k-j}) = 0$  para  $j \in \mathbb{Z}^*$ .

A qualificação do ruído branco em sentido fraco serve para distingui-lo do ruído branco independente e identicamente distribuído (i.i.d.), mas, de agora em diante, sempre que nos referirmos a ruído branco estaremos considerando a definição de ruído branco em sentido fraco.

**Definição 3.3.** Seja  $\ell_1$  o espaço vetorial das sequências cujas séries são absolutamente convergentes. Um processo estocástico discreto  $(X_k; k \in \mathbb{Z})$  é **linear** se puder ser representado por um parâmetro  $\mu \in \mathbb{R}$  e pelo vetor  $\psi \in \ell_1 \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , tal que suas coordenadas,  $\psi_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+$ , são os coeficientes do somatório infinito de um ruído branco  $(\varepsilon_k; k \in \mathbb{Z})$ , de modo que:

$$X_k = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{k-i}.$$

**Definição 3.4.** Uma **média móvel de ordem  $q$** , representada por  $MA(q)$  ( $q$ -th order moving average process) é um processo estocástico discreto linear, conforme a definição 3.3, no qual  $q < \infty$  é o maior índice do vetor  $\psi$  tal que a coordenada correspondente,  $\psi_q$ , seja diferente de zero, i.e.,  $\psi_q \neq 0$  e  $\psi_i = 0 \forall i > q$ . Se não existir este índice, o processo estocástico discreto linear é chamado de **média móvel de ordem infinita** e representado por  $MA(\infty)$ .

A existência do limite  $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{k-i}$  na definição 3.3 e a estacionariedade de um processo estocástico discreto linear são garantidas pelo resultado abaixo:

**Proposição 3.1.** (*Hayashi (2000), Proposição 6.1, p. 367*) Dado um processo estocástico discreto linear  $X = (X_k; k \in \mathbb{Z})$ , representado pelo parâmetro  $\mu$  e pelo vetor  $\psi \in \ell_1$  de coeficientes reais do somatório de um ruído branco  $(\varepsilon_k; k \in \mathbb{Z})$ , com  $\text{Var}(\varepsilon_k) = \sigma^2$ , conforme a definição 3.3, então  $(\sum_{i=0}^m \psi_i \varepsilon_{k-i}; m \in \mathbb{Z}_+)$  converge em média quadrática e  $X$  é fracamente estacionário, com  $\mathbb{E}(X_k) = \mu$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  e  $\text{Cov}(X_k, X_{k-j}) = \gamma_j = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{j+i} \psi_i$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ . Além disso,  $(\gamma_j; j \in \mathbb{Z}_+) \in \ell_1$ .

Este resultado pode ser estendido para o caso em que, em vez do ruído branco, usamos um processo estocástico discreto qualquer  $(Z_k; k \in \mathbb{Z})$ , estacionário em covariância, cuja soma em valor absoluto para todas as defasagens é finita, como detalhado na próxima proposição:<sup>3</sup>

**Proposição 3.2.** (*Hayashi (2000), Proposição 6.2, p. 369*) *Seja  $Z = (Z_k; k \in \mathbb{Z})$  um processo estocástico discreto fracamente estacionário e o vetor  $\phi \in \ell_1$  com coordenadas reais  $\phi_j, j \in \mathbb{Z}_+$ . Então  $\sum_{j=0}^m \phi_j Z_{k-j}$  converge em média quadrática e o processo  $X = (X_k, k \in \mathbb{Z})$  dado por  $X_k = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j Z_{k-j}$  é fracamente estacionário. Se, adicionalmente, o vetor de autocovariâncias de  $Z, (\text{Cov}(Z_k, Z_{k-j}), j \in \mathbb{Z}_+)$ , estiver em  $\ell_1$ , então o vetor de autocovariâncias de  $X$  também está.*

Nosso próximo passo será estabelecer uma equivalência entre processos  $\text{AR}(p)$  e  $\text{MA}(\infty)$ . Para isso, serão úteis os conceitos de operador defasagem, filtro e polinômio de defasagem, dados a seguir:

**Definição 3.5.** *O operador defasagem é um operador linear  $L$  que mapeia a coleção de variáveis aleatórias de um processo estocástico discreto fracamente estacionário  $(Z_k; k \in \mathbb{Z})$  nela mesma, através da relação  $LZ_k := Z_{k-1}$ . A composição do operador defasagem é denotada pela utilização de um expoente, de modo que  $L(LZ_k)$  é denotado por  $L^2Z_k = Z_{k-2}$  ou, em geral,  $L^jZ_k = Z_{k-j}$ , onde  $L^j$  denota a composição de  $j$  operadores defasagem.*

**Definição 3.6.** *Considere um vetor  $(\phi_j; j \in \mathbb{Z}_+) \in \ell_1$ , i.e., a soma infinita do valor absoluto de suas coordenadas converge, de modo que estas coordenadas são ditas **absolutamente somáveis**. Um **filtro absolutamente somável** é o operador  $\phi(L) := \phi_0 + \phi_1L + \phi_2L^2 + \dots$  tal que, dado um processo estocástico discreto fracamente estacionário  $(Z_k; k \in \mathbb{Z})$ ,  $\phi(L)Z_k = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j Z_{k-j}$ . Se  $\phi_p \neq 0$  e  $\phi_j = 0 \forall j > p \geq 1$ , então o filtro é chamado de **polinômio de defasagem de ordem  $p$** .*

Note que, pela proposição 3.2,  $\phi(L)Z_k = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j Z_{k-j}$  está bem definido, mas, em geral, um filtro não precisa que  $(\phi_j; j \in \mathbb{Z}_+) \in \ell_1$ . Para nossos propósitos, contudo, trataremos apenas de filtros absolutamente somáveis, que chamaremos simplesmente de filtros.

**Definição 3.7.** *Definimos a operação binária de **produto** entre dois filtros  $\phi_a(L)$  e  $\phi_b(L)$  como a composição destes dois operadores lineares, denotada por  $\phi_a(L)\phi_b(L)$ .*

---

<sup>3</sup>Uma prova pode ser encontrada em Fuller (1996, Teorema 4.3.1).

É fácil mostrar que o produto entre dois filtros é comutativo, isto é,  $\phi_a(L)\phi_b(L) = \phi_b(L)\phi_a(L)$ . Para o caso em que os filtros são polinômios de defasagem, há uma imediata analogia ao produto de polinômios. Para o caso geral, a sequência de coeficientes do filtro  $\phi_c(L)$  dado pelo produto  $\phi_a(L)\phi_b(L)$  corresponde à convolução discreta entre as sequências de coeficientes  $(\phi_{a,j}; j \in \mathbb{Z}_+)$  e  $(\phi_{b,j}; j \in \mathbb{Z}_+)$ , que é comutativa:

$$(\phi_{c,j}; j \in \mathbb{Z}_+) = \left( \sum_{i=0}^j \phi_{a,i}\phi_{b,j-i}; j \in \mathbb{Z}_+ \right). \quad (3.1)$$

Também é importante notar que, pela proposição 3.2, dado um processo estocástico discreto fracamente estacionário  $(Z_k; k \in \mathbb{Z})$ ,  $\phi_b(L)Z_k$  é um processo estocástico discreto fracamente estacionário, de modo que  $\phi_c(L)Z_k = \phi_a(L)\phi_b(L)Z_k$  é uma variável aleatória bem definida. Fuller (1996, p. 30) prova, adicionalmente, que o produto entre filtros absolutamente somáveis,  $\phi_c(L) = \phi_a(L)\phi_b(L)$ , é um filtro absolutamente somável.

É possível, ainda, definir um elemento identidade e o inverso de um filtro:

**Definição 3.8.** *O filtro unitário é dado por  $\phi_I(L) := 1$  e o filtro inverso de um filtro  $\phi(L)$  é o filtro, denotado por  $\phi(L)^{-1}$  ou  $1/\phi(L)$ , tal que  $\phi(L)\phi(L)^{-1} = \phi_I(L) = 1$ .*

Dado um filtro  $\phi(L)$ , se  $\phi_0 \neq 0$ , sempre é possível obter  $\psi(L) = \phi(L)^{-1}$  a partir da equação 3.1, já que  $\phi(L)\psi(L) = \phi_I(L)$  com  $\phi_{I,0} = 1$  e  $\phi_{I,j} = 0 \forall j > 0 \Rightarrow \psi_0 = \frac{1}{\phi_0}$ ,  $\psi_1 = -\frac{\phi_1\psi_0}{\phi_0} = -\frac{\phi_1}{\phi_0^2}$  e assim sucessivamente.

O último resultado necessário para usarmos filtros na análise de processos autorregressivos é a proposição 3.3. Para enunciá-la, será útil a definição do polinômio na variável complexa  $z$  associado ao polinômio de defasagem de ordem  $p$ :

**Definição 3.9.** *Considere o polinômio de defasagem de ordem  $p$ ,  $p \in \mathbb{Z}_+^*$ , dado por  $\phi(L) = \phi_0 + \phi_1L + \dots + \phi_pL^p$ . O polinômio associado ou polinômio característico de  $\phi(L)$  é definido como  $\phi(z) := \phi_0 + \phi_1z + \dots + \phi_pz^p$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .*

**Proposição 3.3.** *(Hayashi (2000), Proposição 6.3, p. 374) Considere um polinômio de defasagem de ordem  $p$  dado por  $\phi(L) = 1 - \phi_1L - \phi_2L^2 - \dots - \phi_pL^p$  e seja  $\psi(L)$  o seu filtro inverso, i.e.,  $\psi(L) = \phi(L)^{-1}$ . Se o valor absoluto de todas as raízes do polinômio característico de  $\phi(L)$  for maior que 1, então  $(\psi_j; j \in \mathbb{Z}_+) \in \ell_1$ .*

A proposição 3.3 nos dá uma condição de estabilidade que garante que os coeficientes do filtro inverso de um polinômio de defasagem de ordem  $p$  sejam

absolutamente somáveis. Uma condição equivalente pode ser estabelecida em relação ao polinômio:

$$z^p \phi(1/z) = z^p - \phi_1 z^{p-1} - \dots - \phi_{p-1} z - \phi_p. \quad (3.2)$$

Este polinômio está bem definido porque 0 não pode ser raiz de  $\phi(z)$ , como dado na proposição 3.3, e, claramente, as raízes de  $z^p \phi(1/z)$  são dadas pelo inverso das raízes de  $\phi(z)$ , de modo que podemos estabelecer a condição de estabilidade de duas maneiras.

**Definição 3.10.** *Dado o polinômio de defasagem de ordem  $p$ ,  $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$ , as condições equivalentes:*

- *O valor absoluto de todas as raízes do polinômio  $\phi(z)$  associado a  $\phi(L)$  são maiores que 1;*
- *O valor absoluto de todas as raízes do polinômio  $z^p \phi(1/z)$  associado a  $\phi(L)$  são menores que 1;*

*são chamadas de **condições de estabilidade** para que o filtro inverso de  $\phi(L)$  possua coeficientes absolutamente somáveis.*

Médias móveis de ordem  $p$ , (MA( $p$ )), processos autorregressivos de ordem  $p$ , (AR( $p$ )), e processos autorregressivos e de médias móveis de ordens  $p$  e  $q$ , (*autorregressive moving-average*, ARMA( $p, q$ )), são parametrizações dos coeficientes dos processos MA( $\infty$ ), e usaremos a proposição 3.3 para estabelecer estas parametrizações.<sup>4</sup>

No caso MA( $p$ ), a parametrização é imediata e dada pela definição 3.4. Para os demais casos, partiremos das suas definições.

**Definição 3.11.** *Um processo estocástico discreto **autorregressivo de ordem  $p$** , com  $p \in \mathbb{Z}_+^*$ , denotado por AR( $p$ ), é a coleção de variáveis aleatórias  $(X_k; k \in \mathbb{Z})$  que obedece à seguinte relação de recorrência:*

$$X_k = c + \phi_1 X_{k-1} + \dots + \phi_p X_{k-p} + \varepsilon_k, \quad (3.3)$$

*em que  $c \in \mathbb{R}$  e os coeficientes  $\phi_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq p$ , são constantes e  $(\varepsilon_k; k \in \mathbb{Z})$  é um ruído branco.*

---

<sup>4</sup>Historicamente, esta é uma consequência da decomposição de Wold (Brockwell & Davis, 2016, seção 2.6, p. 67), implicando que qualquer processo discreto fracamente estacionário com média finita e sem componentes determinísticos admite uma representação linear como na definição 3.3.

Se tomarmos o polinômio de defasagem de ordem  $p$  dado por  $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$ , a equação 3.3 pode ser reescrita como:

$$\phi(L)X_k = c + \varepsilon_k, \quad (3.4)$$

o que nos permite utilizar o ferramental de filtros desenvolvido até agora para demonstrar que um processo  $AR(p)$  possui uma representação  $MA(\infty)$ :

**Proposição 3.4.** (*Hayashi (2000), Proposição 6.4, p. 379*) **Representação  $MA(\infty)$  de um processo  $AR(p)$ .** *Seja  $X = (X_k; k \in \mathbb{Z})$  um processo  $AR(p)$  dado por  $\phi(L)X_k = c + \varepsilon_k$ , conforme a equação 3.4. Se  $\phi(L)$  obedece às condições de estabilidade da definição 3.10, então o processo  $X$  admite a representação  $MA(\infty)$  dada por  $X_k = \mu + \psi(L)\varepsilon_k$ ,  $\psi(L) = \phi(L)^{-1}$ , e é fracamente estacionário, com sequência de autocovariâncias  $(\gamma_j; j \in \mathbb{Z}_+) \in \ell_1$  e média constante dada por  $\mu = c\psi(1) = c/\phi(1)$ , em que  $\psi(1)$  e  $\phi(1)$  são, respectivamente, os polinômios característicos de  $\psi(L)$  e  $\phi(L)$  aplicados no ponto  $z = 1$ .*

Note que a média do processo  $AR(p)$  dado por  $\phi(L)X_k = c + \varepsilon_k$  não é  $c$ , mas  $\mu = c/\phi(1)$ . Isto nos dá ainda outra maneira de representar um processo  $AR(p)$  quando as condições de estabilidade são obedecidas:

$$\begin{aligned} \phi(L)X_k - c &= \phi(L)X_k - \mu\phi(1) \\ &= \phi(L)(X_k - \mu) = \varepsilon_k. \end{aligned} \quad (3.5)$$

As autocovariâncias de um processo  $AR(p)$ , na condições da proposição 3.4, podem ser calculadas a partir da representação  $MA(\infty)$ , usando a proposição 3.1, ou através das **equações de Yule-Walker** (Hamilton, 1994, p. 59):

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{j-i} + \sigma^2 \delta_{j,0}, \quad (3.6)$$

em que  $\sigma^2$  é a variância do ruído branco e  $\delta_{j,0}$  é a função delta de Kronecker. Os valores de  $\gamma_0$  a  $\gamma_p$  podem ser obtidos usando o fato de que  $\gamma_{-j} = \gamma_j$ . Particularmente, no caso de processos  $AR(1)$ , as autocovariâncias são dadas por:

$$\gamma_j = \frac{\phi_1^j \sigma^2}{1 - \phi_1}, \quad (3.7)$$

portanto, as autocorrelações  $\rho_j$  para uma defasagem  $j$  serão dadas por:

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \phi_1^j = (\text{sinal}(\phi_1))^j e^{j \ln |\phi_1|}, \quad (3.8)$$

e como  $\phi_1$  é raiz de  $z\phi(1/z)$ , pelas condições de estabilidade devemos ter  $|\phi_1| < 1$ , do que resulta que o valor absoluto da autocorrelação é exponencialmente decrescente com a defasagem  $j$ , alternando seu sinal caso  $-1 < \phi_1 < 0$ .

No caso de processos AR(2), é possível mostrar que as condições de estabilidade são equivalentes a (Johnston & DiNardo, 2001, p. 235)<sup>5</sup>:

$$|\phi_1| + \phi_2 < 1 \quad (3.9)$$

e

$$|\phi_2| < 1. \quad (3.10)$$

Usando as equações de Yule-Walker, também é possível mostrar (Johnston & DiNardo, 2001, p. 234) que as autocorrelações serão dadas por:

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}; \quad (3.11)$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2; \quad (3.12)$$

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2}, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.13)$$

Veja que 3.13 é uma equação diferença homogênea de segunda ordem, com equação característica dada por  $z^2 - \phi_1 z - \phi_2$ , que é exatamente o polinômio  $z^2\phi(1/z)$  associado ao processo AR(2), com raízes  $z_1^*$  e  $z_2^*$ , ambas com valores absolutos menores que 1. Assim, se as raízes forem reais, a autocorrelação decai com a defasagem. Se as raízes forem complexas, a autocorrelação apresenta oscilação amortecida. Este último é exatamente o comportamento observado empiricamente no cupom cambial, como será visto no capítulo 4, e que será replicado em tempo contínuo com o processo de OUG que estamos propondo neste trabalho.

**Definição 3.12.** *Um processo estocástico discreto **autorregressivo e de média móvel de ordens p e q**, com  $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$ , denotado por  $ARMA(p, q)$ ,*

---

<sup>5</sup>Estas condições formam o **triângulo de estabilidade** do processo AR(2). Este triângulo pode ser separado em duas regiões, uma em que as raízes de  $z^2\phi(1/z)$  são reais e uma em que as raízes são complexas (vide, por exemplo, Harvey (1993, p. 20) e Wei (2006, p. 41)). Yule utilizou o processo AR(2) para descrever o movimento de um pêndulo simples, de modo que este processo às vezes é chamado de processo de Yule (Wei, 2006, p. 42).

é a coleção de variáveis aleatórias  $(X_k; k \in \mathbb{Z})$  que obedece à seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} X_k = & c + \phi_1 X_{k-1} + \cdots + \phi_p X_{k-p} \\ & + \theta_0 \varepsilon_k + \theta_1 \varepsilon_{k-1} + \theta_2 \varepsilon_{k-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{k-q}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

em que  $c \in \mathbb{R}$ , os coeficientes  $\phi_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq p$ , e  $\theta_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq i \leq q$ , são constantes, com  $\theta_0 \neq 0$ , e  $(\varepsilon_k; k \in \mathbb{Z})$  é um ruído branco.

Se tomarmos os polinômios de defasagem de ordens  $p$  e  $q$ , respectivamente, dados por  $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$  e  $\theta(L) = \theta_0 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q$ , a equação 3.14 pode ser reescrita como:

$$\phi(L)X_k = c + \theta(L)\varepsilon_k, \quad (3.15)$$

que usaremos na próxima proposição:

**Proposição 3.5.** (*Hayashi (2000), Proposição 6.5, p. 381*) **Representação  $MA(\infty)$  de um processo  $ARMA(p, q)$ .** *Seja  $X = (X_k; k \in \mathbb{Z})$  um processo  $ARMA(p, q)$  dado por  $\phi(L)X_k = c + \theta(L)\varepsilon_k$ , conforme a equação 3.15. Se  $\phi(L)$  obedece às condições de estabilidade da definição 3.10, então o processo  $X$  admite a representação  $MA(\infty)$  dada por  $X_k = \mu + \psi(L)\varepsilon_k$ ,  $\psi(L) = \phi(L)^{-1}\theta(L)$ , e é fracamente estacionário, com sequência de autocovariâncias  $(\gamma_j; j \in \mathbb{Z}_+) \in \ell_1$  e média constante dada por  $\mu = c/\phi(1)$ , em que  $\phi(1)$  é o polinômio característico de  $\phi(L)$  aplicado no ponto  $z = 1$ .*

Novamente, a média do processo  $ARMA(p, q)$  não é dada por  $c$ , mas por  $\mu = c/\phi(1)$ , e podemos representar um processo  $ARMA(p, q)$ , quando as condições de estabilidade são obedecidas, por:

$$\begin{aligned} \phi(L)X_k - c &= \phi(L)X_k - \mu\phi(1) \\ &= \phi(L)(X_k - \mu) = \theta(L)\varepsilon_k. \end{aligned} \quad (3.16)$$

É importante ressaltar que, se os polinômios  $\phi(z)$  e  $\theta(z)$  possuírem raízes em comum, é possível obter um processo  $ARMA(p - k, q - k)$  equivalente, em que  $k$  é a ordem do polinômio  $\alpha(z)$  tal que  $\phi(z) = \alpha(z)\phi^*(z)$  e  $\theta(z) = \alpha(z)\theta^*(z)$ . Isso ocorre porque, de acordo com a proposição 3.5,  $\psi(L) = \phi(L)^{-1}\theta(L)$  pode ser dado por  $\psi(L) = \phi^*(L)^{-1}\alpha(L)^{-1}\alpha(L)\theta^*(L) = \phi^*(L)\theta^*(L)$ , que corresponde ao processo  $ARMA(p - k, q - k)$  dado por  $\phi^*(L)(X_k - \mu) = \theta^*(L)\varepsilon_k$ , conforme a equação 3.16.

Dada a representação  $MA(\infty)$ , as autocovariâncias e autocorrelações do processo  $ARMA(p, q)$  podem ser obtidas a partir dos coeficientes de  $\psi(L) = \phi(L)^{-1}\theta(L)$ , usando a proposição 3.3, ou através do mesmo procedimento usado para a obtenção das equações de Yule-Walker. Ressalte-se, no entanto, que a partir da defasagem  $j > q$ , supondo que não existam raízes em comum entre  $\phi(z)$  e  $\theta(z)$ , as autocovariâncias e autocorrelações do processo  $ARMA(p, q)$  são as mesmas do processo  $AR(p)$  (Hamilton, 1994, p. 60). Note também que a estabilidade do processo  $ARMA(p, q)$  depende inteiramente dos coeficientes da parte autorregressiva.

Com base no que foi discutido sobre processos estocásticos discretos lineares, definiremos o conceito de reversão à média, relacionado à previsão destes processos, de relevância óbvia para economia e finanças. Antes, contudo, mostraremos uma expressão para a previsão de um processo estocástico discreto usando o **erro quadrático médio** (*mean squared error*, MSE) como critério de ajuste da previsão:<sup>6</sup>

**Proposição 3.6.** (*Hamilton (1994), p. 72 e 73*) *Sejam  $(X_k; k \in \mathbb{Z})$  um processo estocástico discreto e  $\hat{X}_{k+s}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+^*$ , uma estimativa do valor de  $X_{k+s}$ , dada a filtração  $\mathcal{F}_k$ . O menor erro quadrático médio entre  $X_{k+s}$  e  $\hat{X}_{k+s}$ , dado por  $\mathbb{E}[(X_{k+s} - \hat{X}_{k+s})^2]$ , é obtido quando  $\hat{X}_{k+s} = \mathbb{E}[X_{k+s}|\mathcal{F}_k]$ .*

Com este resultado, fica clara a relação entre o conceito de reversão à média e a previsão de processos estocásticos:

**Definição 3.13.** *Um processo estocástico discreto  $(X_k; k \in \mathbb{Z})$  apresenta reversão à média se  $\mathbb{E}[X_{k+s}|\mathcal{F}_k] \rightarrow \mathbb{E}[X_k]$  em média quadrática quando  $s \rightarrow \infty$ .*

Esta definição implica que, dado um horizonte de tempo suficientemente grande e usando um critério de mínimo erro quadrático médio, a esperança é a melhor previsão para um processo estocástico discreto que apresenta reversão à média. De fato, este é o caso para qualquer processo estocástico discreto linear:

**Proposição 3.7.** (*Hamilton (1994), p. 439*) *Se o processo estocástico discreto  $X = (X_k; k \in \mathbb{Z})$  admite representação como média móvel de um ruído branco com coeficientes absolutamente somáveis, i.e.,  $(\psi_i; i \in \mathbb{Z}_+) \in \ell_1$ , então  $X$  apresenta reversão à média.*

Portanto, processos lineares estacionários são bons candidatos a modelar o *convenience yield* e as mais diversas séries temporais em economia e finanças,

---

<sup>6</sup>Vide, por exemplo, Wei (2006, p. 89 e 90) ou Hamilton (1994, p. 72 e 73).

entre outras áreas, que apresentam reversão à média. O último resultado desta seção nos permite mostrar que, se aumentarmos a taxa de amostragem de um processo AR(1), este tende a um processo de Ornstein-Uhlenbeck (Gourieroux & Jasiak, 2001, cap. 2):

**Proposição 3.8.** (*Gourieroux & Jasiak (2001), Proposição 2.4, p. 30*) *Seja  $X = (X_k; k \geq \mathbb{Z})$  um processo estocástico AR(1) dado por  $X_k = c_X + \rho X_{k-1} + \varepsilon_k$ ,  $\mathbb{E}(\varepsilon_k^2) = \sigma^2$ . Então o processo estocástico  $(Y_k; k \in \mathbb{Z})$  definido por  $Y_k = X_{kn}$ , com  $n \in \mathbb{Z}_+^*$  fixo, é um processo estocástico AR(1) dado por:  $Y_k = c_Y + \rho^n Y_{k-1} + \eta_k$ , em que  $(\eta_k; k \in \mathbb{Z})$  é um ruído branco com variância  $\sigma^2 \frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2}$ .*

Agora considere  $X = (X(t); t \geq 0)$  um processo estocástico contínuo que pode ser amostrado em tempos discretos dados por  $t_k = kh$ , em que  $k \in \mathbb{Z}_+$  e  $h \in \mathbb{R}_+^*$  é o passo de discretização. O processo  $X$  é adaptado à filtração  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  do espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}}, \mathbb{P})$ , sujeito às condições usuais, com  $\mathcal{F}_{t_k} \subseteq \mathcal{F}_t \forall kh \leq t$ . Seja, ainda,  $(W(t); t \geq 0)$  o processo de Wiener padrão, também adaptado a  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ . Defina  $X_{k,h} = X(kh)$  e suponha que, dado um  $n \in \mathbb{Z}_+^*$  fixado, valha a relação:

$$X_{k,h} = c_{h/n} \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{ih} + \rho^h X_{k-1,h} + \eta_{k,h},$$

em que:

$$\eta_{k,h} = \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{ih} [W((kn-i)h) - W((kn-i-1)h)],$$

isto é, o processo estocástico discretizado  $(X_{k,h}; k \in \mathbb{Z}_+)$  é AR(1).

Pela proposição 3.8, podemos escrever:

$$X_{k,h/n} = c_{h/n} + \rho^{h/n} X_{k-1,h/n} + \varepsilon_{k,h/n},$$

em que:

$$\varepsilon_{k,h/n} = W(kh/n) - W((k-1)h/n).$$

Tome  $c_{h/n} = 0$ ,  $\rho > 0$  e denote  $\rho = e^{-\theta} \Rightarrow \theta > 0$ , uma vez que para o processo ser estacionário é preciso que  $|\rho| < 1$ , independentemente dos valores de  $h$  e  $n$ . Denote também  $\delta W_{k,h/n} = W(kh/n) - W((k-1)h/n)$  e obtemos:

$$X_{k,h/n} = e^{-\theta h/n} X_{k-1,h/n} + \delta W_{k,h/n}.$$

Pela expansão de Taylor da exponencial,  $e^{-\theta h/n} = 1 - \frac{\theta h}{n} + O(|\frac{\theta h}{n}|^2)$  quando  $|\frac{\theta h}{n}| \rightarrow 0$ , logo, para  $n$  suficientemente grande, vale a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned} X_{k,h/n} &\approx \left(1 - \frac{\theta h}{n}\right) X_{k-1,h/n} + \delta W_{k,h/n} \\ \Rightarrow X_{k,h/n} - X_{k-1,h/n} &\approx -\theta X_{k-1,h/n} \frac{h}{n} + \delta W_{k,h/n} \end{aligned}$$

Denotando ainda  $X_{k,h/n} - X_{k-1,h/n}$  por  $\delta X_{k,h/n}$  e o novo passo de discretização  $h/n$  por  $\delta t$ , a relação anterior fica:

$$\delta X_{k,\delta t} \approx -\theta X_{k-1,\delta t} \delta t + \delta W_{k,\delta t},$$

que é a discretização de Euler-Maruyama<sup>7</sup> para a equação de Langevin, cuja solução é o processo de Ornstein-Uhlenbeck.

Esta relação entre o processo AR(1) e o processo de OU nos levará a buscar nos processos de OUG os modelos em tempo contínuo para variáveis econômicas e financeiras que apresentam reversão à média, mas que correspondem a processos discretos lineares de ordem superior ao AR(1).

A próxima seção revisa alguns conceitos fundamentais dos processos de Lévy, em relação aos quais serão definidos os processos de OUG, discutidos na sequência.

## 3.2 Processos de Lévy e o Processo de Difusão com Salto

Nesta seção, caracterizaremos os processos de Lévy. Particularmente, enunciaremos o teorema da **Decomposição de Lévy-Itô** (Applebaum, 2009, p. 126), que nos permite definir um **processo de difusão com salto** (*jump-diffusion process*), resultante da soma entre um processo de Wiener com tendência (*drift*) e um processo de Poisson composto.

A partir desta definição, trataremos particularmente do processo de difusão com salto e mostraremos que se a distribuição do tamanho dos saltos possuir os primeiro e segundo momentos finitos, então as variações discretas de processos de difusão com salto também possuem os primeiro e segundo momentos finitos, o que os torna bastante tratáveis, ainda que flexíveis o

---

<sup>7</sup>Para uma discussão do método, vide, por exemplo, Platen & Bruti-Liberati (2010, p. 248) ou Kohatsu-Higa & Protter (1991).

suficiente para ter aplicações em diversas áreas. Além disso, também mostraremos que as integrais estocásticas em relação a estes processos, ao longo de intervalos de integração sucessivos e disjuntos, correspondem a uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d., com a mesma distribuição de variações discretas de um processo de difusão com saltos normalmente distribuídos, de modo que podem ser utilizadas para modelar um ruído branco. Consequentemente, será possível lançar mão dos resultados apresentados na seção anterior para analisar o comportamento dinâmico de discretizações de processos estocásticos contínuos direcionados por um ruído de Lévy dado por uma difusão com salto. Ao final da seção, discutiremos a estimação deste tipo de processo no caso particular em que a distribuição do tamanho dos saltos é normal.

Iniciaremos com a definição de um processo de Lévy:

**Definição 3.14.** *Dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , um processo estocástico  $X = (X(t); t \geq 0)$  em  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{Z}_+^*$ , é um **processo de Lévy** se:*

1.  $X(0) = 0$  quase certamente (q.c.);
2.  $X$  tem **incrementos independentes**:  
Para todo  $n \geq 1$  e para todos  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , tem-se que  $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  são variáveis aleatórias (v.a.) independentes;
3.  $X$  tem **incrementos estacionários**:  
 $\forall t \geq 0$  e  $\forall h > 0$ ,  $X(t+h) - X(t) \stackrel{D}{=} X(h)$ ;
4.  $X$  é **estocasticamente contínuo**:  
 $\forall t \geq 0$  e  $\forall \varepsilon \geq 0$ , tem-se que  $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X(t+h) - X(t)| \geq \varepsilon) = 0$ .

Por simplicidade, algumas definições do processo de Lévy<sup>8</sup> incluem a condição de que ele possua uma versão com trajetórias **càdlàg** (*continue à droite, limite à gauche*), i.e.,  $\exists \Omega_0 \in \mathcal{F}$ , com  $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ , tal que, para cada  $\omega \in \Omega_0$  fixado, a trajetória de  $X$  é uma função contínua à direita  $\forall t \geq 0$  e com limite à esquerda finito  $\forall t > 0$ . A existência de uma versão càdlàg do processo de Lévy, contudo, já decorre dos itens 2 e 4 da definição 3.14 (Kallenberg, 2002, Teorema 15.1, p. 286).

As próximas definições e resultados, adaptados de Applebaum (2009), nos permitem formalizar o enunciado da Decomposição de Lévy-Itô:

**Definição 3.15.** *Dado um espaço mensurável  $(S, \mathcal{S})$ , uma **medida aleatória** em  $(S, \mathcal{S})$ , denotada  $(M(A); A \in \mathcal{S})$ , é o núcleo de transição de  $(\Omega, \mathcal{F})$  em  $(S, \mathcal{S})$ , i.e., a função  $M : \Omega \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  tal que:*

---

<sup>8</sup>Por exemplo, Sato (1999, p. 3).

1.  $\forall A \in \mathcal{S}$  fixado,  $M(\cdot, A) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  é uma v.a.;
2.  $\forall \omega \in \Omega$  fixado,  $M(\omega, \cdot) : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  é uma medida em  $(S, \mathcal{S})$ .

**Definição 3.16.** Uma medida aleatória  $(M(A); A \in \mathcal{S})$  é dita **independentemente espalhada** se,  $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$  disjuntos, as variáveis aleatórias  $M(A_1), \dots, M(A_n)$  são independentes.

**Definição 3.17.** Dado o espaço de medida  $(S, \mathcal{S}, \mu)$ , uma medida aleatória  $(M(A), A \in \mathcal{S})$  em  $(S, \mathcal{S})$  é uma **medida aleatória de Poisson com média  $\mu$**  se:

1.  $(M(A), A \in \mathcal{S})$  é independentemente espalhada;
2.  $M(A)$  tem distribuição de Poisson com média  $\mu(A) < \infty, \forall A \in \mathcal{S}$ .

**Definição 3.18.** Dado o processo estocástico  $X = (X(t); t \geq 0)$ , o **processo de saltos** associado a  $X$  é definido por  $\Delta X = (\Delta X(t) = X(t) - X(t^-); t \geq 0)$ , em que  $X(t^-)$  é o limite à esquerda do processo  $X$  no ponto  $t$ .

É útil entender que, para um processo de Lévy, a probabilidade de salto em um dado ponto  $t$  é nula:

**Proposição 3.9.** (*Applebaum, 2009, Lema 2.3.2, p. 100*) Se  $X$  é um Processo de Lévy, então, para cada  $t > 0$  fixado,  $\Delta X(t) = 0$  (q.c.).

Agora, seja  $X$  um processo de Lévy com trajetórias càdlàg em  $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ , com  $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ , e  $\Delta X$  o processo de saltos de  $X$ . Para cada  $0 \leq t < \infty$  e para cada  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$ , i.e., borelianos de  $\mathbb{R} - \{0\}$ , defina:

$$N(t, A)(\omega) = \begin{cases} \#\{0 \leq s \leq t; \Delta X(s)(\omega) \in A\}, \forall \omega \in \Omega_0 \\ 0, \forall \omega \notin \Omega_0, \end{cases}$$

em que  $\#$  denota a cardinalidade do conjunto.

Para evitar o caso em que  $0 \in A$ , dizemos que  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$  é **limitado abaixo** se  $0 \notin \bar{A}$  (fecho de  $A$ ). Note que, para um  $t$  fixado,  $N(t, \cdot)(\cdot) : \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{Z}_+$  é uma medida aleatória. Adicionalmente, é possível mostrar que, se  $A$  é limitado abaixo,  $(N(t, A); t \geq 0)$  é um processo de Poisson com intensidade  $\mu(A) = \mathbb{E}[N(1, A)]$ ,<sup>9</sup> que, dado o valor fixo de  $t$ , é uma medida finita e, portanto,  $\sigma$ -finita. Assim:

<sup>9</sup>Vide, por exemplo, Applebaum (2009, p.101 a 105) ou Kallenberg (2002, cap. 12).

**Definição 3.19.** *Sejam  $X = (X(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy,  $\Delta X = (\Delta X(t) = X(t) - X(t^-); t \geq 0)$  o processo de saltos de  $X$  e  $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ , com  $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ , em que  $X$  tem trajetórias càdlàg. Para todo  $\omega \in \Omega_0$ , a **medida aleatória de Poisson associada ao processo  $X$**  é dada por:*

$$\begin{aligned} N(t, A)(\omega) &= \#\{0 \leq s \leq t; \Delta X(s) \in A\} \forall t \geq 0, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\}) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbf{1}_A(\Delta X(s)(\omega)). \end{aligned}$$

Por convenção,  $N(t, A)(\omega) = 0$  se  $\omega \notin \Omega_0$ .

E agora podemos definir:

**Definição 3.20.** *Sejam um processo de Lévy  $X = (X(t); t \geq 0)$ , o processo de saltos  $\Delta X = (\Delta X(t) = X(t) - X(t^-); t \geq 0)$ , a medida aleatória de Poisson associada a  $X$ ,  $N(t, A)(\omega)$ , uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-mensurável e  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$  limitado abaixo, para cada  $t \geq 0$  e  $\omega \in \Omega$  fixados. Então, a **integral de Poisson de  $f$  com respeito a  $N(t, A)(\omega)$**  é dada por:*

$$\begin{aligned} \int_A f(x) N(t, dx)(\omega) &= \sum_{x \in A} f(x) N(t, \{x\})(\omega) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq t} f(\Delta X(s)(\omega)) \mathbf{1}_A(\Delta X(s)(\omega)). \end{aligned}$$

É usual omitir a dependência em  $\omega \in \Omega$  da medida aleatória, que será subentendida daqui em diante.

**Definição 3.21.** *Sejam  $\mathcal{A}$  o anel dos conjuntos em  $\mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$ ,  $X = (X(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy,  $\Delta X = (\Delta X(t) = X(t) - X(t^-); t \geq 0)$  o processo de saltos de  $X$  e  $(N(t, A))$  a medida aleatória de Poisson associada a  $X$ . Para cada  $t \geq 0$  e  $\forall A \in \mathcal{A}$ , a **medida aleatória de Poisson compensada** é definida por:*

$$\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - t\mu(A),$$

onde  $\mu(A) = \mathbb{E}[N(1, A)]$ .

**Definição 3.22.** *A **integral de Poisson compensada da função  $f$  com respeito a  $\tilde{N}$**  é dada por:*

$$\int_A f(x) \tilde{N}(t, dx) = \int_A f(x) N(t, dx) - t \int_A f(x) \mu(dx).$$

Finalmente, nas condições das definições anteriores:

**Teorema 3.1. (Decomposição de Lévy-Itô)** *Seja  $X$  um processo de Lévy, então existem  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $c > 0$ , um processo de Wiener  $W = (W(t); t \geq 0)$  e uma medida aleatória de Poisson  $N$  em  $[0, \infty) \times (\mathbb{R} - \{0\})$  tais que,  $\forall t \geq 0$ , vale:*

$$X(t) = bt + aW(t) + \int_{0 < |x| < c} x \tilde{N}(t, dx) + \int_{|x| \geq c} x N(t, dx). \quad (3.17)$$

Em notação diferencial, temos:

$$dX(t) = bdt + adW(t) + x \tilde{N}(dt, dx) + xN(dt, dx) \quad (3.18)$$

Applebaum também mostra que:

- $X_W(t) = bt + aW(t)$  é um Movimento Browniano com *drift* (**processo de difusão**);
- $X_M(t) = \int_{0 < |x| < c} x \tilde{N}(t, dx)$  é um martingale (**processo de pequenos saltos**);
- $X_C(t) = \int_{|x| \geq c} x N(t, dx) = \sum_{0 \leq s < t} \Delta X(s) \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus (-c, c)}(\Delta X(s))$  é um processo de Poisson composto (**processo de grandes saltos**).

Além disso,  $X_W$ ,  $X_M$  e  $X_C$  são processos estocásticos independentes com funções características de sua distribuição em um tempo  $t \geq 0$  dadas por:

$$\varphi_{X_W}(t, u) = \exp\left(ibtu - \frac{t(au)^2}{2}\right), \quad (3.19)$$

$$\varphi_{X_M}(t, u) = \exp\left(t \int_{0 < |x| < c} (e^{iux} - 1 - iux)\eta(dx)\right), \quad (3.20)$$

$$\varphi_{X_C}(t, u) = \exp\left(t \int_{|x| \geq c} (e^{iux} - 1)\eta(dx)\right), \quad (3.21)$$

com  $u \in \mathbb{R}$  e  $\eta$  medida de Lévy, i.e., satisfazendo  $\int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} \min\{\|x\|^2, 1\}\eta(dx) < \infty$ . Portanto, a função característica de um processo de Lévy ( $X(t); t \geq 0$ ) pode ser dada por  $\varphi_X(t, u) = \varphi_{X_W}(t, u)\varphi_{X_M}(t, u)\varphi_{X_C}(t, u)$ , recuperando-se a **Fórmula de Lévy-Khintchine**:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t, u) &= \exp\left(ibtu - \frac{t(au)^2}{2}\right) \\ &\quad \times \exp\left(t \int_{\mathbb{R} - \{0\}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{(-c, c)}(x)) \eta(dx)\right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Desta maneira, o processo de difusão com salto que buscamos corresponde a um processo de Lévy que não possui a componente martingale de pequenos saltos, ou seja, um processo que pode ser expresso por:

$$X(t) = bt + aW(t) + \int_{|x| \geq c} xN(t, dx), \quad (3.23)$$

ou, em notação diferencial:

$$dX(t) = bdt + adW(t) + xN(dt, dx). \quad (3.24)$$

Os processos de difusão com salto, com aplicações que vão de biologia a física (Gonçalves *et al.*, 2017, p. 2), tornaram-se imensamente populares em aplicações relacionadas a finanças e economia após o artigo seminal de Merton (1976). Tais processos podem ser vistos como uma classe de processos de Lévy, mas ainda capazes de modelar saltos e de ajustar-se a uma vasta gama de dados financeiros e econômicos cuja distribuição da variação percentual ou da primeira diferença entre os pontos amostrais seja leptocúrtica e, portanto, não gaussiana.

Dada a grande popularidade de modelos de difusão com salto nas mais diferentes aplicações, é natural que exista uma extensa literatura relacionada, apresentando tais modelos em diversos contextos e com variadas formulações e dificuldades próprias de estimação, conforme a natureza do fenômeno modelado e dos dados disponíveis. Para os propósitos deste trabalho, usaremos o processo de difusão com salto como proposto por Merton, em que o tamanho dos saltos é normalmente distribuído.

### 3.2.1 Processos de Difusão com Salto

Trataremos agora dos processos de Lévy que correspondem a difusões com salto, conforme a equação 3.23.<sup>10</sup> Mais formalmente, seja  $A = \mathbb{R} \setminus (-c, c)$  e  $(T_k^A; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  a sequência de tempos de chegada para o processo de Poisson  $(N(t, A); t \geq 0)$ , então a componente de grandes saltos na equação 3.23 pode ser reescrita como:

$$\int_A xN(t, dx) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+^*} \Delta X(T_i^A) \mathbf{1}_{[0, t]}(T_i^A). \quad (3.25)$$

Também podemos definir a sequência de **tamanho dos saltos** como  $(Z_k^A; k \in \mathbb{Z}_+^*)$ , tal que:

---

<sup>10</sup>Para uma discussão mais detalhada sobre as propriedades do processo de difusão com salto, vide Privault (2019, cap. 15).

$$Z_k^A = \Delta X(T_k^A). \quad (3.26)$$

Como  $\int_A xN(t, dx)$  é um processo de Poisson composto (Applebaum, 2009, Teorema 2.3.9, p. 108), o processo estocástico  $(Z_k^A; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  é i.i.d. e também é independente do processo de Poisson  $(N(t, A); t \geq 0)$ .

Da equação 3.24 em sua forma integral, conforme o Teorema 3.1, para um intervalo de tempo  $\delta t > 0$  fixado, podemos escrever a variação em  $X(t)$  como:<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} \delta X(t) &= X(t) - X(t - \delta t) \\ &= bt - b(t - \delta t) + a[W(t) - W(t - \delta t)] \\ &\quad + \int_{|x| \geq c} xN(t, dx) - \int_{|x| \geq c} xN(t - \delta t, dx) \\ &= bt - b(t - \delta t) + a[W(t) - W(t - \delta t)] \\ &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X(s) \mathbf{1}_A(\Delta X(s)) - \sum_{0 \leq s \leq t - \delta t} \Delta X(s) \mathbf{1}_A(\Delta X(s)) \\ &= b\delta t + a\delta W(t) + \sum_{t - \delta t < s \leq t} \Delta X(s) \mathbf{1}_A(\Delta X(s)) \\ &= b\delta t + a\delta W(t) + \delta X_C(t). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Denote o número de saltos no intervalo  $\delta t$  por  $\delta N(t, A) = N(t, A) - N(t - \delta t, A)$  e a intensidade do processo  $(N(t, A); t \geq 0)$  por  $\lambda = \mathbb{E}[N(1, A)]$ . Considere ainda que as variáveis aleatórias  $Z_k^A$  possuem o primeiro e segundo momentos finitos. Nestas condições, as variáveis aleatórias dadas pela variação de um processo de difusão com salto,  $\delta X(t)$ , possuem segundo momento finito para todo  $t \geq \delta t > 0$ , conforme a proposição a seguir:

**Proposição 3.10.** (*Adaptado de Privault (2019), Proposição 15.6, p. 568*) *Sejam  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade filtrado, sujeito às condições usuais,  $X = (X(t); t \geq 0)$  um processo de difusão com salto como na equação 3.23, adaptado a  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  e  $A = \mathbb{R} \setminus (-c, c)$ . Seja ainda  $(T_k^A; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  a sequência de tempos de chegada para o processo de Poisson  $(N(t, A); t \geq 0)$ , que tem intensidade  $\lambda$  e é independente do processo estocástico i.i.d.  $(Z_k^A; k \in \mathbb{Z}_+^*) = (\Delta X(T_k^A); k \in \mathbb{Z}_+^*)$  do tamanho dos saltos com  $Z_k^A \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , de maneira que  $\int_A xN(t, dx) = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X(s) \mathbf{1}_A(\Delta X(s))$*

<sup>11</sup>Usaremos a notação  $\delta$  para indicar variação discreta, de modo a não haver confusão com a notação para o processo de saltos  $\Delta X = (\Delta X(t) = X(t) - X(t^-); t \geq 0)$ .

é um processo de Poisson composto. Se  $\delta X(t)$  é a variação do processo  $X$  entre os tempos  $t - \delta t$  e  $t$ , conforme a equação 3.27, então, para todo  $t \geq \delta t > 0$ ,  $\delta X(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  com:

$$\mathbb{E}[\delta X(t)] = b\delta t + \mathbb{E}[Z_k^A]\lambda\delta t; \quad (3.28)$$

$$\text{Var}(\delta X(t)) = a^2\delta t + \mathbb{E}[(Z_k^A)^2]\lambda\delta t. \quad (3.29)$$

*Demonstração.* Temos que  $\mathbb{E}[\delta W(t)] = 0$  e  $\sum_{t-\delta t < s \leq t} \Delta X(s)\mathbf{1}_A(\Delta X(s)) = 0$  se  $\delta N(t, A) = 0$ , isto é, se não houver salto no intervalo  $(t - \delta t, t]$ . Além disso, a probabilidade de ocorrência de um número  $n \in \mathbb{Z}_+$  de saltos no intervalo de tempo  $(t - \delta t, t]$  em um processo de Poisson com intensidade  $\lambda$  é dada por:

$$\mathbb{P}(\delta N(t, A) = n) = \frac{e^{-\lambda\delta t}(\lambda\delta t)^n}{n!}. \quad (3.30)$$

Defina, ainda, o conjunto de índices  $\{k_i; i = 1, 2, \dots, \delta N(t, A)\}$  tais que  $T_{k_i}^A \in (t - \delta t, t]$  e sejam  $T_k^A$  e  $Z_k^A$  cópias independentes de  $T_{k_i}^A$  e  $Z_{k_i}^A$ , respectivamente, para um  $i$  qualquer. Então, para a média:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta X(t)) &= b\delta t + \mathbb{E} \left[ \sum_{t-\delta t < s \leq t} \Delta X(s)\mathbf{1}_A(\Delta X(s)) \right] \\ &= b\delta t + \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[ \sum_{t-\delta t < s \leq t} \Delta X(s)\mathbf{1}_A(\Delta X(s)) \middle| \delta N(t, A) = n \right] \mathbb{P}(\delta N(t, A) = n) \\ &= b\delta t + \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \Delta X(T_{k_i}^A) \right] \frac{e^{-\lambda\delta t}(\lambda\delta t)^n}{n!} \\ &= b\delta t + \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n Z_{k_i}^A \right] \frac{e^{-\lambda\delta t}(\lambda\delta t)^n}{n!} \\ &= b\delta t + \sum_{n \geq 1} n\mathbb{E}[Z_k^A] \frac{e^{-\lambda\delta t}(\lambda\delta t)^n}{n!} \\ &= b\delta t + (\mathbb{E}[Z_k^A]\lambda\delta t)e^{-\lambda\delta t} \sum_{n \geq 1} \frac{(\lambda\delta t)^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ &= b\delta t + (\mathbb{E}[Z_k^A]\lambda\delta t)e^{-\lambda\delta t} e^{\lambda\delta t} \\ &= b\delta t + \mathbb{E}[Z_k^A]\lambda\delta t. \end{aligned}$$

O segundo momento da variação do processo de difusão com salto também existe e é finito, podendo ser obtido com a utilização da função geradora de

momentos da variação de um processo de Poisson composto. Seja  $\mathbb{P}_Z$  a medida de probabilidade em  $\mathbb{R}$  correspondente à função distribuição de  $Z_k^A$ , i.e.,  $\int_{\Omega} Z_k^A d\mathbb{P} = \int_A x \mathbb{P}_Z(dx)$ , e  $\delta X_C(t) = \sum_{t-\delta t < s \leq t} \Delta X(s) \mathbf{1}_A(\Delta X(s))$ , então a função geradora de momentos de  $\delta X_C(t)$  será dada por:

$$\begin{aligned} M_{\delta X_C}(\alpha) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( \alpha \sum_{t-\delta t < s \leq t} \Delta X(s) \mathbf{1}_A(\Delta X(s)) \right) \right] \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left[ \exp \left( \alpha \sum_{t-\delta t < s \leq t} \Delta X(s) \mathbf{1}_A(\Delta X(s)) \right) \middle| \delta N(t, A) = n \right] \mathbb{P}(\delta N(t, A) = n). \end{aligned}$$

Da independência entre as variáveis aleatórias  $Z_k^A$ , vem:

$$\begin{aligned} M_{\delta X_C}(\alpha) &= e^{-\lambda \delta t} + \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[ \exp \left( \alpha \sum_{i=1}^n \Delta X(T_{k_i}^A) \right) \right] \frac{e^{-\lambda \delta t} (\lambda \delta t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda \delta t} + \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda \delta t} (\lambda \delta t)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \mathbb{E} [\exp(\alpha Z_{k_i}^A)] \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda \delta t} (\lambda \delta t)^n}{n!} \{ \mathbb{E} [\exp(\alpha Z_k^A)] \}^n \\ &= e^{-\lambda \delta t} \sum_{n \geq 0} \frac{\{ \lambda \delta t \mathbb{E} [\exp(\alpha Z_k^A)] \}^n}{n!} \\ &= \exp \{ -\lambda \delta t + \lambda \delta t \mathbb{E} [\exp(\alpha Z_k^A)] \} \\ &= \exp \left[ -\lambda \delta t \int_A \mathbb{P}_Z(dx) + \lambda \delta t \int_A \exp(\alpha x) \mathbb{P}_Z(dx) \right] \\ &= \exp \left[ \lambda \delta t \int_A (e^{\alpha x} - 1) \mathbb{P}_Z(dx) \right]. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Da Regra de Leibniz, resulta que o segundo momento da variação do processo de Poisson composto é:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\delta X_C(t))^2] &= \frac{\partial^2 M_{\delta X_C}}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \lambda \delta t \int_A x^2 \mathbb{P}_Z(dx) + \left( \lambda \delta t \int_A x \mathbb{P}_Z(dx) \right)^2 \\ &= \lambda \delta t \mathbb{E}[(Z_k^A)^2] + (\lambda \delta t \mathbb{E}(Z_k^A))^2. \end{aligned} \tag{3.32}$$

O segundo momento menos o quadrado do primeiro resulta na variância, que, assim, é dada por  $\lambda\delta t\mathbb{E}[(Z_k^A)^2] + (\lambda\delta t\mathbb{E}(Z_k^A))^2 - (\lambda\delta t\mathbb{E}(Z_k^A))^2 = \lambda\delta t\mathbb{E}[(Z_k^A)^2]$ . Como as componentes de difusão e de salto são independentes e como  $\mathbb{E}[(\delta W(t))^2] = \delta t$ , de 3.27 vem que a variância de  $\delta X(t)$  é:

$$\text{Var}(\delta X(t)) = a^2\delta t + \mathbb{E}[(Z_k^A)^2]\lambda\delta t.$$

□

Como será visto no capítulo 5, também será importante determinar o comportamento de uma integral em relação a um processo de Lévy  $X = (X(t); t \geq 0)$  quando o integrando é não estocástico, dado por uma função  $f \in L^2([0, T])$ , isto é, uma integral  $Y_f = (Y_f(t); T \geq t \geq 0)$  tal que:

$$Y_f(t) = \int_0^t f(s)dX(s), \quad (3.33)$$

Esta integral só estaria bem definida como uma integral de Stieltjes se as trajetórias de  $X(t)$  tivessem variação finita em  $[0, T]$  quase certamente, o que garantiria a convergência das somas de Riemann-Stieltjes:

**Definição 3.23.** *Seja  $\mathcal{P}_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}\}$  com  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = b$  uma partição do intervalo  $[a, b] \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+^*$ . A **norma da partição** é dada por  $\|\mathcal{P}_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_{i+1} - t_i|$ . A **variação** de uma função com trajetória càdlàg  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sobre a partição  $\mathcal{P}_n$  é dada por:*

$$\text{var}_{\mathcal{P}_n}(g) = \sum_{i=1}^n |g(t_{i+1}) - g(t_i)|. \quad (3.34)$$

A **variação total** de  $g$  é o supremo de sua variação sobre todas as possíveis partições  $\mathcal{P}_n$ , com  $n$  qualquer:

$$V_g = \sup_{\mathcal{P}_n} \text{var}_{\mathcal{P}_n}(g). \quad (3.35)$$

Se  $V_g < \infty$  diz-se que  $g$  é de **variação finita** ou **variação limitada**. Caso contrário, diz-se que  $g$  é de **variação infinita**. Um processo estocástico  $(X(t); t \geq 0)$  com uma versão possuindo trajetórias càdlàg é de variação finita se suas trajetórias possuem variação finita quase certamente. Caso contrário, o processo é de variação infinita.

Integrais de Poisson, conforme a definição 3.20, da forma  $\int_A f(x)N(t, dx)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel mensurável, são de variação finita se  $A$  for limitado abaixo

(Applebaum, 2009, p. 111), mas o único martingale contínuo de variação finita é uma constante (Applebaum, 2009, p. 112), de modo que o processo de Wiener, que é martingale e contínuo, não é de variação finita.

Applebaum (2009, cap. 4) detalha uma construção da integração em relação a medidas aleatórias independentemente espalhadas a valores martingales (e.g. a medida aleatória de Poisson compensada), com integrandos estocásticos ou não, o que fornece uma teoria para a integração em relação a um processo de Lévy geral. Um dos resultados obtidos que nos será particularmente útil é o que se segue:

**Proposição 3.11.** (*Applebaum, 2009, Lema 4.3.12, p. 238*) Para todo  $0 \leq s < t \leq T$ , dada  $f \in L^2([0, T])$ ,  $Y_f(t) - Y_f(s)$  é independente de  $\mathcal{F}_s$ .

Para o caso de um processo de difusão com salto, contudo, interessa apenas o caso da integração em relação a um processo de Wiener, que é simplesmente a integral de Itô:

$$\int_0^t f(s)dW(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_j, t_{j+1} \in \mathcal{P}_n} f(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)], \quad (3.36)$$

em que  $(\mathcal{P}_n; n \in \mathbb{Z}_+^*)$  é uma sequência de partições do intervalo  $[0, t]$  com  $\|\mathcal{P}_n\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $f \in L^2([0, T])$ ,  $t \in [0, T]$  e o limite é tomado em média quadrática.<sup>12</sup>

Assim, para o caso em que  $(X(t); t \geq 0)$  é um processo de difusão com salto conforme a equação 3.24, podemos reescrever 3.33 como:

$$\begin{aligned} Y_f(t) &= b \int_0^t f(s)ds + a \int_0^t f(s)dW(s) + \int_{(0,t] \times A} f(s)xN(ds, dx) \\ &= b \int_0^t f(s)ds + a \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_j, t_{j+1} \in \mathcal{P}_n} f(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)] \\ &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} f(s)\Delta X(s)\mathbf{1}_A(\Delta X(s)), \end{aligned} \quad (3.37)$$

em que  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $c > 0$  e  $A = \mathbb{R} \setminus (-c, c)$ .

A proposição 3.11 nos mostra que  $Y_f = (Y_f(t); T \geq t \geq 0)$  possui incrementos independentes quando  $(X(t); t \geq 0)$  é um processo de Lévy. Quando

<sup>12</sup>Alternativamente, é possível definir a integral de Itô considerando uma sequência de funções elementares  $(f_n; n \in \mathbb{Z}_+^*)$  tais que  $f_n \rightarrow f$  e tomando o limite em média quadrática quando  $n \rightarrow \infty$ , e.g. Kuo (2006, cap. 4).

este processo é uma difusão com salto, se determinarmos a distribuição de  $Y_f$  será possível definir, simular e estimar um componente de erro que usaremos na discretização do processo que será definido no capítulo 5. Enunciaremos, agora, mais um resultado de Applebaum (2009) que nos permite determinar a distribuição da componente dada pela integral de Itô na equação 3.37:

**Proposição 3.12.** (*Applebaum, 2009, Lema 4.3.11, p. 238*) *Seja  $f \in L^2([0, T])$  e  $W(t)$  o processo de Wiener, então, para cada  $T \geq t \geq 0$ ,  $\int_0^t f(s)dW(s) \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t |f(s)|^2 ds\right)$ .*

Resta determinar a distribuição de  $\sum_{0 \leq s \leq t} f(s)\Delta X(s)\mathbf{1}_A(\Delta X(s))$  para cada  $T \geq t \geq 0$ , o que será feito na seguinte proposição:

**Proposição 3.13.** *Considere uma função  $f \in L^2([0, T])$ . Nas condições da proposição 3.10, a integral de  $f$  dada por  $\int_{(0,t] \times A} f(s)xN(ds, dx)$  e denotada por  $Y_{f,C}(t)$ ,  $T \geq t \geq 0$ , é um processo de Poisson composto em que o tamanho dos saltos segue a distribuição da variável aleatória  $J_f^A = f(T_k^A)Z_k^A$ , em que  $T_k^A \in (0, t]$  é um tempo de chegada condicional a um número  $n \in \mathbb{Z}_+^*$  de saltos, i.e.,  $T_k^A$  tem distribuição uniforme em  $(0, t]$ . Além disso, a função característica de  $Y_{f,C}(t)$  é:*

$$\varphi_{Y_{f,C}}(t, u) = \exp\left(\lambda \int_0^t \int_A (e^{iuf(s)x} - 1)\mathbb{P}_Z(dx)ds\right), \quad (3.38)$$

em que  $\mathbb{P}_Z$  é a medida de probabilidade em  $\mathbb{R}$  correspondentes à função distribuição de  $Z_k^A$ , i.e.,  $\int_{\Omega} Z_k^A d\mathbb{P} = \int_A x\mathbb{P}_Z(dx)$ . Se  $f$  é contínua no intervalo  $[0, T]$ , temos ainda:

$$\mathbb{E}[Y_{f,C}(t)] = \lambda \mathbb{E}[Z_k^A] \int_0^t f(s)ds \quad (3.39)$$

e

$$\text{Var}(Y_{f,C}(t)) = \lambda \mathbb{E}[(Z_k^A)^2] \int_0^t |f(s)|^2 ds. \quad (3.40)$$

*Demonstração.* A função característica de  $Y_{f,C}(t)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_{f,C}}(t, u) &= \mathbb{E}[\exp(iuY_{f,C}(t))] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(iu \sum_{0 \leq s \leq t} f(s)\Delta X(s)\mathbf{1}_A(\Delta X(s))\right)\right]. \end{aligned}$$

Aplicando o condicionamento em relação ao número  $n \in \mathbb{Z}_+$  de saltos no intervalo  $(0, t]$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & \varphi_{Y_{f,C}}(t, u) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left[ \exp \left( iu \sum_{0 \leq s \leq t} f(s) \Delta X(s) \mathbf{1}_A(\Delta X(s)) \right) \middle| N(t, A) = n \right] \mathbb{P}(N(t, A) = n). \end{aligned}$$

Defina o conjunto de índices  $\{k_i; i = 1, 2, \dots, N(t, A)\}$  tais que  $T_{k_i}^A \in (0, t]$  e sejam  $T_k^A$  e  $Z_k^A$  cópias independentes de  $T_{k_i}^A$  e  $Z_{k_i}^A$ , respectivamente, para um  $i$  qualquer. Então, da independência entre as variáveis aleatórias  $T_{k_i}^A$  e  $Z_{k_i}^A$ , vem:

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_{f,C}}(t, u) &= e^{-\lambda t} + \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[ \exp \left( iu \sum_{i=1}^n f(T_{k_i}^A) \Delta X(T_{k_i}^A) \right) \right] \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} + \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \mathbb{E} [\exp(iu f(T_{k_i}^A) Z_{k_i}^A)] \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \{ \mathbb{E} [\exp(iu f(T_k^A) Z_k^A)] \}^n \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{\{ \lambda t \mathbb{E} [\exp(iu f(T_k^A) Z_k^A)] \}^n}{n!} \\ &= \exp \{ -\lambda t + \lambda t \mathbb{E} [\exp(iu f(T_k^A) Z_k^A)] \} \\ &= \exp \{ \lambda t \mathbb{E} [-1 + \exp(iu f(T_k^A) Z_k^A)] \}. \end{aligned}$$

Defina a variável aleatória  $J_f^A = f(T_k^A) Z_k^A$  e seja  $\mathbb{P}_J$  a medida de probabilidade em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  correspondente à função distribuição de  $J_f^A$ , i.e.,  $\int_{\Omega} J_f^A d\mathbb{P} = \int_{(0,t] \times A} f(s)x \mathbb{P}_J(ds, dx)$ . Segue, portanto:

$$\varphi_{Y_{f,C}}(t, u) = \exp \left[ \lambda t \int_{(0,t] \times A} (e^{iuf(s)x} - 1) \mathbb{P}_J(ds, dx) \right],$$

que, conforme a equação 3.21, é a função característica de um processo de Poisson composto em que os saltos possuem a mesma distribuição de  $J_f^A$ .

Note que  $T_k^A$  é um tempo de chegada de um processo de Poisson condicional a um dado número  $n$  de saltos, de modo que tem distribuição uniforme em  $(0, t]$ , i.e.,  $T_k^A \sim U(0, t]$ . Adicionalmente, como os tempos de chegada são independentes do tamanho dos saltos em um processo de Poisson composto,  $f(T_k^A)$  é independente de  $Z_k^A$ . Portanto, podemos reescrever a função característica como:

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_{f,C}}(t, u) &= \exp \left[ \lambda t \int_{(0,t] \times A} (e^{iuf(s)x} - 1) \mathbb{P}_Z(dx) \frac{1}{t-0} ds \right] \\ &= \exp \left( \lambda \int_0^t \int_A (e^{iuf(s)x} - 1) \mathbb{P}_Z(dx) ds \right).\end{aligned}$$

Se  $f$  é contínua no intervalo  $[0, T]$ , podemos derivar e aplicar a Regra de Leibniz, do que obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{Y_{f,C}}(t, u)}{\partial u} \Big|_{u=0} &= \lambda \int_0^t \int_A if(s)x \mathbb{P}_Z(dx) ds \\ &= i\lambda \mathbb{E}[Z_k^A] \int_0^t f(s) ds,\end{aligned}$$

e assim:

$$\mathbb{E}[\varphi_{Y_{f,C}}(t)] = \frac{1}{i} \frac{\partial \varphi_{Y_{f,C}}(t, u)}{\partial u} \Big|_{u=0} = \lambda \mathbb{E}[Z_k^A] \int_0^t f(s) ds.$$

Por fim:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi_{Y_{f,C}}(t, u)}{\partial u^2} \Big|_{u=0} &= \left( \lambda \int_0^t \int_A if(s)x \mathbb{P}_Z(dx) ds \right)^2 \\ &\quad + \lambda \int_0^t \int_A i^2 f^2(s)x^2 \mathbb{P}_Z(dx) ds \\ &= i^2 \left( \lambda \mathbb{E}[Z_k^A] \int_0^t f(s) ds \right)^2 + i^2 \lambda \mathbb{E}[(Z_k^A)^2] \int_0^t |f(s)|^2 ds \\ \Rightarrow \mathbb{E}[(\varphi_{Y_{f,C}}(t))^2] &= \frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 \varphi_{Y_{f,C}}(t, u)}{\partial u^2} \Big|_{u=0} \\ &= \left( \lambda \mathbb{E}[Z_k^A] \int_0^t f(s) ds \right)^2 + \lambda \mathbb{E}[(Z_k^A)^2] \int_0^t |f(s)|^2 ds,\end{aligned}$$

e como:

$$\text{Var}(\varphi_{Y_{f,C}}(t)) = \mathbb{E}[(\varphi_{Y_{f,C}}(t))^2] - \left\{ \mathbb{E}[\varphi_{Y_{f,C}}(t)] \right\}^2,$$

segue a tese:

$$\text{Var}(\varphi_{Y_{f,C}}(t)) = \lambda \mathbb{E}[(Z_k^A)^2] \int_0^t |f(s)|^2 ds.$$

□

Particularmente no caso em  $f \in L^2([0, T])$  é infinitamente diferenciável, propomos a seguinte aproximação:

**Proposição 3.14.** *Sejam  $f \in L^2([0, T])$  infinitamente diferenciável e  $Y_{f,C}(t)$  nas condições da proposição 3.13. Então  $\mathbb{E}[J_f^A] = \bar{f}_t \mathbb{E}[Z_k^A]$  e  $J_f^A \rightarrow \bar{f}_t Z_k^A$  em média quadrática quando  $O(t^2) \rightarrow 0$ , onde:*

$$\bar{f}_t = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds. \quad (3.41)$$

*Demonstração.* Inicialmente, da independência entre  $T_k^A$  e  $Z_k^A$  e do fato de  $T_k^A$  ser uniformemente distribuído entre 0 e  $t$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[J_f^A] &= \mathbb{E}[f(T_k^A)Z_k^A] = \mathbb{E}[f(T_k^A)]\mathbb{E}[Z_k^A] = \left( \int_0^t f(s) \frac{1}{t-0} ds \right) \mathbb{E}[Z_k^A] \\ &= \left( \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right) \mathbb{E}[Z_k^A] = \bar{f}_t \mathbb{E}[Z_k^A] \end{aligned}$$

Adicionalmente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(f(T_k^A)Z_k^A - \bar{f}_t Z_k^A)^2] &= \mathbb{E} [(f(T_k^A))^2 (Z_k^A)^2 - 2f(T_k^A)\bar{f}_t (Z_k^A)^2 + \bar{f}_t^2 (Z_k^A)^2] \\ &= \mathbb{E}[(Z_k^A)^2] \left( \mathbb{E}[(f(T_k^A))^2] - 2\bar{f}_t \mathbb{E}[f(T_k^A)] + \bar{f}_t^2 \right) \\ &= \mathbb{E}[(Z_k^A)^2] \left( \int_0^t (f(s))^2 \frac{1}{t-0} ds - 2\bar{f}_t^2 + \bar{f}_t^2 \right) \\ &= \mathbb{E}[(Z_k^A)^2] \left( \frac{1}{t} \int_0^t (f(s))^2 ds - \bar{f}_t^2 \right) \\ &= \mathbb{E}[(Z_k^A)^2] \left[ \frac{1}{t} \int_0^t (f(s))^2 ds - \frac{1}{t^2} \left( \int_0^t f(s) ds \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Como  $f$  é infinitamente diferenciável, sua expansão em série de Taylor ao redor de 0 fica:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + O(x^2).$$

Daí temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t (f(s))^2 ds &= \frac{1}{t} \int_0^t f^2(0) + 2f(0)f'(0)s + O(s^2) ds \\ &= \frac{1}{t} (f^2(0)t + f(0)f'(0)t^2 + O(t^3)) \\ &= f^2(0) + f(0)f'(0)t + O(t^2), \end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^2} \left( \int_0^t f(s) ds \right)^2 &= \frac{1}{t^2} \left( \int_0^t f(0) + f'(0)s + O(s^2) ds \right)^2 \\
&= \frac{1}{t^2} \left( f(0)t + f'(0)\frac{t^2}{2} + O(t^3) \right)^2 \\
&= \frac{1}{t^2} (f^2(0)t^2 + f(0)f'(0)t^3 + O(t^4)) \\
&= f^2(0) + f(0)f'(0)t + O(t^2).
\end{aligned}$$

Segue, portanto, que:

$$\mathbb{E} [(J_f^A - \bar{f}_t Z_k^A)^2] = \mathbb{E} [(f(T_k^A) Z_k^A - \bar{f}_t Z_k^A)^2] = \mathbb{E} [(Z_k^A)^2] O(t^2),$$

de onde  $J_f^A \rightarrow \bar{f}_t Z_k^A$  em média quadrática quando  $O(t^2) \rightarrow 0$ .  $\square$

Assim, seja  $f \in L^2([0, T])$ ,  $T \geq \delta t > 0$  fixado e  $(X(t); t \geq 0)$  um processo de difusão com salto como na equação 3.23. Defina o processo estocástico discreto  $(\varepsilon_{k, \delta t}; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  com:

$$\varepsilon_{k, \delta t} = \int_{(k-1)\delta t}^{k\delta t} f(k\delta t - s) dX(s). \quad (3.42)$$

Da equação 3.37 e das proposições 3.11 e 3.13,  $(\varepsilon_{k, \delta t}; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  é i.i.d. e cada  $\varepsilon_{k, \delta t}$  tem a mesma distribuição da variável aleatória  $Y_g(\delta t)$ , em que  $g(t) = f(\delta t - t)$ , e, portanto:

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{k, \delta t}] = b \int_0^{\delta t} f(\delta t - s) ds + \lambda \mathbb{E}[Z_k^A] \int_0^{\delta t} f(\delta t - s) ds \quad (3.43)$$

e

$$\text{Var}(\varepsilon_{k, \delta t}) = a^2 \int_0^{\delta t} |f(\delta t - s)|^2 ds + \lambda \mathbb{E}[(Z_k^A)^2] \int_0^{\delta t} |f(\delta t - s)|^2 ds. \quad (3.44)$$

Se tomarmos o processo estocástico discreto  $(\varepsilon_{k, \delta t}^*; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  tal que:

$$\varepsilon_{k, \delta t}^* = \varepsilon_{k, \delta t} - \mathbb{E}[\varepsilon_{k, \delta t}], \quad (3.45)$$

então  $(\varepsilon_{k, \delta t}^*; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  é um ruído branco em sentido estrito (i.i.d.). Esta construção, possibilitada pela análise realizada nesta seção, será utilizada no capítulo 5 para que possamos usar as ferramentas da seção 3.1.

### 3.2.2 Estimação de um Processo de Difusão com Salto

No contexto de finanças, Cont & Tankov (2004) é uma referência clássica sobre a formulação teórica de modelos de difusão com salto, incluindo aplicações e alternativas de simulação e estimação, principalmente variações de métodos de momentos e máxima verossimilhança, embora não aborde algumas dificuldades particularmente importantes associadas a estes métodos. Alternativas simples de estimação por método de momentos podem ser encontradas em Press (1967) e Beckers (1981). Entre textos mais concisos, mas que trazem uma boa visão geral dos modelos de difusão com salto, é possível citar Hanson & Westman (2002), Hanson & Zhu (2004), Wang (2006), Kou (2007), Synowiec (2008) e Tankov & Voltchkova (2009). Alternativas mais recentes de estimação de processos de difusão com salto incluem, ainda, técnicas para filtragem dos saltos (e.g. Gloter *et al.* (2016)), técnicas baseadas em tempo de primeira passagem (e.g. Kou & Wang (2003) e Khaldi *et al.* (2014)), entre várias outras.<sup>13</sup>

Para o caso em que o tamanho dos saltos é normalmente distribuído, uma alternativa para a estimação dos parâmetros de  $X(t)$ , conforme a equação 3.24, como sugerido, por exemplo, em Brigo *et al.* (2009), é utilizar máxima verossimilhança, uma vez que é possível estabelecer que a distribuição de  $\delta X(t)$ , para  $t \geq \delta t > 0$  fixados, é uma soma infinita de distribuições normais ponderadas pela probabilidade de cada possível quantidade de saltos. A partir de agora, assumiremos que a distribuição do tamanho dos saltos é normal com média  $\mu_{\Delta X}$  e variância  $\sigma_{\Delta X}^2$ , i.e.,  $Z_k^A \sim \mathcal{N}(\mu_{\Delta X}, \sigma_{\Delta X}^2)$ ,<sup>14</sup> como definido na equação 3.26.

De fato, nas condições da proposição 3.10, considere a distribuição de  $\delta X(t)$  em 3.27 condicionalmente à ocorrência de exatamente  $n$  saltos no intervalo  $(t-\delta t, t]$ , isto é, dado que  $\delta N(t, A) = N(t, A) - N(t-\delta t, A) = n$ . Neste caso, a componente  $\delta X_C(t)$  é a soma de  $n$  variáveis aleatórias com distribuição  $\mathcal{N}(\mu_{\Delta X}, \sigma_{\Delta X}^2)$ , independentes entre si e independentes de  $\delta W(t) \sim \mathcal{N}(0, \delta t)$ . Como a soma de variáveis aleatórias normais independentes é uma variável aleatória normal, resulta que a distribuição de  $\delta X(t)$  condicionalmente à ocorrência de exatamente  $n$  saltos tem distribuição normal com:

$$\mathbb{E}[\delta X(t) \mid \delta N(t, A) = n] = b\delta t + n\mu_{\Delta X} \quad (3.46)$$

$$\text{Var}[\delta X(t) \mid \delta N(t, A) = n] = a^2\delta t + n\sigma_{\Delta X}^2 \quad (3.47)$$

Por outro lado, a probabilidade de ocorrerem exatamente  $n$  saltos é dada

<sup>13</sup>É possível encontrar referências que tratam de uma ampla gama de abordagens para estimação de processos de difusão com salto nas introduções de Johannes *et al.* (2009) e Gonçalves *et al.* (2017).

<sup>14</sup>O que é possível escolhendo  $c > 0$  em  $A = \mathbb{R} \setminus (-c, c)$  tão pequeno quanto desejado.

pela equação 3.30. De 3.46, 3.47 e 3.30 segue, portanto, que a função densidade de probabilidade de  $\delta X(t)$ , para  $t \geq \delta t > 0$  fixados, denotada por  $f_{\delta X}$ , é:

$$f_{\delta X}(x|\Theta) = \sum_{j \geq 0} \frac{e^{-\lambda \delta t} (\lambda \delta t)^j}{j!} f_{\mathcal{N}}(x|b\delta t + j\mu_{\Delta X}, a^2\delta t + j\sigma_{\Delta X}^2), \quad (3.48)$$

em que  $\Theta$  é um vetor dos dois parâmetros do processo de difusão e dos três parâmetros do processo de Poisson composto, i.e.,  $\Theta = (a, b, \lambda, \mu_{\Delta X}, \sigma_{\Delta X})'$ , e  $f_{\mathcal{N}}$  é a função densidade de probabilidade da distribuição normal, determinada pela média e pela variância.

Quando tratamos de séries temporais de dados financeiros, com frequência diária ou maior, a probabilidade de mais de um salto em  $\delta t$  é tipicamente muito baixa (Brigo *et al.*, 2009, p. 20), sendo possível truncar 3.48 em dois termos, ajustando correspondentemente as ponderações da soma:<sup>15</sup>

$$f_{\delta X}(x|\Theta) \approx e^{-\lambda \delta t} f_{\mathcal{N}}(x|b\delta t, a^2\delta t) + (1 - e^{-\lambda \delta t}) f_{\mathcal{N}}(x_i|b\delta t + \mu_{\Delta X}, a^2\delta t + \sigma_{\Delta X}^2). \quad (3.49)$$

Note que a utilização de mais termos na expansão de  $f_{\delta X}(x|\Theta)$  não aumenta o número de parâmetros, então não há compromisso em termos de critério de informação, mas uma função densidade de probabilidade mais complexa pode aumentar o custo computacional.

Assim, se amostrarmos  $X(t)$  em intervalos de tempo fixos, dados por  $h = \delta t$ , obtemos uma versão discretizada com pontos amostrais obtidos nos tempos  $t_k = kh$ , com respectivos valores  $X_k = X(kh), k \in \mathbb{Z}_+$ . Correspondentemente, também obtemos  $\delta X_k = \delta X(t_k), k \in \mathbb{Z}_+^*$ . Por máxima verossimilhança, dada uma amostra de tamanho  $T$  do processo, o valor estimado para o vetor  $\Theta$  de parâmetros pode ser dado por:

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{\lambda} \\ \hat{\mu}_{\Delta X} \\ \hat{\sigma}_{\Delta X} \end{pmatrix} = \underset{\Theta \text{ sujeito a } \begin{cases} \lambda \geq 0 \\ a > 0 \\ \sigma_{\Delta X} > 0 \end{cases}}{\operatorname{argmax}} \sum_{1 \leq k \leq T} \log f_{\delta X}(\delta X_k|\Theta) \quad (3.50)$$

<sup>15</sup>No caso de dois termos, a probabilidade de um salto é aproximada para  $(1 - e^{-\lambda \delta t})$ , em vez de ser usado o valor exato  $e^{-\lambda \delta t} \lambda \delta t$ , de modo que a soma dos pesos resulte em 1 e a distribuição aproximada continue sendo uma função densidade de probabilidade.

Cabe acrescentar uma nota de cautela. Apesar de ser uma alternativa evidente e intuitiva, a estimação por máxima verossimilhança de um processo de difusão com saltos de tamanhos normalmente distribuídos possui armadilhas que exigem cuidado na execução. Como ressaltado por Honoré (1998), a função densidade de probabilidade para a distribuição da variação discreta de um processo de difusão com tamanho dos saltos normalmente distribuído é uma mistura de normais, embora com algumas restrições aos valores dos parâmetros de cada termo em 3.48. De fato, no caso de apenas dois termos, como em 3.49, efetivamente é uma mistura de normais sem qualquer restrição, uma vez que, como há quatro parâmetros definindo duas médias e duas variâncias, é possível obter qualquer valor para as médias e para as variâncias, nas duas distribuições normais, atribuindo uma combinação adequada de valores para as quatro estimativas de parâmetros:  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{\mu}_{\Delta X}$  e  $\hat{\sigma}_{\Delta X}$ .

A estimação por máxima verossimilhança de uma mistura de normais é um desafio e isto é um fato bem estabelecida na literatura, com relatos de problemas desde Day (1969) ou Dick & Bowden (1973), por exemplo. A principal dificuldade decorre de o valor da verossimilhança (ou, equivalentemente, da log-verossimilhança) não ser limitado superiormente caso  $\delta X_k = \hat{b}h + j\hat{\mu}_{\Delta X}$  para alguma combinação de valores de  $1 \leq k \leq T$  e  $j \geq 0$ . Considere, sem perda de generalidade, que  $\delta X_1 = \hat{b}h$ , então  $e^{-\lambda t} f_{\mathcal{N}}(\delta X_1 | \hat{b}h, \hat{a}^2 h) \rightarrow \infty$  quando  $\hat{a} \rightarrow 0$  (i.e., tende a uma distribuição delta de Dirac), de modo que também  $f_{\delta X}(\delta X_1 | \hat{\Theta}) \rightarrow \infty$ . Se houvesse uma única normal, a contribuição dos demais pontos amostrais tenderia para zero (ou para  $-\infty$ , em logaritmo) à medida que o valor de  $\hat{a}$  decresce. Havendo pelo menos duas normais, entretanto, a contribuição de  $\delta X_2, \dots, \delta X_T$  nas distribuições  $f_{\mathcal{N}}(\delta X_k | \hat{b}h + j\hat{\mu}_{\Delta X}, \hat{a}^2 h + j\hat{\sigma}_{\Delta X}^2)$ ,  $j \geq 1$ , impede que  $f_{\delta X}(\delta X_k | \hat{\Theta})$ ,  $2 \leq k \leq T$ , tenda a zero, de modo que a verossimilhança não é limitada superiormente. Entretanto, Kiefer (1978) mostra que a log-verossimilhança de uma mistura de normais sempre possui um máximo local, não degenerado em uma singularidade (i.e.,  $\hat{a}^2 h + j\hat{\sigma}_{\Delta X}^2 > 0$  para todo  $j \geq 0$ ), que leva a estimativas consistentes e assintoticamente normalmente distribuídas dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $\mu_{\Delta X}$  e  $\sigma_{\Delta X}$ .

Há uma extensa literatura de mistura de normais que sugere a utilização do algoritmo EM (*Expectation-Maximization*, como referência às suas duas etapas recursivas, uma de cálculo de expectativa da log-verossimilhança e outra de maximização) proposto no artigo seminal de Dempster *et al.* (1977), apesar dos autores reconhecerem que trabalhos anteriores haviam seguido em direção semelhante. A introdução do algoritmo EM teve grande impacto ao simplificar a estimação de misturas de normais por máxima verossimilhança (McLachlan & Peel, 2000, cap. 1), mas não impede a existência de problemas nem com singularidades nem com máximos locais espúrios, cujos

parâmetros não são os estimadores de máxima verossimilhança descritos no teorema de existência de Kiefer (vide Redner & Walker (1984) e Hathaway (1985), por exemplo). Hamilton (1994, cap. 22) sugere simplesmente abandonar os resultados quando há uma singularidade e refazer a otimização mudando os valores iniciais (uma versão mais elaborada desta estratégia é apresentada em Biernacki & Chrétien (2003)), embora também sugira uma alternativa em que penaliza a log-verossimilhança com base em estimativas *a priori* dos parâmetros (Hamilton, 1991). Outra metodologia de fácil execução é proposta em Honoré (1998), particularmente sugerida para o caso da estimação de um processo de difusão com salto, e consiste na fixação de limites inferiores e superiores para  $a$  e  $\sigma_{\Delta X}$ . Uma discussão mais detalhada sobre a estimação de misturas de normais por máxima verossimilhança com algoritmo EM pode ser encontrada em McLachlan & Peel (2000) e Frühwirth-Schnatter (2006).

### 3.3 Processos de Ornstein-Uhlenbeck Generalizados

O processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU) é dado por:

$$X(t) = X_0 e^{-\theta t} + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW(s), \quad (3.51)$$

solução da equação diferencial estocástica (EDE) de Langevin:

$$\begin{cases} dX(t) = -\theta X(t)dt + dW(t); \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (3.52)$$

com  $\theta > 0$  e  $X_0$  é uma variável aleatória independente do processo de Wiener ( $W(t); t \geq 0$ ).

No contexto de finanças, Gibson & Schwartz (1990) introduziram o processo de OU como modelo para o *convenience yield* no estudo de contratos futuros sobre o preço do petróleo. Pouco depois, Brennan (1991) analisou quatro modelos de *convenience yield* para uma variedade de *commodities*,<sup>16</sup> três deles em função do preço à vista da *commodity* e um autônomo,<sup>17</sup> dado

<sup>16</sup>Ouro, prata, platina, cobre, combustível para aquecimento, madeira e compensado.

<sup>17</sup>Em economia e finanças, modelos baseados apenas no comportamento dos dados são chamados de modelos de forma reduzida, enquanto os modelos derivados de uma teoria sobre tal comportamento são chamados de modelos estruturais. O processo de OU pode ser visto como um modelo de forma reduzida para o *convenience yield*, capaz de capturar o efeito final das decisões de armazenagem, produção e consumo da *commodity*.

precisamente pelo processo de OU, sendo este o modelo que apresentou os melhores resultados.

Inicialmente, considere o primeiro grau de generalização da equação 3.52, como proposto por Barndorff-Nielsen & Shephard (2001), dado pela utilização de um processo de Lévy,  $(L(t); t \geq 0)$ , em lugar do processo de Wiener:

$$\begin{cases} dX(t) = -\theta X(t)dt + dL(t); \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Esta EDE pode ser resolvida com a aplicação da fórmula de Itô para processos de Lévy quaisquer:

**Teorema 3.2.** (*Applebaum, 2009, Teorema 4.4.10, p. 255*) *Seja  $Y$  uma integral estocástica de Lévy em  $\mathbb{R}^d$  com parte contínua  $Y_c$ ,  $i$ -ésima coordenada  $Y^i$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$  com probabilidade 1,  $t \geq 0$ ,  $Y(t^-)$  o limite à esquerda de  $Y$  em  $t$  e  $\Delta Y$  o processo de saltos associados a  $Y$ . Então:*

$$\begin{aligned} f(Y(t)) - f(Y(0)) &= \int_0^t \partial_i f(Y(s^-)) dY^i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_i \partial_j f(Y(s^-)) d[Y_c^i, Y_c^j](s) \\ &+ \sum_{0 \leq s \leq t} [f(Y(s)) - f(Y(s^-)) - \Delta Y^i(s) \partial_i f(Y(s^-))]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Tome  $Y(t) = (t, X(t))$  em que  $X(t)$  é uma integral estocástica de Lévy em  $\mathbb{R}$ . Aplicando 3.54, resulta:

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))dX(t) + f_{xx}(t, X(t^-))dt \\ &+ \sum_{0 \leq s \leq t} [f(t, X(t)) - f(t, X(t^-)) - f_x(t, X(t^-))\Delta X(t)]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Usando  $e^{\theta t}$  como fator de integração, obtemos:

$$\begin{aligned} e^{\theta t} dX(t) &= -e^{\theta t} \theta X(t)dt + e^{\theta t} dL(t) \\ \Rightarrow X(t)\theta e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX(t) &= e^{\theta t} dL(t). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Agora faça  $f(t, x) = xe^{\theta t}$  e tome  $f(Y(t))$ . Por 3.55, vem:

$$\begin{aligned}
df(t, X(t)) &= \theta X(t)e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX(t) \\
&+ \sum_{0 \leq s \leq t} [(X(t) - X(t^-))e^{\theta t} - e^{\theta t} \Delta X(t)] \\
&= \theta X(t)e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX(t) + \sum_{0 \leq s \leq t} [\Delta X(t)e^{\theta t} - e^{\theta t} \Delta X(t)] \\
&= \theta X(t)e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX(t). \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Substituindo 3.56 em 3.57, segue que:

$$df(t, X(t)) = e^{\theta t} dL(t).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t e^{\theta s} dL(s) \\
&= f(0, X_0) + \int_0^t e^{\theta s} dL(s).
\end{aligned}$$

Como  $f(t, X(t)) = X(t)e^{\theta t}$ , finalmente obtemos:

$$\begin{aligned}
e^{\theta t} X(t) &= X_0 + \int_0^t e^{\theta s} dL(s) \\
\Rightarrow X(t) &= X_0 e^{-\theta t} + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dL(s). \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Um grau de generalidade ainda maior é permitido pela **Equação de Langevin Generalizada** (ELG) de Mori (1965) e Kubo (1966). Como analisado em Medino (2005), dos Santos (2011), Medino *et al.* (2012) e Stein *et al.* (2016), a ELG pode ser dada por:

$$\begin{cases} dX(t) = - \int_0^t \gamma(t-s)X(s)dsdt + dL(t); \\ X(0) = X_0; \end{cases} \tag{3.59}$$

onde  $L = (L(t); t \geq 0)$  é um processo de Lévy,  $X_0$  é um variável aleatória independente de  $L$  e  $\gamma$  é uma função generalizada determinística, chamada de **função memória**.

Kannan (1977) mostrou que se  $(L(t); t \geq 0)$  possui o primeiro e segundo momentos finitos, qualquer solução de 3.59 tem a forma:

$$X(t) = X_0\rho(t) + \int_0^t \rho(t-s)dL(s), \quad (3.60)$$

em que  $\rho$  é uma função contínua e determinística, satisfazendo:

$$\begin{cases} \rho'(t) = - \int_0^t \gamma(t-s)\rho(s)ds = - \int_0^t \rho(s)d\mu_t(s); \\ \rho(0) = 1; \end{cases} \quad (3.61)$$

onde  $(\mu_t; t \geq 0)$  é uma família de medidas com sinal. Medino *et al.* (2012) chamam  $\rho$  de **função resolvente**.

Medino (2005) e dos Santos (2011) provaram que esta também é a solução se  $L$  é um processo  $\alpha$ -estável em que  $1 < \alpha \leq 2$ :

**Teorema 3.3.** (*dos Santos, 2011, Teorema 2.3.1, p. 49*) *Seja  $(L(t); t \geq 0)$  um processo  $\alpha$ -estável, com índice de estabilidade  $1 < \alpha \leq 2$ , definido sobre  $\Omega \times [0, T]$ , com núcleo de Voltera  $K(t-s) = - \int_0^t \gamma(u-s)du$  contínuo definido sobre  $[0, T] \times [0, T]$ ,  $T > 0$ . Então o processo:*

$$X(t) = \int_0^t \rho(t-s)dL(s)$$

é solução da ELG, onde:

$$\begin{cases} \rho'(t) = - \int_0^t \gamma(t-s)\rho(s)ds; \\ \rho(0) = 1. \end{cases}$$

Outro importante resultado é obtido em Medino *et al.* (2012), mostrando que esta é a solução para um processo de Lévy qualquer quando a integral estocástica é definida no sentido de convergência em probabilidade no lugar de em média quadrática.

Stein *et al.* ressaltam, ainda, que se  $\mu_t = \mu$  para todo  $t \geq 0$  e  $\mu \ll m$ , i.e.,  $\mu$  é absolutamente contínua com respeito a  $m$ ,  $m$  medida de Lebesgue, então  $d\mu_t(s) = d\mu(s) = f(s)ds$ ,  $\forall t, s \geq 0$ , em que  $f(s)$  é a derivada de Radon-Nikodym de  $\mu$  com respeito a  $m$ :

$$f(s) = \frac{d\mu}{dm}(s), \quad (3.62)$$

e a condição 3.61 sobre a função resolvente fica:

$$\begin{cases} \rho''(t) + \rho(t)\frac{d\mu}{dm}(t) = \rho''(t) + \rho(t)f(t) = 0; \\ \rho'(0) = 0, \rho(0) = 1. \end{cases} \quad (3.63)$$

### 3.3.1 Soluções Particulares da ELG

Stein *et al.* (2016) estudam os processos de OUG gerados pelas soluções da ELG quando as respectivas funções resolventes são dadas por  $\rho(t) = e^{-\theta t}$ ,  $\rho(t) = \cos(\theta t)$  e  $\rho(t) = e^{-\theta t^2}$ , sendo as duas primeiras formas as que mais nos interessam.

O caso em que  $\rho(t) = e^{-\theta t}$ ,  $\theta > 0$ , é obtido quando função memória correspondente é dada por  $\gamma(t) = \theta\delta_0(t)$ ,  $\theta > 0$ , em que  $\delta_0(t)$  é a função generalizada Delta de Dirac centrada em 0. De fato, para esta função memória,  $\rho(t) = e^{-\theta t}$  é solução de 3.61, já que  $\rho(0) = 1$  e:

$$-\int_0^t \gamma(t-s)e^{-\theta s} ds = -\int_0^t \theta\delta(t-s)e^{-\theta s} ds = -\theta e^{-\theta t} = \rho'(t).$$

Veja que a solução da ELG dada pela equação 3.60 para a função resolvente  $\rho(t) = e^{-\theta t}$  é precisamente o processo de OU com ruído não-gaussiano, conforme a equação 3.58, que chamaremos de **processo de OUG do Tipo Exponencial**.

A partir da discretização de um processo de OUG do Tipo Exponencial, Stein *et al.* (2016), seguindo Zhang & Zhang (2013) e Sato (1999, lema 17.1, pg. 108), também mostram a seguinte relação de recorrência:

**Proposição 3.15.** (*Stein et al., 2016, Proposição 2.5, pg. 24*) *Seja  $X((t); t \geq 0)$  um processo de OUG do Tipo Exponencial observado em tempos discretos  $t_k = kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$  e  $h > 0$  o passo de discretização. Então:*

$$X((k+1)h) = e^{-\theta h} X(kh) + \varepsilon_{k,h}, \quad (3.64)$$

em que:

$$\varepsilon_{k,h} = \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-\theta((k+1)h-s)} dL(s). \quad (3.65)$$

Na seção 3.1 mostramos como é possível obter um processo de OU a partir de um processo discreto AR(1) quando a frequência de amostragem aumenta. A proposição 3.15 mostra o sentido inverso, em que a discretização de um processo de OU resulta em um processo AR(1), uma vez que as integrais na equação 3.65 são independentes e identicamente distribuídas, de modo que, neste caso,  $\varepsilon_{k,h}$  é um ruído branco em sentido estrito.

Já o caso em que a função resolvente é dada por  $\rho(t) = \cos(\theta t)$ ,  $\theta \neq 0$ , é obtido a partir de uma função memória  $\gamma(t) = \theta^2$ , uma vez que, novamente,  $\rho(0) = 1$  e ainda:

$$-\int_0^t \gamma(t-s) \cos(\theta s) ds = -\int_0^t \theta^2 \cos(\theta s) ds = -\theta \operatorname{sen}(\theta t) = \rho'(t).$$

A solução da ELG para  $\rho(t) = \cos(\theta t)$ ,  $\theta \neq 0$ , conforme a equação 3.60, é:

$$X(t) = X_0 \cos(\theta t) + \int_0^t \cos(\theta(t-s)) dL(s), \quad (3.66)$$

que chamaremos de **processo de OUG do Tipo Cosseno**.

Como Stein *et al.* tratam apenas de processos  $\alpha$ -estáveis, nem sempre o ruído de Lévy terá o segundo momento definido, o que somente ocorre quando o parâmetro de estabilidade  $\alpha$  é igual a 2. Assim, estes autores provam uma relação de recorrência para o processo de OUG do Tipo Cosseno em distribuição (Stein *et al.*, 2016, proposição 2.6, pg. 32), o que ainda permite a estimação por máxima verossimilhança. Na abordagem deste trabalho, contudo, conforme será discutido no capítulo 5, a utilização de um ruído distribuído como a variação de um processo de difusão com salto nos permite estimar os parâmetros usando uma discretização análoga à de um processo ARMA(2,1), onde a autocorrelação entre os resíduos é incorporada através da componente de média móvel de ordem 1. A demonstração da proposição de Stein *et al.* (2016), contudo, pode ser facilmente adaptada para que valha quase certamente, bastando explicitar a integral estocástica que corresponde ao erro, em vez de sua distribuição:

**Proposição 3.16.** (*Stein et al. (2016), Proposição 2.6, p. 32*) *Seja  $X((t); t \geq 0)$  um processo de OUG do Tipo Cosseno observado em tempos discretos  $t_k = kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$  e  $h > 0$  o passo de discretização. Então:*

$$X((k+1)h) = 2 \cos(\theta h) X(kh) - X((k-1)h) + \varepsilon_{k,h}, \quad (3.67)$$

em que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,h} = & 2 \cos(\theta h) \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(\theta(kh-s)) dL(s) \\ & - \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} \cos(\theta((k-1)h-s)) dL(s). \end{aligned} \quad (3.68)$$

É particularmente importante ressaltar dois pontos neste resultado. O primeiro deles é que há interseção entre os intervalos de integração das integrais estocásticas dadas por  $\varepsilon_{k,h}$ , de modo que os resíduos são autocorrelacionados. Para o caso em que  $L(t)$  é um processo de difusão com salto,

veremos no capítulo 5 que é possível modelar esta autocorrelação através de uma média móvel de ordem 1, de tal sorte que a relação de recorrência pode ser analisada como um processo ARMA(2, 1). O segundo ponto é que, apesar do processo de OUG do Tipo Cosseno discretizado apresentar um comportamento autorregressivo de ordem 2, o coeficiente do termo  $X((k-1)h)$  é constante e igual a  $-1$ , qualquer que seja o passo de discretização  $h > 0$ . Consequentemente, há uma violação da condição 3.10 e o processo não é estacionário.

### 3.3.2 Estimação de Processos de OUG

Há diversas alternativas disponíveis na literatura para a estimação de processos estocásticos de OU com ruído de Lévy, usualmente sujeitos a restrições específicas quanto à disponibilidade de dados ou aos pressupostos acerca do processo gerador dos dados. Como exemplos, Mai (2014) e Valdivieso *et al.* (2009) usam estimadores de máxima verossimilhança; Zhang & Zhang (2013) e Hu & Long (2009) usam estimadores de mínimos quadrados, supondo um ruído de Lévy com distribuição  $\alpha$ -estável e simétrica; Spiliopoulos (2009) propõe um método de momentos; e Jongbloed *et al.* (2005) usam inferência não paramétrica. Em todos estes casos, contudo, trata-se do processo de OU com ruído de Lévy, como proposto por Barndorff-Nielsen & Shephard.

São extremamente escassos na literatura, contudo, trabalhos que tratem da estimação de processos de OUG em que a função resolvente não seja  $\rho(t) = e^{-\theta t}$ . Até onde é do nosso conhecimento, isto é feito apenas em Stein *et al.* (2016), para os casos citados na seção 3.3.1, onde os autores modelam  $\varepsilon_{k,h}$  nas respectivas equações de recorrência dos processos de OUG a serem estimados como uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição  $\alpha$ -estável simétrica, de modo que a estimação do vetor de parâmetros  $\Theta = (\alpha, \sigma, \theta)'$  pode ser feita por máxima verossimilhança. Este vetor de parâmetros define conjuntamente a distribuição  $\alpha$ -estável simétrica, determinada pelo parâmetro  $\alpha$  e pelo parâmetro de escala  $\sigma$ , e o processo de OUG, através do parâmetro  $\theta$ .

Assim, dada uma amostra de tamanho  $T$  do processo  $X(t)$  nos pontos  $t_k = kh$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, T\}$ , uma estimativa conjunta  $\hat{\Theta}$  dos parâmetros pode ser obtida pela maximização da função de log-verossimilhança:

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\sigma} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \underset{\Theta \text{ sujeito a } \begin{cases} 0 < \alpha \leq 2 \\ \sigma > 0 \\ \theta > 0 \end{cases}}{\operatorname{argmax}} \sum_{1 \leq k \leq T-1} \log f(\varepsilon_{k,h} | \Theta), \quad (3.69)$$

em que  $f(\cdot|\Theta)$  é a função densidade de probabilidade de uma distribuição  $\alpha$ -estável simétrica. Embora só exista forma fechada da densidade de distribuições  $\alpha$ -estáveis para alguns valores do parâmetro de estabilidade,<sup>18</sup> é possível obter a solução de 3.69 numericamente.

Observe que a solução da otimização em 3.69 corresponde aos parâmetros da distribuição de cada integral estocástica. Para obtermos os parâmetros do processo de Lévy  $\alpha$ -estável é preciso entender a relação precisa entre sua distribuição e a distribuição das integrais  $\varepsilon_{k,h}$ . Para isso, adaptaremos de Samorodnitsky & Taqqu (1994) as definições formais de variáveis  $\alpha$ -estáveis e do processo de Lévy  $\alpha$ -estável simétrico, bem como as propriedades de que precisaremos:

**Definição 3.24.** (*Samorodnitsky & Taqqu, 1994, Definição 1.1.6, pg. 5*) Uma variável aleatória  $X$  tem **distribuição estável** com parâmetro de estabilidade  $0 < \alpha \leq 2$ , de escala  $\sigma \geq 0$ , de simetria  $-1 \leq \beta \leq 1$  e de localização  $\mu \in \mathbb{R}$ , denotada  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , quando sua função característica tem a seguinte forma:

$$\varphi_X(u) = \begin{cases} \exp \left[ -\sigma^\alpha |u|^\alpha \left( 1 - i\beta \operatorname{sinal}(u) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) + iu\mu \right] & \text{se } \alpha \neq 1; \\ \exp \left[ -\sigma |u| \left( 1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sinal}(u) \ln|u| \right) + iu\mu \right] & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.70)$$

**Proposição 3.17.** (*Samorodnitsky & Taqqu, 1994, Propriedade 1.2.1, pg. 10*) Sejam  $X_1$  e  $X_2$  variáveis aleatórias independentes com distribuições  $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Então  $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , em que:

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}; \quad (3.71)$$

$$\beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}; \quad (3.72)$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2. \quad (3.73)$$

**Proposição 3.18.** (*Samorodnitsky & Taqqu, 1994, Propriedade 1.2.2, pg. 11*) Seja  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  e seja  $a \in \mathbb{R}$  uma constante. Então  $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$ .

**Proposição 3.19.** (*Samorodnitsky & Taqqu, 1994, Propriedade 1.2.3, pg. 11*) Seja  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  e seja  $a \in \mathbb{R}^*$  uma constante. Então:

$$aX \sim \begin{cases} S_\alpha(|a|\sigma, \operatorname{sinal}(a)\beta, a\mu) & \text{se } \alpha \neq 1; \\ S_1(|a|\sigma, \operatorname{sinal}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a \ln(|a|)\sigma\beta) & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.74)$$

<sup>18</sup>Nominalmente, a distribuição Gaussiana, quando  $\alpha=2$ , a distribuição de Cauchy, quando o parâmetro de simetria é 0 e  $\alpha = 1$ , e a distribuição de Lévy, quando o parâmetro de simetria é 1 e  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

**Proposição 3.20.** (*Samorodnitsky & Taqqu, 1994, Propriedade 1.2.5, pg. 11 e 12*)  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta\mu)$  é simétrica se, e somente se,  $\beta = 0$  e  $\mu = 0$ . A variável aleatória  $X$  é simétrica ao redor de  $\mu$  se, e somente se,  $\beta = 0$ .

As proposições 3.17, 3.18, 3.19 e 3.20 seguem trivialmente da definição e das propriedades de funções características. Pela proposição 3.20, uma variável aleatória  $X$  é  **$\alpha$ -estável simétrica** quando  $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ , o que é denotado por  $X \sim S_\alpha S$  com parâmetro de escala  $\sigma$ . Podemos então definir:

**Definição 3.25.** (*Samorodnitsky & Taqqu, 1994, Exemplo 3.1.3, pg. 113*) Um **processo de Lévy  $\alpha$ -estável padrão** é um processo de Lévy  $(L(t); t \geq 0)$  tal que, para todo  $0 \leq s < t < \infty$ :

$$L(t) - L(s) \sim S_\alpha((t-s)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0). \quad (3.75)$$

Se além disso  $\beta = 0$ , então  $L(t)$  é um **processo de Lévy  $\alpha$ -estável simétrico padrão**.

Veja que, pela propriedade 3.19, um processo de Lévy  $\alpha$ -estável simétrico padrão com  $\alpha \neq 1$  é  **$(1/\alpha)$ -autossimilar**, i.e., para todo  $c > 0$  e  $t \geq 0$ ,  $L(ct) \stackrel{d}{=} c^{\frac{1}{\alpha}}L(t)$ . Assim, podemos utilizar o processo de Lévy  $\alpha$ -estável simétrico padrão como bloco básico para construir outros processos de Lévy  $\alpha$ -estáveis através de transformações por reescala e translação, de modo semelhante ao que pode ser feito com o processo de Wiener.

O último resultado de que precisamos nos dá a relação entre a distribuição de um processo de Lévy  $\alpha$ -estável padrão e a integral estocástica de uma função  $f \in L^\alpha([0, T])$  em relação a este processo:

**Proposição 3.21.** (*Samorodnitsky & Taqqu, 1994, Propriedade 3.2.2, p. 117*) Sejam  $f \in L^\alpha([0, T])$  e  $(L(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy  $\alpha$ -estável padrão, conforme a definição 3.25. Então, para todo  $T \geq t \geq 0$ :

$$\int_0^t f(s)dL(s) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \mu_f), \quad (3.76)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \left( \int_0^t |f(s)|^\alpha ds \right)^{\frac{1}{\alpha}}; \\ \beta_f &= \frac{\beta \int_0^t |f(s)|^\alpha \text{ sinal}(f(s)) ds}{\int_0^t |f(s)|^\alpha ds}; \\ \mu_f &= \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \neq 1; \\ -\frac{2}{\pi} \beta \int_0^t f(s) \ln|f(s)| ds & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Neste trabalho, consideraremos a possibilidade de que  $L(t)$  seja tanto um processo de difusão com salto como um processo de Lévy  $\alpha$ -estável com tendência ou *drift*.

Os detalhes da integração em relação ao processo de difusão com salto já foram discutidos na seção 3.2.1. Se assumirmos que  $L(t)$  é uma difusão com saltos de tamanho normalmente distribuído, isto é,  $Z_k^A \sim \mathcal{N}(\mu_{\Delta X}, \sigma_{\Delta X}^2)$ , e que a função  $f$  a ser integrada é aproximadamente constante no intervalo dado pelo passo de discretização  $h > 0$ , então, pela proposição 3.13, a integral de  $f$  em relação a  $L(t)$  será ela própria (aproximadamente) uma difusão com saltos. Nestas condições, a construção proposta pelas equações 3.42 a 3.45 permite a estimação por máxima verossimilhança, como detalhado na seção 3.2.2, em que  $\delta X(t) = \varepsilon_{k,h}$ .

Ainda no caso em que  $L(t)$  é um processo de difusão com salto, é possível usar a construção das equações 3.42 a 3.45 para construir um processo AR(1), no caso do processo de OUG Exponencial, e estimar seus coeficientes tanto por mínimos quadrados como por máxima verossimilhança. Para o processo de OUG que será proposto no capítulo 5, veremos que é possível obter uma discretização que corresponde, aproximadamente, a um processo ARMA(2, 1), que também pode ser estimado tanto por mínimos quadrados como por máxima verossimilhança.

No caso em que  $L(t)$  é dado por um processo de Lévy  $\alpha$ -estável com *drift*, usaremos a seguinte construção: seja  $(X(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy  $\alpha$ -estável simétrico padrão com  $1 < \alpha \leq 2$ , isto é,  $X(t) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , e tome  $L(t) = bt + aX(t)$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Nestas condições, defina:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,h} &= \int_{(k-1)h}^{kh} f(kh - s) dL(s) \\ &= b \int_{(k-1)h}^{kh} f(kh - s) ds + a \int_{(k-1)h}^{kh} f(kh - s) dX(s). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Das proposições 3.18, 3.11 e 3.21,  $(\varepsilon_{k,h}; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  é i.i.d. e sua distribuição não depende de  $k$ , sendo dada por:

$$\varepsilon_{k,h} \sim S_\alpha \left( a \left( \int_0^h |f(h-s)|^\alpha ds \right)^{\frac{1}{\alpha}}, 0, b \int_0^h f(h-s) ds \right). \quad (3.78)$$

Como estamos assumindo  $1 < \alpha \leq 2$ , podemos definir o processo estocástico discreto  $(\varepsilon_{k,h}^*; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  tal que:

$$\varepsilon_{k,h}^* = \varepsilon_{k,h} - \mathbb{E}[\varepsilon_{k,h}], \quad (3.79)$$

e assim:

$$\varepsilon_{k,h}^* \sim S_\alpha \left( a \left( \int_0^h |f(h-s)|^\alpha ds \right)^{\frac{1}{\alpha}}, 0, 0 \right). \quad (3.80)$$

No capítulo 5, veremos que a função  $f$  que nos interessa depende de parâmetros  $\theta > 0$  e  $0 \leq \nu < 1$ , e o problema de estimação por máxima verossimilhança dado pela equação 3.69 fica então:

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{a} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\nu} \end{pmatrix} = \underset{\Theta \text{ sujeito a } \begin{cases} 1 < \alpha \leq 2 \\ a > 0 \\ \theta > 0 \\ 0 \leq \nu < 1 \end{cases}}{\operatorname{argmax}} \sum_{1 \leq k \leq T-1} \log f_S(\varepsilon_{k,h}^* | \Theta), \quad (3.81)$$

em que  $\Theta = (\alpha, a, \theta, \nu)'$  é o vetor de parâmetros que queremos estimar e  $f_S(\cdot | \Theta)$  é a função densidade de probabilidade de uma distribuição  $\alpha$ -estável simétrica. Finalmente, por 3.79, encontramos  $b$ .

Os demais detalhes da estimação do novo processo de OUG que estamos propondo serão descritos no capítulo 5. No próximo capítulo, estudaremos econometricamente o comportamento empírico do cupom cambial.

## Capítulo 4

# Análise Econométrica do Cupom Cambial

Neste capítulo é feita a caracterização econométrica do comportamento do cupom cambial. O objetivo é mostrar que há evidências de que o cupom cambial, mais particularmente o componente de prêmio de liquidez local,  $r_{L,local}$ , tem uma dinâmica autorregressiva, responsável pelo comportamento de reversão à média característico de um *convenience yield*. Particularmente, encontramos evidências de que esta dinâmica autorregressiva é de ordem 2, o que se reflete numa estrutura de autocorrelação dos dados que, como será visto, apresenta uma oscilação amortecida, enquanto o processo de OU não gaussiano usual, como mostrado na equação 3.64, é um processo autorregressivo contínuo de ordem 1, teoricamente apresentando uma estrutura de autocorrelação exponencialmente decrescente quando o coeficiente do termo defasado está entre 0 e 1.

Assumiremos que as maiores fontes de variação no cupom cambial são a própria taxa de juros para empréstimos interbancários nos EUA,  $r_e$ , o prêmio de risco de conversibilidade,  $r_{conv}$ , e o prêmio de liquidez,  $r_{L,local}$ , responsável pela analogia do cupom cambial com um *convenience yield*. Assumiremos, também, que o prêmio de liquidez externo,  $r_{L,e}$ , e o diferencial de risco de crédito,  $DRC$ , são negligenciáveis,<sup>1</sup> e que os demais componentes são cons-

---

<sup>1</sup>Este pressuposto resulta de condições econômicas mais favoráveis no período da amostra, mas não é possível assumir isto em geral. Durante a crise imobiliária de 2008 nos EUA, por exemplo, tanto o prêmio de liquidez como o risco de crédito externos não poderiam ser considerados negligenciáveis (<https://www.frbsf.org/economic-research/publications/economic-letter/2012/may/liquidity-risk-credit-financial-crisis/>). Ao contrário, contribuíram para a redução do valor de  $r_{e,local}$ , que chegou até mesmo a ficar negativo, levando o preço do dólar futuro a ficar abaixo do preço à vista.

tantes. Assim, para as análises realizadas neste capítulo, suporemos como decomposição do cupom cambial uma simplificação da equação 2.3 dada por:

$$r_{e,local} = constante + r_e + r_{conv} + r_{L,local}. \quad (4.1)$$

Os valores de cupom cambial foram calculados pela mesa de câmbio do Departamento de Reservas Internacionais (Depin) do Banco Central do Brasil (BCB), que acompanha o funcionamento dos mercados financeiros brasileiros, particularmente do mercado de câmbio, elabora análises que subsidiam as decisões de política monetária e cambial e executa as intervenções do BCB no mercado à vista de dólar.

Todas as informações usadas neste capítulo são públicas ou podem ser calculadas com dados públicos obtidos através de páginas eletrônicas que dão acesso a repositórios de dados, como o FRED<sup>2</sup> Economic Data<sup>2</sup> e a Bolsa B3,<sup>3</sup> ou de provedores de informações financeiras para negociação, como a Bloomberg.

## 4.1 Descrição dos Dados

Ao longo de um determinado mês, o primeiro cupom cambial, chamado de "cupom curto", pode ser obtido a partir dos preços do contrato de dólar futuro<sup>4</sup> com vencimento no primeiro dia útil do mês seguinte e o preço de mercado do contrato de casado, para o mesmo vencimento, conforme a equação 2.4. Próximo ao fim do mês, a liquidez do primeiro futuro de dólar vai diminuindo gradualmente e aumentando a liquidez do segundo vencimento do contrato de dólar futuro, para vencimento no primeiro dia útil do mês posterior ao mês seguinte. O cálculo do cupom cambial também é feito usando a equação 2.4, mas o contrato futuro de dólar utilizado passa a ser o do segundo vencimento, e o casado utilizado na fórmula corresponde ao "casado curto" somado ao que é usualmente chamado de "casado de rolagem", que resulta no casado correspondente ao preço futuro do segundo vencimento.

Os contratos futuros de dólar posteriores ao segundo vencimento têm liquidez usualmente muito baixa e, a partir daí, é mais confiável compor o cupom cambial dos primeiros vencimentos com os valores obtidos a partir das cotações de contratos de operações estruturadas de *Forward Rate Agre-*

---

<sup>2</sup><https://fred.stlouisfed.org/>

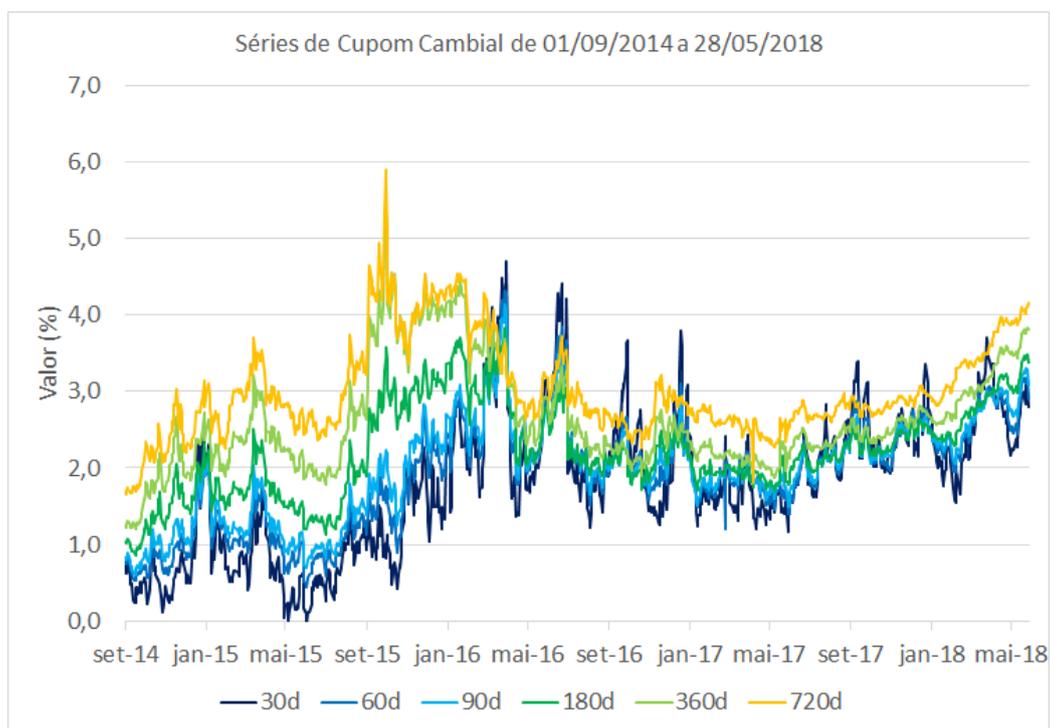
<sup>3</sup>[http://www.b3.com.br/pt\\_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/cotacoes/derivativos.htm](http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/cotacoes/derivativos.htm)

<sup>4</sup>[http://www.b3.com.br/pt\\_br/produtos-e-servicos/negociacao/moedas/futuro-de-taxa-de-cambio-de-reais-por-dolar-comercial.htm](http://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/moedas/futuro-de-taxa-de-cambio-de-reais-por-dolar-comercial.htm)

ement de Cupom Cambial,<sup>5</sup> os chamados "FRAs de cupom cambial", que são, efetivamente, *swaps* de uma taxa a termo de cupom cambial entre dois períodos futuros.

Note que o cupom cambial, a partir dos preços de mercado descritos, é sempre calculado entre a data de hoje e o vencimento do contrato futuro de dólar correspondente, que é uma data fixa. Logo, a cada dia, calcula-se um cupom cambial com prazo um dia menor. Como o prazo é uma característica do próprio cupom e prazos diferentes podem ter comportamentos diferentes, os valores que utilizaremos são os dos cupons cambiais calculados nestas datas fixas interpolados para prazos fixos de 30, 60, 90, 180, 360 e 720 dias corridos. Estas séries de cupom cambial serão denominadas *c030d*, *c060d*, *c090d*, *c180d*, *c360d* e *c720d*, respectivamente.

Os dados disponíveis de cupom cambial calculados desta maneira pelo BCB/Depin vão de 01 de setembro de 2014 a 28 de maio de 2018, totalizando 924 pontos amostrais correspondentes aos dias úteis neste período, conforme a figura 4.1:



**Figura 4.1:** Séries de cupom cambial para diversos prazos.

<sup>5</sup>[http://www.b3.com.br/pt\\_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/operacoes-estruturadas-de-forward-rate-agreement-de-cupom-cambial.htm](http://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/operacoes-estruturadas-de-forward-rate-agreement-de-cupom-cambial.htm)

## 4.2 Seleção das Amostras

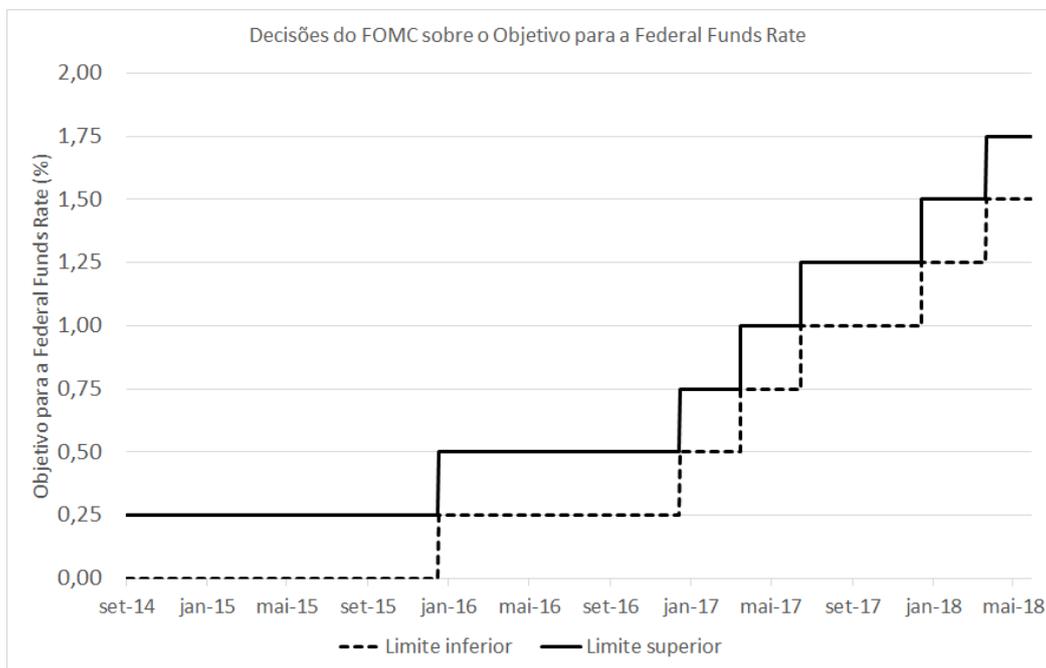
Apesar de haver 924 pontos amostrais disponíveis, a amostra adequada para a estimação deve buscar o período com menor chance de alteração nos parâmetros do processo subjacente que está sendo modelado, considerando que estamos particularmente interessados no efeito da liquidez,  $r_{L,local}$ , na equação 4.1. O primeiro aspecto importante é selecionar um intervalo de tempo em que haja pouca alteração na taxa de juros em dólar, a taxa  $r_e$ , para os diversos prazos considerados de cupom cambial: 1 mês, 2 meses, 3 meses, 1 semestre, 1 ano e 2 anos.

No período em que os dados de cupom cambial estão disponíveis, a condução da política monetária nos Estados Unidos pelo *Federal Open Market Committee* (FOMC) levou a aumentos sucessivos no objetivo das operações de mercado aberto para a taxa básica de juros em dólar, correspondente aos empréstimos interbancários de um dia das reservas bancárias depositadas junto ao Banco Central nos EUA, o *Federal Reserve System*, chamada de *federal funds rate*. Estas alterações, contudo, estão concentradas a partir de 2017, como mostrado na figura 4.2. As datas precisas das decisões do FOMC estão na tabela 4.1.

Ano	Data	Decisão	Nível (%)
2018	20 de dezembro	Aumento de 0,25%	2,25 – 2,50
2018	27 de setembro	Aumento de 0,25%	2,00 – 2,25
2018	14 de junho	Aumento de 0,25%	1,75 – 2,00
2018	22 de março	Aumento de 0,25%	1,50 – 0,75
2017	14 de dezembro	Aumento de 0,25%	1,25 – 1,50
2017	15 de junho	Aumento de 0,25%	1,00 – 1,25
2017	16 de março	Aumento de 0,25%	0,75 – 1,00
2016	15 de dezembro	Aumento de 0,25%	0,50 – 0,75
2015	17 de dezembro	Aumento de 0,25%	0,25 – 0,50
2008	16 de dezembro	Aumento de 0,25%	0,00 – 0,25

**Tabela 4.1:** Histórico de decisões do FOMC sobre os objetivos de limites para a *federal funds rate*. Fonte: Board of Governors of the Federal Reserve System (<https://www.federalreserve.gov/monetarypolicy/openmarket.htm>).

Desta maneira, há três períodos mais extensos que são candidatos a serem utilizados como amostra: a) do início dos dados disponíveis de cupom cambial, em 01 de setembro de 2014, até a decisão do FOMC em 17 de dezembro de 2015; b) da decisão de aumento em 2015 até uma nova decisão de aumento em 15 de dezembro de 2016; e c) entre as decisões de 15 de junho e 14 de dezembro de 2017.

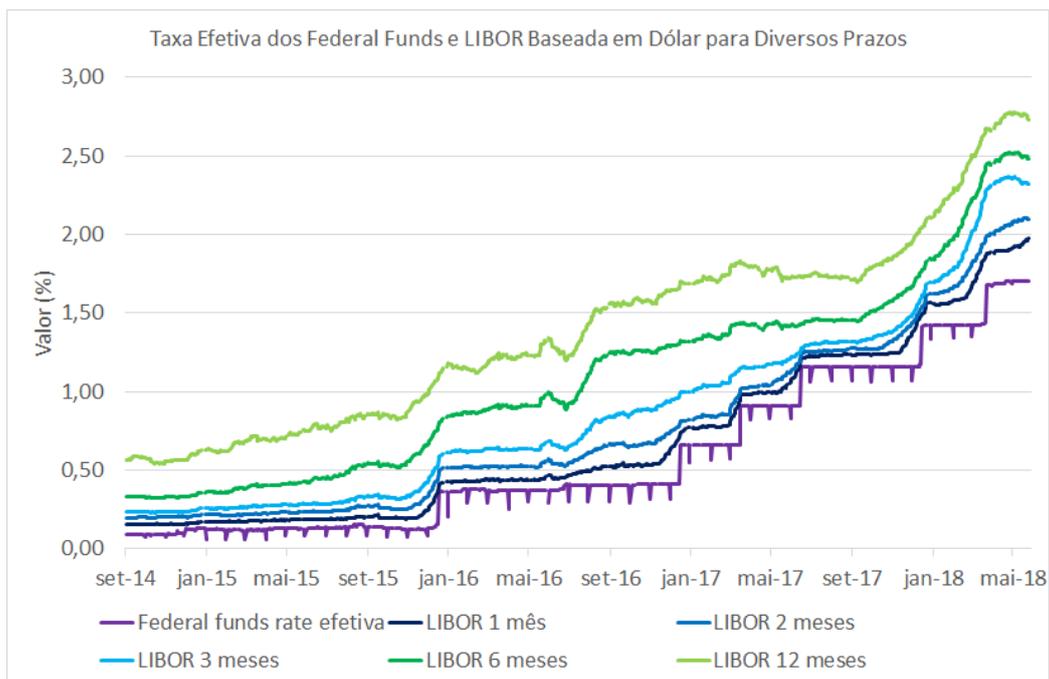


**Figura 4.2:** Decisões do FOMC para os objetivos de limites superior e inferior da *federal funds rate*. Fonte: FRED® Economic Data. Federal Reserve Bank of St. Louis(<https://fred.stlouisfed.org/>).

É importante ressaltar que não basta estabilidade nas decisões de política monetária nos EUA e que a *federal funds rate* esteja dentro de limites fixos. A *federal funds rate* é uma taxa de um dia e os prazos que estamos utilizando para o cupom cambial são bem mais longos. Contudo, é possível observar que também há relativa estabilidade nas taxas de juros em dólar para empréstimos interbancários com maiores prazos, conforme medido pela principal referência para esse tipo de operação, a *London Interbank Offered Rate* (LIBOR), ilustrada na figura 4.3, especialmente se forem excluídos os períodos que antecedem a decisão do FOMC, em que as expectativas sobre a decisão já afetam a formação de preço das taxas, principalmente as mais longas.

Em relação ao período entre as decisões do FOMC de 17 de dezembro de 2015 e 15 de dezembro de 2016, houve um peculiar aumento da LIBOR a partir de julho de 2016, principalmente nos vencimentos mais longos. Parte desse aumento pode ser em decorrência das expectativas de retomada de um ciclo de aumento nas taxas de juros, mas também, e até principalmente, é resultado de modificações nas regras de funcionamento de fundos de investimento em mercados monetários (*Money Market Mutual Funds*, MMMFs), determi-

nada pela *Securities and Exchange Commission* (SEC), órgão regulador dos mercados financeiros nos EUA, que, apesar de entrarem em efeito apenas em outubro de 2016, já estavam sendo discutidas.<sup>6</sup> Como este aumento afeta menos as taxas mais curtas e mais as taxas mais longas, o período em questão foi considerado inteiro e em sua primeira parte, até junho de 2016, na nossa análise do comportamento do cupom cambial.



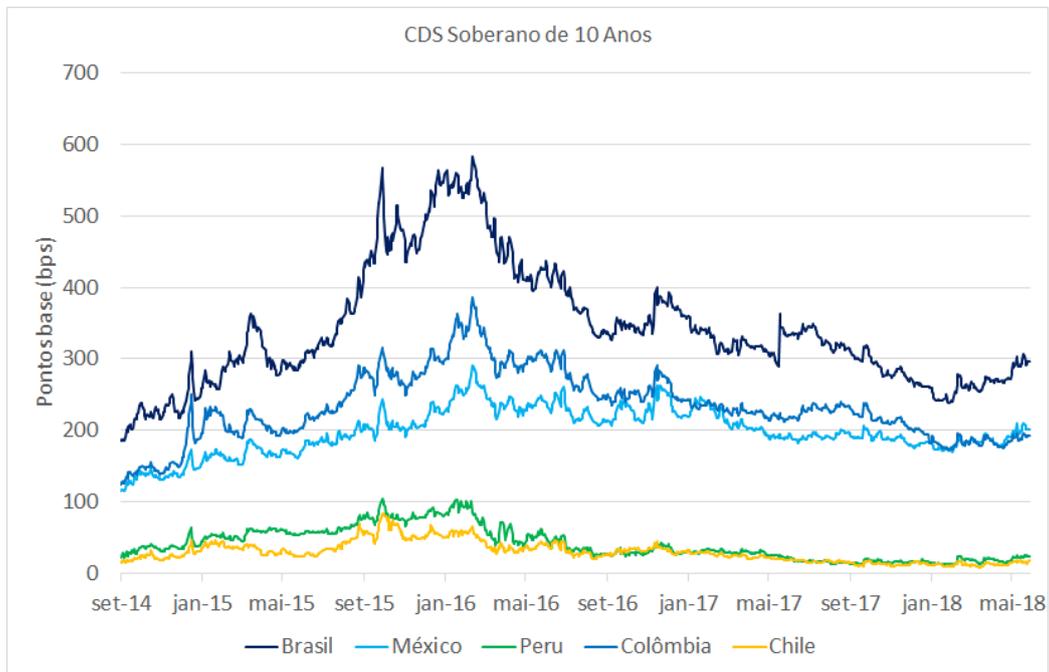
**Figura 4.3:** Taxas efetivas para os *federal funds* e taxas de juros interbancárias baseadas em dólar para diversos prazos. Fonte: FRED® Economic Data. Federal Reserve Bank of St. Louis(<https://fred.stlouisfed.org/>).

Como visto na seção 2.1, um outro aspecto que deve ser considerado refere-se às condições econômicas locais que também podem mudar os parâmetros do processo de formação do cupom cambial, como custos de arbitragem, a tributação e mudanças na percepção do risco de conversibilidade da moeda local para dólar. Assumiremos que não há variação nos demais custos, mas não é possível negligenciar a variabilidade do risco de conversibilidade,  $r_{conv}$ . Particularmente no primeiro período candidato ser utilizado como amostra, de 01 de setembro de 2014 a 17 de dezembro de 2015, houve diversas fontes de instabilidade, de um processo eleitoral acirrado, com can-

<sup>6</sup><https://www.stlouisfed.org/on-the-economy/2016/september/new-sec-rules-cause-shift-money-market-fund-assets>.

didatos apresentando propostas econômicas bastante díspares, a uma crise fiscal que se acentuou em 2015, a um início de um processo de impeachment em 02 de dezembro de 2015.

Mais objetivamente, como apontado em Barbosa Filho (2017), houve um crescimento pronunciado do *Credit Default Swap* (CDS) com prazo de 10 anos da dívida soberana brasileira, bem acima do CDS da dívida de outras economias emergentes, como México, Peru, Colômbia e Chile, um indicador da deterioração da qualidade da dívida pública, colocando em alerta investidores, aumentando o risco de conversibilidade e afetando  $r_{conv}$  na equação 4.1. O aumento acelerado do CDS da dívida soberana brasileira foi revertido apenas a partir de dezembro de 2015, como mostrado na figura 4.4, o que nos sugere o descarte do período de 01 de setembro de 2014 a 17 de dezembro de 2015.



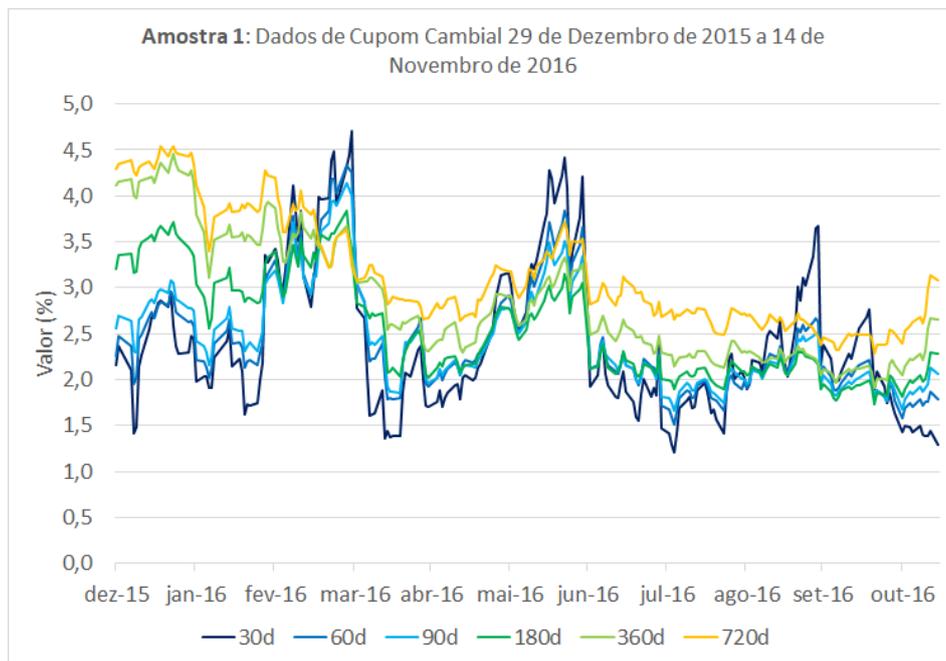
**Figura 4.4:** CDS de 10 anos da dívida soberana de Brasil e alguns de seus pares emergentes. Fonte: Bloomberg.

Com a exclusão de períodos ao redor das decisões do FOMC, quando as expectativas já afetavam as taxas de juros, é possível definir, considerados fatores externos e internos, as seguintes amostras:

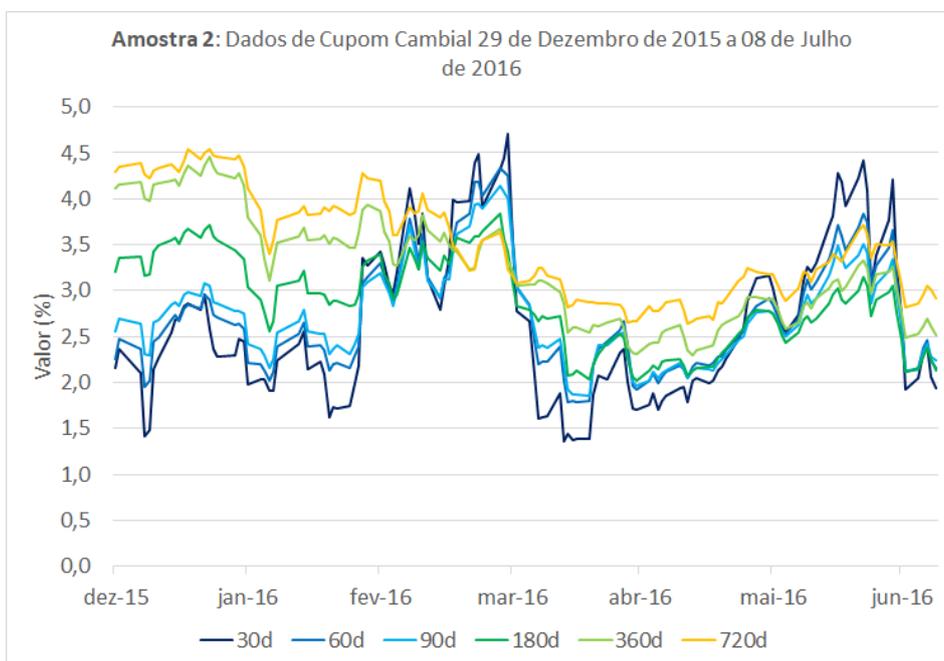
- **Amostra 1:** de 29 de dezembro de 2015 a 14 de novembro de 2016, com 219 pontos amostrais;

- **Amostra 2:** de 29 de dezembro de 2015 a 08 de julho de 2016, com 131 pontos amostrais;
- **Amostra 3:** de 16 de junho de 2017 a 25 de outubro de 2017, com 92 pontos amostrais.

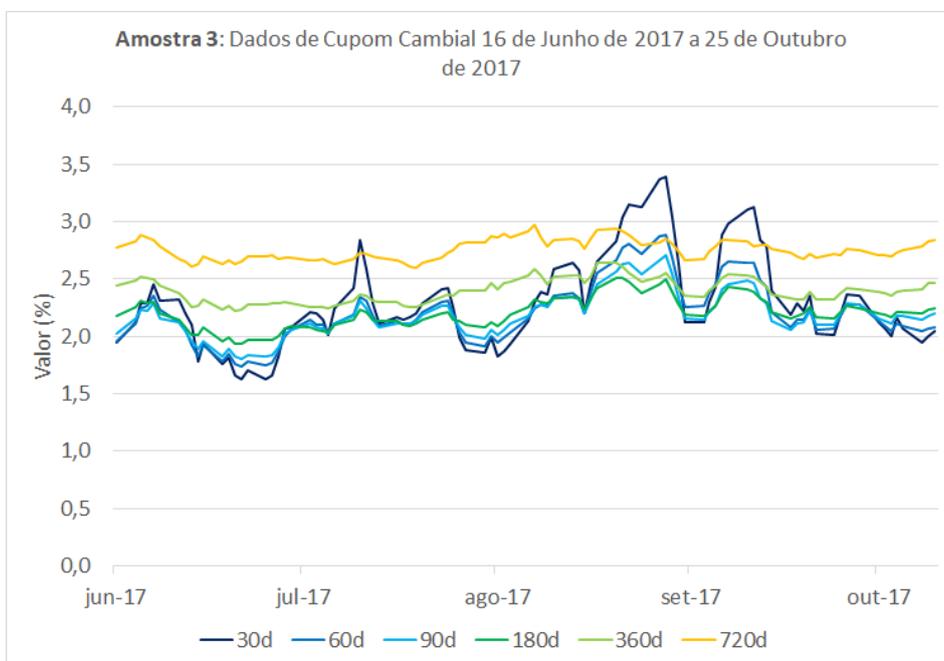
O comportamento dos dados em cada uma destas amostras pode ser visualizado nas figuras 4.5 (Amostra 1), 4.6 (Amostra 2) e 4.7 (Amostra 3).



**Figura 4.5:** Gráfico dos dados de cupom cambial da Amostra 1.



**Figura 4.6:** Gráfico dos dados de cupom cambial da Amostra 2.



**Figura 4.7:** Gráfico dos dados de cupom cambial da Amostra 3.

### 4.3 Identificação do Modelo Autorregressivo (AR) para as Séries Temporais de Cupom Cambial

Em todas as especificações, estimamos os coeficientes por mínimos quadrados e buscamos identificar o modelo autorregressivo que melhor se ajusta aos dados descritos na seção anterior utilizando os critérios de informação de Akaike (*Akaike's Information Criterion*, AIC), Schwarz (*Schwarz Bayesian Information Criterion*, SBIC) e Hannan-Quinn (*Hannan Quinn's Information Criterion*, HQIC). O SBIC embute a mais severa penalidade para o número de variáveis do modelo, tendendo a escolher modelos menores, enquanto o AIC tem a penalidade mais branda, sendo maior a chance de aceitar modelos com mais variáveis, de modo que, em alguns casos, não há uma identificação definitiva apenas com a utilização de um critério de informação.

Para complementar a análise, oferecendo mais evidências em favor de um ou outro modelo, utilizamos também ferramentas da metodologia de Box-Jenkins, incluindo: a) *overfitting*; b) análise de autocorrelação dos resíduos; e c) as funções de autocorrelação (*autocorrelation function*, ACF) e de autocorrelação parcial (*partial autocorrelation function*, PACF) da série de dados analisada.<sup>7</sup>

No *overfitting*, aumentamos o tamanho do modelo até que o coeficiente do termo autorregressivo de maior ordem deixe de ser significativo, selecionando, então, a especificação uma ordem menor como a correta. As amostras utilizadas possuem tamanho razoável, de maneira que a não normalidade dos resíduos, encontrada em algumas delas não limita a utilização do *overfitting*, especialmente porque não foi rejeitada a normalidade dos resíduos nas regressões realizadas nas menores amostras: a 2 e a 3, o que é coerente com a expectativa de menos saltos no processo gerador dos resíduos em períodos menores.

Também analisamos a existência de autocorrelação nos resíduos, que deve ser estatisticamente nula quando se atinge a ordem do modelo autorregressivo corretamente especificado. Para tanto, utilizamos a autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC)<sup>8</sup> e os testes de Ljung-Box(LB) e de Breusch-Godfrey(BG) de correlação serial nos resíduos de regressão de mínimos qua-

---

<sup>7</sup>Entre inúmeras boas referências sobre as técnicas econométricas usadas neste capítulo, estão Harvey (1993), Hamilton (1994), Hayashi (2000), Johnston & DiNardo (2001), Wooldridge (2003), Davidson & MacKinnon (2004), Wei (2006) e Brooks (2008).

<sup>8</sup>O intervalo de confiança ao redor de zero para a AC e a PAC pode ser estimado em cada defasagem individualmente por  $\pm z \times \frac{1}{\sqrt{T}}$ , em que  $T$  é o número de pontos amostrais e  $z = 1,96$  para 5% de nível de significância e  $z = 1,645$  para 10% de nível de significância.

drados.

Adicionalmente, espera-se que a ACF de um processo  $AR(1)$  com coeficiente entre 0 e 1 decresça exponencialmente, sem inversão do sinal da autocorrelação, enquanto processos  $AR(2)$  com o primeiro coeficiente positivo devem apresentar oscilação amortecida. Já em relação à PACF de um processo  $AR(p)$ , esta deve ser zero a partir da defasagem  $p + 1$ .

Nos tópicos que se seguem, são descritos os resultados da utilização destas ferramentas nas quatro amostras e para cada uma das séries de cupom cambial. As estimações foram feitas por mínimos quadrados, utilizando erros-padrão robustos, com a correção de White, nos casos em que não foi rejeitada a hipótese de heterocedasticidade dos resíduos pelo teste de White. Os asteriscos nos coeficientes indicam significância aos níveis de 1% (\*\*\*) , 5% (\*\*) e 10% (\*).

### 4.3.1 Identificação do modelo AR das Séries de Cupom Cambial na Amostra 1

As tabelas abaixo resumem a estimação dos coeficientes, por mínimos quadrados, de modelos AR de até terceira ordem para as séries  $c030d$ ,  $c060d$ ,  $c090d$ ,  $c180d$ ,  $c360d$  e  $c720d$ . Como o teste de White não rejeitou a hipótese de existência de heterocedaticidade nos resíduos, a estimação foi feita com erros-padrão robustos, usando a correção de White.

Amostra 1 - Série $c030d$					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		$AR(1)$	$AR(2)$	$AR(3)$	(p-valor)
Coeficientes	2,3946***	0,9180***			1158,2890 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	9,1879 (0,0000)	25,0918 (0,0000)			
Coeficientes	2,3951***	1,0443***	-0,1377*		589,6974 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	10,53681 (0,0000)	13,7226 (0,0000)	-1,7715 (0,0779)		
Coeficientes	2,3955***	1,0509***	-0,1880*	0,0483	392,3977 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	10,0200 (0,0000)	13,8274 (0,0000)	-1,8226 (0,0698)	0,6789 (0,4980)	

**Tabela 4.2:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série  $c030d$  na Amostra 1. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 1 - Série <i>c030d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	84,15%	0,5482	0,5791	0,5607
<i>AR</i> (2)	84,38%	0,5382	0,5846	0,5569
<i>AR</i> (3)	84,34%	0,5450	0,6069	0,5700

**Tabela 4.3:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c030d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c030d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,134	0,134	3,9875	
2	-0,054	-0,073	4,6357	0,031
3	-0,069	-0,053	5,7062	0,058
4	0,040	0,055	6,0681	0,108
5	0,039	0,019	6,4206	0,170
6	0,008	0,001	6,4350	0,266
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela 4.4:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c030d* da Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c030d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,016	0,016	0,0592	
2	-0,042	-0,043	0,4619	
3	-0,049	-0,048	0,9975	0,318
4	0,063	0,063	1,8822	0,390
5	0,049	0,044	2,4319	0,488
6	0,013	0,015	2,4720	0,650
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela 4.5:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c030d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c030d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0703	0,1580
AR(2)	0,0273	0,1021

$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela 4.6:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c030d* na Amostra 1.

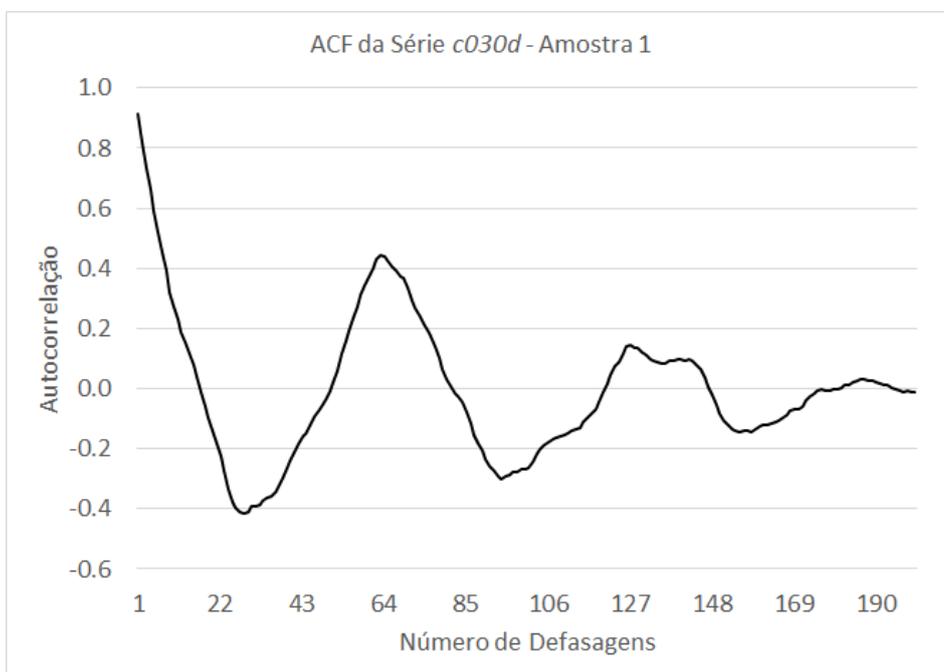
O critério de *overfitting*, como observado na tabela 4.2, sugere a especificação AR(2). Em relação aos critérios de informação, como apresentado na tabela 4.3, AIC e HQIC também sugerem a especificação AR(2), enquanto o SBIC sugere a especificação AR(1). A tabela 4.4 mostra que o teste de Ljung-Box (LB) não rejeita a hipótese de que não exista autocorrelação dos resíduos a partir de quatro defasagens da especificação AR(1), enquanto não há evidência de autocorrelação nos resíduos na especificação AR(2), como mostrado na tabela 4.5. Embora os indícios sejam mistos, admitimos que não exista evidência de autocorrelação dos resíduos já na especificação AR(1) para um número razoável de defasagens. O teste de Breusch-Godfrey(BG) traz um resultado semelhante, exibido na tabela 4.6, e não rejeita a hipótese nula de que não exista correlação serial nos resíduos já a partir da especificação AR(1), quando incluídas quatro defasagens dos resíduos.

Finalmente, a análise da ACF e da PACF dos dados de cupom cambial de 30 dias na Amostra 1 pode ser feita através das informações abaixo:

Amostra 1 - ACF e PACF da Série <i>c030d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,916	0,916	186,11	0,000
2	0,818	-0,125	335,37	0,000
3	0,734	0,037	456,09	0,000
4	0,662	0,016	554,87	0,000
5	0,589	-0,058	633,43	0,000
6	0,520	-0,012	694,84	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1324$  - IC @10%:  $\pm 0,1112$

**Tabela 4.7:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c030d* na Amostra 1, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura 4.8:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c030d* na Amostra 1.

Os valores da PACF da série *c030d* deixam de ser significantes ao nível de 10% a partir da terceira defasagem, sugerindo que a especificação correta é a AR(2). A ACF apresenta oscilação amortecida, consistente com uma especificação AR(2) ou maior, mas não AR(1).

A análise para as demais séries segue as mesmas etapas usadas na série *c030d*. Os resultados obtidos estão reunidos no Apêndice A.

Em resumo, os testes realizados sugerem as seguintes especificações:

Amostra 1 - Ordem da Especificação AR Sugerida pelos Testes							
Série	Critério						
	AIC	SBIC	HQIC	<i>Overfitting</i>	Resíduos (LB/BG)	ACF	PACF
<i>c030d</i>	2	1	2	2	1/1	$\geq 2$	2
<i>c060d</i>	2	2	2	2	2/2	$\geq 2$	2
<i>c090d</i>	2	2	2	2	2/2	$\geq 2$	2
<i>c180d</i>	$\geq 3$	2	2	2	$\geq 3/\geq 3$	$\geq 2$	$\geq 2$
<i>c360d</i>	$\geq 3$	2	$\geq 3$	$\geq 3$	$\geq 3/\geq 3$	$\geq 2$	2
<i>c720d</i>	$\geq 3$	2	$\geq 3$	$\geq 3$	$\geq 3/\geq 3$	$\geq 2$	2

**Tabela 4.8:** Ordem da especificação AR mais adequada para as séries de cupom cambial da Amostra 1, conforme sugerido pelos critérios utilizados.

Há, portanto, forte evidência de que o processo seja AR(2) nas séries de prazos mais curtos. Já para as séries com prazos mais longos, a evidência é mista. A princípio, existe a possibilidade de serem mais adequadamente modeladas por um processo autorregressivo de maior ordem<sup>9</sup> ou por um processo ARMA (*Autoregressive Moving Average*).

Aprofundando a análise, contudo, a aplicação do teste de Dickey-Fuller Aumentado (*Augmented Dickey-Fuller*, ADF), para a existência de raízes unitárias, traz evidência de que as séries *c180d*, *c360d* e *c720d* da Amostra 1 não são estacionárias, como mostrado na tabela 4.9, o que indica a possibilidade de efeitos espúrios não completamente controlados pela seleção da amostra.

Teste ADF - Amostra 1		
Série	Estatística de Teste	p-valor
<i>c030d</i>	-3,0395	0,0329
<i>c060d</i>	-2,9366	0,0428
<i>c090d</i>	-2,7415	0,0687
<i>c180d</i>	-2,0786	0,2536
<i>c360d</i>	-1,9797	0,2957
<i>c720d</i>	-2,0694	0.2574

$H_0$ : A série possui raiz unitária.

**Tabela 4.9:** Aplicação do teste ADF às séries de cupom cambial da Amostra 1.

<sup>9</sup>Particularmente, a série *c180d* apresenta um pico na PACF para a quarta defasagem, após o valor na terceira defasagem não ter sido estatisticamente significativo.

Uma possibilidade é que a não estacionariedade esteja associada à elevação LIBOR a partir de julho de 2016, particularmente para prazos maiores, como analisado na seção 4.2. Como será visto na seção 4.3.2, contudo, mesmo com a restrição da amostra a um período anterior à elevação da LIBOR, continua havendo indícios de que as séries  $c180d$ ,  $c360d$  e  $c720d$  não são estacionárias. Outra explicação, que parece se ajustar à evidência e também fazer sentido econômico, é a de que o fator responsável pela raiz unitária seja a tendência de redução do risco de conversibilidade,  $r_{conv}$ , durante o período da Amostra 1. O País dava os primeiros passos na contenção da crise fiscal, que poderia levar a uma crise da dívida soberana, com sério impacto na conversibilidade, mas não imediatamente. Faz sentido, portanto, que apenas os cupons cambiais de prazos mais longos tenham sido mais afetados.

De fato, se utilizarmos o CDS com prazo de 10 anos para a dívida soberana brasileira, cuja série de dados chamaremos de  $CDS10a$ , como indicador de  $r_{conv}$  dos cupons de prazos mais longos, há evidência de que esta série não é estacionária no período da Amostra 1, com estatística ADF  $-1,782605$ , correspondente a um p-valor de  $0,3885$ , não sendo rejeitada, portanto, a hipótese nula de existência de raiz unitária. Adicionalmente, a série  $CDS10a$  cointegra com as séries  $c180d$ ,  $c360d$  e  $c720d$  no período correspondente à Amostra 1, como mostrado na tabela 4.10, que exhibe os testes ADF realizados nos resíduos das regressões de  $c180d$ ,  $c360d$  e  $c720d$  contra  $CDS10a$ , não apresentando mais indícios de raízes unitárias. As regressões foram realizadas utilizando *Fully Modified Least Squares* (FMOLS)<sup>10</sup> com correção para o efeito da correlação serial nos resíduos e endogeneidade da variável de regressão,  $CDS10a$ .

Teste de Cointegração - Amostra 1				
Série	Coeficientes		$R^2$ Ajustado	Estatística ADF (p-valor)
	Constante	$CDS10a$		
$c180d$	$-0,113952$	$0,006260^{***}$	70,13%	$-3,7044$ (0,0047)
$c360d$	$-0,753323^{**}$	$0,008533^{***}$	86,09%	$-4,2680$ (0,0006)
$c720d$	$-0,027314$	$0,007548^{***}$	84,06%	$-4,2501$ (0,0007)

$H_0$ : Os resíduos da regressão possuem raiz unitária.

**Tabela 4.10:** Aplicação do teste ADF aos resíduos das regressões das séries  $c180d$ ,  $c360d$  e  $c720d$  contra  $CDS10a$  por FMOLS na Amostra 1.

<sup>10</sup>A especificação da covariância de longo prazo no FMOLS foi feita com defasagem automática pelo critério de informação de Hannan-Quinn, *kernel* Bartlett e banda de Newey-West automática.

### 4.3.2 Identificação do modelo AR das Séries de Cupom Cambial na Amostra 2

Também foi utilizada a correção de White para heterocedasticidade nas estimações de mínimos quadrados desta amostra. Conforme os resultados exibidos na seção A.2, temos:

Amostra 2 - Ordem da Especificação AR Sugerida pelos Testes							
Série	Critério						
	AIC	SBIC	HQIC	<i>Overfitting</i>	Resíduos (LB/BG)	ACF	PACF
<i>c030d</i>	2	2	2	2	2/2	$\geq 2$	2
<i>c060d</i>	2	2	2	2	2/2	$\geq 2$	2
<i>c090d</i>	2	2	2	2	2/2	$\geq 2$	2
<i>c180d</i>	2	2	2	2	$\geq 3 / \geq 3$	$\geq 2$	2
<i>c360d</i>	$\geq 3$	2	2	2	$\geq 3 / \geq 3$	$\geq 2$	2
<i>c720d</i>	$\geq 3$	2	$\geq 3$	2	$\geq 3 / \geq 3$	$\geq 2$	2

**Tabela 4.11:** Ordem da especificação AR mais adequada para as séries de cupom cambial da Amostra 2, conforme sugerido pelos critérios utilizados.

Novamente, há evidência robusta de que seja um processo AR de ordem 2 nos prazos menores, embora ainda exista indícios mistos quanto à melhor especificação nos prazos maiores. A restrição da amostra levou a mais resultados indicando a ordem 2, mas não foi capaz de eliminar a não estacionariedade das séries *c180d*, *c360d* e *c720d*, como mostrado na tabela 4.12. Isto reforça o argumento de que a não estacionariedade está relacionada ao efeito do risco de conversibilidade para os prazos mais longos de cupom cambial, como discutido na seção 4.3.1. Por outro lado, isto também é um indício de que o comportamento autorregressivo de segunda ordem observado nas séries de cupom cambial com prazos mais curtos está associado ao risco de liquidez no mercado cambial local,  $r_{L,local}$ .

Teste ADF - Amostra 2		
Série	Estatística de Teste	p-valor
<i>c030d</i>	-3,0493	0,0330
<i>c060d</i>	-2,9437	0,0432
<i>c090d</i>	-2,8185	0,0584
<i>c180d</i>	-1,9540	0,3069
<i>c360d</i>	-1,6244	0,4673
<i>c720d</i>	-1,7061	0,4258

$H_0$ : A série possui raiz unitária.

**Tabela 4.12:** Aplicação do teste ADF às séries de cupom cambial da Amostra 2.

### 4.3.3 Identificação do modelo AR das Séries de Cupom Cambial na Amostra 3

Não houve rejeição da hipótese de homocedasticidade em várias regressões da Amostra 3. Contudo, para manter a comparabilidade entre especificações diferentes da mesma série, os resultados apresentados na seção A.3 também foram estimados com correção de White para os erros padrão. As indicações para a ordem do processo AR oferecidas pelos testes foram:

Amostra 3 - Ordem da Especificação AR Sugerida pelos Testes							
Série	Critério						
	AIC	SBIC	HQIC	<i>Overfitting</i>	Resíduos (LB/BG)	ACF	PACF
<i>c030d</i>	2	2	2	2	2/2	$\geq 2$	2
<i>c060d</i>	2	2	2	2	2/2	$\geq 2$	2
<i>c090d</i>	2	2	2	2	2/2	$\geq 2$	2
<i>c180d</i>	2	2	2	2	2/2	$\geq 2$	2
<i>c360d</i>	2	2	2	2	1/1	$\geq 2$	2
<i>c720d</i>	2	2	2	2	2/1	$\geq 2$	2

**Tabela 4.13:** Ordem da especificação AR mais adequada para as séries de cupom cambial da Amostra 3, conforme sugerido pelos critérios utilizados.

Nesta amostra menor, que resulta em menos chances para que fatores externos alterem o processo gerador dos dados, a evidência a favor da especificação AR(2) foi notável em todos os vencimentos. A hipótese de existência de raiz unitária só não foi rejeitada a 10% de significância para a série *c360d*, como mostrado na tabela 4.14.

Teste ADF - Amostra 3		
Série	Estatística de Teste	p-valor
<i>c030d</i>	-3,2121	0,0224
<i>c060d</i>	-2,8817	0,0514
<i>c090d</i>	-3,0259	0,0362
<i>c180d</i>	-2,6736	0,0825
<i>c360d</i>	-2,4630	0,1279
<i>c720d</i>	-2,9019	0,0490

$H_0$ : A série possui raiz unitária.

**Tabela 4.14:** Aplicação do teste ADF às séries de cupom cambial da Amostra 3.

Portanto, à luz dos dados analisados, existem fortes indícios de que a especificação mais adequada para o cupom cambial, particularmente quanto aos efeitos da liquidez do mercado de câmbio, seja um processo autorregressivo de segunda ordem. No capítulo seguinte, proporemos um processo estocástico contínuo capaz de modelar adequadamente este comportamento.

## Capítulo 5

# O Processo de OUG Exponencial Flutuante

Dado o comportamento particular da autocorrelação serial nos dados empíricos do cupom cambial, como visto no capítulo 4, neste capítulo propomos uma função resolvente, solução da equação 3.61, que resulta em uma nova classe de processos de Ornstein-Uhlenbeck Generalizados, da qual os processos de OUG do Tipo Exponencial e do Tipo Cosseno são casos particulares. Veremos que esta nova classe de processos é capaz de modelar a oscilação na autocorrelação observada para o cupom cambial.

Como discutimos na seção 3.3, o processo de OUG Exponencial resulta em uma equação de recorrência de primeira ordem, dada por 3.64, de modo que, pela equação 3.8, a autocorrelação não corresponde a uma oscilação amortecida. Já o processo de OUG Cosseno resulta em uma equação de recorrência de segunda ordem, dada por 3.67, mas com coeficiente fixo em  $-1$  para o termo de segunda ordem, de modo que o processo não é estacionário.

A classe de processos de OUG que propomos corresponde às soluções da ELG para a seguinte função resolvente:

$$\rho(t) = (1 - \nu)e^{-\theta t} + \nu \cos(\theta t); \quad (5.1)$$

com  $t \geq 0$  e parâmetros definidos conforme o teorema 5.1, enunciado adiante.

No restante do capítulo, verificaremos que esta combinação linear do cosseno e da exponencial é solução de 3.61 e estudaremos os processos de OUG resultantes, particularmente, sua estimação e simulação. Consideraremos o espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  sujeito às condições usuais, em que os processos de Lévy descritos são adaptados a  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ .

## 5.1 Validade da Solução $\rho(t)$ Proposta

A utilização da transformada de Laplace de uma função  $f(t), t \geq 0$ , denotada por  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  ou, simplesmente,  $\mathcal{L}\{f\}$ , facilita encontrar soluções para 3.61. Por isso, provaremos o seguinte lema:

**Lema 5.1.** *A função memória  $\gamma(t)$  de uma Equação de Langevin Generalizada (ELG) dada por 3.59 ou, de forma mais geral, a família de medidas  $(\mu_t; t \geq 0)$  que satisfazem a relação  $\rho'(t) = -\int_0^t \gamma(t-s)\rho(s)ds = -\int_0^t \rho(s)d\mu_t(s)$ , em que  $\rho(t)$  determina a solução da ELG, conforme a equação 3.60, podem ser obtidas por:*

$$\gamma(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{\mathcal{L}\{\rho'\}}{\mathcal{L}\{\rho\}} \right\}, \quad (5.2)$$

e

$$d\mu_t(s) = \gamma(t-s)ds. \quad (5.3)$$

*Demonstração.* Queremos obter  $\gamma(t)$  tal que sua convolução com  $\rho(t)$  seja igual a  $-\rho'(t)$ :

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= -\int_0^t \gamma(t-s)\rho(s)ds \\ &= -\gamma * \rho(t). \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\rho'\} &= -\mathcal{L}\{\gamma * \rho\} \\ &= -\mathcal{L}\{\gamma\}\mathcal{L}\{\rho\}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\gamma(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{\mathcal{L}\{\rho'\}}{\mathcal{L}\{\rho\}} \right\}.$$

□

Note que  $\gamma(t)$  não é necessariamente uma função e  $\mu_t$  não é necessariamente absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Por exemplo,  $\gamma(t)$  pode ser a distribuição delta de Dirac.

Podemos, agora, enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 5.1.** *Considere os parâmetros  $\theta > 0$ ,  $|\nu| \leq 1$ ,  $\nu_0 = 1 - \nu - \frac{\nu^2}{4}$  e  $\nu_1 = \sqrt{|\nu_0|}$ , de modo que  $\nu_0 = \text{sinal}(\nu_0)\nu_1^2$ . Considere ainda a função generalizada:<sup>1</sup>*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \kappa_1 \delta_0(t) + e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} [\kappa_2 \cos(\theta\nu_1 t) + \kappa_{3,1} \text{sen}(\theta\nu_1 t)] & \text{se } \text{sinal}(\nu_0) = 1; \\ \kappa_1 \delta_0(t) + e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} [\kappa_2 \cosh(\theta\nu_1 t) + \kappa_{3,-1} \text{senh}(\theta\nu_1 t)] & \text{se } \text{sinal}(\nu_0) = -1; \\ \kappa_1 \delta_0(t) + e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} [\kappa_2 + \kappa_{3,0} t] & \text{se } \text{sinal}(\nu_0) = 0; \end{cases}$$

em que  $\delta_0(t)$  é a distribuição delta de Dirac e:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \theta(1 - \nu); \\ \kappa_2 &= (\theta\nu)^2; \\ \kappa_{3,1} &= \frac{\theta^2}{\nu_1} - \frac{(\theta\nu)^2}{2\nu_1} - \theta(1 - \nu) \left( \theta\nu_1 - \frac{\theta\nu^2}{4\nu_1} \right); \\ \kappa_{3,-1} &= \frac{\theta^2}{\nu_1} - \frac{(\theta\nu)^2}{2\nu_1} + \theta(1 - \nu) \left( \theta\nu_1 + \frac{\theta\nu^2}{4\nu_1} \right); \\ \kappa_{3,0} &= \theta^3 - \frac{\theta^3\nu^2}{2} + \theta(1 - \nu) \frac{(\theta\nu)^2}{4}. \end{aligned}$$

Se  $(L(t); t \geq 0)$  é um processo de Lévy com primeiro e segundo momentos finitos ou  $\alpha$ -estável com  $1 < \alpha \leq 2$ , então o processo estocástico  $(X(t); t \geq 0)$ , dado por:

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 [(1 - \nu)e^{-\theta t} + \nu \cos(\theta t)] \\ &+ \int_0^t (1 - \nu)e^{-\theta(t-s)} + \nu \cos(\theta(t-s)) dL(s), \end{aligned}$$

é solução da ELG:

$$\begin{cases} dX(t) = - \int_0^t \gamma(t-s) X(s) ds dt + dL(t); \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>O requerimento de que  $|\nu| < 1$  está relacionado à estabilidade do processo autorregressivo gerado pela discretização do processo de OUG que estamos definindo, como ficará claro no teorema 5.2. A possibilidade de que  $\nu$  seja 1 foi mantida para que o processo de OUG Cosseno seja um dos casos particulares.

*Demonstração.* Encontraremos a função memória  $\gamma(t)$  através do lema 5.1. Para isso, precisamos obter as transformadas de Laplace de  $\rho(t)$  e de  $\rho'(t)$ , de acordo com a equação 5.1. Restringindo  $s$  a valores que não gerem indefinição, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\rho\} &= (1-\nu)\frac{1}{s+\theta} + \nu\frac{s}{s^2+\theta^2} \\ &= \frac{s^2 + \theta\nu s + \theta^2(1-\nu)}{(s+\theta)(s^2+\theta^2)} \\ &= \frac{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + \theta^2\left(1-\nu - \frac{\nu^2}{4}\right)}{(s+\theta)(s^2+\theta^2)} \\ &= \frac{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2 \text{sinal}(\nu_0)}{(s+\theta)(s^2+\theta^2)},\end{aligned}$$

em que  $\nu_0 = 1 - \nu - \frac{\nu^2}{4}$  e  $\nu_1 = \sqrt{|\nu_0|}$ . Como  $\rho'(t) = -\theta(1-\nu)e^{-\theta t} - \theta\nu \text{sen}(\theta t)$ , vem:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\rho'\} &= -\theta(1-\nu)\frac{1}{s+\theta} - \theta\nu\frac{\theta}{s^2+\theta^2} \\ &= -\frac{\theta(1-\nu)(s^2+\theta^2) + \theta^2\nu(s+\theta)}{(s+\theta)(s^2+\theta^2)}.\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\gamma\} &= -\frac{\mathcal{L}\{\rho'\}}{\mathcal{L}\{\rho\}} = \frac{\theta(1-\nu)(s^2+\theta^2) + \theta^2\nu(s+\theta)}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2 \text{sinal}(\nu_0)} \\ &= \frac{\theta(1-\nu)s^2}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2 \text{sinal}(\nu_0)} + \frac{\theta^2\nu s}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2 \text{sinal}(\nu_0)} \\ &\quad + \frac{\theta^3}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2 \text{sinal}(\nu_0)}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

**Caso 1:**  $\text{sinal}(\nu_0) = 1$  ou, equivalentemente,  $2\sqrt{2} - 2 > \nu \geq -1$ . Manipulando cada termo na equação 5.4 separadamente, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta(1-\nu)s^2}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} = \\
& = \theta(1-\nu) \frac{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2 - s\theta\nu - \frac{(\theta\nu)^2}{4} - (\theta\nu_1)^2}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} \\
& = \theta(1-\nu) \left[ 1 - \theta\nu \frac{s}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} - \frac{\frac{(\theta\nu)^2}{4} + (\theta\nu_1)^2}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} \right] \\
& = \theta(1-\nu) \left[ 1 - \theta\nu \frac{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} - \frac{-\frac{(\theta\nu)^2}{2} + \frac{(\theta\nu)^2}{4} + (\theta\nu_1)^2}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} \right] \\
& = \theta(1-\nu) \left[ 1 - \theta\nu \frac{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} - \frac{\theta\nu_1 \left(\theta\nu_1 - \frac{\theta\nu^2}{4\nu_1}\right)}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} \right].
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\theta(1-\nu)s^2}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} \right\} = \\
& = \theta(1-\nu) \left[ \delta_0(t) - \theta\nu e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} \cos(\theta\nu_1 t) - \left(\theta\nu_1 - \frac{\theta\nu^2}{4\nu_1}\right) e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} \text{sen}(\theta\nu_1 t) \right].
\end{aligned}$$

Para o termo seguinte:

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta^2\nu s}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} = \\
& = \theta^2\nu \frac{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right) - \frac{\theta\nu}{2}}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} \\
& = \theta^2\nu \frac{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} - \left(\frac{\theta^3\nu^2}{2\theta\nu_1}\right) \frac{\theta\nu_1}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} \\
& = \theta^2\nu \left[ \frac{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} - \left(\frac{\nu}{2\nu_1}\right) \frac{\theta\nu_1}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 + (\theta\nu_1)^2} \right],
\end{aligned}$$

e então:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\theta^2 \nu s}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 + (\theta \nu_1)^2} \right\} &= \\ &= \theta^2 \nu \left[ e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \cos(\theta \nu_1 t) - \frac{\nu}{2 \nu_1} e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \operatorname{sen}(\theta \nu_1 t) \right]. \end{aligned}$$

Por fim:

$$\begin{aligned} \frac{\theta^3}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 + (\theta \nu_1)^2} &= \left(\frac{\theta^2}{\nu_1}\right) \frac{\theta \nu_1}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 + (\theta \nu_1)^2} \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\theta^3}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 + (\theta \nu_1)^2} \right\} &= \frac{\theta^2}{\nu_1} e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \operatorname{sen}(\theta \nu_1 t). \end{aligned}$$

Resulta que:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \theta(1 - \nu) \delta_0(t) + (\theta \nu)^2 e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \cos(\theta \nu_1 t) \\ &\quad + \left[ \frac{\theta^2}{\nu_1} - \frac{(\theta \nu)^2}{2 \nu_1} - \theta(1 - \nu) \left( \theta \nu_1 - \frac{\theta \nu^2}{4 \nu_1} \right) \right] e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \operatorname{sen}(\theta \nu_1 t). \end{aligned}$$

**Caso 2:**  $\operatorname{senal}(\nu_0) = -1$  ou, equivalentemente,  $1 \geq \nu > 2\sqrt{2} - 2$ . Analogamente ao caso anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\theta(1 - \nu)s^2}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 - (\theta \nu_1)^2} &= \\ &= \theta(1 - \nu) \left[ 1 - \theta \nu \frac{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 - (\theta \nu_1)^2} + \frac{\theta \nu_1 \left(\theta \nu_1 + \frac{\theta \nu^2}{4 \nu_1}\right)}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 - (\theta \nu_1)^2} \right], \end{aligned}$$

de onde vem:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\theta(1 - \nu)s^2}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 - (\theta \nu_1)^2} \right\} &= \\ &= \theta(1 - \nu) \left[ \delta_0(t) - \theta \nu e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \cosh(\theta \nu_1 t) + \left( \theta \nu_1 + \frac{\theta \nu^2}{4 \nu_1} \right) e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \operatorname{senh}(\theta \nu_1 t) \right]. \end{aligned}$$

De modo semelhante:

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta^2 \nu s}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 - (\theta \nu_1)^2} = \\
& = \theta^2 \nu \left[ \frac{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 - (\theta \nu_1)^2} - \left(\frac{\nu}{2\nu_1}\right) \frac{\theta \nu_1}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 - (\theta \nu_1)^2} \right] \\
& \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\theta^2 \nu s}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 - (\theta \nu_1)^2} \right\} = \\
& = \theta^2 \nu \left[ e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \cosh(\theta \nu_1 t) - \frac{\nu}{2\nu_1} e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \sinh(\theta \nu_1 t) \right].
\end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta^3}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 - (\theta \nu_1)^2} = \left(\frac{\theta^2}{\nu_1}\right) \frac{\theta \nu_1}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 - (\theta \nu_1)^2} \\
& \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\theta^3}{\left(s + \frac{\theta \nu}{2}\right)^2 - (\theta \nu_1)^2} \right\} = \frac{\theta^2}{\nu_1} e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \sinh(\theta \nu_1 t).
\end{aligned}$$

Do que decorre:

$$\begin{aligned}
\gamma(t) = & \theta(1 - \nu)\delta_0(t) + (\theta \nu)^2 e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \cosh(\theta \nu_1 t) \\
& + \left[ \frac{\theta^2}{\nu_1} - \frac{(\theta \nu)^2}{2\nu_1} + \theta(1 - \nu) \left( \theta \nu_1 + \frac{\theta \nu^2}{4\nu_1} \right) \right] e^{-\frac{\theta \nu}{2} t} \sinh(\theta \nu_1 t).
\end{aligned}$$

**Caso 3:**  $\text{sinal}(\nu_0) = 0$  ou, equivalentemente,  $\nu = 2\sqrt{2}-2$ . Nesta situação, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta(1-\nu)s^2}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} = \\
& = \theta(1-\nu) \frac{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2 - s\theta\nu - \frac{(\theta\nu)^2}{4}}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} \\
& = \theta(1-\nu) \left[ 1 - \theta\nu \frac{s}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} - \frac{\frac{(\theta\nu)^2}{4}}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} \right] \\
& = \theta(1-\nu) \left[ 1 - \theta\nu \frac{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} + \frac{\frac{(\theta\nu)^2}{2} - \frac{(\theta\nu)^2}{4}}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} \right] \\
& = \theta(1-\nu) \left[ 1 - \theta\nu \frac{1}{s + \frac{\theta\nu}{2}} + \frac{(\theta\nu)^2}{4} \frac{1}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} \right] \\
& \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\theta(1-\nu)s^2}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} \right\} = \\
& = \theta(1-\nu) \left[ \delta_0(t) - \theta\nu e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} + \frac{(\theta\nu)^2}{4} t e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} \right].
\end{aligned}$$

E ainda:

$$\begin{aligned}
& \theta^2\nu \frac{s}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} = \theta^2\nu \frac{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right) - \frac{\theta\nu}{2}}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} = \theta^2\nu \left[ \frac{1}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)} - \left(\frac{\theta\nu}{2}\right) \frac{1}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} \right] \\
& \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \theta^2\nu \frac{s}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} \right\} = \theta^2\nu \left[ e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} - \left(\frac{\theta\nu}{2}\right) t e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} \right],
\end{aligned}$$

e:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\theta^3}{\left(s + \frac{\theta\nu}{2}\right)^2} \right\} = \theta^3 t e^{-\frac{\theta\nu}{2}t}.$$

Consequentemente:

$$\gamma(t) = \theta(1-\nu)\delta_0(t) + (\theta\nu)^2 e^{-\frac{\theta\nu}{2}t} + \left[ \theta^3 - \frac{\theta^3\nu^2}{2} + \theta(1-\nu)\frac{(\theta\nu)^2}{4} \right] t e^{-\frac{\theta\nu}{2}t}.$$

Do lema 5.1, do resultado de Kannan (1977) dado pela equação 3.60 e do teorema 3.3, segue o resultado. □

Assim, podemos definir:

**Definição 5.1.** Um Processo de OUG do tipo Exponencial Flutuante é um processo estocástico  $X = (X(t); t \geq 0)$ , dado por:

$$X(t) = X_0 [(1 - \nu)e^{-\theta t} + \nu \cos(\theta t)] + \int_0^t (1 - \nu)e^{-\theta(t-s)} + \nu \cos(\theta(t-s)) dL(s), \quad (5.5)$$

em que  $\theta > 0$ ,  $|\nu| \leq 1$  e  $L = (L(t); t \geq 0)$  é um processo de Lévy com primeiro e segundo momentos finitos ou  $\alpha$ -estável com  $1 < \alpha \leq 2$ .

Note que os processos de OUG Cosseno e Exponencial são casos particulares do processo de OUG Exponencial Flutuante, quando  $\nu = 1$ , resultando em  $\gamma(t) = \theta^2$ , e  $\nu = 0$ , resultando em  $\gamma(t) = \theta\delta_0(t)$ , respectivamente.

## 5.2 Equação de Recorrência do Processo de OUG Exponencial Flutuante

Buscaremos, agora, discretizar 5.5 de modo a obtermos uma equação recursiva de segunda ordem para o processo de OUG Exponencial Flutuante. Esta recursão será utilizada nas metodologias de estimação e simulação sugeridas.

Considere observações em tempos discretos  $t_k = kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$  e  $h > 0$  passo de discretização. Nestas condições, podemos enunciar a seguinte proposição:

**Teorema 5.2.** Dado um passo de discretização  $h \in \mathbb{R}_+^*$  e uma quantidade de passos  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ , o Processo de OUG do tipo Exponencial Flutuante obedece à equação de recorrência:

$$X((k+1)h) = [(1 - \nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) + \varepsilon_{k,h}, \quad (5.6)$$

com:

$$\varepsilon_{k,h} = - \int_{(k-1)h}^{kh} \nu \cos(\theta((k-1)h - s)) dL(s) + \int_{kh}^{(k+1)h} [(1 - \nu)e^{-\theta((k+1)h-s)} + \nu \cos(\theta((k+1)h - s))] dL(s). \quad (5.7)$$

*Demonstração.* Considerando os tempos discretos  $t_k = kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$  e  $h > 0$  passo de discretização, por 5.5 temos:

$$\begin{aligned}
X((k+1)h) &= X_0[(1-\nu)e^{-\theta(k+1)h} + \nu \cos(\theta(k+1)h)] \\
&+ \int_0^{(k+1)h} (1-\nu)e^{-\theta((k+1)h-s)} + \nu \cos(\theta((k+1)h-s))dL(s) \\
&= (1-\nu) \left[ \underbrace{X_0 e^{-\theta(k+1)h} + \int_0^{(k+1)h} e^{-\theta((k+1)h-s)} dL(s)}_A \right] \\
&+ \nu \left[ \underbrace{X_0 \cos(\theta(k+1)h) + \int_0^{(k+1)h} \cos(\theta((k+1)h-s)) dL(s)}_B \right].
\end{aligned}$$

Segue que, por 3.64:

$$A = e^{-\theta h} X(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-\theta((k+1)h-s)} dL(s);$$

e por 3.67 e 3.68:

$$\begin{aligned}
B &= 2 \cos(\theta h) X(kh) - X((k-1)h) \\
&- \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} \cos(\theta((k-1)h-s)) dL(s) \\
&+ \int_{kh}^{(k+1)h} 2 \cos(\theta h) \cos(\theta(kh-s)) dL(s) \\
&= 2 \cos(\theta h) X(kh) - X((k-1)h) \\
&- \int_{(k-1)h}^{kh} \cos(\theta((k-1)h-s)) dL(s) \\
&- \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(\theta((k-1)h-s)) dL(s) \\
&+ \int_{kh}^{(k+1)h} 2 \cos(\theta h) \cos(\theta(kh-s)) dL(s),
\end{aligned}$$

do que resulta:

$$\begin{aligned}
X((k+1)h) &= [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) \\
&\quad - \int_{(k-1)h}^{kh} \nu \cos(\theta((k-1)h-s)) dL(s) \\
&\quad + \int_{kh}^{(k+1)h} [(1-\nu)e^{-\theta((k+1)h-s)} + 2\nu \cos(\theta h) \cos(\theta(kh-s)) \\
&\quad - \nu \cos(\theta((k-1)h-s))] dL(s) \\
&= [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) \\
&\quad - \int_{(k-1)h}^{kh} \nu \cos(\theta((k-1)h-s)) dL(s) \\
&\quad + \int_{kh}^{(k+1)h} [(1-\nu)e^{-\theta((k+1)h-s)} + \nu \cos(\theta((k+1)h-s))] dL(s),
\end{aligned}$$

em que o último passo veio do fato de que  $2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$ . Portanto:

$$X((k+1)h) = [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) + \varepsilon_{k,h}$$

com:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k,h} &= - \int_{(k-1)h}^{kh} \nu \cos(\theta((k-1)h-s)) dL(s) \\
&\quad + \int_{kh}^{(k+1)h} [(1-\nu)e^{-\theta((k+1)h-s)} + \nu \cos(\theta((k+1)h-s))] dL(s).
\end{aligned}$$

□

**Corolário 5.1.** *Seja  $Y_g(t) = \int_0^t g(s) dL(s)$  para todo  $T \geq t > 0$  com  $g \in L^2([0, T])$  e  $(L(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy com primeiro e segundo momentos finitos ou  $\alpha$ -estável com  $1 < \alpha \leq 2$ . Então o erro da relação de recorrência de um processo de OUG Exponencial Flutuante,  $\varepsilon_{k,h}$ ,  $kh \in [0, T]$ , conforme o teorema 5.2, pode ser expresso como:*

$$\varepsilon_{k,h} = A_{k,h} + B_{k,h}, \tag{5.8}$$

em que  $A_{k,h}$  e  $B_{k,h}$  são variáveis aleatórias independentes entre si tais que:

$$A_{k,h} \stackrel{d}{=} Y_{g_A}(h) \tag{5.9}$$

$$B_{k,h} \stackrel{d}{=} Y_{g_B}(h) \tag{5.10}$$

e  $g_A, g_B \in L^2([0, T])$  são dadas por:

$$g_A(t) = -\nu \cos(\theta t); \quad (5.11)$$

$$g_B(t) = (1 - \nu)e^{-\theta(h-t)} + \nu \cos(\theta(h-t)). \quad (5.12)$$

*Demonstração.* Sejam:

$$g_{k,A}(t) = -\nu \cos(\theta((k-1)h-t));$$

$$g_{k,B}(t) = (1 - \nu)e^{-\theta((k+1)h-t)} + \nu \cos(\theta((k+1)h-t)).$$

Pelo teorema 5.2, podemos escrever:

$$\varepsilon_{k,h} = Y_{g_{k,A}}(kh) - Y_{g_{k,A}}((k-1)h) + Y_{g_{k,B}}((k+1)h) - Y_{g_{k,B}}(kh).$$

Como os intervalos de integração são disjuntos e a integração é em relação ao mesmo processo de Lévy, pela proposição 3.11,  $Y_{g_{k,A}}(kh) - Y_{g_{k,A}}((k-1)h)$  é independente de  $Y_{g_{k,B}}((k+1)h) - Y_{g_{k,B}}(kh)$ . Então defina:

$$A_{k,h} = Y_{g_{k,A}}(kh) - Y_{g_{k,A}}((k-1)h); \quad (5.13)$$

$$B_{k,h} = Y_{g_{k,B}}((k+1)h) - Y_{g_{k,B}}(kh). \quad (5.14)$$

Adicionalmente, note que, na integral:

$$A_{k,h} = \int_{(k-1)h}^{kh} -\nu \cos(\theta((k-1)h-s)) dL(s),$$

o argumento da função cosseno varia de 0 a  $-\theta h$ . Também temos que o cosseno é uma função par e que o intervalo de integração tem comprimento  $h$ . Assim, em distribuição:

$$\begin{aligned} A_{k,h} &\stackrel{d}{=} \int_0^h -\nu \cos(\theta s) dL(s) \\ &\stackrel{d}{=} \int_0^h g_A(s) dL(s) = Y_{g_A}(h). \end{aligned}$$

De modo semelhante, na integral:

$$B_{k,h} = \int_{kh}^{(k+1)h} [(1 - \nu)e^{-\theta((k+1)h-s)} + \nu \cos(\theta((k+1)h-s))] dL(s),$$

o intervalo de integração também tem comprimento  $h$  e o argumento da função exponencial vai de  $-\theta h$  a 0 e do cosseno de  $\theta h$  a 0. Logo, em distribuição:

$$\begin{aligned} B_{k,h} &\stackrel{d}{=} \int_0^h [(1 - \nu)e^{-\theta(h-s)} + \nu \cos(\theta(h-s))] dL(s) \\ &\stackrel{d}{=} \int_0^h g_B(s) dL(s) = Y_{g_B}(h). \end{aligned}$$

□

**Corolário 5.2.** *Sejam  $(X(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy  $\alpha$ -estável simétrico padrão com  $1 < \alpha \leq 2$ , i.e.,  $X(t) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , e  $(L(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy  $\alpha$ -estável com tendência (drift), tal que  $L(t) = bt + aX(t)$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Então, para cada  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ , o valor esperado da variável aleatória  $\varepsilon_{k,h}$ , conforme definida no teorema 5.2, é:*

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{k,h}] = \frac{b(1-\nu)(1-e^{-\theta h})}{\theta} \quad (5.15)$$

e  $\varepsilon_{k,h}^* = \varepsilon_{k,h} - \mathbb{E}[\varepsilon_{k,h}]$  tem distribuição:

$$\varepsilon_{k,h}^* \sim S_\alpha \left( a \left( \int_0^h |g_A(s)|^\alpha ds + \int_0^h |g_B(s)|^\alpha ds \right)^{\frac{1}{\alpha}}, 0, 0 \right), \quad (5.16)$$

em que  $g_A(t)$  e  $g_B(t)$  são definidas como no corolário 5.1.

*Demonstração.* Para  $(L(t); t \geq 0)$  como definido no enunciado, nas condições do corolário 5.1, temos:

$$\begin{aligned} Y_{g_A}(h) &= b \int_0^h g_A(s) ds + a \int_0^h g_A(s) dX(s) \\ &= -\frac{b\nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta} + a \int_0^h g_A(s) dX(s). \end{aligned}$$

Pelas proposições 3.18, 3.19 e 3.21 e dado que  $a > 0$ , segue:

$$Y_{g_A}(h) \sim S_\alpha \left( a \left( \int_0^h |g_A(s)|^\alpha ds \right)^{\frac{1}{\alpha}}, 0, -\frac{b\nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta} \right).$$

Do mesmo modo:

$$\begin{aligned} Y_{g_B}(h) &= b \int_0^h g_B(s) ds + a \int_0^h g_B(s) dX(s) \\ &= \frac{b(1-\nu)(1-e^{-\theta h}) + \nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta} + a \int_0^h g_B(s) dX(s) \\ &\sim S_\alpha \left( a \left( \int_0^h |g_B(s)|^\alpha ds \right)^{\frac{1}{\alpha}}, 0, \frac{b(1-\nu)(1-e^{-\theta h}) + \nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta} \right) \end{aligned}$$

Pelo corolário 5.1,  $\varepsilon_{k,h} = A_{k,h} + B_{k,h}$ ,  $A_{k,h}$  e  $B_{k,h}$  independentes e  $A_{k,h} \stackrel{d}{=} Y_{g_A}(h)$  e  $B_{k,h} \stackrel{d}{=} Y_{g_B}(h)$ , o que nos permite a aplicação da proposição 3.17 para obtermos:

$$\varepsilon_{k,h} \sim S_\alpha \left( a \left( \int_0^h |g_A(s)|^\alpha ds + \int_0^h |g_B(s)|^\alpha ds \right)^{\frac{1}{\alpha}}, 0, \frac{b(1-\nu)(1-e^{-\theta h})}{\theta} \right),$$

do que decorre a tese.  $\square$

O corolário 5.2 já nos permite estimar os parâmetros de um processo de OUG Exponencial Flutuante por máxima verossimilhança quando o processo de Lévy é  $\alpha$ -estável com tendência, conforme discutido na seção 3.3.2.

Os próximos resultados tratam do caso em que o processo de Lévy é uma difusão com salto:

**Corolário 5.3.** *Seja  $(L(t); t \geq 0)$  um processo de difusão com salto dado por  $L(t) = bt + aW(t) + \int_A xN(t, dx)$ , conforme a equação 3.23 e nas condições do teorema 3.1 e da proposição 3.10. Então cada variável aleatória  $\varepsilon_{k,h}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ , definida como no teorema 5.2, tem a seguinte função característica:*

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(h, u) &= \exp \left( iub\tau_A - \frac{1}{2}u^2a^2\tau_B \right) \\ &\times \exp \left[ 2\lambda \int_0^h \int_A \left( \frac{1}{2}e^{iug_A(s)x} + \frac{1}{2}e^{iug_B(s)x} - 1 \right) \mathbb{P}_Z(dx) ds \right], \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde  $g_A(t)$  e  $g_B(t)$  são definidas como no corolário 5.1 e:

$$\tau_A = \frac{(1-\nu)(1-e^{-\theta h})}{\theta}; \quad (5.18)$$

$$\tau_B = \frac{\nu^2(\text{sen}(2\theta h) + \theta h) + 2e^{-\theta h}(\text{sen}(\theta h) - \cos(\theta h))(\nu - \nu^2)}{2\theta} \quad (5.19)$$

$$+ \frac{e^{-2\theta h}(2\nu - \nu^2 - 1) + \nu^2(\theta h - 1) + 1}{2\theta} \geq 0. \quad (5.20)$$

*Demonstração.* Pelo corolário 5.1, temos:

$$\varphi_\varepsilon(h, u) = \mathbb{E}[e^{iu\varepsilon_{k,h}}] = \mathbb{E}[e^{iu(A_{k,h} + B_{k,h})}],$$

em que  $A_{k,h}$  e  $B_{k,h}$  são independentes, portanto:

$$\varphi_\varepsilon(h, u) = \mathbb{E}[e^{iuA_{k,h}}] \mathbb{E}[e^{iuB_{k,h}}].$$

Ainda de acordo com o corolário 5.1,  $A_{k,h} \stackrel{d}{=} Y_{g_A}(h)$  e  $B_{k,h} \stackrel{d}{=} Y_{g_B}(h)$ , do que segue:

$$\varphi_\varepsilon(h, u) = \mathbb{E} [e^{iuY_{g_A}(h)}] \mathbb{E} [e^{iuY_{g_B}(h)}] .$$

Como  $L(t) = bt + aW(t) + \int_A xN(t, dx)$ , da equação 3.37, nas condições da proposição 3.13, vem:

$$\mathbb{E} [e^{iuY_{g_A}(h)}] = \mathbb{E} \left[ e^{iu[b \int_0^h g_A(s) ds + a \int_0^h g_A(s) dW(s) + Y_{g_A, C}(h)]} \right]$$

e

$$\mathbb{E} [e^{iuY_{g_B}(h)}] = \mathbb{E} \left[ e^{iu[b \int_0^h g_B(s) ds + a \int_0^h g_B(s) dW(s) + Y_{g_B, C}(h)]} \right] .$$

Da independência entre as variáveis aleatórias dentro de cada expectativa, das definições de  $g_A(t)$  e  $g_B(t)$  no corolário 5.1, da proposição 3.12 e do fato de que a função característica de uma variável aleatória com distribuição correspondente a  $\mathcal{N}(0, a^2 \int_0^h |g(s)|^2 ds)$  é dada por  $e^{-\frac{1}{2}u^2 a^2 \int_0^h |g(s)|^2 ds}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{iuY_{g_A}(h)}] &= \exp \left[ iub \left( -\frac{\nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta} \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2}u^2 a^2 \frac{\nu^2 (\cos(\theta h) \sin(\theta h) + \theta h)}{2\theta} \right] \\ &\quad \times \mathbb{E} [e^{iuY_{g_A, C}(h)}] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{iuY_{g_B}(h)}] &= \exp \left[ iub \left( \frac{(1-\nu)(1-e^{-\theta h}) + \nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta} \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2}u^2 a^2 \frac{2e^{-\theta h} (\operatorname{sen}(\theta h) - \cos(\theta h)) (\nu - \nu^2) + \nu^2 \cos(\theta h) \operatorname{sen}(\theta h)}{2\theta} \right] \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2}u^2 a^2 \frac{e^{-2\theta h} (2\nu - \nu^2 - 1) + \nu^2 (\theta h - 1) + 1}{2\theta} \right] \\ &\quad \times \mathbb{E} [e^{iuY_{g_B, C}(h)}] . \end{aligned}$$

Das definições dos valores de  $\tau_A$  e  $\tau_B$ , temos assim:

$$\varphi_\varepsilon(h, u) = \exp \left( iub\tau_A - \frac{1}{2}u^2 a^2 \tau_B \right) \mathbb{E} [e^{iuY_{g_A, C}(h)}] \mathbb{E} [e^{iuY_{g_B, C}(h)}] .$$

O valor de  $\tau_B$  é não negativo porque é o resultado da integração do quadrado de funções reais. Finalmente, da proposição 3.13, obtemos a tese.  $\square$

Com a utilização da **Fórmula da Inversão**,<sup>2</sup> o corolário 5.3 nos permite estimar o processo de OUG Exponencial Flutuante por máxima verossimilhança quando o processo de Lévy é uma difusão com salto em que o tamanho dos saltos tem uma distribuição qualquer dada pela medida de probabilidade em  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P}_Z : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ , desde que possua o primeiro e o segundo momentos finitos.

O resultado abaixo ainda nos dá uma alternativa aproximada de estimação por máxima verossimilhança quando  $O(h^2) \rightarrow 0$ :

**Proposição 5.1.** *Nas condições do corolário 5.3, para cada  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ , a variável aleatória  $\varepsilon_{k,h}$  é distribuída como a variação de um processo de difusão com salto em um intervalo  $\delta t = \frac{1}{\theta}$  e pode ser expressa como:*

$$\varepsilon_{k,h} \stackrel{d}{=} b\theta\tau_A \left( \frac{1}{\theta} \right) + a\sqrt{\theta\tau_B}W \left( \frac{1}{\theta} \right) + \int_{[0, \frac{1}{\theta}] \times A} xN_\varepsilon(ds, dx), \quad (5.21)$$

em que o processo de Poisson composto  $\int_{[0, \frac{1}{\theta}] \times A} xN_\varepsilon(ds, dx)$  tem intensidade  $2\lambda\theta h$  e a função densidade de probabilidade do tamanho dos saltos é a média entre as funções densidade de probabilidade dos saltos em  $Y_{g_A, C}(h)$  e  $Y_{g_B, C}$ , nas condições da proposição 3.13.

Particularmente quando  $(L(t); t \geq 0)$  é uma difusão com salto em que o tamanho dos saltos tem distribuição normal  $\mathcal{N}(\mu_{\Delta L}, \sigma_{\Delta L}^2)$ , a variável aleatória do tamanho dos saltos do processo de Poisson composto de  $\varepsilon_{k,h}$  converge em média quadrática, quando  $O(h^2) \rightarrow 0$ , para uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por:

$$\frac{1}{2}f_{\mathcal{N}}(x|p_{A,h}\mu_{\Delta L}, p_{A,h}^2\sigma_{\Delta L}^2) + \frac{1}{2}f_{\mathcal{N}}(x|p_{B,h}\mu_{\Delta L}, p_{B,h}^2\sigma_{\Delta L}^2), \quad (5.22)$$

em que  $f_{\mathcal{N}}(x|\mu, \sigma^2)$  é a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  e:

$$p_{A,h} = -\frac{\nu \text{sen}(\theta h)}{\theta h} \quad (5.23)$$

---

<sup>2</sup>Conforme James (2015, p. 245), seja  $\varphi_X(u)$  a função característica da variável aleatória  $X$ , com função de distribuição  $F_X$ . Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ , então:

$$\frac{F_X(y) + F_X(y^-)}{2} - \frac{F_X(x) + F_X(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-iux} - e^{-iuy}}{iu} \varphi_X(u) du.$$

Ash (1972, p.324) também mostra que se  $F_X$  é contínua e  $\varphi_X(u)$  é Lebesgue integrável, então a função densidade de probabilidade de  $X$  é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \varphi_X(u) du.$$

e

$$p_{B,h} = \frac{(1 - \nu)(1 - e^{-\theta h}) + \nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta h}, \quad (5.24)$$

implicando que:

$$\mathbb{E} \left[ \int_{[0, \frac{1}{\theta}] \times A} x N_\varepsilon(ds, dx) \right] = 2\lambda h \left( \frac{p_{A,h} + p_{B,h}}{2} \right) \mu_{\Delta L} \quad (5.25)$$

e

$$\operatorname{Var} \left( \int_{[0, \frac{1}{\theta}] \times A} x N_\varepsilon(ds, dx) \right) = 2\lambda h \left( \frac{p_{A,h}^2 + p_{B,h}^2}{2} \right) (\mu_{\Delta L}^2 + \sigma_{\Delta L}^2). \quad (5.26)$$

*Demonstração.* Pela mudança de variável  $s = \theta ht$ , a função característica de  $\varepsilon_{k,h}$ , conforme o corolário 5.3, pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(h, u) &= \exp \left( i u b \theta \tau_A \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2} u^2 (a \sqrt{\theta \tau_B})^2 \frac{1}{\theta} \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ 2\lambda \theta h \int_0^{\frac{1}{\theta}} \left[ \frac{1}{2} \int_A (e^{i u g_A(\theta ht)x} - 1) \mathbb{P}_Z(dx) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int_A \left( \frac{1}{2} e^{i u g_B(\theta ht)x} - 1 \right) \mathbb{P}_Z(dx) \right] dt \right\}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

e assim, pela Fórmula de Lévy-Khintchine (equação 3.22) e pela equação 3.27, para cada  $k$ , a variável aleatória  $\varepsilon_{k,h}$  é distribuída como a variação de um processo de difusão com salto em um intervalo  $\delta t = \frac{1}{\theta}$  e pode ser expressa como:

$$\varepsilon_{k,h} \stackrel{d}{=} b \theta \tau_A \left( \frac{1}{\theta} \right) + a \sqrt{\theta \tau_B} W \left( \frac{1}{\theta} \right) + \int_{[0, \frac{1}{\theta}] \times A} x N_\varepsilon(dt, dx), \quad (5.28)$$

em que  $N_\varepsilon(t, A)$  é uma medida aleatória de Poisson com intensidade  $2\lambda \theta h$  e função densidade de probabilidade do tamanho dos saltos dada pela média das funções densidade de probabilidade do tamanho saltos de  $Y_{g_A, C}(h)$  e de  $Y_{g_B, C}(h)$ , nas condições da proposição 3.13.

Particularmente se  $(L(t); t \geq 0)$  for um processo de difusão com salto em que o tamanho dos saltos é dado pela variável aleatória  $Z \sim \mathcal{N}(\mu_{\Delta L}, \sigma_{\Delta L}^2)$ , pela proposição 3.14, a variável aleatória do tamanho dos saltos em  $Y_{g_A}(h)$  converge em média quadrática para:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \int_0^h g_A(s) ds Z &= -\frac{\nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta h} Z \\
&= p_{A,h} Z \\
&\sim \mathcal{N}(p_{A,h} \mu_{\Delta L}, p_{A,h}^2 \sigma_{\Delta L}^2),
\end{aligned}$$

quando  $O(h^2) \rightarrow 0$ . De modo semelhante, a variável aleatória do tamanho dos saltos em  $Y_{g_B}(h)$  converge em média quadrática, quando  $O(h^2) \rightarrow 0$ , para:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \int_0^h g_B(s) ds Z &= \frac{(1-\nu)(1-e^{-\theta h}) + \nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta h} Z \\
&= p_{B,h} Z \\
&\sim \mathcal{N}(p_{B,h} \mu_{\Delta L}, p_{B,h}^2 \sigma_{\Delta L}^2).
\end{aligned}$$

A função densidade de probabilidade do tamanho dos saltos de  $\varepsilon_{k,h}$  é, portanto, aproximadamente:

$$\frac{1}{2} f_{\mathcal{N}}(x | p_{A,h} \mu_{\Delta L}, p_{A,h}^2 \sigma_{\Delta L}^2) + \frac{1}{2} f_{\mathcal{N}}(x | p_{B,h} \mu_{\Delta L}, p_{B,h}^2 \sigma_{\Delta L}^2).$$

A média e a variância do processo de Poisson composto de  $\varepsilon_{k,h}$  são obtidas pela aplicação direta da proposição 3.10 para  $\delta t = \frac{1}{\theta}$ , intensidade  $2\lambda\theta h$  e distribuição dos saltos como dada na equação acima.  $\square$

A proposição 5.1 permite estimar os parâmetros por máxima verossimilhança sem a necessidade de recorrer à fórmula da inversão, usando a mesma estratégia descrita na seção 3.2.2. A distribuição de  $\varepsilon_{k,h}$  condicionalmente à não ocorrência de saltos é  $\mathcal{N}(b\tau_A, a^2\tau_B)$  e condicionalmente à ocorrência de exatamente um salto, já que corresponde à soma de duas variáveis aleatórias independentes, é a convolução dessa distribuição com a distribuição dada pela equação 5.22, o que resulta em:

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon}(x | \delta N_{\varepsilon}(t, A) = 1) &= \frac{1}{2} f_{\mathcal{N}}(x | b\tau_A + p_{A,h} \mu_{\Delta L}, a^2\tau_B + p_{A,h}^2 \sigma_{\Delta L}^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} f_{\mathcal{N}}(x | b\tau_A + p_{B,h} \mu_{\Delta L}, a^2\tau_B + p_{B,h}^2 \sigma_{\Delta L}^2),
\end{aligned}$$

com  $\delta N_{\varepsilon}(t, A) = N_{\varepsilon}(t, A) - N_{\varepsilon}(t - 1/\theta, A)$ . Supondo que a probabilidade de mais de um salto no intervalo  $h$  é desprezível, a probabilidade de nenhum

salto e de apenas um salto podem ser dadas, respectivamente, por:

$$\mathbb{P}(\delta N_\varepsilon(t, A) = 0) = e^{(\frac{1}{\theta})2\lambda\theta h} = e^{2\lambda h}; \quad (5.29)$$

$$\mathbb{P}(\delta N_\varepsilon(t, A) = 1) \approx 1 - e^{(\frac{1}{\theta})2\lambda\theta h} = 1 - e^{2\lambda h}. \quad (5.30)$$

Assim, de modo análogo ao que foi feito para obter a equação 3.49, vem:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &\approx e^{2\lambda h} f_{\mathcal{N}}(x|b\tau_A, a^2\tau_B) \\ &+ (1 - e^{2\lambda h}) \left[ \frac{1}{2} f_{\mathcal{N}}(x|b\tau_A + p_{A,h}\mu_{\Delta L}, a^2\tau_B + p_{A,h}^2\sigma_{\Delta L}^2) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} f_{\mathcal{N}}(x|b\tau_A + p_{B,h}\mu_{\Delta L}, a^2\tau_B + p_{B,h}^2\sigma_{\Delta L}^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Os resultados anteriores já nos permitem estimar o processo de OUG Exponencial Flutuante por máxima verossimilhança quando o processo de Lévy é  $\alpha$ -estável com  $1 < \alpha \leq 2$  ou uma difusão com salto, qualquer que seja a distribuição do tamanho dos saltos, desde que tenha o primeiro e o segundo momentos finitos.

Para também ser possível a alternativa de estimação por mínimos quadrados, no caso em que o processo de Lévy possui o segundo momento finito, o processo  $(\varepsilon_{k,h}; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  deveria ser, pelo menos, fracamente estacionário. Contudo, pelas equações 5.13 e 5.14 e conforme o corolário 5.1,  $A_{k,h}$  e  $B_{k-1,h}$  são integrais estocásticas em relação ao mesmo processo de Lévy com o mesmo intervalo de integração, de modo que  $\varepsilon_{k,h}$  e  $\varepsilon_{k-1,h}$  são correlacionados, exceto no caso em que  $\nu = 0 \Rightarrow A_{k,h} = 0(q.c.)$ , o que resulta no processo de OU não gaussiano, que possui representação AR(1) exata para qualquer passo de discretização  $h \in \mathbb{R}_+^*$ .

O próximo teorema modela essa autocorrelação, de forma aproximada, como um processo de média móvel de ordem 1, e nos fornece alternativas adicionais de estimação do processo de OUG Exponencial Flutuante com ruído de Lévy dado por uma difusão com salto através de sua discretização como um processo ARMA(2, 1) quando  $O(h^3) \rightarrow 0$ . Note que esta aproximação também permite a estimação por máxima verossimilhança do processo ARMA(2, 1) e de uma forma mais simples.

Para facilitar a demonstração do teorema, propomos antes o seguinte lema:

**Lema 5.2.** *Sejam a função  $g \in L^2([0, h])$  infinitamente diferenciável,  $L = (L(t); t \geq 0)$  um processo de difusão com salto como na equação 3.23, com  $L(t) = bt + aW(t) + \int_A xN(t, dx)$ , em que  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $c > 0$ ,  $A =$*

$\mathbb{R} \setminus (-c, c)$ , a medida aleatória de Poisson tem intensidade  $\lambda$  e, condicionalmente à ocorrência de  $n$  saltos no intervalo de tempo de 0 a  $h$ , os tempos de chegada são dados por  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , cópias independentes da variável aleatória  $T \sim U(0, h]$ , com os tamanhos dos saltos dados por  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ , cópias independentes da variável aleatória  $Z$ , que possui primeiro e segundo momentos finitos, e  $Y_g(h)$  a integral de  $g$  com respeito a  $L$  no intervalo de 0 a  $h$ , conforme a equação 3.37. Então:

$$\mathbb{E}[Y_g(h)] = \bar{g}_h \mathbb{E}[L(h)] \quad (5.32)$$

e

$$Y_g(h) \rightarrow \bar{g}_h L(h) \quad (5.33)$$

em média quadrática quando  $O(h^3) \rightarrow 0$ , onde:

$$\bar{g}_h = \frac{1}{h} \int_0^h g(s) ds. \quad (5.34)$$

*Demonstração.* Conforme a equação 3.37:

$$\begin{aligned} Y_g(h) &= b \int_0^h g(s) ds + a \int_0^h g(s) dW(s) + \sum_{0 \leq s \leq h} g(s) \Delta L(s) \mathbf{1}_A(\Delta L(s)) \\ &= b \int_0^h g(s) ds + a \int_0^h g(s) dW(s) + Y_{g,C}(h). \end{aligned}$$

Das proposições 3.10 e 3.13 e do fato de que o valor esperado da integral de Itô é zero, vem:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_g(h)] &= b \int_0^h g(s) ds + \lambda \mathbb{E}[Z] \int_0^h g(s) ds \\ &= bh\bar{g}_h + \lambda \mathbb{E}[Z] h\bar{g}_h = \bar{g}_h (bh + \lambda h \mathbb{E}[Z]) = \bar{g}_h \mathbb{E}[L(h)]. \end{aligned}$$

Adicionalmente, denote:

$$Y_{\bar{g}}(h) = \int_0^h \bar{g}_h dL(s) = \bar{g}_h L(h)$$

e

$$Y_{\bar{g},C}(h) = \int_{(0,h] \times A} \bar{g}_h x N(ds, dx) = \sum_{0 \leq s \leq h} \bar{g}_h \Delta L(s) \mathbf{1}_A(\Delta L(s)),$$

de modo que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [(Y_g(h) - Y_{\bar{g}}(h))^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( b \int_0^h g(s) ds + a \int_0^h g(s) dW(s) + Y_{g,C}(h) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - b \int_0^h \bar{g}_h ds - a \int_0^h \bar{g}_h dW(s) - Y_{\bar{g},C}(h) \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( b \int_0^h g(s) ds + a \int_0^h g(s) dW(s) + Y_{g,C}(h) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - b\bar{g}_h h - a\bar{g}_h W(h) - Y_{\bar{g},C}(h) \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Da definição de  $\bar{g}_h$ , vem portanto:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} [(Y_g(h) - Y_{\bar{g}}(h))^2] = \\
&= \mathbb{E} \left[ \left[ a \left( \int_0^h g(s) dW(s) - \bar{g}_h W(h) \right) + (Y_{g,C}(h) - Y_{\bar{g},C}(h)) \right]^2 \right] \\
&= a^2 \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^h g(s) dW(s) - \bar{g}_h W(h) \right)^2 \right] \\
&\quad + 2a \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^h g(s) dW(s) - \bar{g}_h W(h) \right) (Y_{g,C}(h) - Y_{\bar{g},C}(h)) \right] \\
&\quad + \mathbb{E} [(Y_{g,C}(h) - Y_{\bar{g},C}(h))^2].
\end{aligned}$$

Da independência entre o processo de Wiener e o processo de saltos e do fato de que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^h g(s) dW(s) \right] = \mathbb{E} [\bar{g}_h W(h)] = 0$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [(Y_g(h) - Y_{\bar{g}}(h))^2] &= a^2 \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^h g(s) dW(s) - \bar{g}_h W(h) \right)^2 \right] \\
&\quad + \mathbb{E} [(Y_{g,C}(h) - Y_{\bar{g},C}(h))^2].
\end{aligned}$$

Temos, então, que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^h g(s) dW(s) - \bar{g}_h W(h) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^h g(s) dW(s) \right)^2 \right] \\
&\quad - 2\mathbb{E} \left[ \int_0^h g(s) dW(s) \times \bar{g}_h W(h) \right] + \bar{g}_h^2 \mathbb{E} [(W(h)^2)],
\end{aligned}$$

e pela **isometria de Itô**:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^h g(s) dW(s) - \bar{g}_h W(h) \right)^2 \right] &= \int_0^h (g(s))^2 ds - 2 \int_0^h g(s) \bar{g}_h ds + \bar{g}_h^2 h \\
&= \int_0^h (g(s))^2 ds - 2 \bar{g}_h \int_0^h g(s) ds + \bar{g}_h^2 h \\
&= \int_0^h (g(s))^2 ds - 2 \bar{g}_h^2 h + \bar{g}_h^2 h \\
&= \int_0^h (g(s))^2 ds - \bar{g}_h^2 h \\
&= \int_0^h (g(s))^2 ds - \frac{1}{h} \left( \int_0^h g(s) ds \right)^2.
\end{aligned}$$

Temos também:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [(Y_{g,C}(h) - Y_{\bar{g},C}(h))^2] &= \mathbb{E} [(Y_{g,C}(h))^2 - 2Y_{g,C}(h)Y_{\bar{g},C}(h) + (Y_{\bar{g},C}(h))^2] \\
&= \mathbb{E} [(Y_{g,C}(h))^2] - 2\mathbb{E}[Y_{g,C}(h)Y_{\bar{g},C}(h)] \\
&\quad + \mathbb{E} [(Y_{\bar{g},C}(h))^2].
\end{aligned}$$

Da proposição 3.13, obtemos:

$$\mathbb{E} [(Y_{g,C}(h))^2] = \lambda \mathbb{E}[Z^2] \int_0^h (g(s))^2 ds + \left( \lambda \mathbb{E}[Z] \int_0^h g(s) ds \right)^2,$$

e da proposição 3.10:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [(Y_{\bar{g},C}(h))^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{0 \leq s \leq h} \bar{g}_h \Delta L(s) \mathbf{1}_A(\Delta L(s)) \right)^2 \right] \\
&= \bar{g}_h^2 \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{0 \leq s \leq h} \Delta L(s) \mathbf{1}_A(\Delta L(s)) \right)^2 \right] \\
&= \bar{g}_h^2 [\lambda \mathbb{E}[Z^2] h + (\lambda \mathbb{E}[Z] h)^2] \\
&= \lambda \mathbb{E}[Z^2] \bar{g}_h^2 h + (\lambda \mathbb{E}[Z] \bar{g}_h h)^2.
\end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>O resultado fundamental correspondente à isometria de Itô já foi enunciado na proposição 3.12. O fato da integral de Itô ser uma isometria entre  $L^2([a, b])$  e  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  que preserva o produto interno, de modo que, dadas as funções  $f, g \in L^2([a, b])$ ,  $\mathbb{E}[\int_a^b f(s) dW(s) \int_a^b g(s) dW(s)] = \int_a^b f(s)g(s) ds$ , é demonstrado, por exemplo, em Kuo (2006, corolário 2.3.5, p. 12).

Finalmente, nas condições do enunciado e da independência entre os tempos de chegada e o processo de saltos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_{g,C}(h)Y_{\bar{g},C}(h)] &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[Y_{g,C}(h)Y_{\bar{g},C}(h)|N(h, A) = n] \mathbb{P}[N(h, A)] \\
&= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g(T_i) \Delta L(T_i) \right) \left( \sum_{j=1}^n \bar{g}_h \Delta L(T_j) \right) \right] \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 1} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{g}_h \mathbb{E}[g(T_j)] \mathbb{E}[\Delta L(T_i) \Delta L(T_j)] \right] \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 1} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{g}_h \left( \int_0^h g(s) \frac{1}{h-s} ds \right) \mathbb{E}[\Delta L(T_i) \Delta L(T_j)] \right] \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 1} \left[ \bar{g}_h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[\Delta L(T_i) \Delta L(T_j)] \right] \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 1} [\bar{g}_h^2 [n\mathbb{E}[Z^2] + (n^2 - n) (\mathbb{E}[Z])^2]] \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 1} \bar{g}_h^2 n \mathbb{E}[Z^2] \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^n}{n!} + \sum_{n \geq 1} \bar{g}_h^2 n(n-1) (\mathbb{E}[Z])^2 \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 1} \bar{g}_h^2 \mathbb{E}[Z^2] (\lambda h) \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n \geq 2} \bar{g}_h^2 (\mathbb{E}[Z])^2 (\lambda h)^2 \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^{n-2}}{(n-2)!} \\
&= \lambda \mathbb{E}[Z^2] \bar{g}_h^2 h (e^{-\lambda h} e^{\lambda h}) + (\lambda \mathbb{E}[Z] \bar{g}_h h)^2 (e^{-\lambda h} e^{\lambda h}) \\
&= \lambda \mathbb{E}[Z^2] \bar{g}_h^2 h + (\lambda \mathbb{E}[Z] \bar{g}_h h)^2.
\end{aligned}$$

Resulta, então:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [(Y_{g,C}(h) - Y_{\bar{g},C}(h))^2] &= \lambda \mathbb{E}[Z^2] \int_0^h (g(s))^2 ds + \left( \lambda \mathbb{E}[Z] \int_0^h g(s) ds \right)^2 \\
&\quad - \lambda \mathbb{E}[Z^2] \bar{g}_h^2 h - (\lambda \mathbb{E}[Z] \bar{g}_h h)^2 \\
&= \lambda \mathbb{E}[Z^2] \int_0^h (g(s))^2 ds + \left( \lambda \mathbb{E}[Z] \int_0^h g(s) ds \right)^2 \\
&\quad - \lambda \mathbb{E}[Z^2] \bar{g}_h^2 h - \left( \lambda \mathbb{E}[Z] \int_0^h g(s) ds \right)^2 \\
&= \lambda \mathbb{E}[Z^2] \left( \int_0^h (g(s))^2 ds - \bar{g}_h^2 h \right) \\
&= \lambda \mathbb{E}[Z^2] \left[ \int_0^h (g(s))^2 ds - \frac{1}{h} \left( \int_0^h g(s) ds \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathbb{E} [(Y_g(h) - Y_{\bar{g}}(h))^2] = (a^2 + \lambda \mathbb{E}[Z^2]) \left[ \int_0^h (g(s))^2 ds - \frac{1}{h} \left( \int_0^h g(s) ds \right)^2 \right].$$

Como  $g$  é infinitamente diferenciável, sua expansão de Taylor ao redor de 0 fica:

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + O(x^2).$$

E daí:

$$\begin{aligned}
\int_0^h (g(s))^2 ds &= \int_0^h g^2(0) + 2g(0)g'(0)s + O(s^2) ds \\
&= g^2(0)h + g(0)g'(0)h^2 + O(h^3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \left( \int_0^h g(s) ds \right)^2 &= \frac{1}{h} \left( \int_0^h g(0) + g'(0)s + O(s^2) ds \right)^2 \\
&= \frac{1}{h} \left( g(0)h + g'(0)\frac{h^2}{2} + O(h^3) \right)^2 \\
&= \frac{1}{h} (g^2(0)h^2 + g(0)g'(0)h^3 + O(h^4)) \\
&= g^2(0)h + g(0)g'(0)h^2 + O(h^3),
\end{aligned}$$

do que se obtém:

$$\mathbb{E} [(Y_g(h) - Y_{\bar{g}}(h))^2] = (a^2 + \lambda \mathbb{E}[Z^2])O(h^3),$$

e  $Y_g(h) \rightarrow Y_{\bar{g}}(h) = \bar{g}_h L(h)$  em média quadrática quando  $O(h^3) \rightarrow 0$ .  $\square$

**Teorema 5.3.** *Considere um passo de discretização  $h \in \mathbb{R}_+^*$  e uma quantidade de passos  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ . Sejam  $L = (L(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy dado por uma difusão com salto, com as características descritas no lema 5.2, e  $(u_{k,h}; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  o processo i.i.d. definido como  $u_{k,h} = L(kh) - L((k-1)h)$ . Então, quando  $O(h^3) \rightarrow 0$ , o Processo de OUG do tipo Exponencial Flutuante com ruído de Lévy  $L$  admite discretização que se aproxima de um processo ARMA(2, 1) dado por:*

$$\begin{aligned} X((k+1)h) &= \frac{(1-\nu)(1-e^{-\theta h})}{\theta} (b + \mathbb{E}[Z]\lambda) \\ &+ [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) \\ &+ \frac{(1-\nu)(1-e^{-\theta h}) + \nu \sin(\theta h)}{\theta h} u_{k+1,h}^* - \frac{\nu \sin(\theta h)}{\theta h} u_{k,h}^*, \end{aligned} \quad (5.35)$$

em que  $(u_{k,h}^*; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  é um ruído branco em sentido estrito, tal que  $u_{k,h}^* = u_{k,h} - \mathbb{E}[u_{k,h}] = u_{k,h} - (bh + \mathbb{E}[Z]\lambda h)$ , com  $\mathbb{E}[(u_{k,h}^*)^2] = a^2 h + \mathbb{E}[Z^2]\lambda h$ .

*Demonstração.* Pelo teorema 5.2 e pelo corolário 5.1, podemos escrever:

$$\begin{aligned} X((k+1)h) &= [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) \\ &+ B_{k,h} + A_{k,h} \\ &= \mathbb{E}[B_{k,h}] + \mathbb{E}[A_{k,h}] \\ &+ [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) \\ &+ (B_{k,h} - \mathbb{E}[B_{k,h}]) + (A_{k,h} - \mathbb{E}[A_{k,h}]). \end{aligned}$$

Também pelo corolário corolário 5.1, em distribuição, temos:

$$\begin{aligned} X((k+1)h) &\stackrel{d}{=} \mathbb{E}[Y_{g_B}(h)] + \mathbb{E}[Y_{g_A}(h)] \\ &+ [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) \\ &+ (Y_{g_B}(h) - \mathbb{E}[Y_{g_B}(h)]) + (Y_{g_A}(h) - \mathbb{E}[Y_{g_A}(h)]). \end{aligned}$$

Quando  $O(h^3) \rightarrow 0$ , pelo lema 5.2, temos aproximadamente:

$$\begin{aligned}
X((k+1)h) &\stackrel{d}{=} \mathbb{E}[Y_{\bar{g}_B}(h)] + \mathbb{E}[Y_{\bar{g}_A}(h)] \\
&\quad + [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) \\
&\quad + (Y_{\bar{g}_B}(h) - \mathbb{E}[Y_{\bar{g}_B}(h)]) + (Y_{\bar{g}_A}(h) - \mathbb{E}[Y_{\bar{g}_A}(h)]) \\
&\stackrel{d}{=} \left( \frac{1}{h} \int_0^h g_B(s) ds + \frac{1}{h} \int_0^h g_A(s) ds \right) \mathbb{E}[L(h)] \\
&\quad + [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) \\
&\quad + \frac{1}{h} \int_0^h g_B(s) ds (L(h) - \mathbb{E}[L(h)]) \\
&\quad + \frac{1}{h} \int_0^h g_A(s) ds (L(h) - \mathbb{E}[L(h)]).
\end{aligned}$$

Para recuperarmos a independência e a mesma estrutura de mensurabilidade que havia entre  $A_{k,h}$  e  $B_{k,h}$ , podemos usar a propriedade 3 da definição de um processo de Lévy, e ainda temos que  $L(h) \stackrel{d}{=} L((k+1)h) - L(kh) = u_{k+1,h}$ ,  $\mathcal{F}_{(k+1)h}$ -mensurável, assim como  $B_{k,h}$ , e  $L(h) \stackrel{d}{=} L(kh) - L((k-1)h) = u_{k,h}$ ,  $\mathcal{F}_{kh}$ -mensurável, assim como  $A_{k,h}$ . Resulta que é possível modelar a equação de recorrência, aproximadamente, como:

$$\begin{aligned}
X((k+1)h) &= \left( \frac{1}{h} \int_0^h g_B(s) ds + \frac{1}{h} \int_0^h g_A(s) ds \right) \mathbb{E}[u_{k,h}] \\
&\quad + [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) \\
&\quad + \frac{1}{h} \int_0^h g_B(s) ds (u_{k+1,h} - \mathbb{E}[u_{k+1,h}]) \\
&\quad + \frac{1}{h} \int_0^h g_A(s) ds (u_{k,h} - \mathbb{E}[u_{k,h}]) \\
&= \left( \frac{1}{h} \int_0^h g_B(s) ds + \frac{1}{h} \int_0^h g_A(s) ds \right) \mathbb{E}[u_{k,h}] \\
&\quad + [(1-\nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] X(kh) - \nu X((k-1)h) \\
&\quad + \left( \frac{1}{h} \int_0^h g_B(s) ds \right) u_{k+1,h}^* + \left( \frac{1}{h} \int_0^h g_A(s) ds \right) u_{k,h}^*.
\end{aligned}$$

Pelas definições de  $g_A(h)$  e  $g_B(h)$  no corolário 5.1:

$$\frac{1}{h} \int_0^h g_A(h) ds = -\frac{\nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta h}$$

e

$$\frac{1}{h} \int_0^h g_B(h) ds = \frac{(1 - \nu)(1 - e^{-\theta h}) + \nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta h}.$$

Pelo itens 2 e 3 da definição 3.14 de processo de Lévy, o processo  $(u_{k,h}; k \in \mathbb{Z}_+^*)$ , com  $u_{k,h} = L(kh) - L((k-1)h)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ , é independente e identicamente distribuído, assim como também é o processo  $(u_{k,h}^*; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  com  $u_{k,h}^* = u_{k,h} - \mathbb{E}[u_{k,h}]$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ , onde, pela proposição 3.10,  $\mathbb{E}[u_{k,h}] = bh + \mathbb{E}[Z]\lambda h$ . Além disso,  $\mathbb{E}[u_{k,h}^*] = \mathbb{E}[u_{k,h}] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_{k,h}]] = 0$ , com variância finita dada por  $\operatorname{Var}(u_{k,h}^*) = \operatorname{Var}(u_{k,h} - \mathbb{E}[u_{k,h}]) = \operatorname{Var}(u_{k,h}) = a^2h + \mathbb{E}[Z^2]\lambda h$ , também conforme a proposição 3.10, de modo que  $(u_{k,h}^*; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  é um ruído branco em sentido estrito, o que conclui a demonstração.  $\square$

**Corolário 5.4.** *Dado o processo ARMA(2,1) gerado pela discretização de um processo de OUG do Tipo Exponencial Flutuante  $(X(t); t \geq 0)$ , conforme o teorema 5.3, as condições de estabilidade do processo discretizado são:  $|\nu| < 1$  e  $|(1 - \nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)| - \nu < 1$ . Particularmente, qualquer que seja o passo de discretização  $h \in \mathbb{R}_+^*$ , são condições suficientes para que o processo ARMA seja estacionário:*

$$0 \leq \nu < 1$$

e

$$\theta > 0.$$

*Demonstração.* Nas condições do teorema 5.3, por simplicidade, denote  $X_k = X(t_k)$  e  $u_k^* = L(t_k) - L(t_k - h) - \mathbb{E}[L(t_k) - L(t_k - h)]$ , em que  $t_k = kh$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_+^*$  e  $h \in \mathbb{R}_+^*$  é um passo de discretização fixado. Denote ainda:

$$\phi_0 = \frac{(1 - \nu)(1 - e^{-\theta h})}{\theta} (b + \mathbb{E}[Z]\lambda); \quad (5.36)$$

$$\phi_1 = [(1 - \nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)]; \quad (5.37)$$

$$\phi_2 = -\nu; \quad (5.38)$$

$$\beta_0 = \frac{(1 - \nu)(1 - e^{-\theta h}) + \nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta h}; \quad (5.39)$$

$$\beta_1 = -\frac{\nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta h}; \quad (5.40)$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(u_k^*)^2] = a^2h + \mathbb{E}[Z^2]\lambda h, \quad (5.41)$$

de modo que o processo ARMA(2,1) pode ser escrito como:

$$X_{k+1} = \phi_0 + \phi_1 X_k + \phi_2 X_{k-1} + \beta_0 u_{k+1}^* + \beta_1 u_k^*,$$

ou, equivalentemente:

$$X_k = \phi_0 + \phi_1 X_{k-1} + \phi_2 X_{k-2} + \beta_0 u_k^* + \beta_1 u_{k-1}^*. \quad (5.42)$$

Como discutido na seção 3.1, a estabilidade de um processo ARMA depende inteiramente dos coeficientes da parte autorregressiva. Assim, de acordo com as equações 3.9 e 3.10, são condições para que a representação ARMA(2, 1) de um processo de OUG Exponencial Flutuante seja estacionária:

$$|\phi_2| = |\nu| < 1 \quad (5.43)$$

e

$$|\phi_1 + \phi_2| = |(1 - \nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)| - \nu < 1. \quad (5.44)$$

Contudo, independentemente do valor de  $h > 0$ , a condição 5.44 nunca é verificada para  $\theta = 0$ , uma vez que  $|(1 - \nu) + 2\nu| - \nu = 1$  para todo  $\nu$  que satisfaz a condição 5.43. Se assumirmos  $0 \leq \nu < 1$  e  $\theta > 0$ , segue que:

$$\begin{aligned} |(1 - \nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)| - \nu &\leq |(1 - \nu)e^{-\theta h}| + |2\nu \cos(\theta h)| - \nu \\ &= (1 - \nu)e^{-\theta h} + 2\nu|\cos(\theta h)| - \nu \\ &= [(1 - \nu)e^{-\theta h} + \nu|\cos(\theta h)|] + \nu|\cos(\theta h)| - \nu. \end{aligned}$$

Nas condições dadas, claramente  $\nu|\cos(\theta h)| - \nu \leq 0$ . Temos ainda que  $[(1 - \nu)e^{-\theta h} + \nu|\cos(\theta h)|] < 1$ , já que é um valor intermediário entre uma função estritamente menor que um,  $e^{-\theta h}$ , e uma função que vale no máximo um,  $|\cos(\theta h)|$ , mas nunca igual a esta, já que  $\nu < 1$ .

Resulta que, independentemente do passo de discretização  $h > 0$  usado, são condições suficientes para que o processo ARMA dado pela equação 5.42 seja estacionário:

$$0 \leq \nu < 1$$

e

$$\theta > 0.$$

□

**Corolário 5.5.** *Nas condições do corolário 5.4 e usando a notação definida nas equações de 5.36 a 5.42, para todo  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ , o valor esperado de uma observação da versão ARMA(2, 1) de um processo de OUG Exponencial Flutuante será dado por:*

$$\mu_{X,h} = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2} = \frac{\frac{(1-\nu)(1-e^{-\theta h})}{\theta}(b + \mathbf{E}[Z]\lambda)}{1 - [(1 - \nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] + \nu}, \quad (5.45)$$

a variância por:

$$\sigma_{X,h}^2 = \frac{(1 + \phi_2)\phi_1\beta_1\beta_0\sigma^2 + (1 - \phi_2)[\beta_0^2\sigma^2 + (\phi_1\beta_0\beta_1 + \beta_1^2)\sigma^2]}{(1 - \phi_2)^2(1 + \phi_2) - \phi_1^2(1 + \phi_2)}, \quad (5.46)$$

e a covariância entre duas observações defasadas  $n \geq 2$  passos entre si por:

$$\begin{aligned} \gamma_{n,h} &= \phi_1\gamma_{n-1,h} + \phi_2\gamma_{n-2,h} \\ &= [(1 - \nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] \gamma_{n-1,h} - \nu\gamma_{n-2,h}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

em que:

$$\gamma_{0,h} = \sigma_{X,h}^2 \quad (5.48)$$

e

$$\gamma_{1,h} = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}\sigma_{X,h}^2 + \frac{\beta_1\beta_0\sigma^2}{1 - \phi_2}. \quad (5.49)$$

*Demonstração.* Se as condições do corolário 5.4 são satisfeitas, decorre imediatamente da proposição 3.5 que:

$$\mu_{X,h} = \mathbb{E}[X_k] = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2} = \frac{\frac{(1-\nu)(1-e^{-\theta h})}{\theta}(b + \mathbb{E}[Z]\lambda)}{1 - [(1 - \nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)] + \nu}.$$

Para facilitar a obtenção das equações de Yule-Walker, denote  $Y_k = X_k - \mu_{X,h}$ , do que obtemos:

$$\begin{aligned} Y_k &= X_k - \mu_{X,h} \\ &= \phi_0 + \phi_1 X_{k-1} + \phi_2 X_{k-2} + \beta_0 u_k^* + \beta_1 u_{k-1}^* - \mu_{X,h} \\ &= \phi_0 + \phi_1 Y_{k-1} + \phi_1 \mu_{X,h} + \phi_2 Y_{k-2} + \phi_2 \mu_{X,h} + \beta_0 u_k^* + \beta_1 u_{k-1}^* - \mu_{X,h} \\ &= (\phi_0 + \phi_1 \mu_{X,h} + \phi_2 \mu_{X,h} - \mu_{X,h}) + \phi_1 Y_{k-1} + \phi_2 Y_{k-2} + \beta_0 u_k^* + \beta_1 u_{k-1}^*. \end{aligned}$$

Da expressão de  $\mu_{X,h}$ , resultada que  $(\phi_0 + \phi_1 \mu_{X,h} + \phi_2 \mu_{X,h} - \mu_{X,h}) = 0$ , e podemos escrever o processo ARMA como:

$$Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \phi_2 Y_{k-2} + \beta_0 u_k^* + \beta_1 u_{k-1}^*. \quad (5.50)$$

Decorre, então, que:

$$\mathbb{E}[Y_k u_k^*] = \phi_1 \mathbb{E}[Y_{k-1} u_k^*] + \phi_2 \mathbb{E}[Y_{k-2} u_k^*] + \beta_0 \mathbb{E}[(u_k^*)^2] + \beta_1 \mathbb{E}[u_{k-1}^* u_k^*].$$

Como  $u_k^*$  é a variação do processo de Lévy de  $(k - 1)h$  a  $kh$  menos sua média,  $u_k^*$  é independente das integrais com respeito ao mesmo processo de

Lévy em intervalos disjuntos, o que é o caso tanto de  $Y_{k-1}$ , relacionado à integral da função resolvente com respeito ao processo de Lévy de 0 a  $(k-1)h$ , como de  $Y_{k-2}$ , relacionado à integral da função resolvente com respeito ao processo de Lévy de 0 a  $(k-2)h$ . Assim:

$$\mathbb{E}[Y_k u_k^*] = \beta_0 \sigma^2. \quad (5.51)$$

De modo semelhante e usando também o resultado anterior:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_k u_{k-1}^*] &= \phi_1 \mathbb{E}[Y_{k-1} u_{k-1}^*] + \phi_2 \mathbb{E}[Y_{k-2} u_{k-1}^*] + \beta_0 \mathbb{E}[u_k^* u_{k-1}^*] + \beta_1 \mathbb{E}[(u_{k-1}^*)^2] \\ &= \phi_1 (\beta_0 \sigma^2) + \beta_1 \sigma^2. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Podemos agora usar estes dois resultados para obtermos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_k Y_k] &= \phi_1 \mathbb{E}[Y_{k-1} Y_k] + \phi_2 \mathbb{E}[Y_{k-2} Y_k] + \beta_0 \mathbb{E}[u_k^* Y_k] + \beta_1 \mathbb{E}[u_{k-1}^* Y_k] \\ \Rightarrow \gamma_{0,h} &= \phi_1 \gamma_{-1,h} + \phi_2 \gamma_{-2,h} + \beta_0^2 \sigma^2 + (\phi_1 \beta_0 \beta_1 + \beta_1^2) \sigma^2, \end{aligned} \quad (5.53)$$

em que  $\gamma_{j,h} = \text{Cov}(X_k, X_{k-j}) = \mathbb{E}[(X_k - \mu_{X,h})(X_{k-j} - \mu_{X,h})] = \mathbb{E}[Y_k Y_{k-j}]$ . Note que  $\gamma_{j,h} = \gamma_{-j,h}$ . E ainda:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_k Y_{k-1}] &= \phi_1 \mathbb{E}[Y_{k-1} Y_{k-1}] + \phi_2 \mathbb{E}[Y_{k-2} Y_{k-1}] + \beta_0 \mathbb{E}[u_k^* Y_{k-1}] + \beta_1 \mathbb{E}[u_{k-1}^* Y_{k-1}] \\ \Rightarrow \gamma_{1,h} &= \phi_1 \gamma_{0,h} + \phi_2 \gamma_{-1,h} + \beta_1 \beta_0 \sigma^2; \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_k Y_{k-2}] &= \phi_1 \mathbb{E}[Y_{k-1} Y_{k-2}] + \phi_2 \mathbb{E}[Y_{k-2} Y_{k-2}] + \beta_0 \mathbb{E}[u_k^* Y_{k-2}] + \beta_1 \mathbb{E}[u_{k-1}^* Y_{k-2}] \\ \Rightarrow \gamma_{2,h} &= \phi_1 \gamma_{1,h} + \phi_2 \gamma_{0,h}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

de maneira que, em geral, para todo  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_k Y_{k-n}] &= \phi_1 \mathbb{E}[Y_{k-1} Y_{k-n}] + \phi_2 \mathbb{E}[Y_{k-2} Y_{k-n}] + \beta_0 \mathbb{E}[u_k^* Y_{k-n}] + \beta_1 \mathbb{E}[u_{k-1}^* Y_{k-n}] \\ \Rightarrow \gamma_{n,h} &= \phi_1 \gamma_{n-1,h} + \phi_2 \gamma_{n-2,h}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Lembrando que  $\gamma_{j,h} = \gamma_{-j,h}$  e que  $\phi_2 \neq 1$ , da equação 5.54 vem:

$$\gamma_{1,h} = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \gamma_{0,h} + \frac{\beta_1 \beta_0 \sigma^2}{1 - \phi_2}.$$

Substituindo este resultado e a equação 5.55 na equação 5.53, obtemos:

$$\begin{aligned} \gamma_{0,h} &= \phi_1 \left( \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \gamma_{0,h} + \frac{\beta_1 \beta_0 \sigma^2}{1 - \phi_2} \right) + \phi_2 \left[ \phi_1 \left( \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \gamma_{0,h} + \frac{\beta_1 \beta_0 \sigma^2}{1 - \phi_2} \right) + \phi_2 \gamma_{0,h} \right] \\ &\quad + \beta_0^2 \sigma^2 + (\phi_1 \beta_0 \beta_1 + \beta_1^2) \sigma^2 \\ \Rightarrow \gamma_{0,h} &= \frac{(1 + \phi_2) \phi_1 \beta_1 \beta_0 \sigma^2 + (1 - \phi_2) [\beta_0^2 \sigma^2 + (\phi_1 \beta_0 \beta_1 + \beta_1^2) \sigma^2]}{(1 - \phi_2)^2 (1 + \phi_2) - \phi_1^2 (1 + \phi_2)}. \end{aligned}$$

□

## 5.3 Simulação do Processo de OUG do Tipo Exponencial Flutuante

Nesta seção faremos a comparação de algumas alternativas de simulação de um Processo de OUG Exponencial Flutuante: a) diretamente a partir da equação 5.5; b) a partir da ELG com função memória dada pelo teorema 5.1; c) pela relação de recorrência dada pelo teorema 5.2. Particularmente quando o processo de Lévy é uma difusão com salto, o teorema 5.3 permite uma alternativa adicional de simulação.

Em quaisquer dos casos, será necessário simular variações independentes, i.e., em intervalos disjuntos, do ruído de Lévy,  $(L(t); t \geq 0)$ , dadas por  $\delta L(t) = L(t) - L(t - \delta t)$ , em que  $\delta t > 0$  é um passo de discretização conveniente. A distribuição de  $\delta L(t)$  depende do tipo de ruído de Lévy. Consideraremos dois tipos: ruído  $\alpha$ -estável com tendência e difusão com salto. Para facilitar a discussão, enunciaremos as seguintes proposições que resumem alguns resultados já analisados:

**Proposição 5.2.** *Seja  $(L(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy  $\alpha$ -estável com tendência, tal que, para todo  $t \geq 0$ :*

$$L(t) = bt + aX(t), \quad (5.57)$$

em que  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$  e  $(X(t); t \geq 0)$  é um processo de Lévy  $\alpha$ -estável simétrico padrão, conforme a definição 3.25, com  $1 < \alpha \leq 2$ . Então a variação  $\delta L(t) = L(t) - L(t - \delta t)$ ,  $\delta t \in \mathbb{R}_+^*$  fixado, tem distribuição:

$$\delta L(t) \sim S_\alpha(a(\delta t)^{\frac{1}{\alpha}}, 0, b\delta t). \quad (5.58)$$

*Demonstração.* Da definição 3.25 temos que  $\delta X(t) = X(t) - X(t - \delta t) \sim S_\alpha((\delta t)^{\frac{1}{\alpha}}, 0, 0)$ . Temos ainda:

$$\begin{aligned} \delta L(t) &= L(t) - L(t - \delta t) \\ &= bt - b(t - \delta t) + a(X(t) - X(t - \delta t)) \\ &= b\delta t + a\delta X(t). \end{aligned}$$

De  $a > 0$ ,  $\alpha \neq 1$  e das proposições 3.18 e 3.19, segue a tese. □

**Proposição 5.3.** *Seja  $(L(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy dado por uma difusão com salto, tal que, para todo  $t \geq 0$ :*

$$L(t) = bt + aW(t) + \int_A xN(t, dx), \quad (5.59)$$

em que  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $A = \mathbb{R} \setminus (-c, c)$ ,  $c \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $(W(t); t \geq 0)$  é o processo de Wiener padrão,  $(N(t, A); t \geq 0)$  é a medida aleatória de Poisson com intensidade  $\lambda$  e o processo de saltos  $(\Delta L(t) = L(t) - L(t^-); t \geq 0)$  tem tamanho dos saltos distribuído como a variável aleatória  $Z$ . Então a variação  $\delta L(t) = L(t) - L(t - \delta t)$ ,  $\delta t \in \mathbb{R}_+^*$  fixado, é dada por:

$$\delta L(t) = b\delta t + a\delta W(t) + \delta L_C(t), \quad (5.60)$$

em que  $b\delta t + a\delta W(t) \sim \mathcal{N}(b\delta t, a^2\delta t)$  e  $(\delta L_C(t); t \geq 0)$ , independente do processo de Wiener, é a variação entre  $t - \delta t$  e  $t$  de um processo de Poisson composto com intensidade  $\lambda$  e tamanho dos saltos distribuído como a variável aleatória  $Z$ .

*Demonstração.* Conforme a equação 3.27:

$$\begin{aligned} \delta L(t) &= L(t) - L(t - \delta t) \\ &= bt - b(t - \delta t) + a[W(t) - W(t - \delta t)] \\ &\quad + \int_A xN(t, dx) - \int_A xN(t - \delta t, dx) \\ &= bt - b(t - \delta t) + a[W(t) - W(t - \delta t)] \\ &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta L(s) \mathbf{1}_A(\Delta L(s)) - \sum_{0 \leq s \leq t - \delta t} \Delta L(s) \mathbf{1}_A(\Delta L(s)) \\ &= b\delta t + a\delta W(t) + \sum_{t - \delta t < s \leq t} \Delta L(s) \mathbf{1}_A(\Delta L(s)) \\ &= b\delta t + a\delta W(t) + \delta L_C(t). \end{aligned}$$

As características de  $\delta L_C(t)$  são demonstradas na proposição 3.10.  $\square$

As proposições 5.2 e 5.3 resumem tudo o que é necessário para simular variações do processo de Lévy em intervalos de tempo de tamanho  $\delta t$ . Para simular variações de um processo de Lévy  $\alpha$ -estável, basta gerar uma variável aleatória parametrizada como na equação 5.58.

Variações de um processo de Lévy dado por uma difusão com salto podem ser obtidas pela soma entre uma variável aleatória gerada a partir da distribuição  $\mathcal{N}(b\delta t, a^2\delta t)$  e uma outra variável aleatória gerada em duas etapas: inicialmente gera-se um número aleatório  $n$  de saltos a partir de uma distribuição de Poisson com intensidade  $\lambda\delta t$  e, em seguida, geram-se independentemente  $n$  valores distribuídos como a variável aleatória  $Z$ , somando-se, finalmente, cada um dos  $n$  valores obtidos.

Agora podemos detalhar algumas alternativas de simulação de um Processo de OUG do Tipo Exponencial Flutuante.

### 5.3.1 Soma de Riemann

Usando a definição estendida de integração de Itô para processos integradores semimartingales, em particular, para um processo de Lévy  $(L(t); t \geq 0)$ , podemos simular aproximadamente o Processo de OUG do Tipo Exponencial Flutuante diretamente da equação equação 5.5 através da utilização de somas de Riemann-Stieltjes (Platen & Bruti-Liberati, 2010, equação 1.4.24, pg. 31):

$$\begin{aligned} X(t_k) &= X_0 [(1 - \nu)e^{-\theta t_k} + \nu \cos(\theta t_k)] \\ &+ \sum_{0 \leq j \leq k-1} [(1 - \nu)e^{-\theta(t_k - j\delta t)} + \nu \cos(\theta(t_k - j\delta t))] \delta L(t_{j+1}), \end{aligned} \quad (5.61)$$

em que  $\delta t \in \mathbb{R}_+^*$  é o passo de discretização,  $t_k = k\delta t$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ , e:

$$\begin{aligned} \delta L(t_{j+1}) &= L(t_{j+1}) - L(t_{j+1} - \delta t) \\ &= L((j+1)\delta t) - L((j+1)\delta t - \delta t) \\ &= L((j+1)\delta t) - L(j\delta t). \end{aligned} \quad (5.62)$$

A simulação, portanto, depende apenas da geração de valores aleatórios para  $\delta L(t_{j+1})$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , o que pode ser feito, conforme o caso, através da proposição 5.2 ou da proposição 5.3.

### 5.3.2 Discretização de Euler-Maruyama

A discretização de Euler-Maruyama da EDE:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dL(t)$$

é dada por:<sup>4</sup>

$$\delta X(t_k) = f(t_{k-1}, X(t_{k-1}))\delta t + g(t_{k-1}, X(t_{k-1}))\delta L(t_k),$$

em que  $\delta t \in \mathbb{R}_+^*$  é o passo de discretização,  $t_k = k\delta t$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ , e:

$$\begin{aligned} \delta X(t_k) &= X(t_k) - X(t_k - \delta t) \\ &= X(k\delta t) - X((k-1)\delta t) \\ &= X(t_k) - X(t_{k-1}); \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} \delta L(t_k) &= L(t_k) - L(t_k - \delta t) \\ &= L(k\delta t) - L((k-1)\delta t) \\ &= L(t_k) - L(t_{k-1}). \end{aligned} \quad (5.64)$$

---

<sup>4</sup>Vide Platen & Bruti-Liberati (2010, equação 5.2.2, p. 246), Kohatsu-Higa & Protter (1991), Jacod *et al.* (2005) ou Stein *et al.* (2016, p. 77).

O teorema 5.1 permite a utilização do esquema de discretização de Euler-Maruyama na ELG (equação 3.59) com:

$$g(t_{k-1}, X(t_{k-1})) = 1$$

e

$$\begin{aligned} f(t_{k-1}, X(t_{k-1})) &= - \int_0^{t_{k-1}} \gamma(t_{k-1} - s)X(s)ds \\ &= -\theta(1 - \nu)X(t_{k-1}) - \int_0^{t_{k-1}} \gamma_\nu(t_{k-1} - s)X(s)ds, \end{aligned}$$

onde  $\gamma(t)$  é a função memória obtida no teorema 5.1 que, por conveniência, dividimos em duas partes:  $\gamma_{(1-\nu)}(t) = \theta(1 - \nu)\delta_0(t)$  e  $\gamma_\nu(t) = \gamma(t) - \gamma_{(1-\nu)}(t)$ . Veja que a integral anterior também pode ser discretizada, do que obtemos:

$$f(t_{k-1}, X(t_{k-1})) = -\theta(1 - \nu)X(t_{k-1}) - \sum_{0 \leq j \leq k-1} \gamma_\nu(t_{k-1} - j\delta t)X(j\delta t)d\delta t,$$

e assim, a discretização de Euler-Maruyama da ELG fica:

$$\begin{aligned} \delta X(t_k) &= -\theta(1 - \nu)X(t_{k-1})\delta t \\ &\quad - \left( \sum_{0 \leq j \leq k-1} \gamma_\nu(t_{k-1} - j\delta t)X(j\delta t) \right) (\delta t)^2 + \delta L(t_k). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned} X(t_1) &= X_0 - \theta(1 - \nu)X_0\delta t - \gamma_\nu(0)X_0(\delta t)^2 + \delta L(t_1) \\ X(t_2) &= X(t_1) - \theta(1 - \nu)X(t_1)\delta t - [\gamma_\nu(\delta t)X_0 + \gamma_\nu(0)X(t_1)](\delta t)^2 + \delta L(t_2) \\ &= X(t_1) - \theta(1 - \nu)X(t_1)\delta t - [\gamma_\nu(t_1)X_0 + \gamma_\nu(0)X(t_1)](\delta t)^2 + \delta L(t_2) \\ X(t_3) &= X(t_2) - \theta(1 - \nu)X(t_2)\delta t \\ &\quad - [\gamma_\nu(2\delta t)X_0 + \gamma_\nu(\delta t)X(\delta t) + \gamma_\nu(0)X(2\delta t)](\delta t)^2 + \delta L(t_3) \\ &= X(t_2) - \theta(1 - \nu)X(t_2)\delta t \\ &\quad - [\gamma_\nu(t_2)X_0 + \gamma_\nu(t_1)X(t_1) + \gamma_\nu(0)X(t_2)](\delta t)^2 + \delta L(t_3) \\ &\quad \dots, \end{aligned}$$

sendo possível construir recursivamente toda a sequência  $(X(t_k); k \in \mathbb{Z}_+^*)$ , bastando, novamente, que sejam gerados valores aleatórios para  $\delta L(t_k)$ .

### 5.3.3 Equação de Recorrência do Teorema 5.2

O teorema 5.2 permite uma alternativa mista de simulação que utiliza tanto recursão como uma soma de Riemann-Stieltjes. Veja que não é possível simplesmente gerar valores aleatórios e independentes de  $\varepsilon_{k,h}$ , seguindo as distribuições dadas pelos corolários 5.2 e 5.3, ou pela proposição 5.1, para então usá-los diretamente na equação de recursão, pois a autocorrelação dos erros  $\varepsilon_{k,h}$  seria perdida.

É possível, contudo, realizar a integração da equação 5.7 do teorema 5.2 de forma aproximada, numericamente, através de uma soma de Riemann-Stieltjes. Se gerarmos aleatoriamente uma única trajetória do processo de Lévy, definida pela sequência  $\left(\sum_{1 \leq i \leq j} \delta L(t_i); j \in \mathbb{Z}_+^*\right)$ , em que  $t_i = i\delta t$  e  $\delta L(t_i) = L(t_i) - L(t_i - \delta t) = L(t_i) - L(t_{i-1})$ , e esta trajetória for utilizada em todas as somas de Riemann-Stieltjes, a autocorrelação dos erros  $\varepsilon_{k,h}$  será preservada.

Neste caso, considere que  $\delta t > 0$  é uma subdivisão do passo de discretização  $h > 0$ , de modo que:

$$\delta t = \frac{h}{M}, \quad (5.66)$$

$M \in \mathbb{Z}_+^*$ . Uma aproximação por somas de Riemann-Stieltjes da equação 5.7 pode ser dada, então, por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,h} = & - \sum_{j=(k-1)M}^{kM-1} \nu \cos(\theta((k-1)h - j\delta t)) \delta L((j+1)\delta t) \\ & + \sum_{j=kM}^{(k+1)M-1} \left[ (1-\nu)e^{-\theta((k+1)h - j\delta t)} + \nu \cos(\theta((k+1)h - j\delta t)) \right] \delta L((j+1)\delta t). \end{aligned} \quad (5.67)$$

Adicionalmente, como  $h = M\delta t$ , podemos usar a equação 5.61 com  $k = M$  para obtermos o valor inicial:

$$\begin{aligned} X(h) = X(M\delta t) = X(t_M) = & X_0 \left[ (1-\nu)e^{-\theta t_M} + \nu \cos(\theta t_M) \right] \\ & + \sum_{j=0}^{M-1} \left[ (1-\nu)e^{-\theta(t_M - j\delta t)} + \nu \cos(\theta(t_M - j\delta t)) \right] \delta L((j+1)\delta t), \end{aligned} \quad (5.68)$$

onde  $t_M = M\delta t = h$ . Assim, a partir da simulação da sequência de valores  $\delta L(j\delta t)$ , com  $1 \leq j \leq TM$ , em que  $T \in \mathbb{Z}_+^*$  é o número de pontos com passo

de discretização  $h \in \mathbb{R}_+^*$  a serem simulados, é possível gerar o valor inicial  $X(h)$  e também os erros  $(\varepsilon_{k,h}; k \in \mathbb{Z}_+^*)$ , preservando sua autocorrelação. Como  $X(0)$  é dado, os demais valores  $X(kh)$ ,  $k \geq 2$ , podem ser obtidos recorrentemente pela equação 5.6.

### 5.3.4 Processo ARMA do Teorema 5.3

Esta alternativa aplica-se apenas ao caso em que o processo de Lévy é uma difusão com salto, nas condições do teorema 5.3.

É possível simular os valores  $u_{k,h} = L(kh) - L((k-1)h)$  usando a proposição 5.3 e depois subtrair a média, dada por  $bh + \mathbb{E}[Z]\lambda h$ , conforme a parametrização definida na mesma proposição 5.3, do que obtemos a sequência  $(u_{k,h}^*; k \in \mathbb{Z}_+^*)$ . Depois é necessário encontrar o valor inicial  $X(h)$ , o que pode ser feito utilizando-se a equação 5.68.

A partir daí, resta apenas aplicar recursivamente a equação 5.35.

### 5.3.5 Comparação das Alternativas de Simulação

Ilustrativamente, as técnicas de simulação descritas nas seções de 5.3.1 a 5.3.4 foram aplicadas com a utilização do software MATLAB<sup>®</sup>, simulando Processos de OUG do Tipo Exponencial Flutuante com ruído de Lévy  $\alpha$ -estável com tendência e também dado por uma difusão com saltos de tamanhos normalmente distribuídos. Os algoritmos correspondentes estão no apêndice B e os parâmetros usados foram:

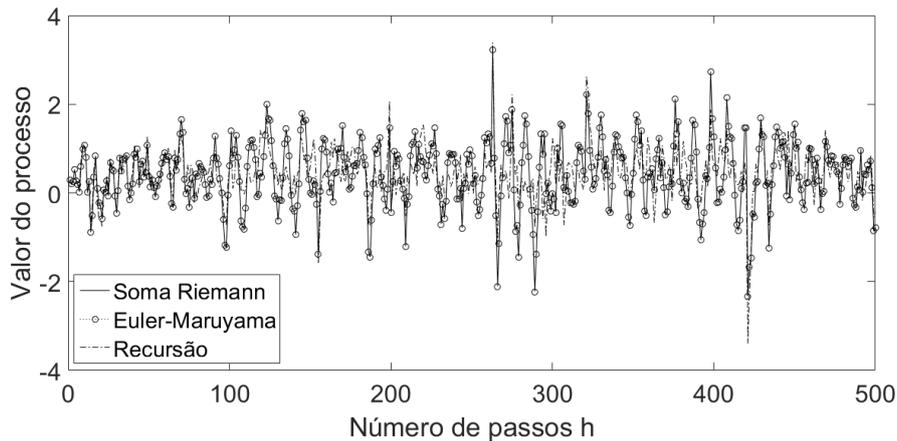
$(L(t); t \geq 0)$ $\alpha$ -estável com tendência				
Parâmetro	Conjunto 1	Conjunto 2	Conjunto 3	Conjunto 4
$\nu$	0, 2000	0, 1374	0, 1374	0, 1374
$\theta$	0, 5583	0, 1048	0, 1048	0, 1048
$a$	0, 3000	0, 3000	0, 3000	0, 3000
$b$	0, 2740	0, 2740	0, 2740	0, 2740
$\alpha$	1, 85	1, 85	1, 85	1, 85
$X_0$	0	0	0	0
$h$	1	1	1	1
$M$	100	100	50	1
$T$	500	500	500	500

**Tabela 5.1:** Conjuntos de valores para os parâmetros das simulações com processos de Lévy  $\alpha$ -estáveis com tendência.

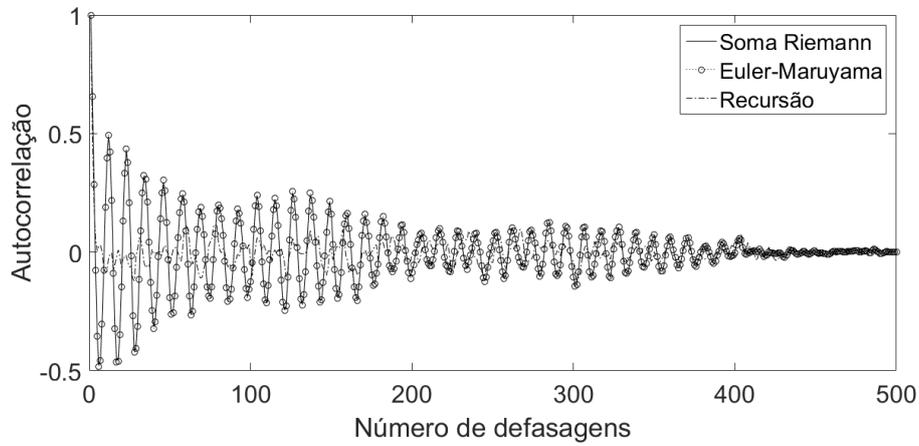
$(L(t); t \geq 0)$ difusão com salto				
Parâmetro	Conjunto 1	Conjunto 2	Conjunto 3	Conjuunto 4
$\nu$	0,2000	0,1374	0,1374	0,1374
$\theta$	0,5538	0,1048	0,1048	0,1048
$a$	0,3000	0,3000	0,3000	0,3000
$b$	0,2740	0,2740	0,2740	0,2740
$\lambda$	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000
$\mu_{\Delta L}$	-0,0100	-0,0100	-0,0100	-0,0100
$\sigma_{\Delta L}^2$	0,4000	0,4000	0,4000	0,4000
$X_0$	0	0	0	0
$h$	1	1	1	1
$M$	100	100	50	1
$T$	500	500	500	500

**Tabela 5.2:** Conjuntos de valores para os parâmetros das simulações com processos de Lévy dados por difusões com saltos de tamanho normalmente distribuídos.

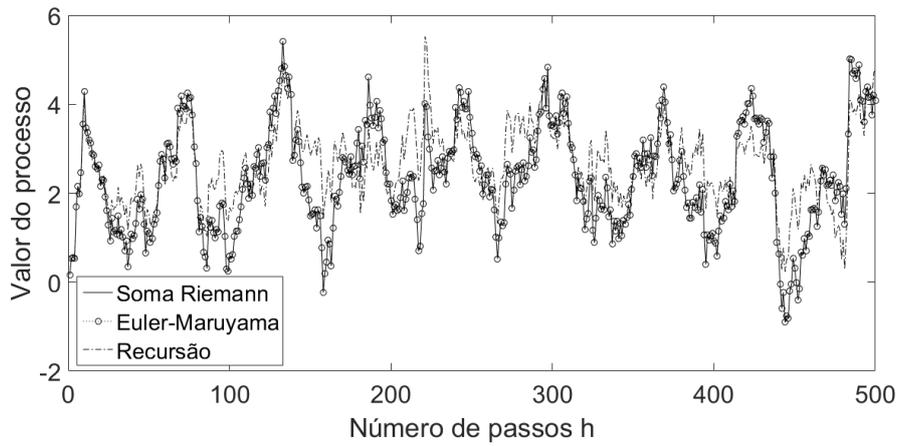
Para permitir a comparação entre as simulações, foram considerados dois níveis de discretização, um deles dado por  $h \in \mathbb{R}_+$  e outro por  $\delta t$ , que corresponde a uma subdivisão de  $h$  em  $M$  partes, num total de  $T$  passos de discretização de tamanho  $h$  ou, equivalentemente,  $TM$  passos de discretização de tamanho  $\delta t$ . Os processos simulados foram comparados considerando o passo de discretização  $h$ , obtendo-se os seguintes resultados:



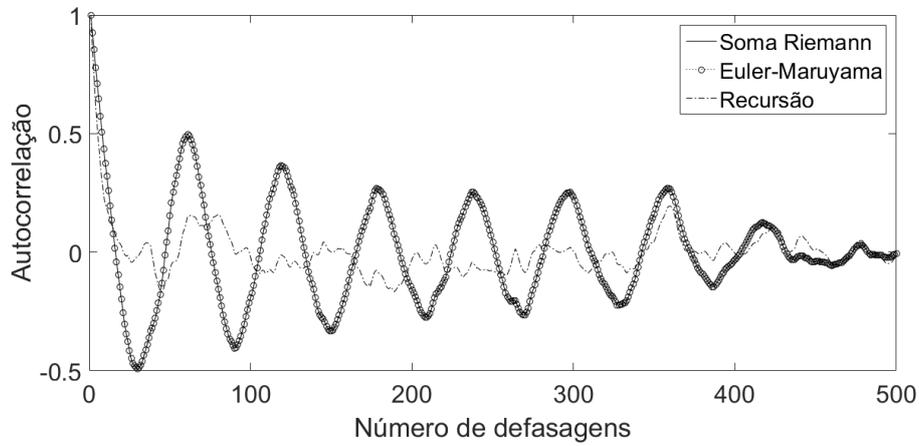
**Figura 5.1:** Trajetórias simuladas com ruído  $\alpha$ -estável usando o Conjunto 1 de parâmetros.



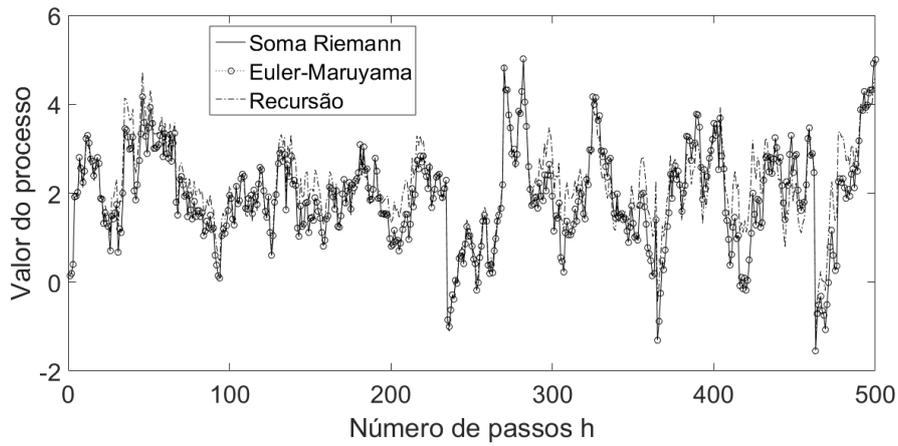
**Figura 5.2:** Autocorrelações dos processos simulados com ruído  $\alpha$ -estável usando o Conjunto 1 de parâmetros.



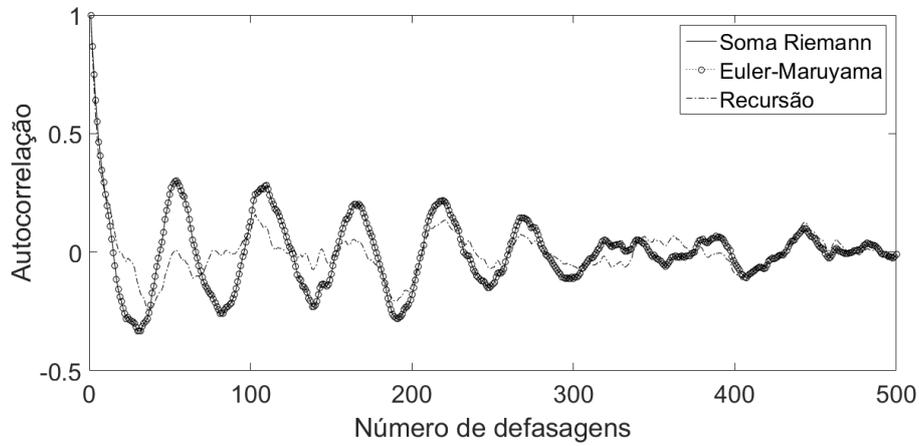
**Figura 5.3:** Trajetórias simuladas com ruído  $\alpha$ -estável usando o Conjunto 2 de parâmetros.



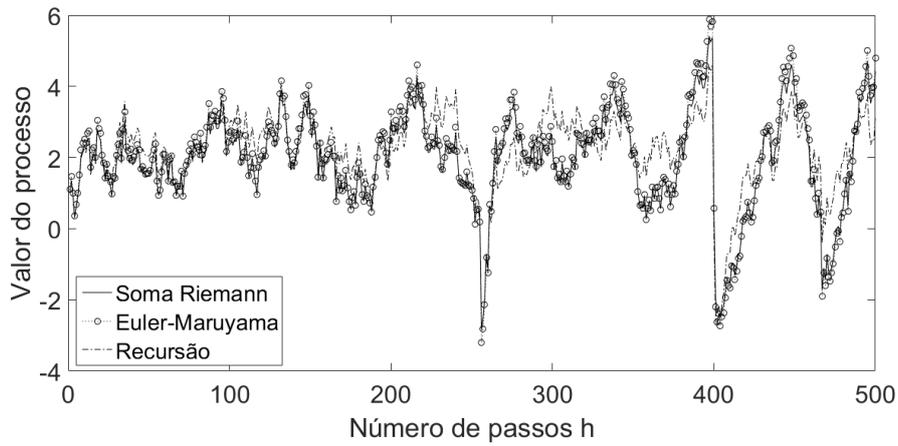
**Figura 5.4:** Autocorrelações dos processos simulados com ruído  $\alpha$ -estável usando o Conjunto 2 de parâmetros.



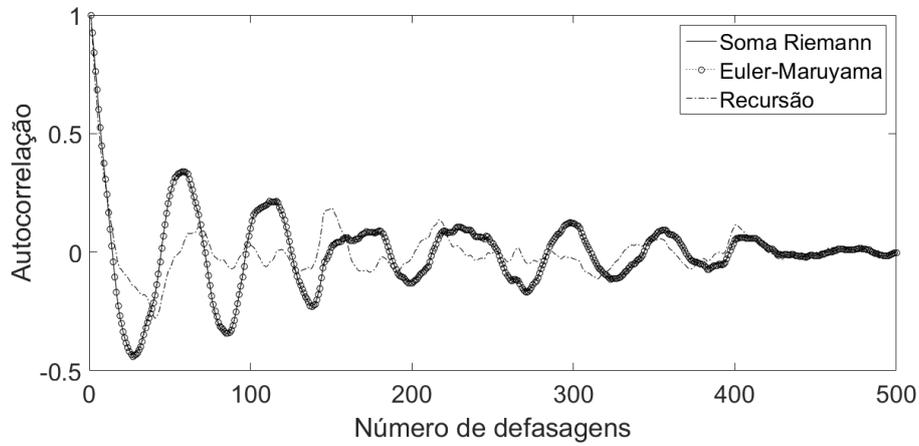
**Figura 5.5:** Trajetórias simuladas com ruído  $\alpha$ -estável usando o Conjunto 3 de parâmetros.



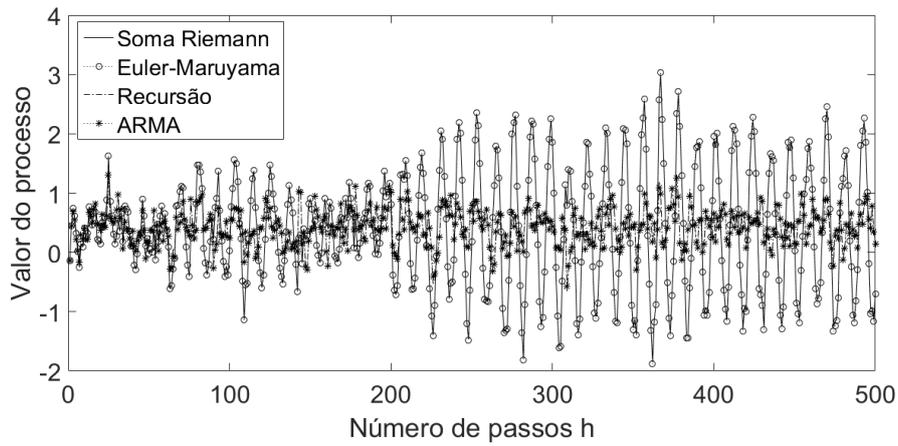
**Figura 5.6:** Autocorrelações dos processos simulados com ruído  $\alpha$ -estável usando o Conjunto 3 de parâmetros.



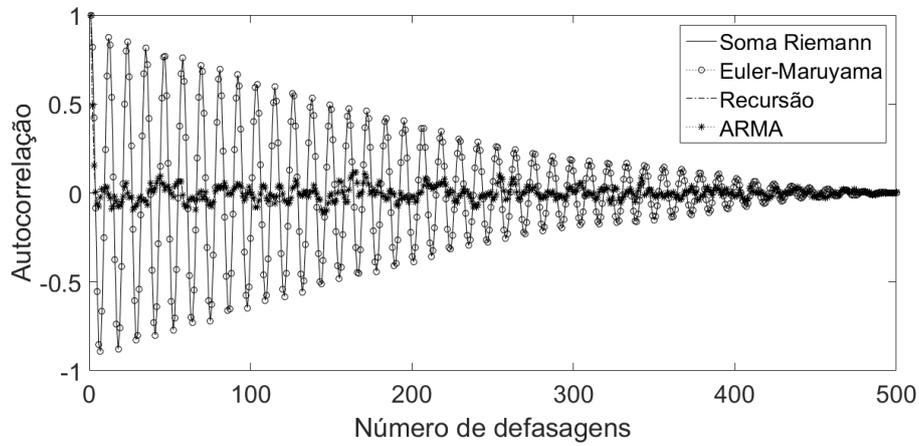
**Figura 5.7:** Trajetórias simuladas com ruído  $\alpha$ -estável usando o Conjunto 4 de parâmetros.



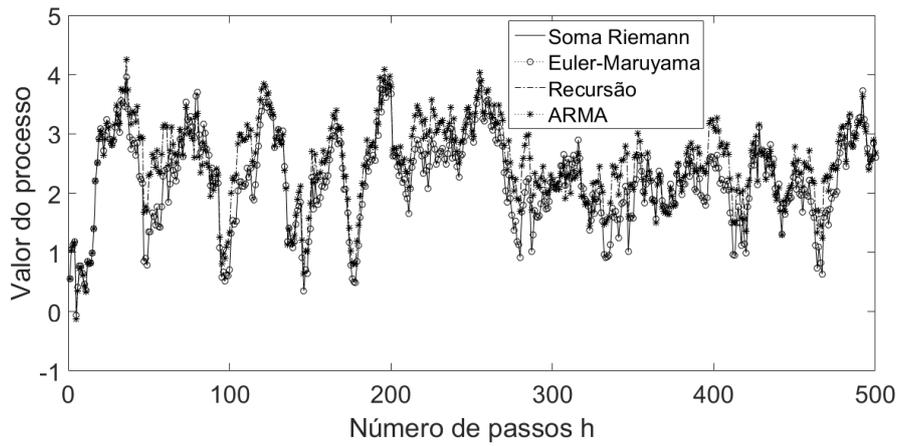
**Figura 5.8:** Autocorrelações dos processos simulados com ruído  $\alpha$ -estável usando o Conjunto 4 de parâmetros.



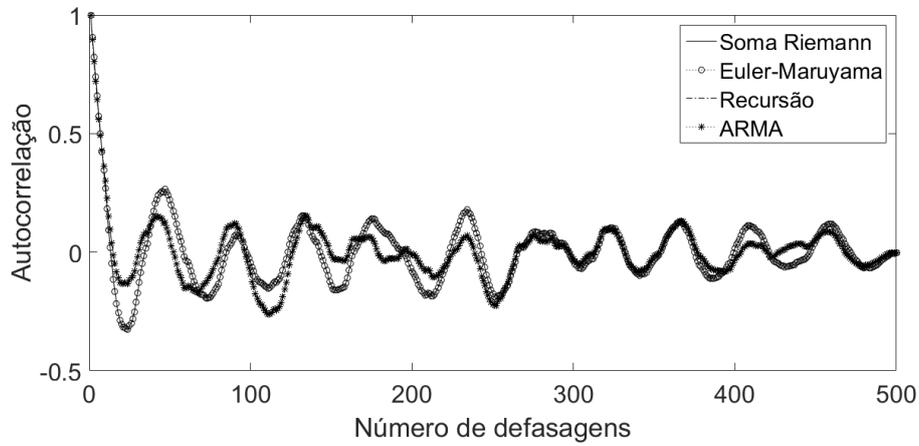
**Figura 5.9:** Trajetórias simuladas com ruído dado por difusão com salto usando o Conjunto 1 de parâmetros.



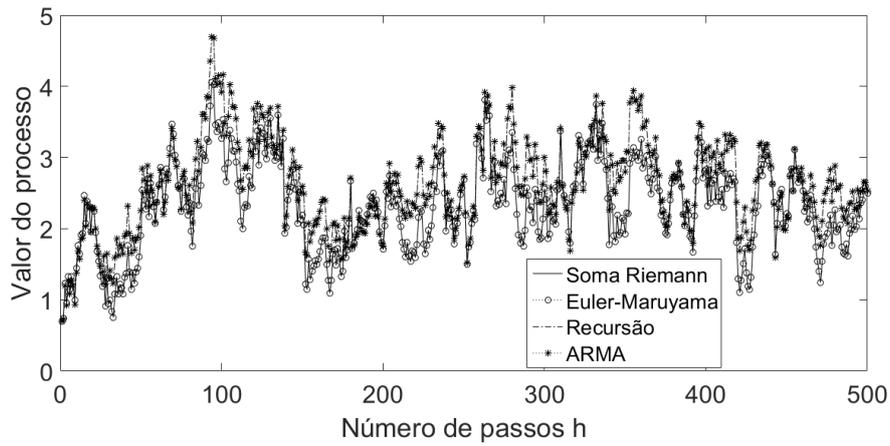
**Figura 5.10:** Autocorrelações dos processos simulados com ruído dado por difusão com salto usando o Conjunto 1 de parâmetros.



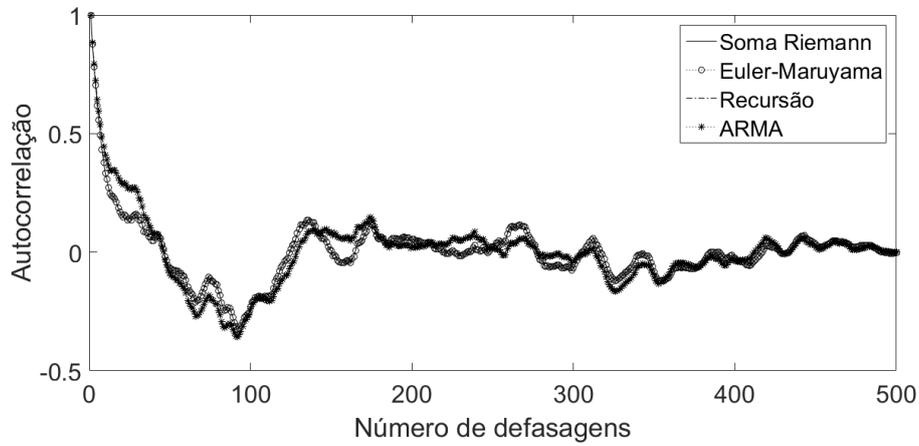
**Figura 5.11:** Trajetórias simuladas com ruído dado por difusão com salto usando o Conjunto 2 de parâmetros.



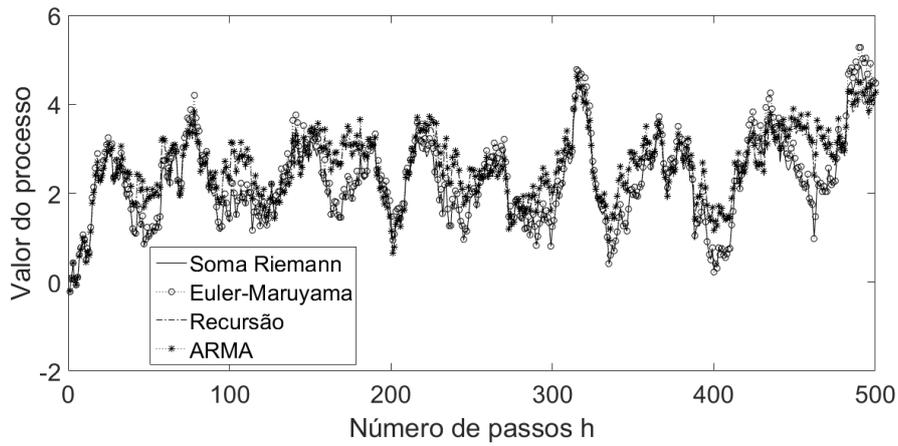
**Figura 5.12:** Autocorrelações dos processos simulados com ruído dado por difusão com salto usando o Conjunto 2 de parâmetros.



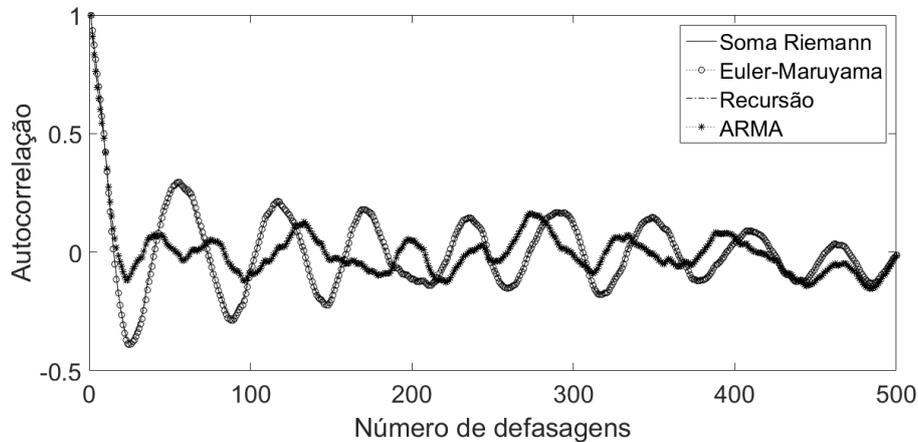
**Figura 5.13:** Trajetórias simuladas com ruído dado por difusão com salto usando o Conjunto 3 de parâmetros.



**Figura 5.14:** Autocorrelações dos processos simulados com ruído dado por difusão com salto usando o Conjunto 3 de parâmetros.



**Figura 5.15:** Trajetórias simuladas com ruído dado por difusão com salto usando o Conjunto 4 de parâmetros.



**Figura 5.16:** Autocorrelações dos processos simulados com ruído dado por difusão com salto usando o Conjunto 4 de parâmetros.

Tanto as simulações com ruído  $\alpha$ -estável como com ruído dado por difusão com salto levam a conclusões semelhantes:

- As discretizações de processos de OUG do Tipo Exponencial Flutuante podem ter funções de autocorrelação que oscilam de forma amortecida, conforme a proposta deste trabalho;
- As simulações por soma de Riemann e por Euler-Maruyama praticamente coincidem, validando, nos casos específicos destes conjuntos de parâmetros, a expressão para a função memória demonstrada no teorema 5.1;
- As simulações baseadas em uma equação de recorrência, seja a do teorema 5.2 ou a do teorema 5.3, diferem mais notavelmente em relação às simulações por soma de Riemann e por Euler-Maruyama quando a autocorrelação oscila com uma maior frequência, como é o caso do Conjunto 1 de parâmetros;
- No caso do ruído de Lévy dado por difusão com salto, as simulações baseadas em recorrência praticamente coincidem, exemplificando a validade do teorema 5.3;
- A redução da diferença entre o passo de discretização  $\delta t > 0$  das simulações por soma de Riemann e Euler-Maruyama e o passo de discretização  $h \geq \delta t$  das simulações por recorrência aproxima os resultados simulados, mas mesmo quando  $M = 1 \Rightarrow h = \delta t$ , no caso do Conjunto 4 de parâmetros, ainda há diferenças perceptíveis.

## 5.4 Estimação do Processo de OUG do Tipo Exponencial Flutuante

Os resultados da seção 5.2 dão as seguintes alternativas de estimação, conforme o ruído de Lévy do processo de OUG Exponencial flutuante:

- **Processo de Lévy  $\alpha$ -estável com tendência:** o corolário 5.2 permite a estimação por máxima verossimilhança, usando a equação 3.81;
- **Processo de Lévy de difusão com salto, com primeiro e segundo momentos finitos:** o corolário 5.3 permite a estimação por máxima verossimilhança, usando a fórmula da inversão;
- **Processo de Lévy de difusão com salto, com tamanho dos saltos normalmente distribuídos:** a proposição 5.1 mostra que o processo de erros da equação de recorrência dada pelo teorema 5.2 pode ser visto como variações em intervalos constantes de um processo de difusão com salto e fornece uma função densidade de probabilidade aproximada para o tamanho destes saltos, permitindo uma alternativa de estimação por máxima verossimilhança;
- **Processo de Lévy de difusão com salto, com primeiro e segundo momentos finitos:** quando a frequência de amostragem for suficientemente alta, o teorema 5.3 permite a utilização de qualquer técnica de estimação para processos ARMA, incluindo máxima verossimilhança e variações de métodos de mínimos quadrados ou de momentos, com as devidas alterações para levar em conta a hipótese sobre a distribuição do ruído branco e a informação contida na estrutura dos coeficientes dada pelas equações de 5.36 a 5.40.

Exemplificaremos a estimação do processo de OUG do Tipo Exponencial Flutuante quando o ruído de Lévy é  $\alpha$ -estável com tendência e quando é uma difusão com saltos de tamanhos normalmente distribuídos.

No primeiro caso, usaremos máxima verossimilhança a partir da distribuição de  $\varepsilon_{k,h}$  obtida no corolário 5.2. No segundo caso, nos valeremos do teorema 5.3 para aplicar uma versão adaptada do método de Hannan-Rissanen,<sup>5</sup> que permite obter uma estimativa do ruído branco. Esta estimativa, por sua vez, permite ajustar os parâmetros do ruído de Lévy, conforme descrito na seção 3.2.2, e os coeficientes do processo ARMA por mínimos quadrados.

---

<sup>5</sup>Vide Durbin (1960), Hannan & Rissanen (1982), Hannan & Kavalieris (1984) e Brockwell & Davis (2016, cap. 5).

### 5.4.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

Para simplificar a exposição, tome um passo de discretização  $h \in \mathbb{R}_+^*$  fixado, uma amostra de tamanho  $T \in \mathbb{Z}_+^*$ , tempos  $t_k = kh$ ,  $1 \leq k \leq T$  inteiro, e, dado o processo de OUG Exponencial Flutuante  $(V(t); t \geq 0)$ , denote  $V_k = V(t_k) = V(kh)$  e  $\varepsilon_k = \varepsilon_{k,h}$ . Denote ainda:

$$\phi_1 = [(1 - \nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)]; \quad (5.69)$$

$$\phi_2 = -\nu, \quad (5.70)$$

de modo que a equação de recorrência do teorema 5.2 fica:

$$V_{k+1} = \phi_1 V_k + \phi_2 V_{k-1} + \varepsilon_k, \quad (5.71)$$

com  $V_0$  um valor inicial dado.

Considere, inicialmente, o caso em que o ruído de Lévy do processo  $(V(t); t \geq 0)$  é  $\alpha$ -estável. Assim, sejam  $(X(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy  $\alpha$ -estável simétrico padrão com  $1 < \alpha \leq 2$  e  $(L(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy  $\alpha$ -estável com tendência, tal que  $L(t) = bt + aX(t)$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

Segue do corolário 5.2 que  $\varepsilon_k \sim S_\alpha(\sigma_\varepsilon, 0, \mu_\varepsilon)$ , onde:

$$\sigma_\varepsilon = a \left( \int_0^h |g_A(s)|^\alpha ds + \int_0^h |g_B(s)|^\alpha ds \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.72)$$

e

$$\mu_\varepsilon = \frac{b(1 - \nu)(1 - e^{-\theta h})}{\theta}. \quad (5.73)$$

Assim, se  $f_S(\cdot | \Theta)$  é a função densidade de probabilidade da distribuição  $S_\alpha(\sigma_\varepsilon, 0, \mu_\varepsilon)$ , o vetor de parâmetros  $\Theta = (\phi_1, \phi_2, \alpha, \mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)'$  pode ser estimado por:

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\mu}_\varepsilon \\ \hat{\sigma}_\varepsilon \end{pmatrix} = \underset{\Theta \text{ sujeito a } \begin{cases} 1 < \alpha \leq 2 \\ 1 \leq k \leq T-1 \\ \sigma_\varepsilon > 0 \end{cases}}{\operatorname{argmax}} \sum_{1 \leq k \leq T-1} \log f_S(\varepsilon_k | \Theta), \quad (5.74)$$

em que  $\hat{x}$  denota um estimador do parâmetro  $x$ .

Veja que conhecemos apenas os valores  $(V_k; 1 \leq k \leq T)$  e  $V_0$ . Logo, a cada estimativa para os valores  $\phi_1$  e  $\phi_2$  na equação 5.71, obtemos uma sequência diferente de estimativas para  $\varepsilon_k = V_{k+1} - \phi_1 V_k - \phi_2 V_{k-1}$ , que são

usadas como argumento de  $f_S(\cdot|\Theta)$ . Assim, o programa de otimização da equação 5.74 deve escolher não apenas estimadores para os parâmetros da distribuição  $S_\alpha(\sigma_\varepsilon, 0, \mu_\varepsilon)$ , mas também estimadores para  $\phi_1$  e  $\phi_2$  que gerem a sequência de erros que tenha a maior chance de ter vindo da distribuição  $\alpha$ -estável com os parâmetros estimados.

A partir de  $\hat{\phi}_1$  e  $\hat{\phi}_2$ , pelas equações 5.69 e 5.70 obtemos  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\nu}$ ,<sup>6</sup> o que nos permite estimar o valor de  $\left(\int_0^h |g_A(s)|^\alpha ds + \int_0^h |g_B(s)|^\alpha ds\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ , em que as funções  $g_A(t)$  e  $g_B(t)$  são definidas pelas equações 5.11 e 5.12. Deste valor e de  $\hat{\sigma}_\varepsilon$ , pela equação 5.72, obtemos  $\hat{a}$ . Finalmente, de  $\hat{\mu}_\varepsilon$  obtemos  $\hat{b}$  pela equação 5.73.

Por fim, cabe comentar que uma metodologia análoga pode ser utilizada para estimar, por máxima verossimilhança, o processo de OUG Exponencial Flutuante com ruído de Lévy dado por difusão com salto, em que  $b$  é o coeficiente da tendência,  $a$  é o coeficiente do processo de Wiener e  $\lambda$  é a intensidade da medida aleatória de Poisson, bastando utilizar o programa de otimização:

$$\hat{\Theta} = \operatorname{argmax} \sum_{1 \leq k \leq T-1} \log f_{\varphi_\varepsilon}(\varepsilon_k|\Theta), \quad (5.75)$$

em que:

$$f_{\varphi_\varepsilon}(x|\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \varphi_\varepsilon(h, u) du, \quad (5.76)$$

de acordo com a fórmula da inversão;  $\Theta$  é um vetor conveniente de parâmetros que incluem  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,<sup>7</sup>  $b$ ,  $a$ ,  $\lambda$  e também aqueles que determinam a distribuição do tamanho dos saltos do ruído de Lévy; e  $\varphi_\varepsilon(h, u)$  é a função característica de  $\varepsilon_k$  dada pelo corolário 5.3.

Se, particularmente, o tamanho dos saltos do processo de Lévy for normalmente distribuído, a proposição 5.1 mostra que  $\varepsilon_k$  corresponde à variação de um processo de difusão com salto, conforme a equação 5.21, e fornece uma expressão aproximada para a função densidade de probabilidade do tamanho dos saltos, que pode ser usada na definição de  $\varphi_\varepsilon(h, u)$  usando a Fórmula de Lévy-Khintchine.

<sup>6</sup>Alternativamente, é possível usar as equações 5.69 e 5.70 no próprio programa de otimização e estimar, diretamente,  $\nu$  e  $\theta$  no vetor de parâmetros, em vez de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

<sup>7</sup>Ou, diretamente,  $\nu$  e  $\theta$ , em vez de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

### 5.4.2 Estimação do Processo ARMA

Para o caso em que o ruído de Lévy do processo de OUG Exponencial Flutuante  $(V(t); t \geq 0)$  é uma difusão com saltos de tamanhos normalmente distribuídos, utilizaremos o teorema 5.3. Assim, seja  $(L(t); t \geq 0)$  um processo de Lévy dado por uma difusão com salto e definido por  $L(t) = bt + aW(t) + \int_A xN(t, dx)$ , em que  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $c > 0$ ,  $A = \mathbb{R} \setminus (-c, c)$ , a medida aleatória de Poisson tem intensidade  $\lambda$  e a distribuição dos saltos é  $\mathcal{N}(\mu_{\Delta L}, \sigma_{\Delta L}^2)$ .

De maneira semelhante ao que foi feito na seção 5.4.1, tome um passo de discretização  $h \in \mathbb{R}_+^*$  fixado, uma amostra de tamanho  $T \in \mathbb{Z}_+^*$ , tempos  $t_k = kh$ ,  $1 \leq k \leq T$  inteiro, e, dado o processo de OUG Exponencial Flutuante  $(V(t); t \geq 0)$ , denote  $V_k = V(t_k) = V(kh)$ . Considere, ainda, a notação usada na demonstração do corolário 5.4:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \frac{(1 - \nu)(1 - e^{-\theta h})}{\theta} (b + \mu_{\Delta L} \lambda); \\ \phi_1 &= [(1 - \nu)e^{-\theta h} + 2\nu \cos(\theta h)]; \\ \phi_2 &= -\nu; \\ \beta_0 &= \frac{(1 - \nu)(1 - e^{-\theta h}) + \nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta h}; \\ \beta_1 &= -\frac{\nu \operatorname{sen}(\theta h)}{\theta h}; \\ \sigma^2 &= \mathbb{E}[(u_k^*)^2] = a^2 h + (\sigma_{\Delta L}^2 + \mu_{\Delta L}^2) \lambda h,\end{aligned}$$

de modo que o processo ARMA(2, 1), de acordo com o teorema 5.3, pode ser escrito como:

$$V_k = \phi_0 + \phi_1 V_{k-1} + \phi_2 V_{k-2} + \beta_0 u_k^* + \beta_1 u_{k-1}^*, \quad (5.77)$$

em que  $(u_k^*; k \in \mathbb{Z}_+^*)$  é um ruído branco i.i.d. dado por  $u_k^* = L(t_k) - L(t_k - h) - \mathbb{E}[L(t_k) - L(t_k - h)]$ .

O fundamento do método que usaremos para obter estimativas do ruído branco é o fato de que, além da representação MA( $\infty$ ), com visto na proposição 3.5, um processo ARMA( $p, q$ ) estacionário e sem raízes comuns também admite uma representação autorregressiva de ordem infinita, AR( $\infty$ ). Adicionalmente, se  $\beta(L)$  é o filtro correspondente à componente MA( $q$ ) do processo ARMA( $p, q$ ), conforme a definição 3.12, e satisfaz às condições de estabilidade da definição 3.10, então, pela proposição 3.3, seu filtro inverso  $\beta(L)^{-1}$  possui coeficientes absolutamente somáveis e o processo ARMA( $p, q$ ) é dito **inversível**,<sup>8</sup> de modo que sua equação:

<sup>8</sup>Como ressaltado por Hayashi (2000, p. 383), existência de inverso e inversibilidade são

$$\phi(L)V_k = \phi_0 + \beta(L)u_k^*$$

tem a representação AR( $\infty$ ) estacionária dada por:

$$\begin{aligned}\beta(L)^{-1}\phi(L)V_k &= \beta(L)^{-1}\phi_0 + \beta(L)^{-1}\beta(L)u_k^* \\ \Rightarrow \psi(L)V_k &= \phi_0\beta(1)^{-1} + u_k^* = \frac{\phi_0}{\beta(1)} + u_k^*.\end{aligned}$$

Com base neste argumento, é possível tentar estimar o ruído branco ( $u_k^*; k \in \mathbb{Z}_+^*$ ), não observável, usando o resíduo da estimação de um processo autorregressivo suficientemente longo. Esta ideia, proposta por Durbin (1960), foi aprimorada em Hannan & Rissanen (1982) e Hannan & Kavalieris (1984), dando origem ao método de Hannan-Rissanen. A partir daí, é possível estimar os parâmetros do processo de Lévy, cuja variação corresponde ao ruído branco, o que é feito por máxima verossimilhança, considerando que a função densidade de probabilidade adequada é uma soma de normais, como descrito na seção 3.2.2. O número de termos autorregressivos usados para obter as estimativas do ruído branco será aquele que resulte na maior log-verossimilhança máxima.

Ao contrário do que usualmente ocorre na aplicação do método de Hannan-Rissanen,<sup>9</sup> contudo, temos informações adicionais não disponíveis quando não se conhece o processo gerador da discretização ARMA: a distribuição do ruído branco e o fato de que todos os coeficientes ficam determinados pelos valores de  $\nu$ ,  $\theta$  e dos parâmetros do ruído de Lévy. Assim, como os parâmetros do ruído de Lévy já foram estimados em uma etapa anterior, é possível obter as estimativas  $\hat{\nu}$  e  $\hat{\theta}$  por mínimos quadrados.

A estratégia de estimação que estamos propondo, portanto, tem a seguinte estrutura:

- Considere um processo AR( $m$ ),  $T > m > 2$ , a partir do qual queremos estimar o ruído branco:<sup>10</sup>

$$V_k = \phi_{m,0} + \phi_{m,1}V_{k-1} + \cdots + \phi_{m,m}V_{k-m} + \hat{u}_k^*,$$

conceitos diferentes: como  $\beta_0 \neq 0$ ,  $\beta(L)$  sempre possui inverso, mesmo que a condição de estabilidade não seja satisfeita, mas, neste caso, não é possível garantir que os coeficientes do filtro inverso sejam absolutamente somáveis.

<sup>9</sup>Vide Brockwell & Davis (2016, p. 37 e 38), por exemplo.

<sup>10</sup>Se houver indícios de que se trata de um processo AR(1), como discutido no capítulo 4, basta tomar  $m = 1$ , o que resulta  $\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_{1,1}$ ,  $\phi_2 = \beta_1 = 0$  e  $\hat{u}_k^* = \hat{u}_{1,k}^* = \hat{Y}_k - \hat{\phi}_1\hat{Y}_{k-1}$ ,  $T \geq k \geq 2$ , e usar estes valores nas etapas seguintes.

que, definindo  $Y_k = V_k - \mathbb{E}[V_k] = V_k - \mu_V$ , pode ser reescrito como:

$$Y_k = \phi_{m,1}Y_{k-1} + \cdots + \phi_{m,m}Y_{k-m} + \hat{u}_k^*,$$

- Usando a média amostral de  $(V_k; 1 \leq k \leq T)$  como estimador de  $\mu_V$ , obtenha as estimativas  $\hat{\phi}_{m,1}, \dots, \hat{\phi}_{m,m}$  a partir de  $\hat{Y}_k = V_k - \frac{1}{T} \sum_{1 \leq k \leq T} V_k$  por mínimos quadrados, pelas equações de Yule-Walker ou por outro método adequado para a estimação de processos autorregressivos puros;
- Obtenha as estimativas  $(\hat{u}_{m,k}^*; k \in \{m+1, \dots, T\})$  para o ruído branco a partir dos resíduos da estimação do processo  $\text{AR}(m)$ :

$$\hat{u}_{m,k}^* = \hat{Y}_k - \hat{\phi}_{m,1}\hat{Y}_{k-1} - \cdots - \hat{\phi}_{m,m}\hat{Y}_{k-m}; \quad (5.78)$$

- Use os resíduos estimados para resolver o programa de otimização:

$$\hat{\Theta}_m = \begin{pmatrix} \hat{a}_m \\ \hat{\lambda}_m \\ \hat{\mu}_{\Delta X, m} \\ \hat{\sigma}_{\Delta X, m} \end{pmatrix} = \underset{\Theta \text{ sujeito a } \begin{cases} \lambda \geq 0 \\ a > 0 \\ \sigma_{\Delta L} > 0 \end{cases}}{\text{argmax}} \sum_{m+1 \leq k \leq T} \log f_{\delta L}(\hat{u}_{m,k}^* | \Theta),$$

onde  $\Theta = (a, \lambda, \mu_{\Delta X}, \sigma_{\Delta X})'$  e, conforme a equação 3.48:<sup>11</sup>

$$f_{\delta L}(x | \Theta) = \sum_{j \geq 0} \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^j}{j!} f_{\mathcal{N}}(x | b^* h + j \mu_{\Delta X}, a^2 h + j \sigma_{\Delta X}^2),$$

dado que o processo de Lévy é uma difusão com saltos de tamanhos normalmente distribuídos, e, como  $\mathbb{E}[u_k^*] = b^* h + \mu_{\Delta L} \lambda h = 0$ ,<sup>12</sup> assumiremos  $b^* = -\mu_{\Delta L} \lambda$ ;

- Selecione a ordem  $m_0$  do processo autorregressivo  $\text{AR}(m_0)$  para a qual a estimativa  $\hat{\Theta}_{m_0}$  corresponda ao menor valor de algum critério de informação, como de Akaike (*Akaike Information Criterion*, AIC) ou

<sup>11</sup>De fato, é usada uma versão convenientemente truncada em um número finito de termos desta equação, de acordo com o exposto na seção 3.2.2.

<sup>12</sup>A distribuição de  $(u_k^*; k \in \mathbb{Z}_+)$  é apenas uma translação em relação à distribuição de  $(u_k; k \in \mathbb{Z}_+)$ , então também corresponde à variação de um processo de difusão com salto em que nem o coeficiente do processo de Wiener, relacionado à dispersão, e nem os parâmetros o processo de Poisson composto, relacionados aos saltos, são alterados, mas apenas o coeficiente da tendência, que estamos representando por  $b^*$  e é obtido pela aplicação da proposição 3.10.

Schwarz (*Bayesian Information Criterion*, BIC), considerando  $T$  pontos amostrais e  $m + 4$  parâmetros: a ordem do processo AR( $m$ ) e mais os quatro parâmetros do vetor  $\Theta$  que definem a distribuição do ruído branco;<sup>13</sup>

- Estime  $\Phi = (\nu, \theta)'$  por mínimos quadrados usando os valores  $\hat{\Theta}_{m_0}$  e a informação sobre a estrutura da discretização ARMA do processo de OUG Exponencial Flutuante, através da solução do programa de otimização:

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\nu} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \underset{\Phi \text{ sujeito a } \begin{cases} |\nu| \leq 1 \\ \theta > 0 \end{cases}}{\operatorname{argmin}} S(\hat{\Theta}_{m_0}, \Phi),$$

em que:

$$\begin{aligned} & S(\hat{\Theta}_{m_0}, \Phi) \\ &= \sum_{m_0+2 \leq k \leq T} \left( \hat{Y}_k - \phi_1 \hat{Y}_{k-1} - \phi_2 \hat{Y}_{k-2} - \beta_0 \hat{u}_{m_0, k}^* - \beta_1 \hat{u}_{m_0, k-1}^* \right)^2, \quad (5.79) \end{aligned}$$

lembrando que os coeficientes do processo ARMA da equação 5.50 são determinados pelos vetores de parâmetros  $\Theta$  e  $\Phi$ , conforme as equações de 5.37 a 5.40;

- Finalmente, obtenha uma estimativa de  $\phi_0$  pela equação 5.45 do corolário 5.5:

$$\hat{\phi}_0 = \hat{\mu}_V (1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2) = \left( \frac{1}{T} \sum_{1 \leq k \leq T} V_k \right) (1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2),$$

do que obtemos uma estimativa de  $b$  pela equação 5.36:

$$\hat{b} = \frac{\hat{\theta} \hat{\phi}_0}{(1 - \hat{\nu})(1 - e^{-\hat{\theta}h})} - \hat{\mu}_{\Delta L} \hat{\lambda}.$$

Uma possível alteração nesta estratégia é, em vez de selecionar  $m_0$  com base num critério de informação a partir da log-verossimilhança da estimação

---

<sup>13</sup>Na prática, é necessário limitar o conjunto de valores para  $m$  que serão testados, tanto para que os  $(T - m)$  pontos amostrais restantes ainda permitam uma estimação adequada na próxima etapa como por uma questão de demanda computacional.

do ruído de Lévy, estimar  $\Phi_m = (\nu_m, \theta_m)'$ , para cada  $m$ , pela solução do programa de otimização:

$$\hat{\Phi}_m = \begin{pmatrix} \hat{\nu}_m \\ \hat{\theta}_m \end{pmatrix} = \underset{\Phi_m \text{ sujeito a } \begin{cases} |\nu| \leq 1 \\ \theta > 0 \end{cases}}{\operatorname{argmin}} S(\hat{\Theta}_m, \Phi_m),$$

e escolher a ordem  $m_0$  do processo  $\text{AR}(m_0)$  tal que seja obtido o menor valor do erro quadrático médio dado por:

$$\frac{S(\hat{\Theta}_m, \hat{\Phi}_m)}{T - m - 1},$$

em que  $T - m - 1$  é o número de termos do somatório na equação 5.79.

### 5.4.3 Teste das Metodologias de Estimação do Processo de OUG Exponencial Flutuante via Simulação

A simulação por soma de Riemann-Stieltjes foi usada para realizar a prova de conceito das alternativas para estimação de processos de OUG do tipo Exponencial Flutuante que foram propostas nas seções 5.4.1 e 5.4.2, usando o Conjunto 2 de parâmetros das tabelas 5.1 e 5.2. Os códigos usados para realizar os testes estão no apêndice B, seção B.4.

Os resultados obtidos para a estimação por máxima verossimilhança, como descrito na seção 5.4.1, foram:

	Estimação por Máxima Verossimilhança				
	$\nu$	$\theta$	$a$	$b$	$\alpha$
Parâmetro	0,1374	0,1048	0,3000	0,2740	1,8500
Média	0,1010	0,7696	0,3222	-12,5690	1,8598
Mediana	0,0492	0,0655	0,3135	0,1494	1,8654
Desvio padrão	0,1767	7,6972	0,0514	470,5512	0,0720
Quantil 5%	0,0000	0,0403	0,2965	0,0898	1,7957
Quantil 95%	0,5879	0,1199	0,3475	0,2744	1,9258

**Tabela 5.3:** Valores paramétricos e respectivas estatísticas descritivas das estimativas, como descrito na seção 5.4.1, obtidas em 1000 simulações de estimativas por máxima verossimilhança, usando amostras com 1000 pontos amostrais, passo de discretização  $h = 1$  e  $\delta t = h/100$ .

Conquanto este seja apenas um exemplo e não uma avaliação rigorosa, o exercício permite notar que, embora todos os verdadeiros parâmetros estejam

entre os percentis 5% e 95% do conjunto de valores estimados, houve uma dispersão consideravelmente alta na estimação de  $\theta$  e  $b$ , indicando que os estimadores destes parâmetros não são eficientes. Esta dispersão, contudo, está associada à ocorrência de valores extremos e assimétricos, o que pode ser notado pelo fato de que, no caso destes parâmetros, a mediana das estimativas simuladas está muito mais próxima do valor paramétrico que a média.

Alternativas ingênuas para tentar reduzir esta dificuldade incluem realizar a otimização por máxima verossimilhança com conjuntos diferentes de valores iniciais, buscando identificar estimativas com valores extremos a serem descartadas, ou usar limites máximos e mínimos mais rígidos para as estimativas.<sup>14</sup>

Adicionalmente, usamos o algoritmo de otimização não linear disponível no software MATLAB<sup>®</sup> através da função `fmincon`. Outros algoritmos de otimização podem ter melhor desempenho para este problema particular.

Também foi simulada a estimação do processo ARMA através de uma versão adaptada do método de Hannan-Rissanen, como descrito na seção 5.4.2. Como sabemos não se tratar de um processo AR(1), caso em que simplesmente escolheríamos  $m = 1$  e  $\nu = 0$ , a ordem do processo autorregressivo usado para estimar o ruído branco foi escolhida entre os valores  $m \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$  pelo critério de informação de Akaike e os coeficientes foram estimados por um método de momentos baseado nas equações de Yule-Walker. Em geral, contudo, é importante avaliar a ordem do processo, como foi feito no capítulo 4 para o cupom cambial. Os resultados obtidos estão na tabela 5.4.

Alguns testes mostraram ser necessário limitar o valor máximo de  $\lambda$  em 5, para evitar valores extremos.<sup>15</sup> A utilização do critério de informação de Schwarz (*Bayesian Information Criterion*, BIC) em vez do critério de informação de Akaike (*Akaike Information Criterion*, AIC) não levou a resultados notavelmente discrepantes. Também não houve diferenças evidentes com a troca do método de estimação do processo autorregressivo AR( $m$ ).

---

<sup>14</sup>Os limites máximos e mínimos usados nesta simulação, conforme o código apresentado na primeira listagem da seção B.3, linhas 62 e 63, foram:  $0 \leq \nu \leq 1$ ,  $0,001 \leq \theta < \infty$ ,  $1,01 \leq \alpha \leq 2$ ,  $-\infty < \mu_\varepsilon < \infty$  e  $0,001 \leq \sigma_\varepsilon < \infty$ .

<sup>15</sup>Os resultados exibidos já refletem esta limitação.

	Estimação do Processo ARMA						
	$\nu$	$\theta$	$a$	$b$	$\lambda$	$\mu_{\Delta L}$	$\sigma_{\Delta L}$
Parâmetro	0,1374	0,1048	0,3000	0,2740	0,1000	-0,0100	0,4000
Média	0,5757	0,0750	0,2674	0,1939	0,3874	-0,0226	0,3259
Mediana	0,6012	0,0716	0,2823	0,1888	0,1354	-0,0068	0,3005
Desvio padrão	0,2128	0,0143	0,0471	0,0427	0,5887	0,2607	0,1570
Quantil 5%	0,1625	0,0581	0,1823	0,1316	0,0100	-0,5434	0,1000
Quantil 95%	0,8572	0,1034	0,3056	0,2707	1,4746	0,4005	0,6099

**Tabela 5.4:** Valores paramétricos e respectivas estatísticas descritivas das estimativas, como descrito na seção 5.4.2, obtidas em 1000 simulações de estimações pela adaptação do método de Hannan-Rissanen e máxima verossimilhança, usando amostras com 1000 pontos amostrais, passo de discretização  $h = 1$  e  $\delta t = h/100$ .

Testamos, ainda, a modificação na estratégia de estimação discutida na seção 5.4.2, em que a escolha da ordem do processo AR( $m$ ) é feita pela minimização do erro quadrático médio, obtendo os resultados consolidados na tabela 5.5:

	Estimação do Processo ARMA						
	$\nu$	$\theta$	$a$	$b$	$\lambda$	$\mu_{\Delta L}$	$\sigma_{\Delta L}$
Parâmetro	0,1374	0,1048	0,3000	0,2740	0,1000	-0,0100	0,4000
Média	0,5262	0,0679	0,2805	0,1734	0,3637	-0,0079	0,3177
Mediana	0,5439	0,0644	0,2926	0,1671	0,1174	-0,0088	0,2919
Desvio padrão	0,2604	0,0179	0,0431	0,0522	0,5765	0,4288	0,1657
Quantil	0,0632	0,0447	0,2097	0,1077	0,0033	-0,7877	0,1000
Quantil	0,8792	0,1024	0,3199	0,2583	1,3808	0,8641	0,6253

**Tabela 5.5:** Valores paramétricos e respectivas estatísticas descritivas das estimativas, como descrito na seção 5.4.2, obtidas em 1000 simulações de estimações pela adaptação do método de Hannan-Rissanen com a minimização do erro quadrático médio e por máxima verossimilhança, usando amostras com 1000 pontos amostrais, passo de discretização  $h = 1$  e  $\delta t = h/100$ .

Os resultados mostram a média ou a mediana dos valores estimados próximas do parâmetro real, exceto no caso do parâmetro  $\nu$ . A estimação, contudo, parece ser consistente, uma vez que a média das estimativas aproxima-se do parâmetro real quando aumentamos a frequência de amostragem, mantendo o intervalo de tempo constante, o que equivale a usar um passo de discretização menor e uma amostra maior. A descrição das estimativas obtidas com  $h = 0.5$ ,  $\delta t = h/50$  e  $T = 2000$  pode ser vista na tabela 5.6, e com  $h = 0.1$ ,  $\delta t = h/10$  e  $T = 10000$ , na tabela 5.7.

Estimação do Processo ARMA							
	$\nu$	$\theta$	$a$	$b$	$\lambda$	$\mu_{\Delta L}$	$\sigma_{\Delta L}$
Parâmetro	0,1374	0,1048	0,3000	0,2740	0,1000	-0,0100	0,4000
Média	0,4854	0,0678	0,2927	0,1590	0,1692	-0,0161	0,3735
Mediana	0,5546	0,0637	0,2944	0,1504	0,1038	-0,0093	0,3767
Desvio padrão	0,2784	0,0185	0,0123	0,0409	0,3080	0,1248	0,0973
Quantil 5%	-0,0491	0,0448	0,2740	0,1066	0,0314	-0,1384	0,2076
Quantil 95%	0,8431	0,1035	0,3068	0,2382	0,4609	0,1049	0,5239

**Tabela 5.6:** Valores paramétricos e respectivas estatísticas descritivas das estimativas, como descrito na seção 5.4.2, obtidas em 1000 simulações de estimações pela adaptação do método de Hannan-Rissanen e máxima verossimilhança, usando amostras com 2000 pontos amostrais, passo de discretização  $h = 0.5$  e  $\delta t = h/50$ .

Estimação do Processo ARMA							
	$\nu$	$\theta$	$a$	$b$	$\lambda$	$\mu_{\Delta L}$	$\sigma_{\Delta L}$
Parâmetro	0,1374	0,1048	0,3000	0,2740	0,1000	-0,0100	0,4000
Média	0,1919	0,0618	0,2996	0,1393	0,1030	-0,0137	0,3922
Mediana	0,1984	0,0604	0,2996	0,1350	0,1013	-0,0117	0,3911
Desvio padrão	0,3690	0,0236	0,0025	0,0528	0,0207	0,0464	0,0404
Quantil 5%	-0,4200	0,0275	0,2955	0,0621	0,0718	-0,0936	0,3244
Quantil 95%	0,7657	0,1033	0,3044	0,2325	0,1400	0,0617	0,4616

**Tabela 5.7:** Valores paramétricos e respectivas estatísticas descritivas das estimativas, como descrito na seção 5.4.2, obtidas em 1000 simulações de estimações pela adaptação do método de Hannan-Rissanen e máxima verossimilhança, usando amostras com 10000 pontos amostrais, passo de discretização  $h = 0.1$  e  $\delta t = h/10$ .

## Capítulo 6

# Estimação do Processo de OUG Exponencial Flutuante para o Cupom Cambial

Os métodos de estimação descritos na seção 5.4 foram aplicados às séries de cupom cambial para 30, 60, 90, 180, 360 e 720 dias corridos, nos períodos correspondentes às amostras 1 e 3, como descrito no capítulo 4.

As estimativas obtidas usando máxima verossimilhança, supondo o ruído de Lévy  $\alpha$ -estável, estão nas tabelas 6.1, correspondente à Amostra 1, e 6.3, correspondente à Amostra 3. As estimativas considerando que o ruído de Lévy é dado por um processo com saltos de tamanhos normalmente distribuídas, obtidas pela estimação do processo ARMA pelo método de Hannan-Rissanen adaptado, estão nas tabelas 6.2 e 6.4, correspondendo às amostras 1 e 3, respectivamente:

Prazo	Estimação por Máxima Verossimilhança				
	$\nu$	$\theta$	$a$	$b$	$\alpha$
30 dias	0,1055	0,0301	0,1608	0,0918	1,5836
60 dias	0,2041	0,0513	0,0972	0,1354	1,5677
90 dias	0,2143	0,0503	0,0827	0,1277	1,5705
180 dias	0,1742	0,0423	0,0757	0,1040	1,7607
360 dias	0,2607	0,0314	0,0726	0,0834	2,0000
720 dias	0,2596	0,0345	0,0704	0,1040	2,0000

**Tabela 6.1:** Valores estimados dos parâmetros do modelo para o cupom cambial como um processo de OUG do Exponencial Flutuante, conforme a metodologia descrita na seção 5.4.1, correspondentes aos dados da Amostra 1.

Prazo	Estimação do Processo ARMA						
	$\nu$	$\theta$	$a$	$b$	$\lambda$	$\mu_{\Delta L}$	$\sigma_{\Delta L}$
30 dias	0,3088	0,0865	0,2019	0,2260	0,2736	-0,0378	0,4439
60 dias	0,2659	0,0570	0,1093	0,1477	0,3477	-0,0170	0,2682
90 dias	0,1049	0,0490	0,0931	0,1251	0,3732	-0,0127	0,2171
180 dias	0,1679	0,0298	0,0734	0,0800	0,5371	-0,0074	0,1339
360 dias	0,3802	0,0222	0,0663	0,0570	0,7130	0,0096	0,1000
720 dias	0,3739	0,0239	0,0909	0,0661	0,1715	0,0587	0,1000

**Tabela 6.2:** Valores estimados dos parâmetros do modelo para o cupom cambial como um processo de OUG do Exponencial Flutuante, conforme a metodologia descrita na seção 5.4.2, correspondentes aos dados da Amostra 1.

Prazo	Estimação por Máxima Verossimilhança				
	$\nu$	$\theta$	$a$	$b$	$\alpha$
30 dias	0,3469	0,2168	0,1184	0,5614	2,0000
60 dias	0,3837	0,1604	0,0615	0,3928	2,0000
90 dias	0,3571	0,1785	0,0506	0,4331	2,0000
180 dias	0,4141	0,2007	0,0306	0,5111	1,8399
360 dias	0,2415	0,1387	0,0296	0,3483	2,0000
720 dias	0,2570	0,1883	0,0286	0,5557	2,0000

**Tabela 6.3:** Valores estimados dos parâmetros do modelo para o cupom cambial como um processo de OUG do Exponencial Flutuante, conforme a metodologia descrita na seção 5.4.1, correspondentes aos dados da Amostra 3.

Prazo	Estimação do Processo ARMA						
	$\nu$	$\theta$	$a$	$b$	$\lambda$	$\mu_{\Delta L}$	$\sigma_{\Delta L}$
30 dias	0,5757	0,1464	0,1621	0,4026	0,0408	0,0890	0,1000
60 dias	0,5676	0,1009	0,0844	0,2492	0,0449	0,0823	0,1000
90 dias	0,5588	0,1123	0,0706	0,2811	0,0100	0,0446	0,1000
180 dias	0,4232	0,0903	0,0447	0,2137	0,0516	-0,0267	0,1000
360 dias	0,2835	0,0915	0,0408	0,2275	0,0100	-0,0088	0,1000
720 dias	0,4069	0,1265	0,0388	0,3801	0,0100	0,0158	0,1000

**Tabela 6.4:** Valores estimados dos parâmetros do modelo para o cupom cambial como um processo de OUG do Exponencial Flutuante, conforme a metodologia descrita na seção 5.4.2, correspondentes aos dados da Amostra 3.

No caso específico das estimativas realizadas a partir do processo ARMA, é possível verificar se as condições de estabilidade são satisfeitas, lembrando que são condições suficientes, conforme a proposição 3.3. Como em todos os casos  $1 > \hat{\nu} \geq 0$  e  $\hat{\theta} > 0$ , o corolário 5.4 nos garante que as versões ARMA estimadas são estacionárias.

Também é possível obter o mesmo resultado observando que os valores absolutos das raízes do polinômio característico são menores que 1, conforme a definição 3.10, ou que as estimativas dos coeficientes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , como definidos nas equações 5.37 e 5.38, satisfazem as desigualdades 3.9 e 3.10, o que é mostrado nas tabelas 6.5 e 6.6.

Os valores dos coeficientes e das raízes também são importantes na discussão sobre a persistência do processo do cupom cambial, o que será tratado na seção 6.3.

Prazo	Coeficientes		Condições ( $< 1$ )		Raízes	
	$\phi_1$	$\phi_2$	$ \phi_1  + \phi_2$	$ \phi_1 $	$ z_1 $	$ z_2 $
30 dias	1,2492	-0,3088	0,9404	0,3088	0,9098	0,3394
60 dias	1,2244	-0,2659	0,9585	0,2659	0,9421	0,2822
90 dias	1,0618	-0,1049	0,9569	0,1049	0,9516	0,1102
180 dias	1,1433	-0,1679	0,9754	0,1679	0,9703	0,1730
360 dias	1,3664	-0,3802	0,9862	0,3802	0,9774	0,3890
720 dias	1,3589	-0,3739	0,9850	0,3739	0,9757	0,3832

**Tabela 6.5:** Condições de estabilidade para os coeficientes e para as raízes do polinômio característico da versão ARMA do processo de OUG Exponencial Flutuante estimado a partir dos dados de cupom cambial da Amostra 1.

Prazo	Coeficientes		Condições ( $< 1$ )		Raízes	
	$\phi_1$	$\phi_2$	$ \phi_1  + \phi_2$	$ \phi_1 $	$ z_1 $	$ z_2 $
30 dias	1,5056	-0,5757	0,9299	0,5757	0,7587	0,7587
60 dias	1,5203	-0,5676	0,9527	0,5676	0,8614	0,6589
90 dias	1,5049	-0,5588	0,9461	0,5588	0,8383	0,6666
180 dias	1,3699	-0,4232	0,9467	0,4232	0,8994	0,4705
360 dias	1,2185	-0,2835	0,9350	0,2835	0,9053	0,3131
720 dias	1,3299	-0,4069	0,9230	0,4069	0,8528	0,4771

**Tabela 6.6:** Condições de estabilidade para os coeficientes e para as raízes do polinômio característico da versão ARMA do processo de OUG Exponencial Flutuante estimado a partir dos dados de cupom cambial da Amostra 3.

Nas seções a seguir, analisaremos a qualidade do ajuste. Os gráficos de diagnóstico referenciados estão no apêndice C.

## 6.1 Visualização do Ajuste

Uma primeira análise do ajuste pode ser feita pela visualização dos dados empíricos e do processo ajustado a estes dados. No caso em que a estimação é feita pela metodologia descrita na seção 5.4.1, temos que, pela equação 5.71:

$$V_{k+1} = \hat{\phi}_1 V_k + \hat{\phi}_2 V_{k-1} + \hat{\varepsilon}_k.$$

Como temos a estimativa da média de  $\varepsilon_k$ , conforme o corolário 5.2, no qual é definido  $\varepsilon_k^* = \varepsilon_k - \mathbb{E}[\varepsilon_k]$ , podemos reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \hat{\phi}_1 V_k + \hat{\phi}_2 V_{k-1} + \mathbb{E}[\hat{\varepsilon}_k] + \hat{\varepsilon}_k^* \\ &= \hat{\phi}_1 V_k + \hat{\phi}_2 V_{k-1} + \frac{\hat{b}(1 - \hat{\nu})(1 - e^{-\hat{\theta}h})}{\hat{\theta}} + \hat{\varepsilon}_k^* \\ &= \hat{V}_{k+1} + \hat{\varepsilon}_k^*, \end{aligned} \tag{6.1}$$

em que  $\hat{V}_{k+1}$  é o processo ajustado.

Os gráficos com o ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante aos dados utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança estão nos gráficos C.1 a C.6 para a Amostras 1 e C.7 a C.12 para a Amostra 3.

Para o caso da estimação feita como descrito na seção 5.4.2, a estimativa do ruído branco ( $u_k^*; k \in \mathbb{Z}_+$ ) é obtida na primeira etapa da metodologia, pelos resíduos da estimação do processo autorregressivo de ordem elevada, de acordo com a equação 5.78. Temos, portanto, conforme a equação 5.77:

$$\begin{aligned} V_k &= \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 V_{k-1} + \hat{\phi}_2 V_{k-2} + \hat{\beta}_0 \hat{u}_k^* + \hat{\beta}_1 \hat{u}_{k-1}^* \\ &= \hat{V}_k + \hat{\beta}_0 \hat{u}_k^*, \end{aligned} \tag{6.2}$$

em que  $\hat{V}_k$  é o processo ajustado. Os gráficos com o ajuste do processo ARMA estimado pelo método de Hannan-Rissanen estão nas figuras C.13 a C.18 para a Amostra 1 e C.19 a C.24 para a Amostra 3.

## 6.2 Análise pela Função de Autocorrelação

Uma das motivações para utilizarmos um processo de OUG com uma função resolvente mais geral é a possibilidade de replicar a estrutura de autocorrelação dos dados, dada por uma oscilação amortecida. Fizemos, portanto, a comparação da autocorrelação dos dados com a autocorrelação de trajetórias simuladas com os parâmetros estimados usando os algoritmos descritos nas seções 5.3.1, por soma de Riemann-Stieltjes, e 5.3.3, por recursão.

As comparações da autocorrelação das séries empíricas de cupom cambial com a autocorrelação de exemplos de trajetórias simuladas usando ruído de Lévy  $\alpha$ -estável estão nas tabelas C.1, para a Amostra 1, e C.2, para a Amostra 3.

As comparações correspondentes quando os exemplos de trajetórias são simuladas considerando um ruído de Lévy dado por uma difusão com saltos de tamanhos normalmente distribuídos estão nas tabelas C.3, para a Amostra 1, e C.4, para a Amostra 3.

Também realizamos a simulação de 1000 trajetórias por soma de Riemann-Stieltjes e 1000 trajetórias por recursão, e exibimos a comparação da função de autocorrelação empírica de cada série de cupom cambial, para cada uma das duas amostras analisadas, com a curva das medianas das autocorrelações simuladas para cada defasagem e com as curvas dos valores correspondentes aos quantis de 5% e 95% das autocorrelações simuladas para cada defasagem, formando um intervalo de confiança ao nível de significância de 10%. Os resultados obtidos estão organizados como segue:

- Tabela C.5: intervalos de confiança simulados por soma de Riemann-Stieltjes com ruído de Lévy  $\alpha$ -estável e comparados com as séries de cupom cambial na Amostra 1;
- Tabela C.6: intervalos de confiança simulados por recursão com ruído de Lévy  $\alpha$ -estável e comparados com as séries de cupom cambial na Amostra 1;
- Tabela C.7: intervalos de confiança simulados por soma de Riemann-Stieltjes com ruído de Lévy  $\alpha$ -estável e comparados com as séries de cupom cambial na Amostra 3;
- Tabela C.8: intervalos de confiança simulados por recursão com ruído de Lévy  $\alpha$ -estável e comparados com as séries de cupom cambial na Amostra 3;
- Tabela C.9: intervalos de confiança simulados por soma de Riemann-Stieltjes com ruído de Lévy dado por difusão com salto e comparados

com as séries de cupom cambial na Amostra 1;

- Tabela C.10: intervalos de confiança simulados por recursão com ruído de Lévy dado por difusão com salto e comparados com as séries de cupom cambial na Amostra 1;
- Tabela C.11: intervalos de confiança simulados por soma de Riemann-Stieltjes com ruído de Lévy dado por difusão com salto e comparados com as séries de cupom cambial na Amostra 3;
- Tabela C.12: intervalos de confiança simulados por recursão com ruído de Lévy dado por difusão com salto e comparados com as séries de cupom cambial na Amostra 3;

## 6.3 Testes Não-Paramétricos

Também é possível testar a qualidade do ajuste através da comparação entre as distribuições empíricas do cupom cambial e as distribuições obtidas pela simulação de uma quantidade elevada de pontos, como aproximações das distribuições assintóticas. Fizemos estas comparações através de histogramas,<sup>1</sup> gráficos quantil por quantil (Q-Q) e de frequência relativa acumulada e pelo teste de Kolmogorov-Smirnov.<sup>2</sup>

É importante ressaltar que os choques aleatórios infinitesimais representados pelo ruído de Lévy, ou discretos, representados pelos erros  $\varepsilon_{k,h}$  ou pelo ruído branco  $u_k^*$ , conforme seja considerada a equação de recorrência 5.6 ou a equação 5.35 da representação ARMA, possuem **persistência**. Isto significa que, mesmo existindo reversão à média, i.e., mesmo que  $\mathbb{E}[V_{t+s}|\mathcal{F}_t] \rightarrow \mathbb{E}[V_t]$  em média quadrática quando  $s \rightarrow \infty$ , com  $(V_t; t \geq 0) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ , esta reversão pode ser lenta e, portanto, um choque no tempo  $t$  afeta o nível do processo em  $(t+s)$  com  $\infty > s$  e  $s$  muito maior que 0.

Quando está definida, a própria função de autocorrelação é indicativa de persistência no processo aleatório. No caso de processos lineares discretos, se a parte autorregressiva tem polinômio de defasagem dado por  $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$ , conforme a equação 3.4, a persistência pode ser medida por quão próximo de 1 é  $|z_{\max}| = \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_p|\}$ , em que  $z_i$ ,  $p \geq i \geq 1$ , são as raízes do polinômio característico  $z^2 \phi(1/z) = z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \dots - \phi_p$ , supondo que são obedecidas as condições de estabilidade da definição 3.10. Processos com raízes unitárias são chamados de **altamente**

<sup>1</sup>Apresentaremos histogramas normalizados para ter área unitária, de maneira que servem como aproximações discretas da função densidade de probabilidade.

<sup>2</sup>Vide, por exemplo, Spanos (1999, cap. 15).

**persistentes**, como é tipicamente o caso do **passeio aleatório**, dado pelo processo AR(1) com  $\phi(L) = 1 - L$ .

Outra possível medida de persistência é a resposta ao impulso acumulada (*Cumulative Impulse Responde*, CIR), proposta em Andrews & Chen (1994), que, no caso de processos discretos com parte autorregressiva de ordem  $p$ , é dada por:

$$CIR_{AR(p)} = \frac{1}{1 - \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_i}. \quad (6.3)$$

Em amostras menores, a persistência pode afetar a distribuição empírica do processo em nível, pois os parâmetros da distribuição obtida com menos pontos amostrais têm maior dependência do sinal, da intensidade e da ordem em que ocorrem os choques, prejudicando a comparação com a distribuição assintótica. Para contornar este e também outros problemas, relacionados à estimação por OLS de processos persistentes, as alternativas usuais incluem usar a primeira diferença do processo, a primeira diferença em logaritmo ou a variação percentual.

Como pode ser visto pelas tabelas 6.5 e 6.6, há indícios de elevada persistência em todas as séries de cupom cambial e nas duas amostras analisadas, com  $\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 > 0,9$  em todos os casos. Assim, os testes não paramétricos de qualidade do ajuste não serão aplicados à distribuição cumulativa empírica do processo em nível, mas em primeira diferença, i.e., analisaremos a distribuição não de  $(V_k; T \geq k \geq 1)$ , mas de  $(V_k - V_{k-1}; T \geq k \geq 2)$ .

Uma discussão mais detalhada da persistência em séries temporais pode ser encontrada em Hamilton (1994, cap. 1), no contexto de resposta ao impulso de equações diferença, e em Kapetanios (2002), Dias & Marques (2005), Fuhrer (2009) e Hansen & Lunde (2010), no contexto da análise de dados econômicos.

Nas seções a seguir, faremos a comparação da distribuição cumulativa empírica da primeira diferença das séries de cupom cambial com a distribuição cumulativa da primeira diferença das séries obtidas pela simulação de 10000 pontos do processo de OUG Exponencial Flutuante usando as estratégias de simulação discutidas nas seções 5.3.1, via soma de Riemann-Stieltjes, e 5.3.3, usando a equação de recorrência dada pelo teorema 5.2.

### 6.3.1 Qualidade do Ajuste da Estimação por Máxima Verossimilhança

A simulação com ruído  $\alpha$ -estável eventualmente gera saltos extremos que atrapalham a visualização dos histogramas e dos gráficos de distribuição acumulada. Para melhorar a exibição dos resultados, truncamos os dados

simulados entre os quantis 0,1% e 99,9% nestes gráficos. Os gráficos Q-Q e os testes de Kolmogorov-Smirnov, contudo, foram feitos para todos os valores simulados.

As tabelas 6.7 e 6.8 consolidam os resultados dos testes de Kolmogorov-Smirnov para as amostras 1 e 3, respectivamente. Os gráficos Q-Q, as distribuições acumuladas e os histogramas de área unitária para a comparação entre o cupom cambial e os dados simulados, tanto por soma de Riemann como pela equação de recursão, estão nas tabelas C.13 a C.18 para a Amostra 1 e nas tabelas C.19 a C.24 para a Amostra 3.

Prazo	Soma de Riemann		Recursão	
	Estatística KS	p-valor	Estatística KS	p-valor
30 dias	0,0634	0,3466	0,0648	0,3211
60 dias	0,1344	0,0008	0,0738	0,1881
90 dias	0,1659	0,0000	0,0515	0,6127
180 dias	0,0442	0,7908	0,0400	0,8787
360 dias	0,0613	0,3889	0,0512	0,6205
720 dias	0,0676	0,2747	0,0450	0,7723

**Tabela 6.7:** Testes de Kolmogorov-Smirnov da hipótese nula de que as primeiras diferenças das séries do cupom cambial e as primeiras diferenças das séries simuladas vêm da mesma distribuição na Amostra 1.

Prazo	Soma de Riemann		Recursão	
	Estatística KS	p-valor	Estatística KS	p-valor
30 dias	0,3543	0,0000	0,0744	0,6844
60 dias	0,3472	0,0000	0,0932	0,3962
90 dias	0,4081	0,0000	0,1000	0,3116
180 dias	0,4433	0,0000	0,0995	0,3174
360 dias	0,2663	0,0000	0,0845	0,5222
720 dias	0,2519	0,0000	0,0828	0,5493

**Tabela 6.8:** Testes de Kolmogorov-Smirnov da hipótese nula de que as primeiras diferenças das séries do cupom cambial e as primeiras diferenças das séries simuladas vêm da mesma distribuição na Amostra 3.

### 6.3.2 Qualidade do Ajuste da Estimação do Processo ARMA

As tabelas C.25 a C.30 mostram os gráficos Q-Q, as distribuições acumuladas e os histogramas com área unitária quando a simulação é feita por somas de

Riemann-Stieltejes ou pela relação de recursão do teorema 5.2 para a Amostra 1. As tabelas C.31 a C.36 mostram as mesmas informações para a Amostra 3.

Os testes de Kolmogorov-Smirnov estão consolidados nas tabelas 6.9 e 6.10.

Prazo	Soma de Riemann		Recursão	
	Estatística KS	p-valor	Estatística KS	p-valor
30 dias	0,1806	0,0000	0,0566	0,4892
60 dias	0,0640	0,3366	0,0792	0,1315
90 dias	0,0438	0,8008	0,0539	0,5540
180 dias	0,0429	0,8192	0,0466	0,7334
360 dias	0,0447	0,7792	0,0494	0,6638
720 dias	0,0497	0,6578	0,0398	0,8825

**Tabela 6.9:** Testes de Kolmogorov-Smirnov da hipótese nula de que as primeiras diferenças das séries do cupom cambial e as primeiras diferenças das séries simuladas vêm da mesma distribuição na Amostra 1.

Prazo	Soma de Riemann		Recursão	
	Estatística KS	p-valor	Estatística KS	p-valor
30 dias	0,2461	0,0000	0,0769	0,6439
60 dias	0,2479	0,0000	0,0933	0,3949
90 dias	0,3400	0,0000	0,0962	0,3571
180 dias	0,3297	0,0000	0,0930	0,3987
360 dias	0,3107	0,0000	0,0844	0,5237
720 dias	0,4146	0,0000	0,0899	0,4425

**Tabela 6.10:** Testes de Kolmogorov-Smirnov da hipótese nula de que as primeiras diferenças das séries do cupom cambial e as primeiras diferenças das séries simuladas vêm da mesma distribuição na Amostra 3.

## 6.4 Análise dos Resultados

Os resultados obtidos são consistentes com a hipótese de que a simulação por soma de Riemann apresenta um detalhamento maior do processo contínuo subjacente que a simulação por equação de recorrência. Esta, por outro lado, assemelha-se a uma amostra discreta do processo contínuo em que há erros de medição, como pode ser visto nos exemplos de trajetórias simuladas com cada algoritmo, exibidos na seção 5.3.5. De fato, a existência de erros na

medição é o caso usual para séries de dados econômicos e financeiros, até mesmo quando medidos em alta frequência, conforme discutido em Hansen & Lunde (2010).

Como resultado, as simulações por soma de Riemann exibem oscilação amortecida na mediana e nos intervalos de confiança, indicando maior consistência da estrutura de autocorrelação em simulações sucessivas. Por outro lado, isso torna os erros de ajuste mais evidentes, seja por viés na estimação, seja pela escolha incorreta do modelo. Isto fica claro, por exemplo, nas figuras da tabela C.5, em que o viés na estimação dos parâmetros resultou em períodos de oscilação da autocorrelação muito diversos daqueles observados nos dados.

No caso da tabela C.9, que difere da tabela C.5 unicamente por utilizar um ruído de Lévy dado por uma difusão com salto, em vez de um ruído  $\alpha$ -estável, o erro na estimação do período de oscilação da autocorrelação é bastante claro apenas para os prazos de 60 e 90 dias. O ajuste para 30 dias, em especial, praticamente não viola os intervalos de confiança e a função de autocorrelação empírica segue de muito perto a mediana dos valores simulados. Por um lado, isso é uma confirmação de que o processo de OUG Exponencial Flutuante é capaz de modelar com grande sucesso a estrutura de autocorrelação do cupom cambial. Por outro, apesar de não ser possível afirmar conclusivamente, é uma indicação de que o ruído por difusão com salto é mais adequado para modelar o comportamento do cupom cambial que o ruído  $\alpha$ -estável.

Já a simulação por recursão apresenta maior variabilidade na estrutura de autocorrelação e também menor amplitude, como visto na seção 5.3.5, de modo que, embora cada trajetória em particular apresente autocorrelação amortecida, o período muda a cada simulação. Consequentemente, nem a mediana e nem os quantis refletem essa estrutura. Isto resulta em menos violações dos intervalos de confiança, que acabam abarcando diversas configurações de autocorrelação dos dados, como pode ser visto nas tabelas C.6 e C.10.

Mais fundamentalmente que o tipo de simulação usado para avaliar a qualidade do ajuste, a quantidade de pontos amostrais disponíveis para a estimação tem papel essencial, uma vez que, com menos pontos amostrais, há mais chance de estimar parâmetros enviesados. Assim, quando consideramos a Amostra 3, com apenas 92 pontos amostrais, a simulação por soma de Riemann mostra que é possível estimar processos subjacentes com características muito diferentes do processo observado empiricamente, tanto quando avaliamos a qualidade do ajuste pela função de autocorrelação como quando esta avaliação é feita pela distribuição da primeira diferença. Este fato é mostrado nas tabelas C.7 e C.11 para o caso da autocorrelação, e nas tabelas 6.10, C.31, C.33 e C.31, no caso da distribuição da primeira diferença.

Observe que em pequenas amostras, mesmo com a possibilidade de algum viés nas estimativas dos parâmetros, a falta de detalhamento da simulação por recursão torna-se uma vantagem. Em aplicações onde a precisão dos parâmetros do processo contínuo não é essencial, a simulação pela equação de recorrência do teorema 5.2 ainda é capaz de reproduzir o comportamento dos dados quando há algum viés na estimativa dos parâmetros, o que não ocorre com a simulação por soma de Riemann. Isto pode ser visto nas tabelas C.2, C.4, C.8 e C.12, no caso da auto correlação, e nas tabelas 6.10, C.32, C.34 e C.32, no caso da distribuição da primeira diferença.

Quando assumimos que o ruído de Lévy é dado por uma difusão com salto, é possível falar o mesmo da simulação através do processo ARMA definido no teorema 5.3, conforme o algoritmo detalhado na seção 5.3.4, uma vez que tanto a simulação por recursão quanto a simulação a partir do processo ARMA resultam em trajetórias e funções de autocorrelação muito próximas, como exemplificado nas figuras de 5.9 a 5.16.

Em resumo, podemos identificar as seguintes conclusões:

- O processo de OUG Exponencial Flutuante é capaz de modelar de modo muito preciso o comportamento da função de autocorrelação observada no cupom cambial, que oscila de forma amortecida;
- As estratégias de estimação propostas, apesar de apresentarem algum viés, foram capazes de gerar um ajuste de boa qualidade aos dados, seja por um critério baseado na autocorrelação, seja por critérios não paramétricos, baseados na distribuição da primeira diferença das séries de cupom cambial, e este ajuste, como não poderia deixar de ser, é tanto melhor quanto maior a amostra;
- A simulação por soma de Riemann parece mais capaz de representar os detalhes do processo de OUG Exponencial Flutuante contínuo, mas não é adequada para simular e fazer projeções quando os parâmetros são estimados a partir de amostras de menor tamanho;
- Mesmo quando a estimação é feita com base em uma amostra de apenas aproximadamente 100 pontos, a equação de recorrência do 5.2 e, no caso do ruído de Lévy dado por difusão com salto, a representação ARMA dada pelo teorema 5.3 podem ser usadas para simular e fazer projeções sobre o comportamento do cupom cambial;
- Há indícios de que a utilização de um ruído de Lévy dado por difusão com salto é mais adequado para modelar o cupom cambial que a utilização de um ruído de Lévy  $\alpha$ -estável.

# Capítulo 7

## Conclusão

Nesta tese, nós estendemos os trabalhos de Medino (2005), dos Santos (2011), Medino *et al.* (2012) e Stein *et al.* (2016), apresentando uma nova classe de soluções para a ELG (equação 3.52): o processo de OUG do Tipo Exponencial Flutuante, da qual o processo de Ornstein-Uhlenbeck não gaussiano discutido em Barndorff-Nielsen & Shephard (2001) e o processo de OUG Cosseno analisado em Stein *et al.* (2016) são casos especiais. Considerando que o processo de Ornstein-Uhlenbeck clássico possui uma representação discreta dada por um processo AR(1), a motivação da nossa análise foi buscar soluções da ELG capazes de reproduzir o comportamento de oscilação amortecida da autocorrelação observada nas séries de cupom cambial, consistentes com um processo AR(2), além da possibilidade de saltos, conforme discutido nos capítulos 2 e 4.

As alternativas existentes ou possuem autocorrelação exponencialmente decrescente, como é o caso do processo de Ornstein-Uhlenbeck com ruído de Lévy, analisado por Barndorff-Nielsen & Shephard, ou não possuem versão discreta estacionária, caso do processo de OUG do Tipo Cosseno, analisado por Stein *et al.*.

Propusemos, então, a função resolvente dada pela equação 5.1 e provamos que é solução para a equação íntegro-diferencial de Volterra (equação 3.61) quando é utilizada a função memória dada pelo teorema 5.1. Assim, o processo de OUG resultante da utilização dessa função resolvente, que chamamos de Exponencial Flutuante e é dado pela equação 5.5, é solução para a ELG quando o ruído de Lévy possui o segundo momento finito (Kannan, 1977), é  $\alpha$ -estável com parâmetro de estabilidade  $1 < \alpha \leq 2$  (dos Santos, 2011) ou, em geral, é um processo de Lévy qualquer quando a integração estocástica é definida em termos de convergência em probabilidade (Medino *et al.*, 2012).

Nós também provamos uma equação de recorrência (teorema 5.2) que

permite alternativas de estimação e simulação do processo de OUG Exponencial Flutuante através dos corolários 5.2, para o caso  $\alpha$ -estável, 5.3, para o caso de difusão com salto com segundo momento finito, e da proposição 5.1, para o caso particular em que o ruído de Lévy é uma difusão com saltos de tamanho normalmente distribuídos. Particularmente, provamos ainda, no teorema 5.3, que quando o ruído de Lévy tem segundo momento finito, dado por uma difusão com salto, e  $O(h^3) \rightarrow 0$ , em que  $h$  é o passo de discretização da relação de recorrência, o processo de OUG Exponencial Flutuante possui uma versão discreta dada por um processo ARMA(2, 1) que é estacionário quando seus parâmetros  $\nu$  e  $\theta$  são tais que  $\theta > 0$  e  $1 > \nu \geq 0$  (corolário 5.4). Esta versão discreta linear pode ser usada para modelar, simular e estimar processos estacionários para os quais a função de autocorrelação em amostras finitas apresenta oscilação amortecida, o que não é possível no caso dos processos de OUG do Tipo Exponencial e do Tipo Cosseno, analisados em Barndorff-Nielsen & Shephard (2001) e Stein *et al.* (2016), os quais ou apresentam autocorrelação exponencialmente decrescente, ou não são estacionários em suas versões discretas, embora estas duas alternativas sejam casos especiais da nova classe de soluções da ELG que propusemos.

Lançando mão dos resultados demonstrados neste trabalho, detalhamos e testamos quatro metodologias de simulação, na seção 5.3, disponibilizando o código MATLAB<sup>®</sup> para todas elas no apêndice B. Na seção 5.4, ainda propusemos diversas possibilidades para a estimação do processo de OUG Exponencial Flutuante, também pela utilização dos resultados demonstrados anteriormente, conforme o tipo do ruído de Lévy:  $\alpha$ -estável, como aplicação do corolário 5.2; difusão com salto e segundo momento finito, seja utilizando a distribuição do erro, pela aplicação do corolário 5.3, seja utilizando a versão ARMA dada pelo teorema 5.3; e difusão com saltos de tamanhos normalmente distribuídos, que além de permitir a estimação como caso particular da aplicação do corolário 5.3 ou do teorema 5.3, também permite a estimação pela utilização da proposição 5.1. Aplicamos e testamos duas destas alternativas de estimação, uma quando o ruído de Lévy é  $\alpha$ -estável e outra quando o ruído de Lévy é dado por uma difusão com salto de tamanhos normalmente distribuídos. Os correspondentes códigos também foram disponibilizados, incluindo duas variantes da metodologia de estimação para o processo de OUG Exponencial Flutuante quando o ruído de Lévy é dado por uma difusão com saltos de tamanho normalmente distribuídos.

Dada a discussão sobre as características de processos discretos lineares que apresentam reversão à média e sua relação com processos contínuos de Ornstein-Uhlenbeck, realizada no capítulo 3, e dada a argumentação econômica realizada no capítulo 2, que caracteriza o cupom cambial como um rendimento de conveniência e motiva a utilização de um processo com re-

versão à média para modelar seu comportamento, o ferramental teórico desenvolvido neste trabalho foi aplicado na modelagem das séries de cupom cambial, buscando reproduzir o comportamento empírico da sua autocorrelação, que apresenta uma oscilação amortecida, consistente com um processo autorregressivo de ordem 2, o que foi analisado econometricamente em grande detalhe no capítulo 4.

Como resultado, conforme detalhamento feito no capítulo 6, o processo de OUG Exponencial Flutuante mostrou-se capaz de reproduzir a estrutura de autocorrelação do cupom cambial com bastante sucesso. Além disso, foi possível obter uma boa qualidade do ajuste aos dados empíricos nas duas amostras testadas, seja utilizando intervalos de confiança para a função de autocorrelação, gerados a partir de simulações com os parâmetros estimados, seja através do teste de Kolmogorov-Smirnov e outras técnicas não paramétricas usadas para comparar a distribuição da primeira diferença dos dados empíricos com uma estimativa da distribuição assintótica da primeira diferença obtida a partir da simulação de uma série de 10 mil pontos, usando os parâmetros estimados.

Além das justificativas apresentadas no capítulo 1, relacionadas à aplicação deste trabalho na melhor compreensão da dinâmica do cupom cambial e na precificação de instrumentos financeiros que dele dependem, o processo aqui proposto é, *bona fide*, uma contribuição relevante à literatura sobre a Equação de Langevin Generalizada e suas soluções.

Como sugestões de pesquisas posteriores para expandir os resultados aqui descritos, é possível citar:

- Estudo rigoroso das propriedades dos estimadores aqui propostos;
- Pesquisa de novas formas de estimação e simulação;
- Aplicação do processo de OUG Exponencial Flutuante a outras séries de dados, de qualquer natureza;
- Pesquisa de classes mais amplas de soluções da ELG, possivelmente, possuindo representações ARMA de maior ordem ou outras representações discretas mais adequadas a problemas específicos;
- Desenvolvimento de um modelo econômico estrutural, possivelmente de equilíbrio geral dinâmico estocástico, que justifique o comportamento do cupom cambial conforme o modelo de forma reduzida aqui proposto;
- Aplicação do processo de OUG Exponencial Flutuante à precificação de instrumentos derivativos de cupom cambial, desenvolvimento de estratégias de negociação e formulação de política econômica.

# Apêndice A

## Resultados para a Análise Econométrica do Cupom Cambial

### A.1 Amostra 1

As tabelas e gráficos abaixo referem-se às mesmas ferramentas de identificação do processo AR aplicadas à série *c030d* na seção 4.3.1.

#### A.1.1 Série *c060d*

Amostra 1 - Série <i>c060d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F (p-valor)
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	
Coeficientes	2,4280***	0,9477***			1884,132 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	9,6020 (0,0000)	33,7843 (0,0000)			
Coeficientes	2,4313***	1,1471***	-0,2108***		986,2835 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	11,9030 (0,0000)	15,1366 (0,0000)	-2,6753 (0,0080)		
Coeficientes	2,430719***	1,1589***	-0,2752**	0,0563	656,7852 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	11,2263 (0,0000)	14,9675 (0,0000)	-2,4724 (0,0142)	0,7469 (0,4559)	

**Tabela A.1:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c060d* na Amostra 1. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 1 - Série <i>c060d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	89,62%	-0,3950	-0,3641	-0,3825
<i>AR</i> (2)	90,04%	-0,4313	-0,3849	-0,4125
<i>AR</i> (3)	90,02%	-0,4253	-0,3634	-0,4003

**Tabela A.2:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c060d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c060d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,204	0,204	9,2847	
2	-0,034	-0,080	9,5496	0,002
3	-0,031	-0,008	9,7687	0,008
4	-0,017	-0,012	9,8373	0,020
5	0,034	0,039	10,094	0,039
6	0,044	0,028	10,535	0,061
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela A.3:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c060d* da Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c060d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,019	0,019	0,0791	
2	-0,055	-0,055	0,7501	
3	-0,001	0,001	0,7506	0,386
4	0,000	-0,003	0,7506	0,687
5	0,049	0,049	1,2936	0,731
6	0,059	0,057	2,0728	0,722
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela A.4:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c060d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c060d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0041	0,0267
AR(2)	0,2252	0,3537

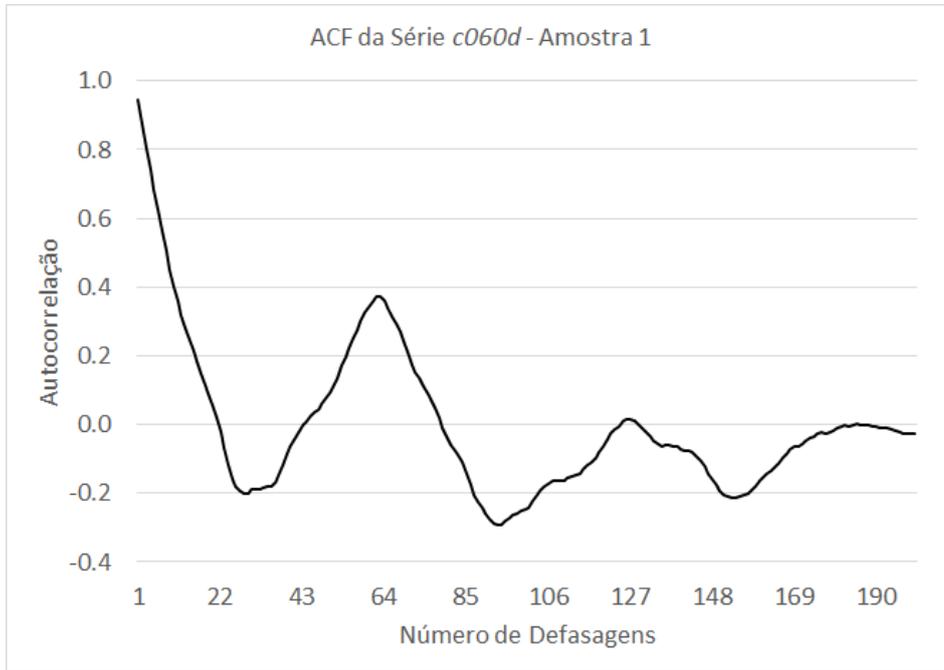
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.5:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c060d* na Amostra 1.

Amostra 1 - ACF e PACF da Série <i>c060d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,945	0,945	198,27	0,000
2	0,873	-0,189	368,17	0,000
3	0,806	0,034	513,59	0,000
4	0,742	-0,025	637,39	0,000
5	0,682	0,002	742,55	0,000
6	0,624	-0,028	831,04	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1324$  - IC @10%:  $\pm 0,1112$

**Tabela A.6:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c060d* na Amostra 1, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.1:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c060d* na Amostra 1.

### A.1.2 Série *c090d*

Amostra 1 - Série <i>c090d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,4280***	0,9527***			2101,284 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	10,3322 (0,0000)	37,6120 (0,0000)			
Coeficientes	2,4333***	1,1374***	-0,1941**		1090,947 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	12,5662 (0,0000)	13,6908 (0,0000)	-2,3220 (0,0212)		
Coeficientes	2,4317***	1,1487***	-0,2607**	0,0587	726,6728 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	11,8441 (0,0000)	13,4953 (0,0000)	-2,2609 (0,0248)	0,7949 (0,4275)	

**Tabela A.7:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c090d* na Amostra 1. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 1 - Série <i>c090d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	90,60%	-0,7317	-0,7008	-0,7192
<i>AR</i> (2)	90,91%	-0,7610	-0,7146	-0,7422
<i>AR</i> (3)	90,90%	-0,7553	-0,6934	-0,7303

**Tabela A.8:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c090d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c090d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,191	0,191	8,0949	
2	-0,042	-0,081	8,4891	0,004
3	-0,008	0,017	8,5019	0,014
4	-0,071	-0,080	9,6510	0,022
5	0,007	0,040	9,6614	0,047
6	0,070	0,054	10,775	0,056
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela A.9:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c090d* da Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c090d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,020	0,020	0,0861	
2	-0,065	-0,065	1,0284	
3	0,032	0,035	1,2649	0,261
4	-0,059	-0,065	2,0470	0,359
5	0,024	0,032	2,1811	0,536
6	0,086	0,076	3,8809	0,422
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela A.10:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c090d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c090d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0077	0,0271
AR(2)	0,1694	0,1138

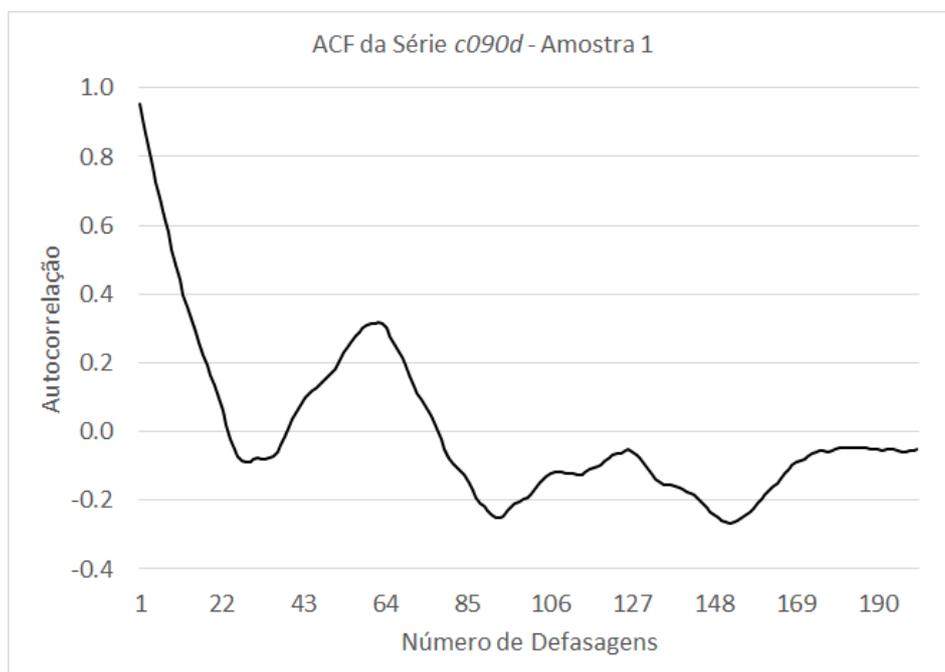
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.11:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c090d* na Amostra 1.

Amostra 1 - ACF e PACF da Série <i>c090d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,952	0,952	201,13	0,000
2	0,888	-0,190	377,04	0,000
3	0,830	0,049	531,21	0,000
4	0,772	-0,039	665,50	0,000
5	0,724	0,067	784,00	0,000
6	0,678	-0,030	888,49	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1324$  - IC @10%:  $\pm 0,1112$

**Tabela A.12:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c090d* na Amostra 1, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.2:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c090d* na Amostra 1.

### A.1.3 Série *c180d*

Amostra 1 - Série <i>c180d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,4232***	0,9731***			4008,255 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	8,1277 (0,0000)	64,4618 (0,0000)			
Coeficientes	2,4640***	1,1638***	-0,1954**		2079,127 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	9,7592 (0,0000)	14,9593 (0,0000)	-2,5101 (0,0128)		
Coeficientes	2,4389***	1,1864***	-0,3300***	0,1155	1399,297 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	8,8943 (0,0000)	14,8223 (0,0000)	-2,8765 (0,0044)	1,5690 (0,1181)	

**Tabela A.13:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c180d* na Amostra 1. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 1 - Série <i>c180d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	94,84%	-1,2751	-1,2442	-1,2626
<i>AR</i> (2)	95,02%	-1,3053	-1,2588	-1,2865
<i>AR</i> (3)	95,06%	-1.3096	-1,2477	-1,2846

**Tabela A.14:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c180d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c180d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,201	0,201	9,0138	
2	-0,079	-0,125	10,417	0,001
3	-0,066	-0,024	11,402	0,003
4	-0,161	-0,160	17,251	0,001
5	0,037	0,105	17,562	0,002
6	0,097	0,035	19,713	0,001
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela A.15:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c180d* da Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c180d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,034	0,034	0,2625	
2	-0,103	-0,105	2,6508	
3	-0,013	-0,005	2,6879	0,101
4	-0,156	-0,169	8,1891	0,017
5	0,064	0,077	9,1213	0,028
6	0,115	0,076	12,125	0,016
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela A.16:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c180d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c180d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0021	0,0013
AR(2)	0,0134	0,0036

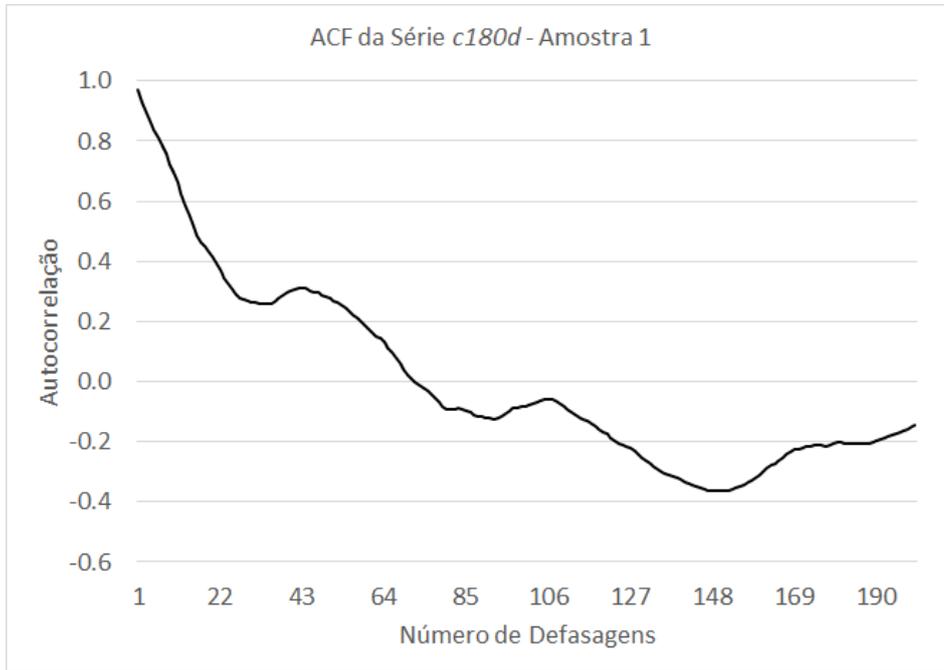
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.17:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c180d* na Amostra 1.

Amostra 1 - ACF e PACF da Série <i>c180d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,971	0,971	209,15	0,000
2	0,930	-0,204	402,15	0,000
3	0,894	0,086	581,19	0,000
4	0,862	0,035	748,64	0,000
5	0,840	0,122	908,16	0,000
6	0,814	-0,111	1058,9	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1324$  - IC @10%:  $\pm 0,1112$

**Tabela A.18:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c180d* na Amostra 1, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.3:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c180d* na Amostra 1.

#### A.1.4 Série *c360d*

Amostra 1 - Série <i>c360d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,5389***	0,9802***			7888.173 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	7,4842 (0,0000)	87,86176 (0,0000)			
Coeficientes	2,6377***	1,2308***	-0,2520***		4205,320 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	8,5951 (0,0000)	15,8418 (0,0000)	-3,2239 (0,0015)		
Coeficientes	2,5781***	1,2690***	-0,4389***	0,1504**	2857,987 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	7,9626 (0,0000)	16,3850 (0,0000)	-3,8988 (0,0001)	1,9869 (0,0482)	

**Tabela A.19:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c360d* na Amostra 1. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 1 - Série <i>c360d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	97,31%	-1,5757	-1,5447	-1,5632
<i>AR</i> (2)	97,47%	-1,6335	-1,5871	-1,6148
<i>AR</i> (3)	97,52%	-1,6477	-1,5858	-1,6227

**Tabela A.20:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c360d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c360d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,259	0,259	14,863	
2	-0,086	-0,164	16,529	0,000
3	-0,096	-0,030	18,578	0,000
4	-0,221	-0,219	29,622	0,000
5	-0,029	0,089	29,808	0,000
6	0,080	0,008	31,255	0,000
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela A.21:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c360d* da Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c360d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,048	0,048	0,5168	
2	-0,136	-0,139	4,6350	
3	-0,020	-0,006	4,7209	0,030
4	-0,209	-0,232	14,598	0,001
5	0,015	0,037	14,647	0,002
6	0,127	0,062	18,333	0,001
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela A.22:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c360d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c360d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0000	0,0000
AR(2)	0,0118	0,0003

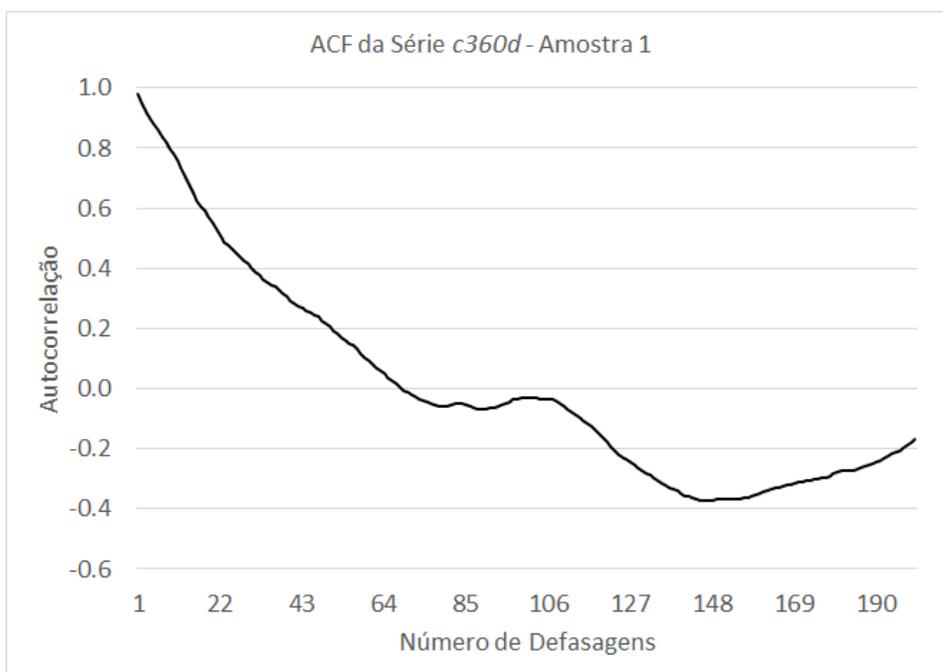
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.23:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c360d* na Amostra 1.

Amostra 1 - ACF e PACF da Série <i>c360d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,978	0,978	212,32	0,000
2	0,948	-0,182	412,92	0,000
3	0,921	0,055	602,80	0,000
4	0,897	0,069	783,93	0,000
5	0,880	0,102	958,91	0,000
6	0,861	-0,072	1127,4	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1324$  - IC @10%:  $\pm 0,1112$

**Tabela A.24:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c360d* na Amostra 1, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.4:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c360d* na Amostra 1.

### A.1.5 Série *c720d*

Amostra 1 - Série <i>c720d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,9179***	0,9782***			6926,722 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	9,5113 (0,0000)	85,2636 (0,0000)			
Coeficientes	2,9932***	1,2294***	-0,2530***		3695,896 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	10,7670 (0,0000)	16,7767 (0,0000)	-3,4359 (0,0007)		
Coeficientes	2,9527***	1,2634***	-0,4164***	0,1312*	2497,128 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	10,0712 (0,0000)	16,6818 (0,0000)	-3,4981 (0,0006)	1,6653 (0,0973)	

**Tabela A.25:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c720d* na Amostra 1. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 1 - Série <i>c720d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	96,95%	-1,6444	-1,6134	-1,6319
<i>AR</i> (2)	97,13%	-1,7028	-1,6564	-1,6840
<i>AR</i> (3)	97,17%	-1,7112	-1,6493	-1,6862

**Tabela A.26:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c720d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c720d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,258	0,258	14,804	
2	-0,064	-0,140	15,711	0,000
3	-0,125	-0,077	19,230	0,000
4	-0,199	-0,166	28,148	0,000
5	-0,035	0,048	28,424	0,000
6	0,078	0,038	29,797	0,000
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela A.27:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c720d* da Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c720d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,042	0,042	0,3857	
2	-0,102	-0,104	2,6946	
3	-0,065	-0,057	3,6410	0,056
4	-0,174	-0,183	10,489	0,005
5	0,002	0,003	10,490	0,015
6	0,117	0,078	13,605	0,009
IC @5%: $\pm 0,1324$ - IC @10%: $\pm 0,1112$				

**Tabela A.28:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c720d* na Amostra 1.

Amostra 1 - Série <i>c720d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0001	0,0000
AR(2)	0,0162	0,0053

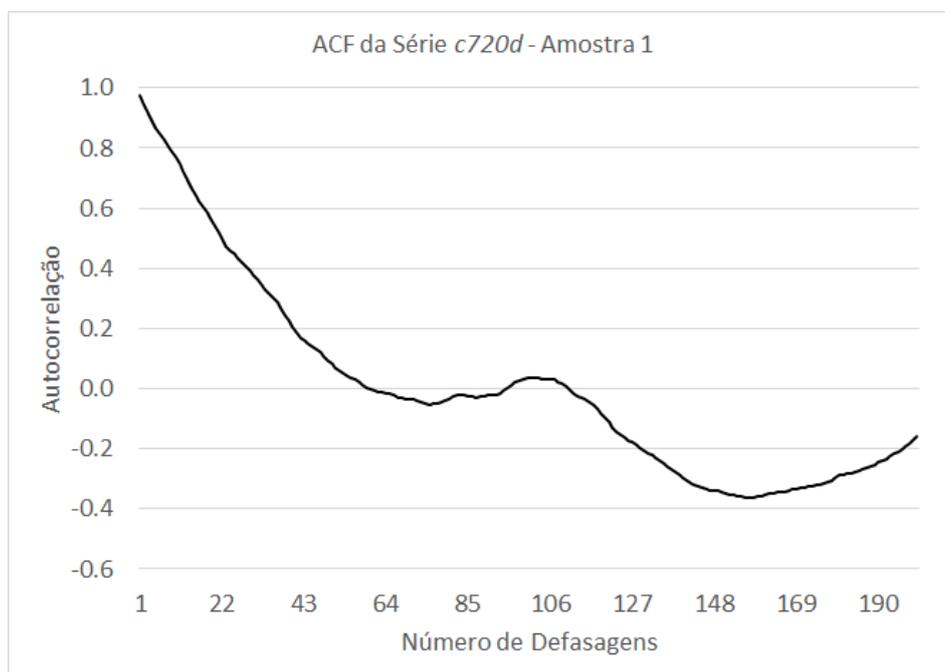
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.29:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c720d* na Amostra 1.

Amostra 1 - ACF e PACF da Série <i>c720d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,976	0,976	211,67	0,000
2	0,944	-0,199	410,48	0,000
3	0,913	0,048	597,35	0,000
4	0,888	0,083	774,67	0,000
5	0,868	0,097	945,26	0,000
6	0,850	-0,050	1109,3	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1324$  - IC @10%:  $\pm 0,1112$

**Tabela A.30:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c720d* na Amostra 1, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.5:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c720d* na Amostra 1.

## A.2 Amostra 2

As tabelas e gráficos abaixo referem-se às análises da seção 4.3.2.

### A.2.1 Série *c030d*

Amostra 2 - Série <i>c030d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,6972***	0,9091***			664,0208 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	7,8909 (0,0000)	21,1073 (0,0000)			
Coeficientes	2,6806***	1,1033***	-0,2109**		347,9899 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	9,5285 (0,0000)	12,0094 (0,0000)	-2,3021 (0,0229)		
Coeficientes	2,6887***	1,1173***	-0,2873**	0,0687	231,4997 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	8,9173 (0,0000)	12,2381 (0,0000)	-2,3088 (0,0226)	0,7554 (0,4514)	

**Tabela A.31:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c030d* na Amostra 2. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 2 - Série <i>c030d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	83,61%	0,7221	0,7660	0,7399
<i>AR</i> (2)	84,22%	0,6913	0,7571	0,7180
<i>AR</i> (3)	84,18%	0,7017	0,7895	0,7374

**Tabela A.32:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c030d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c030d</i> - Resíduos da Especificação AR(1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,206	0,206	5,6971	
2	-0,063	-0,110	6,2260	0,013
3	-0,091	-0,057	7,3416	0,025
4	0,056	0,087	7,7772	0,051
5	0,078	0,037	8,6212	0,071
6	-0,020	-0,045	8,6753	0,123

IC @5%:  $\pm 0,1712$  - IC @10%:  $\pm 0,1437$

**Tabela A.33:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação AR(1) para a série *c030d* da Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c030d</i> - Resíduos da Especificação AR(2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,031	0,031	0,1318	
2	-0,058	-0,059	0,5799	
3	-0,065	-0,062	1,1581	0,282
4	0,088	0,089	2,2197	0,330
5	0,098	0,086	3,5454	0,315
6	-0,027	-0,028	3,6499	0,455

IC @5%:  $\pm 0,1712$  - IC @10%:  $\pm 0,1437$

**Tabela A.34:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação AR(2) da série *c030d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c030d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0244	0,0592
AR(2)	0,0613	0,1757

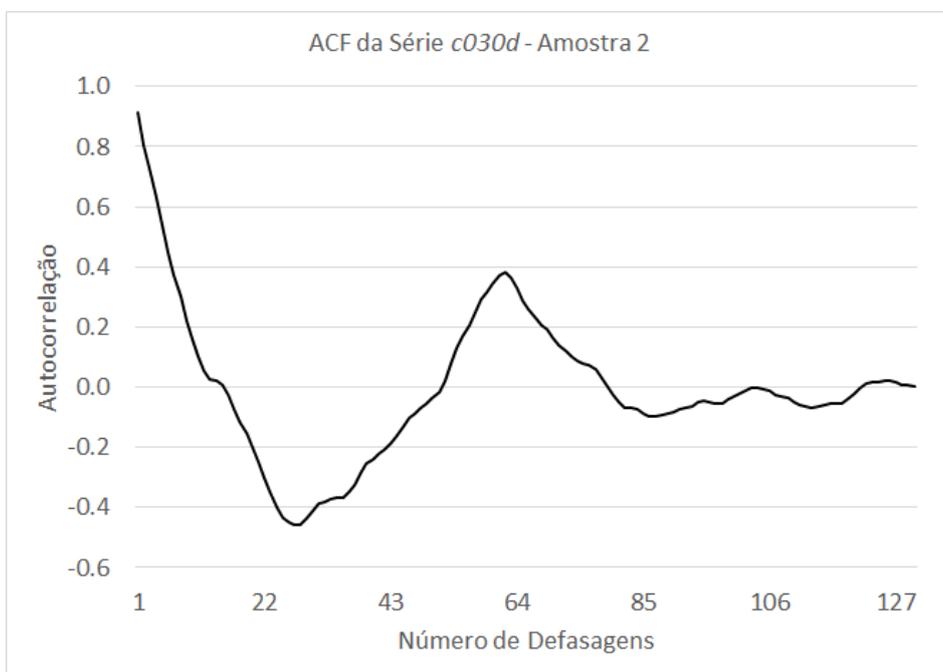
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.35:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c030d* na Amostra 2.

Amostra 2 - ACF e PACF da Série <i>c030d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,914	0,914	111,98	0,0004
2	0,803	-0,197	199,10	0,000
3	0,710	0,069	267,62	0,000
4	0,628	-0,014	321,69	0,000
5	0,539	-0,100	361,90	0,000
6	0,449	-0,042	390,00	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1712$  - IC @10%:  $\pm 0,1437$

**Tabela A.36:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c030d* na Amostra 2, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.6:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c030d* na Amostra 2.

### A.2.2 Série *c060d*

Amostra 2 - Série <i>c060d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,7509***	0,9263***			826,0308 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	9,9566 (0,0000)	25,1788 (0,0000)			
Coeficientes	2,7390***	1,1933***	-0,2860***		452,3904 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	13,0622 (0,0000)	13,3397 (0,0000)	-3,1174 (0,0023)		
Coeficientes	2,7438***	1,2132***	-0,3715***	0,0714	301,0069 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	12,1147 (0,0000)	13,0828 (0,0000)	-2,8153 (0,0057)	0,7907 (0,4306)	

**Tabela A.37:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c060d* na Amostra 2. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 2 - Série <i>c060d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	86,39%	-0,1060	-0,0622	-0,0882
<i>AR</i> (2)	87,41%	-0,1768	-0,1110	-0,1501
<i>AR</i> (3)	87,38%	-0,1667	-0,0789	-0,1311

**Tabela A.38:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c060d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c060d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,274	0,274	10,079	
2	-0,029	-0,113	10,192	0,001
3	-0,029	0,012	10,308	0,006
4	-0,012	-0,010	10,327	0,016
5	0,073	0,084	11,065	0,026
6	0,029	-0,020	11,180	0,048
IC @5%: $\pm 0,1712$ - IC @10%: $\pm 0,1437$				

**Tabela A.39:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c060d* da Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c060d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,032	0,032	0,1343	
2	-0,073	-0,074	0,8602	
3	0,014	0,019	0,8855	0,347
4	0,002	-0,005	0,8860	0,642
5	0,106	0,109	2,4430	0,486
6	0,044	0,036	2,7071	0,608
IC @5%: $\pm 0,1712$ - IC @10%: $\pm 0,1437$				

**Tabela A.40:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c060d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c060d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0024	0,0150
AR(2)	0,4163	0,6181

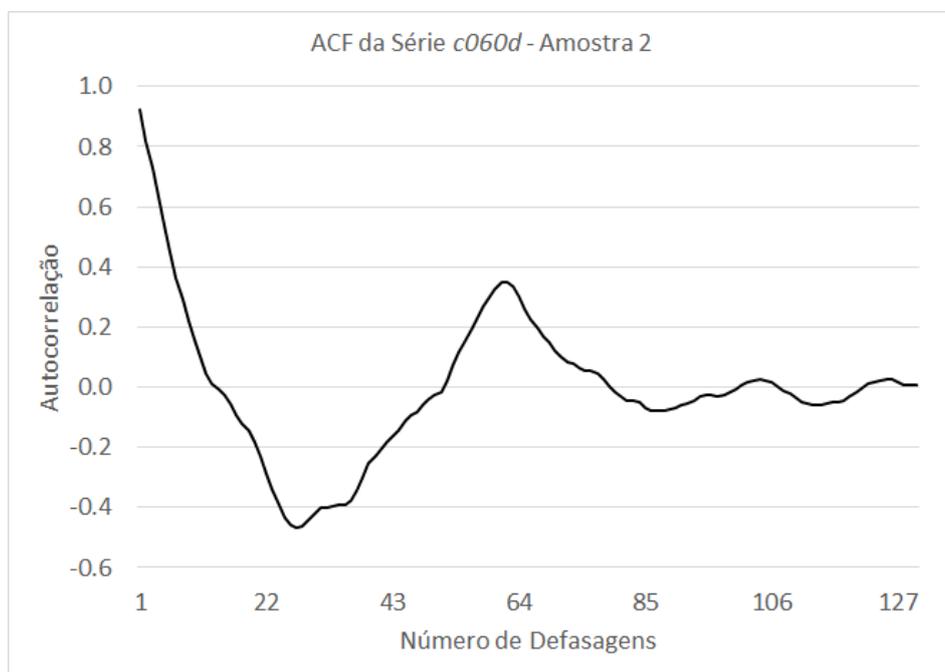
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.41:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c060d* na Amostra 2.

Amostra 2 - ACF e PACF da Série <i>c060d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,926	0,926	114,84	0,000
2	0,821	-0,249	205,91	0,000
3	0,726	0,056	277,73	0,000
4	0,632	-0,091	332,50	0,000
5	0,541	-0,016	372,96	0,000
6	0,449	-0,083	401,05	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1712$  - IC @10%:  $\pm 0,1437$

**Tabela A.42:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c060d* na Amostra 2, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.7:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c060d* na Amostra 2.

### A.2.3 Série *c090d*

Amostra 2 - Série <i>c090d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,7277***	0,9293***			821,8441 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	11,4013 (0,0000)	26,6579 (0,0000)			
Coeficientes	2,7279***	1,1817***	-0,2716***		445,3748 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	15,0092 (0,0000)	11,6806 (0,0000)	-2,7198 (0,0074)		
Coeficientes	2,7295***	1,1984***	-0,3458**	0,0629	295,9467 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	14,01723 (0,0000)	11,2785 (0,0000)	-2,4317 (0,0164)	0,7030 (0,4833)	

**Tabela A.43:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c090d* na Amostra 2. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 2 - Série <i>c090d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	86,33%	-0,4367	-0,3928	-0,4189
<i>AR</i> (2)	87,24%	-0,4982	-0,4324	-0,4714
<i>AR</i> (3)	87,19%	-0,4869	-0,3991	-0,4513

**Tabela A.44:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c090d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c090d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,262	0,262	9,1658	
2	-0,031	-0,107	9,2970	0,002
3	0,007	0,047	9,3030	0,010
4	-0,076	-0,103	10,105	0,018
5	0,038	0,100	10,303	0,036
6	0,056	0,002	10,734	0,057
IC @5%: $\pm 0,1712$ - IC @10%: $\pm 0,1437$				

**Tabela A.45:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c090d* da Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c090d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,030	0,030	0,1240	
2	-0,080	-0,081	0,9869	
3	0,073	0,079	1,7161	0,190
4	-0,070	-0,083	2,3846	0,304
5	0,078	0,099	3,2232	0,358
6	0,081	0,054	4,1285	0,389
IC @5%: $\pm 0,1712$ - IC @10%: $\pm 0,1437$				

**Tabela A.46:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c090d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c090d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0041	0,0148
AR(2)	0,4305	0,2363

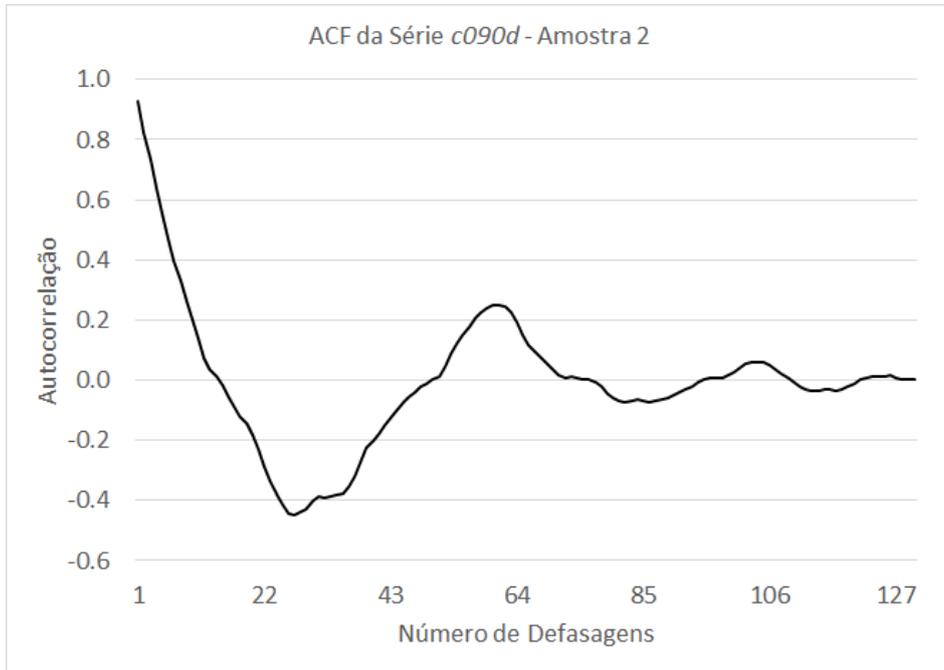
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.47:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c090d* na Amostra 2.

Amostra 2 - ACF e PACF da Série <i>c090d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,928	0,928	115,34	0,000
2	0,825	-0,255	207,27	0,000
3	0,733	0,067	280,34	0,000
4	0,638	-0,119	336,12	0,000
5	0,554	0,064	378,62	0,000
6	0,474	-0,093	409,91	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1712$  - IC @10%:  $\pm 0,1437$

**Tabela A.48:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c090d* na Amostra 2, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.8:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c090d* na Amostra 2.

#### A.2.4 Série *c180d*

Amostra 2 - Série <i>c180d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,7034***	0,9621***			1308,984 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	7,9214 (0,0000)	44,0376 (0,0000)			
Coeficientes	2,7802***	1,2052***	-0,2564***		699,0817 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	11,7198 (0,0000)	12,9364 (0,0000)	-2,8239 (0,0055)		
Coeficientes	2,7533***	1,2355***	-0,4010***	0,1218	469,9418 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	10,2577 (0,0000)	12,5664 (0,0000)	-2,8316 (0,0054)	1,3618 (0,1757)	

**Tabela A.49:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c180d* na Amostra 2. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 2 - Série <i>c180d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	90,96%	-0,9550	-0,9112	-0,9372
<i>AR</i> (2)	91,48%	-1,0071	-0,9412	-0,9803
<i>AR</i> (3)	91,54%	-1.0066	-0,9188	-0,9709

**Tabela A.50:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c180d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c180d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,256	0,256	8,7885	
2	-0,069	-0,144	9,4334	0,002
3	-0,053	0,005	9,8106	0,007
4	-0,162	-0,173	13,424	0,004
5	0,056	0,162	13,865	0,008
6	0,085	-0,017	14,878	0,011
IC @5%: $\pm 0,1712$ - IC @10%: $\pm 0,1437$				

**Tabela A.51:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c180d* da Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c180d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,047	0,047	0,2920	
2	-0,111	-0,114	1,9659	
3	0,025	0,036	2,0490	0,152
4	-0,162	-0,181	5,6455	0,059
5	0,107	0,141	7,2280	0,065
6	0,123	0,065	9,3255	0,053
IC @5%: $\pm 0,1712$ - IC @10%: $\pm 0,1437$				

**Tabela A.52:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c180d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c180d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0034	0,0051
AR(2)	0,0762	0,0212

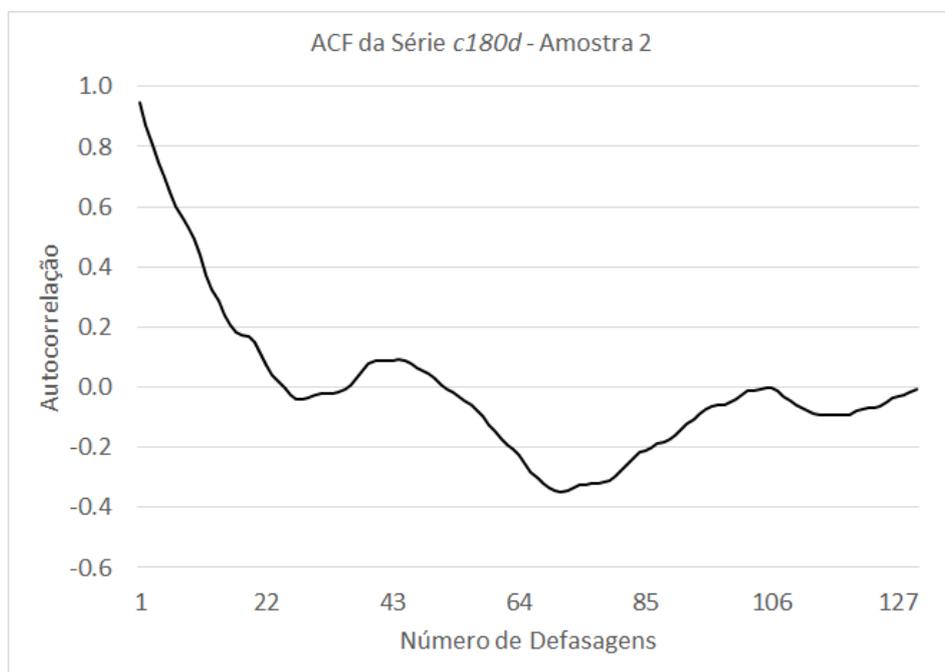
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.53:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c180d* na Amostra 2.

Amostra 2 - ACF e PACF da Série <i>c180d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,945	0,945	119,70	0,000
2	0,870	-0,215	221,96	0,000
3	0,806	0,098	310,35	0,000
4	0,747	-0,033	386,81	0,000
5	0,701	0,102	454,70	0,000
6	0,649	-0,129	513,49	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1712$  - IC @10%:  $\pm 0,1437$

**Tabela A.54:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c180d* na Amostra 2, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.9:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c180d* na Amostra 2.

### A.2.5 Série *c360d*

Amostra 2 - Série <i>c360d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,7724***	0,9761***			2648,998 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	5,3918 (0,0000)	60,0771 (0,0000)			
Coeficientes	2,9757***	1,2641***	-0,2938***		1445,553 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	8,5694 (0,0000)	13,6670 (0,0000)	-3,2204 (0,0016)		
Coeficientes	2,8893***	1,3079***	-0,4837***	0,1503	979,4809 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	7,2368 (0,0000)	14,0131 (0,0000)	-3,5057 (0,0006)	1,6405 (0,1034)	

**Tabela A.55:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c360d* na Amostra 2. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 2 - Série <i>c360d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	95,32%	-1,2592	-1,2153	-1,2413
<i>AR</i> (2)	95,69%	-1,3349	-1,2691	-1,3082
<i>AR</i> (3)	95,76%	-1,3427	-1,2549	-1,3070

**Tabela A.56:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c360d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c360d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,297	0,297	11,843	
2	-0,069	-0,173	12,485	0,000
3	-0,103	-0,031	13,925	0,001
4	-0,238	-0,231	21,666	0,000
5	-0,056	0,091	22,093	0,000
6	0,049	-0,021	22,430	0,000
IC @5%: $\pm 0,1712$ - IC @10%: $\pm 0,1437$				

**Tabela A.57:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c360d* da Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c360d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,057	0,057	0,4390	
2	-0,131	-0,134	2,7480	
3	-0,012	0,004	2,7689	0,096
4	-0,215	-0,237	9,1242	0,010
5	0,010	0,042	9,1384	0,028
6	0,124	0,058	11,279	0,024
IC @5%: $\pm 0,1712$ - IC @10%: $\pm 0,1437$				

**Tabela A.58:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c360d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c360d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0005	0,0002
AR(2)	0,0604	0,0088

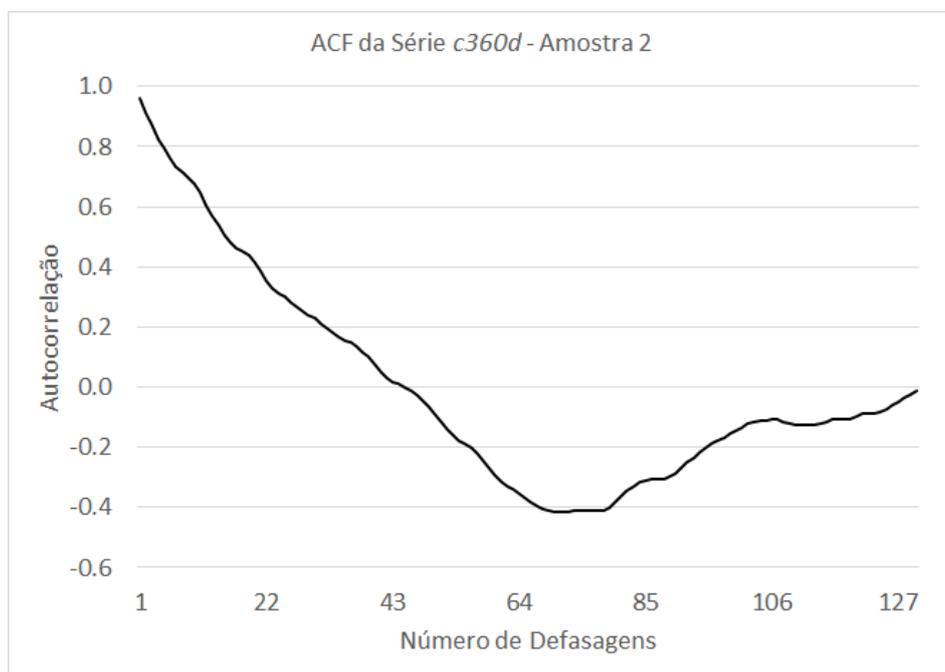
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.59:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c360d* na Amostra 2.

Amostra 2 - ACF e PACF da Série <i>c360d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,962	0,962	124,11	0,000
2	0,912	-0,196	236,34	0,000
3	0,865	0,059	338,13	0,000
4	0,825	0,044	431,41	0,000
5	0,795	0,098	518,75	0,000
6	0,764	-0,066	600,14	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1712$  - IC @10%:  $\pm 0,1437$

**Tabela A.60:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c360d* na Amostra 2, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.10:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c360d* na Amostra 2.

### A.2.6 Série *c720d*

Amostra 2 - Série <i>c720d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	3,1023***	0,9747***			2684,775 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	6,9519 (0,0000)	62,2613 (0,0000)			
Coeficientes	3,2712***	1,2773***	-0,3081***		1480,344 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	10,0968 (0,0000)	14,3756 (0,0000)	-3,4784 (0,0007)		
Coeficientes	3,1953***	1,3276***	-0,5172***	0,1632	1007,533 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	8,6418 (0,0000)	14,1556 (0,0000)	-3,3896 (0,0009)	1,6528 (0,1008)	

**Tabela A.61:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c720d* na Amostra 2. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 2 - Série <i>c720d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	95,38%	-1,3770	-1,3331	-1,3592
<i>AR</i> (2)	95,79%	-1,4628	-1,3969	-1,4360
<i>AR</i> (3)	95,87%	-1,4749	-1,3871	-1,4392

**Tabela A.62:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c720d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c720d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,311	0,311	12,985	
2	-0,067	-0,181	13,590	0,000
3	-0,125	-0,050	15,702	0,000
4	-0,224	-0,201	22,608	0,000
5	-0,070	0,058	23,279	0,000
6	0,059	0,014	23,771	0,000
IC @5%: $\pm 0,1712$ - IC @10%: $\pm 0,1437$				

**Tabela A.63:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c720d* da Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c720d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,063	0,063	0,5237	
2	-0,130	-0,135	2,8228	
3	-0,039	-0,021	3,0252	0,082
4	-0,189	-0,207	7,9337	0,019
5	-0,013	0,005	7,9561	0,047
6	0,134	0,082	10,456	0,033
IC @5%: $\pm 0,1712$ - IC @10%: $\pm 0,1437$				

**Tabela A.64:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c720d* na Amostra 2.

Amostra 2 - Série <i>c720d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0002	0,0002
AR(2)	0,0459	0,0189

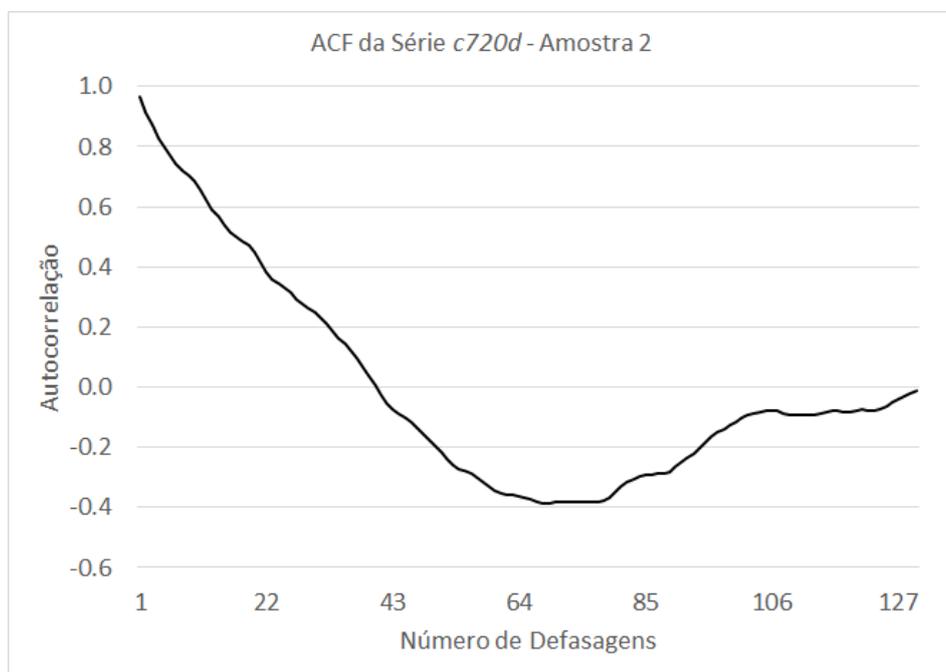
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.65:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c720d* na Amostra 2.

Amostra 2 - ACF e PACF da Série <i>c720d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,965	0,965	124,77	0,000
2	0,915	-0,225	237,95	0,000
3	0,869	0,066	340,78	0,000
4	0,829	0,046	435,18	0,000
5	0,800	0,101	523,65	0,000
6	0,772	-0,045	606,65	0,000

IC @5%:  $\pm 0,1712$  - IC @10%:  $\pm 0,1437$

**Tabela A.66:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c720d* na Amostra 2, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.11:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c720d* na Amostra 2.

### A.3 Amostra 3

As tabelas e gráficos abaixo referem-se às análises da seção 4.3.3.

### A.3.1 Série *c030d*

Amostra 3 - Série <i>c030d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,3081***	0,8900***			363,1398 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	13,2577 (0,0000)	17,9979 (0,0000)			
Coeficientes	2,2965***	1,2072***	-0,3517***		211,6256 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	18,7157 (0,0000)	11,4609 (0,0000)	-3,1705 (0,0021)		
Coeficientes	2,2947***	1,1624***	-0,1982	-0,1262	142,2554 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	21,0202 (0,0000)	10,6404 (0,0000)	-1,1693 (0,2454)	-1,1044 (0,2724)	

**Tabela A.67:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c030d* na Amostra 3. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 3 - Série <i>c030d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	79,92%	-0,5865	-0,5316	-0,5643
<i>AR</i> (2)	82,24%	-0,6985	-0,6163	-0,6653
<i>AR</i> (3)	82,32%	-0,6930	-0,5833	-0,6487

**Tabela A.68:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c030d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c030d</i> - Resíduos da Especificação AR(1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,318	0,318	9,5802	
2	0,133	0,035	11,273	0,001
3	-0,172	-0,249	14,135	0,001
4	-0,144	-0,031	16,174	0,001
5	-0,088	0,021	16,939	0,002
6	-0,166	-0,196	19,701	0,001

IC @5%:  $\pm 0,2043$  - IC @10%:  $\pm 0,1715$

**Tabela A.69:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação AR(1) para a série *c030d* da Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c030d</i> - Resíduos da Especificação AR(2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	-0,044	-0,044	0,1874	
2	0,168	0,166	2,8912	
3	-0,141	-0,131	4,8265	0,028
4	-0,011	-0,048	4,8385	0,089
5	0,072	0,122	5,3552	0,148
6	-0,027	-0,034	5,4259	0,246

IC @5%:  $\pm 0,2043$  - IC @10%:  $\pm 0,1715$

**Tabela A.70:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação AR(2) da série *c030d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c030d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0016	0,0039
AR(2)	0,0951	0,3138

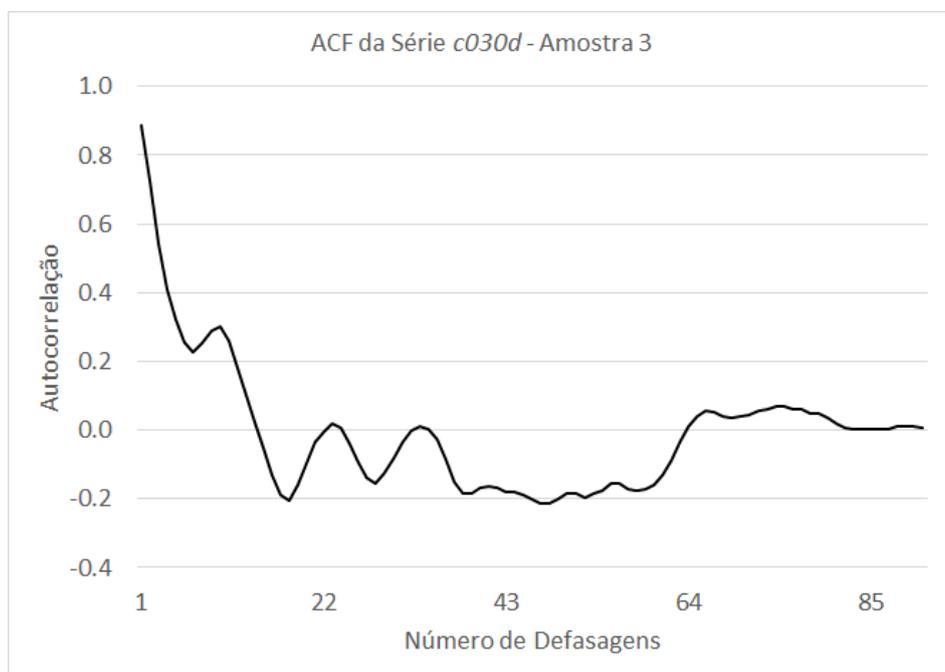
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.71:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c030d* na Amostra 3.

Amostra 3 - ACF e PACF da Série <i>c030d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,889	0,889	75,115	0,000
2	0,724	-0,317	125,47	0,000
3	0,543	-0,119	154,16	0,000
4	0,411	0,160	170,76	0,000
5	0,324	0,034	181,17	0,000
6	0,254	-0,097	187,65	0,000

IC @5%:  $\pm 0,2043$  - IC @10%:  $\pm 0,1715$

**Tabela A.72:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c030d* na Amostra 3, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.12:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c030d* na Amostra 3.

### A.3.2 Série *c060d*

Amostra 3 - Série <i>c060d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,2299***	0,9196***			559,9695 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	16,7409 (0,0000)	21,7920 (0,0000)			
Coeficientes	2,2116***	1,2943***	-0,3987***		339,2048 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	24,1630 (0,0000)	14,2530 (0,0000)	-3,9406 (0,0002)		
Coeficientes	2,2104***	1,2726***	-0,3289*	-0,0531	224,3275 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	25,0929 (0,0000)	12,4082 (0,0000)	-1,8025 (0,0749)	-0,4870 (0,6275)	

**Tabela A.73:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c060d* na Amostra 3. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 3 - Série <i>c060d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	86,00%	-1,7937	-1,7389	-1,7716
<i>AR</i> (2)	88,14%	-1,9493	-1,8670	-1,9161
<i>AR</i> (3)	88,04%	-1,9304	-1,8208	-1,8862

**Tabela A.74:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c060d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c060d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,375	0,375	13,337	
2	0,134	-0,007	15,062	0,000
3	-0,115	-0,190	16,355	0,000
4	-0,144	-0,046	18,395	0,000
5	-0,057	0,053	18,717	0,001
6	-0,127	-0,154	20,349	0,001
IC @5%: $\pm 0,2043$ - IC @10%: $\pm 0,1715$				

**Tabela A.75:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c060d* da Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c060d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	-0,023	-0,023	0,0485	
2	0,108	0,107	1,1683	
3	-0,088	-0,085	1,9247	0,165
4	-0,052	-0,067	2,1881	0,335
5	0,111	0,131	3,4146	0,332
6	0,019	0,029	3,4506	0,485
IC @5%: $\pm 0,2043$ - IC @10%: $\pm 0,1715$				

**Tabela A.76:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c060d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c060d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0005	0,0023
AR(2)	0,2762	0,5731

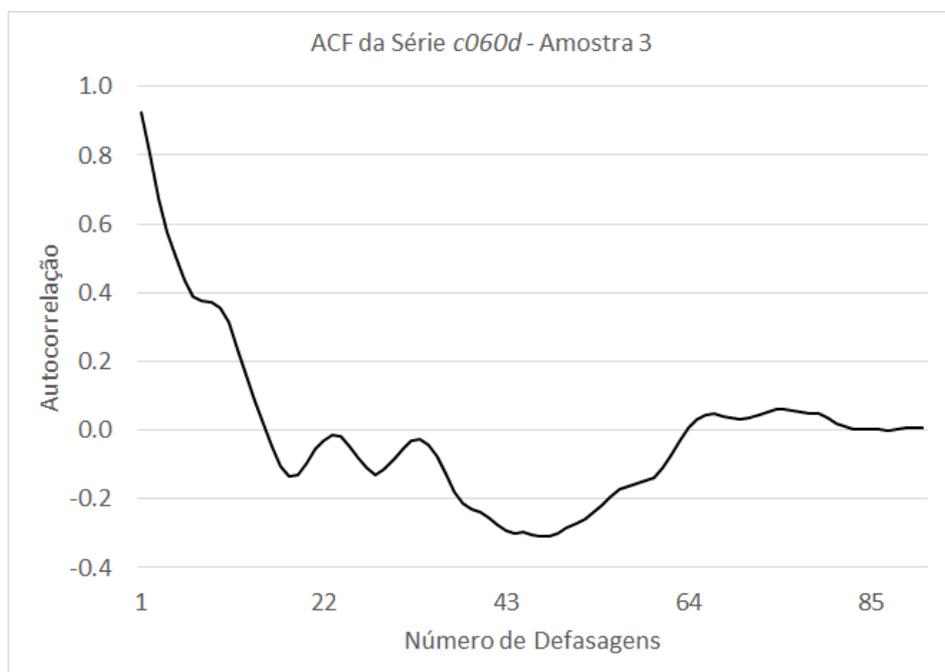
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.77:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c060d* na Amostra 3.

Amostra 3 - ACF e PACF da Série <i>c060d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,923	0,923	80,895	0,000
2	0,803	-0,324	142,87	0,000
3	0,676	-0,044	187,32	0,000
4	0,574	0,113	219,70	0,000
5	0,504	0,081	244,92	0,000
6	0,438	-0,126	264,24	0,000

IC @5%:  $\pm 0,2043$  - IC @10%:  $\pm 0,1715$

**Tabela A.78:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c060d* na Amostra 3, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.13:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c060d* na Amostra 3.

### A.3.3 Série *c090d*

Amostra 3 - Série <i>c090d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,2083***	0,9071***			466,5036 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	23,4052 (0,0000)	19,3196 (0,0000)			
Coeficientes	2,1916***	1,2543***	-0,3745***		276,6637 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	33,6707 (0,0000)	13,0015 (0,0000)	-3,3700 (0,0011)		
Coeficientes	2,1904***	1,2366***	-0,3156*	-0,0462	182,8318 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	34,6968 (0,0000)	11,5795 (0,0000)	-1,7261 (0,0878)	-0,4401 (0,6609)	

**Tabela A.79:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c090d* na Amostra 3. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 3 - Série <i>c090d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	83,65%	-2,2383	-2,1835	-2,2162
<i>AR</i> (2)	85,83%	-2,3712	-2,2889	-2,3380
<i>AR</i> (3)	85,70%	-2,3516	-2,2420	-2,3074

**Tabela A.80:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c090d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c090d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,348	0,348	11,487	
2	0,102	-0,021	12,497	0,000
3	-0,152	-0,206	14,738	0,001
4	-0,139	-0,024	16,647	0,001
5	-0,064	0,025	17,054	0,002
6	-0,101	-0,127	18,085	0,003
IC @5%: $\pm 0,2043$ - IC @10%: $\pm 0,1715$				

**Tabela A.81:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c090d* da Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c090d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	-0,017	-0,017	0,0270	
2	0,105	0,105	1,0863	
3	-0,113	-0,111	2,3303	0,127
4	-0,021	-0,035	2,3753	0,305
5	0,080	0,106	3,0157	0,389
6	0,056	0,052	3,3305	0,504
IC @5%: $\pm 0,2043$ - IC @10%: $\pm 0,1715$				

**Tabela A.82:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c090d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c090d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0012	0,0041
AR(2)	0,1988	0,4689

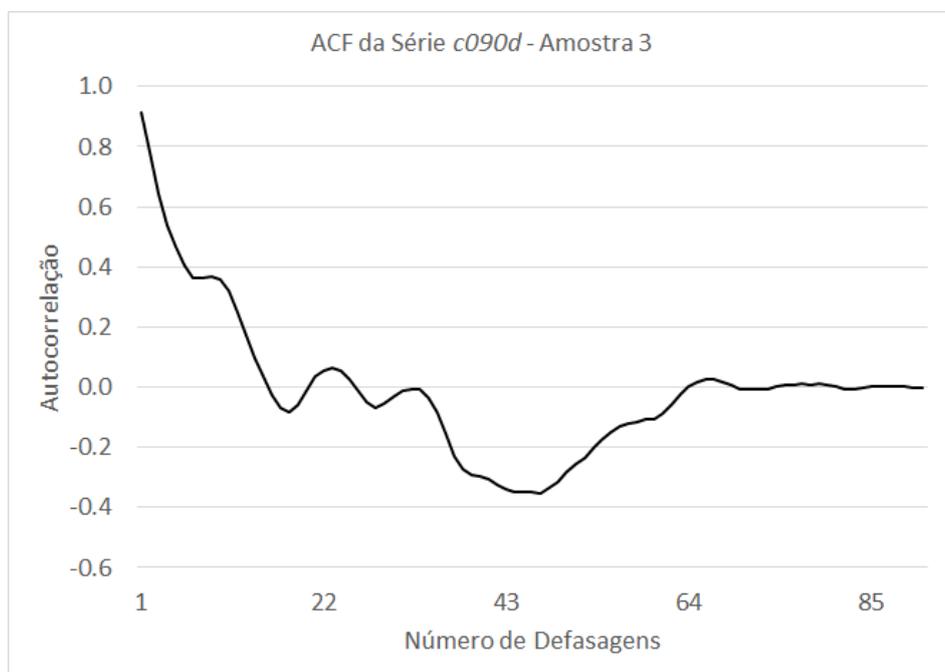
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.83:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c090d* na Amostra 3.

Amostra 3 - ACF e PACF da Série <i>c090d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,912	0,912	79,074	0,000
2	0,780	-0,309	137,55	0,000
3	0,643	-0,043	177,74	0,000
4	0,539	0,128	206,24	0,000
5	0,469	0,061	228,08	0,000
6	0,407	-0,094	244,72	0,000

IC @5%:  $\pm 0,2043$  - IC @10%:  $\pm 0,1715$

**Tabela A.84:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c090d* na Amostra 3, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.14:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c090d* na Amostra 3.

### A.3.4 Série *c180d*

Amostra 3 - Série <i>c180d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,2156***	0,9195***			506,6290 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	30,7913 (0,0000)	22,1264 (0,0000)			
Coeficientes	2,2068***	1,2249***	-0,3305***		286,8454 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	43,7800 (0,0000)	10,8689 (0,0000)	-2,6370 (0,0099)		
Coeficientes	2,2072***	1,2335***	-0,3625**	0,0261	189,2310 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	42,2090 (0,0000)	10,4843 (0,0000)	-2,0341 (0,0449)	0,2505 (0,8028)	

**Tabela A.85:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c180d* na Amostra 3. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 3 - Série <i>c180d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	84,75%	-3,0249	-2,9701	-3,0028
<i>AR</i> (2)	86,27%	-3,1194	-3,0371	-3,0862
<i>AR</i> (3)	86,12%	-3,0983	-2,9887	-3,0541

**Tabela A.86:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c180d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c180d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,307	0,307	8,9626	
2	0,033	-0,068	9,0648	0,003
3	-0,166	-0,173	11,758	0,003
4	-0,118	-0,014	13,130	0,004
5	-0,030	0,018	13,217	0,010
6	-0,059	-0,095	13,563	0,019
IC @5%: $\pm 0,2043$ - IC @10%: $\pm 0,1715$				

**Tabela A.87:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c180d* da Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c180d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,009	0,009	0,0073	
2	0,038	0,038	0,1459	
3	-0,114	-0,115	1,4090	0,235
4	-0,018	-0,017	1,4405	0,487
5	0,074	0,085	1,9918	0,574
6	0,058	0,046	2,3323	0,675
IC @5%: $\pm 0,2043$ - IC @10%: $\pm 0,1715$				

**Tabela A.88:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c180d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c180d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0060	0,0188
AR(2)	0,2308	0,4013

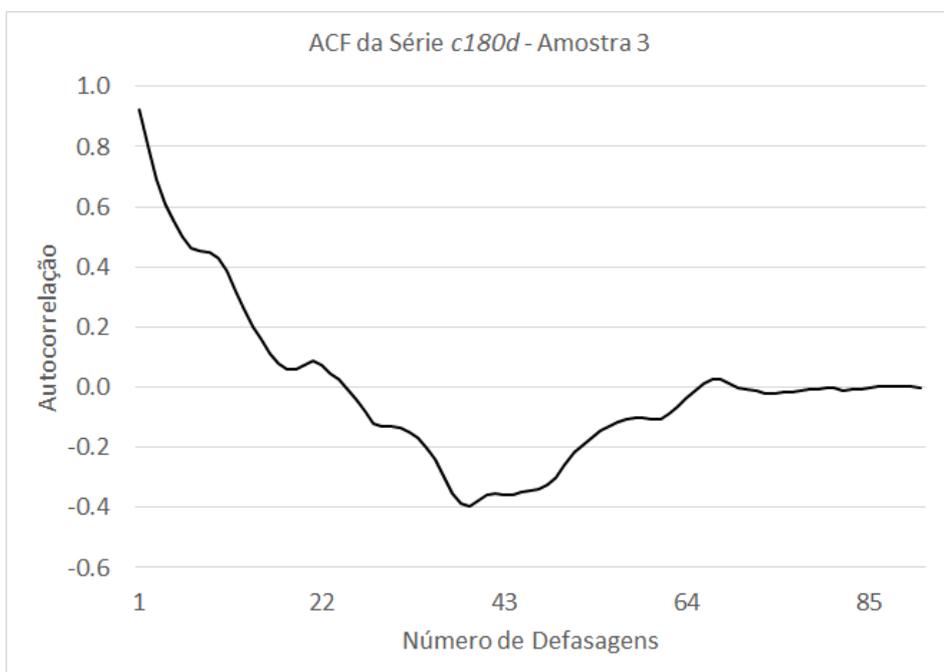
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.89:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c180d* na Amostra 3.

Amostra 3 - ACF e PACF da Série <i>c180d</i>				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,922	0,922	80,826	0,000
2	0,805	-0,302	143,16	0,000
3	0,693	0,030	189,79	0,000
4	0,612	0,132	226,55	0,000
5	0,555	0,026	257,16	0,000
6	0,503	-0,055	282,62	0,000

IC @5%:  $\pm 0,2043$  - IC @10%:  $\pm 0,1715$

**Tabela A.90:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c180d* na Amostra 3, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.15:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c180d* na Amostra 3.

### A.3.5 Série *c360d*

Amostra 3 - Série <i>c360d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,4067***	0,9163***			456,3348 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	43,1855 (0,0000)	23,1273 (0,0000)			
Coeficientes	2,4026***	1,1388***	-0,2442*		242,7419 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	56,7649 (0,0000)	9,8377 (0,0000)	-1,9161 (0,0586)		
Coeficientes	2,4030***	1,1543***	-0,3169*	0,0639	160,7759 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	52,6467 (0,0000)	9,3859 (0,0000)	-1,6631 (0,0998)	0,5460 (0,5865)	

**Tabela A.91:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c360d* na Amostra 3. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 3 - Série <i>c360d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	83,34%	-3,4284	-3,3736	-3,4063
<i>AR</i> (2)	84,16%	-3,4681	-3,3859	-3,4349
<i>AR</i> (3)	84,04%	-3,4504	-3,3408	-3,4062

**Tabela A.92:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c360d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c360d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,234	0,234	5,1921	
2	-0,031	-0,090	5,2830	0,022
3	-0,091	-0,066	6,0798	0,048
4	-0,099	-0,068	7,0406	0,071
5	0,097	0,138	7,9811	0,092
6	-0,075	-0,159	8,5412	0,129
IC @5%: $\pm 0,2043$ - IC @10%: $\pm 0,1715$				

**Tabela A.93:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c360d* da Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c360d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,025	0,025	0,0608	
2	-0,031	-0,031	0,1502	
3	-0,026	-0,024	0,2137	0,644
4	-0,077	-0,077	0,7984	0,671
5	0,181	0,184	4,0372	0,257
6	-0,025	-0,044	4,1019	0,392
IC @5%: $\pm 0,2043$ - IC @10%: $\pm 0,1715$				

**Tabela A.94:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c360d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c360d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0441	0,1586
AR(2)	0,2013	0,3121

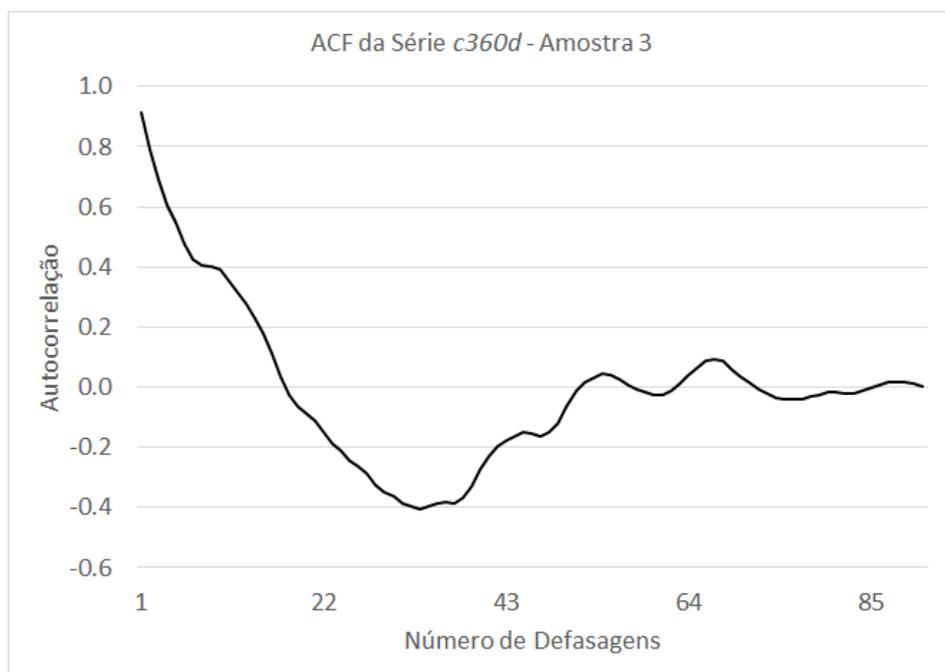
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.95:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c360d* na Amostra 3.

Amostra 3 - ACF e PACF da Série <i>c360d</i>				
1	0,913	0,913	79,152	0,000
2	0,792	-0,243	139,46	0,000
3	0,689	0,075	185,53	0,000
4	0,607	0,034	221,78	0,000
5	0,549	0,061	251,75	0,000
6	0,479	-0,145	274,80	0,000

IC @5%:  $\pm 0,2043$  - IC @10%:  $\pm 0,1715$

**Tabela A.96:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c360d* na Amostra 3, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.16:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c360d* na Amostra 3.

### A.3.6 Série *c720d*

Amostra 3 - Série <i>c720d</i>					
	Constante	Coeficientes			Estatística F
		<i>AR</i> (1)	<i>AR</i> (2)	<i>AR</i> (3)	(p-valor)
Coeficientes	2,7644***	0,8878***			324,6494 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	68,2915 (0,0000)	17,4071 (0,0000)			
Coeficientes	2,7596***	1,1165***	-0,2599**		175,3449 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	90,9341 (0,0000)	9,7423 (0,0000)	-2,1389 (0,0352)		
Coeficientes	2,7598***	1,1210***	-0,2795*	0,0177	115,6283 (0,0000)
Estatística t (p-valor)	87,8251 (0,0000)	9,8744 (0,0000)	-1,7539 (0,0829)	0,1499 (0,8812)	

**Tabela A.97:** Estimativas por mínimos quadrados dos coeficientes das especificações testadas para a série *c720d* na Amostra 3. Erros-padrão estimados com a correção de White para heterocedasticidade.

Amostra 3 - Série <i>c720d</i>				
Especificação	$R^2$ Ajustado	AIC	SBIC	HQIC
<i>AR</i> (1)	78,05%	-3,5147	-3,4599	-3,4926
<i>AR</i> (2)	79,30%	-3,5628	-3,4806	-3,5296
<i>AR</i> (3)	89,07%	-3,5414	-3,4317	-3,4971

**Tabela A.98:**  $R^2$  ajustado e critérios de informação das especificações testadas para a série *c720d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c720d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (1)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,247	0,247	5,7843	
2	-0,003	-0,068	5,7854	0,016
3	-0,075	-0,062	6,3368	0,042
4	-0,061	-0,028	6,7029	0,082
5	0,038	0,061	6,8502	0,144
6	-0,201	-0,251	10,899	0,053

IC @5%:  $\pm 0,2043$  - IC @10%:  $\pm 0,1715$

**Tabela A.99:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação para as primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(1) para a série *c720d* da Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c720d</i> - Resíduos da Especificação <i>AR</i> (2)				
Defasagem	AC	PAC	Estatística Q	p-valor
1	0,024	0,024	0,0533	
2	0,006	0,006	0,0569	
3	-0,012	-0,013	0,0714	0,789
4	-0,015	-0,014	0,0934	0,954
5	0,152	0,153	2,3989	0,494
6	-0,192	-0,205	6,1249	0,190

IC @5%:  $\pm 0,2043$  - IC @10%:  $\pm 0,1715$

**Tabela A.100:** Autocorrelação (AC), autocorrelação parcial (PAC), correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box de autocorrelação das primeiras 6 defasagens nos resíduos da especificação *AR*(2) da série *c720d* na Amostra 3.

Amostra 3 - Série <i>c720d</i> - Teste de Breusch-Godfrey		
Especificação	p-valor	
	2 defasagens	4 defasagens
AR(1)	0,0281	0,1267
AR(2)	0,1685	0,3206

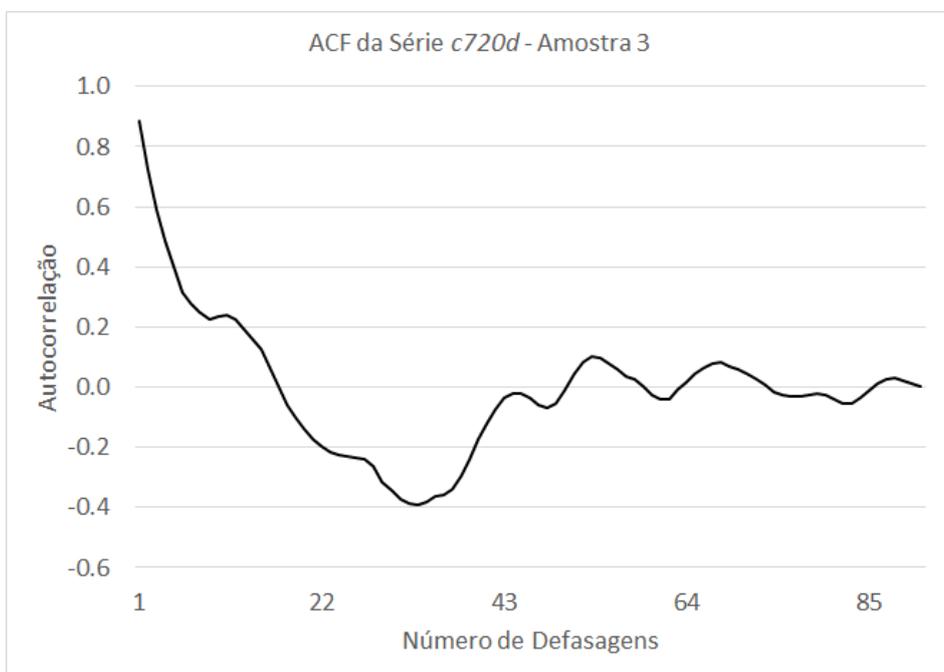
$H_0$ : Não há correlação serial nos resíduos.

**Tabela A.101:** Teste de Breusch-Godfrey para correlação serial nos resíduos das especificações testadas para a série *c720d* na Amostra 3.

Amostra 3 - ACF e PACF da Série <i>c720d</i>				
1	0,884	0,884	74,188	0,000
2	0,726	-0,248	124,86	0,000
3	0,590	0,040	158,65	0,000
4	0,485	0,026	181,73	0,000
5	0,403	0,007	197,90	0,000
6	0,318	-0,096	208,05	0,000

IC @5%:  $\pm 0,2043$  - IC @10%:  $\pm 0,1715$

**Tabela A.102:** Valores da ACF e da PACF para as primeiras seis defasagens da série *c720d* na Amostra 3, correspondentes intervalos de confiança (IC) aos níveis de significância de 5% e 10% ao redor de zero, estatística Q e correspondente p-valor do teste de Ljung-Box.



**Figura A.17:** Gráfico da função de autocorrelação da série *c720d* na Amostra 3.

# Apêndice B

## Códigos MATLAB<sup>®</sup>

### B.1 Simulações do Processo de OUG Exponencial Flutuante com Ruído $\alpha$ -Estável

O código abaixo gera simulações do processo de OUG Exponencial Flutuante em que o ruído de Lévy é  $\alpha$ -estável. Os três tipos de simulação são armazenados nas variáveis  $V1$  (simulação por soma de Riemann-Stieltejes),  $V2$  (simulação por Euler-Maruyama) e  $V3$  (simulação pela equação de recorrência do teorema 5.2):

```
1 %Simulação do Processo de OUG Exponencial Flutuante com
2 %ruído de Lévy alfa-estável
3
4 %Parâmetros
5 T = 500; %Quantidade de pontos da discretização
6 M = 100; %Quantidade de subdivisões do passo discretização
7 h = 1; %Passo de integração
8 dt = h/M; %Subdivisão do passo de discretização
9 nu = 0.1374; %Parâmetro nu
10 theta = 0.1048; %Parâmetro teta
11 a = 0.3; %Coeficiente do processo alfa-estável simétrico padrão
12 b = 0.2740; %Coeficiente da tendência
13 alpha = 1.85; %Parâmetro de estabilidade
14 X0 = 0; %Parâmetro X0
15 sigma = a*((dt)^(1/alpha)); %Parâmetro de escala da distribuição
    alfa-estável
16 mu = b*dt; %Parâmetro de localização da distribuição alfa-estável
17
18 %Coeficientes para simulação por recorrência
19 phi_1 = ((1-nu)*exp(-theta*h)+2*nu*cos(theta*h));
20 phi_2 = -nu;
21
22 %Gera ruído de Lévy
```

```

23 %Documentação da função:
24 %http://math.bu.edu/people/mveillet/html/alphastablepub.html
25 dL = stblrnd(alpha,0,sigma,mu,1,T*M);
26
27 %Simulação por Soma de Riemann
28 i = 1:T;
29 V1 = zeros(T,1);
30 X1 = X0*((1-nu)*exp(-theta*i*h) + nu*cos(theta*i*h));
31
32 for k = 1:T;
33 j = 0:(k*M-1);
34 aux = ((1-nu)*exp(-theta*(k*h-j*dt)) + nu*cos(theta*(k*h-j*dt)))
      .*dL(j+1);
35 V1(k) = X1(k) + sum(aux);
36 end
37
38 %Simulação pela Discretização de Euler-Maruyama
39 %Define função memória
40 nu0 = 1 - nu - ((nu^2)/4);
41 nu1 = sqrt(abs(nu0));
42 kappa2 = (theta*nu)^2;
43
44 switch sign(nu0)
45 case 1
46 kappa3 = (theta^2)/nu1 - ((theta*nu)^2)/(2*nu1) ...
47 - theta*(1-nu)*(theta*nu1-(theta*(nu^2))/(4*nu1));
48 FuncaoMemoria_nu = @(t)(exp(-(theta*nu/2)*t).*(kappa2*cos(theta*
      nu1*t)+kappa3*sin(theta*nu1*t)));
49 case -1
50 kappa3 = (theta^2)/nu1 - ((theta*nu)^2)/(2*nu1) ...
51 + theta*(1-nu)*(theta*nu1+(theta*(nu^2))/(4*nu1));
52 FuncaoMemoria_nu = @(t)(exp(-(theta*nu/2)*t).*(kappa2*cosh(theta*
      nu1*t)+kappa3*sinh(theta*nu1*t)));
53 case 0
54 kappa3 = theta^3 - (theta^3)*(nu^2)/2 ...
55 + theta*(1-nu)*((theta*nu)^2)/4;
56 FuncaoMemoria_nu = @(t)(exp(-(theta*nu/2)*t).*(kappa2+kappa3*t));
57 end
58
59 %Simula por Euler Maruyama
60 X2 = zeros(T*M,1);
61 X2(1) = X0 - theta*(1-nu)*X0*dt-FuncaoMemoria_nu(0)*X0*((dt)^2)
      + dL(1);
62 for k = 2:T*M;
63 j = (1:(k-1))';
64 aux = FuncaoMemoria_nu((k-1)*dt-j*dt).*X2(j);
65 aux = sum(aux) + FuncaoMemoria_nu((k-1)*dt-0)*X0;
66 X2(k) = X2(k-1)-theta*(1-nu)*X2(k-1)*dt-aux*((dt)^2) + dL(k);
67 end

```

```

68 V2 = X2(M:M:T*M);
69
70 %Simulação pela Equação de Recorrência
71 %Gera erros autocorrelacionados
72 e = zeros(T-1,1);
73 for k = 1:(T-1)
74 j = ((k-1)*M):((k*M)-1);
75 i = (k*M):(((k+1)*M)-1);
76 e(k) = -sum((nu*cos(theta*((k-1)*h-j*dt))).*dL(j+1)) ...
77 +sum(((1-nu)*exp(-theta*((k+1)*h-i*dt))+nu*cos(theta*((k+1)*h-i*
dt))).*dL(i+1));
78 end
79 %Gera valores iniciais
80 V3 = zeros(T,1);
81 j = 0:(M-1);
82 aux = ((1-nu)*exp(-theta*(h-j*dt))+nu*cos(theta*(h-j*dt))).*dL(j
+1);
83 V0 = X0;
84 V3(1) = V0*((1-nu)*exp(-theta*h)+nu*cos(theta*h))+sum(aux);
85
86 %Aplica recorrência
87 V3(2) = phi_1*V3(1)+phi_2*V0 + e(1);
88 for k = 2:(T-1)
89 V3(k+1) = phi_1*V3(k)+phi_2*V3(k-1) + e(k);
90 end
91
92 AutoCorrV1 = autocorr(V1,T-1);
93 AutoCorrV2 = autocorr(V2,T-1);
94 AutoCorrV3 = autocorr(V3,T-1);
95
96 figure
97 plot(V1, 'k');
98 xlabel('Número de passos h', 'FontSize', 24);
99 ylabel('Valor do processo', 'FontSize', 24);
100 set(gca, 'FontSize', 24);
101 hold
102 plot(V2, ':ko');
103 plot(V3, '-k');
104 legend('Soma Riemann', 'Euler-Maruyama', 'Recursão')
105
106 figure
107 plot(AutoCorrV1, 'k');
108 xlabel('Número de defasagens', 'FontSize', 24);
109 ylabel('Autocorrelação', 'FontSize', 24);
110 set(gca, 'FontSize', 24);
111 hold
112 plot(AutoCorrV2, ':ko');
113 plot(AutoCorrV3, '-k');
114 legend('Soma Riemann', 'Euler-Maruyama', 'Recursão')

```

## B.2 Simulações do Processo de OUG Exponencial Flutuante com Ruído Dado por Difusão com Salto

O código abaixo gera simulações do processo de OUG Exponencial Flutuante em que o ruído de Lévy dado por uma difusão com saltos de tamanhos normalmente distribuídos. Os quatro tipos de simulação são armazenados nas variáveis  $V1$  (simulação por soma de Riemann-Stieltejes),  $V2$  (simulação por Euler-Maruyama),  $V3$  (simulação pela equação de recorrência do teorema 5.2) e  $V4$  (simulação por um processo ARMA, nas condições do teorema 5.3):

```

1 %Simulação do Processo de OUG Exponencial Flutuante com ruído de
  Lévy
2 %dado por difusão com saltos de tamanho normalmente distribuídos
3
4 %Parâmetros
5 T = 500; %Quantidade de pontos da discretização
6 M = 100; %Quantidade de subdivisões do passo discretização
7 h = 1; %Passo de integração
8 dt = h/M; %Subdivisão do passo de discretização
9 nu = 0.1374; %Parâmetro nu
10 theta = 0.1048; %Parâmetro teta
11 a = 0.3000; %Coeficiente do processo de Wiener
12 b = 0.2740; %Coeficiente da tendência
13 lambda = 0.1; %Intensidade do processo de Poisson composto
14 mu_deltaL = -0.01; %Média do tamanho dos saltos;
15 sigma_deltaL = 0.4; %Desvio padrão do tamanho dos saltos;
16 X0 = 0; %Parâmetro X0
17
18 %Coeficientes para simulações por recorrência
19 phi_0 = (1-nu)*(1-exp(-theta*h))*(b+mu_deltaL*lambda)/theta;
20 phi_1 = ((1-nu)*exp(-theta*h)+2*nu*cos(theta*h));
21 phi_2 = -nu;
22 beta_0 = ((1-nu)*(1-exp(-theta*h))+nu*sin(theta*h))/(theta*h);
23 beta_1 = -nu*sin(theta*h)/(theta*h);
24
25 %Gera ruído de Lévy
26 %Gera variação do processo de Poisson composto
27 dP = zeros(1,T*M);
28 %Gera número aleatório de saltos em cada intervalo dt
29 n = poissrnd(lambda*dt,1,T*M);
30 for k = 1:T*M
31 %Gera tamanho normal dos saltos se n > 0
32 if n(k) > 0
33 saltos = normrnd(mu_deltaL,sigma_deltaL,1,n(k));
34 saltos = sum(saltos);
35 else

```

```

36 saltos = 0;
37 end
38 dP(k) = saltos;
39 end
40 %Gera variação do processo de difusão
41 dW = normrnd(b*dt, a*sqrt(dt), 1, T*M);
42
43 %Variação do processo de Lévy dado por difusão com saltos
44 %de tamanho normalmente distribuídos
45 dL = dW + dP;
46
47 %Simulação por Soma de Riemann
48 i = 1:T;
49 V1 = zeros(T,1);
50 X1 = X0*((1-nu)*exp(-theta*i*h) + nu*cos(theta*i*h));
51
52 for k = 1:T;
53 j = 0:(k*M-1);
54 aux = ((1-nu)*exp(-theta*(k*h-j*dt)) + nu*cos(theta*(k*h-j*dt))).*
55     dL(j+1);
56 V1(k) = X1(k) + sum(aux);
57 end
58 %Simulação pela Discretização de Euler-Maruyama
59 %Define função memória
60 nu0 = 1 - nu - ((nu^2)/4);
61 nu1 = sqrt(abs(nu0));
62 kappa2 = (theta*nu)^2;
63
64 switch sign(nu0)
65 case 1
66 kappa3 = (theta^2)/nu1 - ((theta*nu)^2)/(2*nu1) ...
67 - theta*(1-nu)*(theta*nu1-(theta*(nu^2))/(4*nu1));
68 FuncaoMemoria_nu = @(t)(exp(-(theta*nu/2)*t).*(kappa2*cos(theta*
69     nu1*t)+kappa3*sin(theta*nu1*t)));
70 case -1
71 kappa3 = (theta^2)/nu1 - ((theta*nu)^2)/(2*nu1) ...
72 + theta*(1-nu)*(theta*nu1+(theta*(nu^2))/(4*nu1));
73 FuncaoMemoria_nu = @(t)(exp(-(theta*nu/2)*t).*(kappa2*cosh(theta*
74     nu1*t)+kappa3*sinh(theta*nu1*t)));
75 case 0
76 kappa3 = theta^3 - (theta^3)*(nu^2)/2 ...
77 + theta*(1-nu)*((theta*nu)^2)/4;
78 FuncaoMemoria_nu = @(t)(exp(-(theta*nu/2)*t).*(kappa2+kappa3*t));
79 end
80 %Simula por Euler Maruyama
81 X2 = zeros(T*M,1);

```

```

81 X2(1) = X0 - theta*(1-nu)*X0*dt-FuncaoMemoria_nu(0)*X0*((dt)^2)
    + dL(1);
82 for k = 2:T*M;
83 j = (1:(k-1))';
84 aux = FuncaoMemoria_nu((k-1)*dt-j*dt).*X2(j);
85 aux = sum(aux) + FuncaoMemoria_nu((k-1)*dt-0)*X0;
86 X2(k) = X2(k-1)-theta*(1-nu)*X2(k-1)*dt-aux*((dt)^2) + dL(k);
87 end
88 V2 = X2(M:M:T*M);
89
90 %Simulação pela Equação de Recorrência
91 %Gera erros autocorrelacionados
92 e = zeros(T-1,1);
93 for k = 1:(T-1)
94 j = ((k-1)*M):((k*M)-1);
95 i = (k*M):(((k+1)*M)-1);
96 e(k) = -sum((nu*cos(theta*((k-1)*h-j*dt))).*dL(j+1)) ...
97 +sum(((1-nu)*exp(-theta*((k+1)*h-i*dt))+nu*cos(theta*((k+1)*h-i*
    dt))).*dL(i+1));
98 end
99 %Gera valores iniciais
100 V3 = zeros(T,1);
101 j = 0:(M-1);
102 aux = ((1-nu)*exp(-theta*(h-j*dt))+nu*cos(theta*(h-j*dt))).*dL(j
    +1);
103 V0 = X0;
104 V3(1) = V0*((1-nu)*exp(-theta*h)+nu*cos(theta*h))+sum(aux);
105
106 %Aplica recorrência
107 V3(2) = phi_1*V3(1)+phi_2*V0 + e(1);
108 for k = 2:(T-1)
109 V3(k+1) = phi_1*V3(k)+phi_2*V3(k-1) + e(k);
110 end
111
112 %Simulação via aproximação por processo ARMA(2,1)
113 %Usa processo de Lévy a cada M intervalos dt (i.e., passo h)
114 L = cumsum(dL);
115 u = zeros(T,1);
116 u(1) = L(M);
117 for k = 2:T
118 u(k) = L(k*M)-L((k-1)*M);
119 end
120 %Define o ruído branco
121 u_medio_zero = u - (b*h-mu_deltaL*lambda*h);
122 %Usa primeiro valor da simulação por soma de Riemann
123 V4 = zeros(T,1);
124 V4(1) = V1(1);
125 %Aplica recursão

```

```

126 V4(2) = phi_0 + phi_1*V4(1) + phi_2*V0 + beta_0*u_media_zero(2)+
      beta_1*u_media_zero(1);
127 for k = 2:T-1
128 V4(k+1) = phi_0 + phi_1*V4(k) + phi_2*V4(k-1) + beta_0*
      u_media_zero(k+1)+beta_1*u_media_zero(k);
129 end
130
131 figure
132 plot(V1, 'k');
133 xlabel('Número de passos h', 'FontSize', 24);
134 ylabel('Valor do processo', 'FontSize', 24);
135 set(gca, 'FontSize', 24);
136 hold
137 plot(V2, ':ko');
138 plot(V3, '-.k');
139 plot(V4, ':k*');
140 legend('Soma Riemann', 'Euler-Maruyama', 'Recursão', 'ARMA')
141
142 AutoCorrV1 = autocorr(V1,T-1);
143 AutoCorrV2 = autocorr(V2,T-1);
144 AutoCorrV3 = autocorr(V3,T-1);
145 AutoCorrV4 = autocorr(V3,T-1);
146
147 figure
148 plot(AutoCorrV1, 'k');
149 xlabel('Número de defasagens', 'FontSize', 24);
150 ylabel('Autocorrelação', 'FontSize', 24);
151 set(gca, 'FontSize', 24);
152 hold
153 plot(AutoCorrV2, ':ko');
154 plot(AutoCorrV3, '-.k');
155 plot(AutoCorrV4, ':k*');
156 legend('Soma Riemann', 'Euler-Maruyama', 'Recursão', 'ARMA')

```

### B.3 Simulações da Estimação por Máxima Verossimilhança do Processo de OUG Exponencial Flutuante com Ruído $\alpha$ -Estável

Seguem os códigos com a simulação e estimação por máxima verossimilhança e com a função que calcula a log-verossimilhança:

```

1 %Simula estimação por máxima verossimilhança com ruído alfa
      estável
2
3 %Definições iniciais
4 global v

```

```

5 global h
6 global V0
7
8 num_simulacoes = 1000;
9 tamanho_amostra = 1000;
10
11 %Conjunto 2 de parâmetros
12 h = 1;
13 T = tamanho_amostra;
14 M = 100;
15 dt = h/M;
16 nu = 0.1374;
17 theta = 0.1048;
18 a = 0.3000;
19 b = 0.2740;
20 alpha = 1.85;
21 X0 = 0;
22 sigma = a*((dt)^(1/alpha));
23 mu = b*dt;
24 %Coeficientes da equação de recorrência
25 phi_1 = ((1-nu)*exp(-theta*h)+2*nu*cos(theta*h));
26 phi_2 = -nu;
27
28 %Simulação por soma de Riemann–Stieltjes
29 matriz_estimacoes = zeros(11,num_simulacoes);
30 j = 1;
31 while j <= num_simulacoes
32 %Gera ruído de Lévy
33 dL = stblrnd(alpha,0,sigma,mu,1,T*M);
34
35 %Simula por Soma de Riemann–Stieltjes
36 i = 1:T;
37 V1 = zeros(T,1);
38 V0 = X0;
39 X1 = X0*((1-nu)*exp(-theta*i*h) + nu*cos(theta*i*h));
40
41 for k = 1:T;
42 i = 0:(k*M-1);
43 aux = ((1-nu)*exp(-theta*(k*h-i*dt)) + nu*cos(theta*(k*h-i*dt))).*
44     dL(i+1);
45 V1(k) = X1(k) + sum(aux);
46 end
47
48 %Gera vetor de erros pela relação de recorrência
49 erro_simulado = zeros(T-1,1);
50 erro_simulado(1) = V1(2)-phi_1*V1(1)-phi_2*V0;
51 for k = 2:(T-1)
52 erro_simulado(k) = V1(k+1)-phi_1*V1(k)-phi_2*V1(k-1);
53 end

```

```

53 v = V1;
54
55 %Estimação por máxima verossimilhança
56 %Indexação dos parâmetros na função LogLF_AlfaEstavel_ExpFlut: [
    nu, theta, alpha, mu, sigma]
57 estimativa0 = [0.13, 0.08, 1.9, 0.0019, 0.0200];
58 Af = [];
59 bf = [];
60 Aeq = [];
61 beq = [];
62 lb = [0 0.001 1.01 -inf 0.001];
63 up = [1 inf 2 inf inf];
64 [estimativa, fval, exitflag, output] = fmincon(
    @LogLF_AlfaEstavel_ExpFlut, estimativa0, Af, bf, Aeq, beq, lb, up);
65
66 if (exitflag > 0)
67     estima_nu = estimativa(1);
68     estima_theta = estimativa(2);
69     estima_alpha = estimativa(3);
70     estima_mu = estimativa(4);
71     estima_b = estima_mu*estima_theta/((1-estima_nu)*(1-exp(-
        estima_theta*h)));
72     estima_sigma = estimativa(5);
73     fun = @(x) (abs(-estima_nu*cos(estima_theta*x)).^estima_alpha +
        abs((1-estima_nu)*exp(-estima_theta*(h-x)) + estima_nu*cos(
        estima_theta*(h-x))).^estima_alpha);
74     estima_a = estima_sigma/(integral(fun,0,h)^(1/estima_alpha));
75     estima_media_expflut = mean(v);
76     estima_desvio_expflut = std(v);
77     estima_media_erro = mean(erro_simulado);
78     estima_desvio_erro = std(erro_simulado);
79     matriz_estimacoes(:,j)=[estima_nu; estima_theta; estima_alpha;
        estima_b; estima_a; estima_sigma; estima_mu;
        estima_media_expflut; estima_desvio_expflut;
        estima_media_erro; estima_desvio_erro];
80     j=j+1
81 end
82 end

```

A função que calcula a log-verossimilhança, com sinal negativo, para ser usada em conjunto com a função `fmincon`, é definida como:

```

1 %Função que calcula a log-verossimilhança otimizada na estimação
2 function f = LogLF_AlfaEstavel_ExpFlut(parametros)
3 global v
4 global h
5 global V0
6
7 tamanho_amostra=size(v,1);
8 nu = parametros(1);

```

```

9 theta = parametros(2);
10 alpha = parametros(3);
11 mu = parametros(4);
12 sigma = parametros(5);
13
14 %Encontra erro como função de nu e theta
15 erro = zeros(tamanho_amostra - 1,1);
16 erro(1) = v(2) - ((1-nu)*exp(-theta*h) + 2*nu*cos(theta*h))*v(1) + nu*
    V0;
17 for k = 2:(tamanho_amostra-1)
18 erro(k) = v(k+1) - ((1-nu)*exp(-theta*h) + 2*nu*cos(theta*h))*v(k) + nu
    *v(k-1);
19 end
20
21 %Calcula log-verossimilhança
22 %Função desenhada por Mark Veillette
23 %Documentação: http://math.bu.edu/people/mveillet/html/alphastablepub.html
24 %ou https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37514-stbl-alpha-stable-distributions-for-matlab
25 aux = stblpdf(erro, alpha, 0, sigma, mu);
26
27 f = -sum(log(aux));
28 end

```

## B.4 Simulações da Estimação por Método de Hannan-Rissanen do Processo de OUG Exponencial Flutuante com Ruído Dado por Difusão com Saltos de Tamanhos Normalmente Distribuídos

Seguem os códigos com a simulação e estimação a partir da discretização ARMA usando um método de Hannan-Rissanen e máxima verossimilhança, bem como as funções usadas para calcular a log-verossimilhança da variação da difusão com salto e o erro quadrático a ser minimizado para a obtenção dos coeficientes do processo ARMA:

```

1 %Simula estimação por método de Hannan-Rissanen e Máxima
    Verossimilhança
2 %com ruído de Lévy dado por difusão com saltos de tamanhos
3 %normalmente distribuídos
4
5 %Definições iniciais
6 global u

```

```

7  global y
8  global h
9  global m0
10 global T
11
12 num_simulacoes = 1000;
13 tamanho_amostra = 1000;
14
15 %Conjunto 2 de parâmetros
16 h = 1;
17 T = tamanho_amostra;
18 M = 100;
19 dt = h/M;
20 nu = 0.1374;
21 theta = 0.1048;
22 a = 0.3000;
23 b = 0.2740;
24 lambda = 0.1;
25 mu_deltaL = -0.01;
26 sigma_deltaL = 0.4;
27
28 %Coeficientes do processo ARMA(2,1)
29 phi_0 = (1-nu)*(1-exp(-theta*h))*(b+mu_deltaL*lambda)/theta;
30 phi_1 = ((1-nu)*exp(-theta*h)+2*nu*cos(theta*h));
31 phi_2 = -nu;
32 beta_0 = ((1-nu)*(1-exp(-theta*h))+nu*sin(theta*h))/(theta*h);
33 beta_1 = -nu*sin(theta*h)/(theta*h);
34 X0 = 0;
35
36 %Simulação por soma de Riemann–Stieltjes
37 matriz_estimacoes = zeros(15,num_simulacoes);
38 j = 1;
39 while j <= num_simulacoes
40 %Gera ruído de Lévy
41 %Gera variação do processo de Poisson composto
42 dP = zeros(1,T*M);
43 %Gera número aleatório de saltos em cada intervalo dt
44 n = poissrnd(lambda*dt,1,T*M);
45 for k = 1:T*M
46 %Gera tamanho normal dos saltos se n > 0
47 if n(k) > 0
48 saltos = normrnd(mu_deltaL,sigma_deltaL,1,n(k));
49 saltos = sum(saltos);
50 else
51 saltos = 0;
52 end
53 dP(k) = saltos;
54 end
55 %Gera variação do processo de difusão

```

```

56 dW = normrnd(b*dt , a*sqrt(dt) , 1 , T*M) ;
57
58 %Variação do processo de Lévy dado por difusão com saltos
59 %de tamanho normalmente distribuídos
60 dL = dW + dP;
61
62 %Simulação por Soma de Riemann
63 i = 1:T;
64 V1 = zeros(T,1) ;
65 V0 = X0;
66 X1 = X0*((1-nu)*exp(-theta*i*h) + nu*cos(theta*i*h));
67
68 for k = 1:T;
69 i = 0:(k*M-1);
70 aux = ((1-nu)*exp(-theta*(k*h-i*dt))+ nu*cos(theta*(k*h-i*dt))).*
71     dL(i+1);
72 V1(k) = X1(k) + sum(aux);
73 end
74
75 %Gera vetor de erros pela relação de recorrência
76 erro_simulado = zeros(T-1,1);
77 erro_simulado(1) = V1(2)-phi_1*V1(1)-phi_2*V0;
78 for k = 2:(T-1)
79 erro_simulado(k) = V1(k+1)-phi_1*V1(k)-phi_2*V1(k-1);
80 end
81 v = V1;
82 y = v - mean(v);
83
84 %Obtém estimativas dos coeficientes do processo AR(m) e do ruído
85 %de Lévy
86 valores_m = [5 10 15 20 25 30];
87 num_valores_m = size(valores_m,2);
88 valores_LogLF = zeros(1,num_valores_m);
89 valores_ResultadoOtim = zeros(1,num_valores_m);
90 matriz_estimativas_Levy = zeros(4,num_valores_m);
91 matriz_residuos = zeros(num_valores_m,T);
92 indice_m = 1;
93 while indice_m <= num_valores_m
94 %Estimação do processo AR(m) por Yule-Walker
95 ARinf = ar(y, valores_m(indice_m), 'yw');
96 %Algoritmos alternativos que também podem ser usados:
97 %ar(y, valores_m(indice_m), 'ls')
98 %ar(y, valores_m(indice_m), 'burg')
99 %ar(y, valores_m(indice_m), 'fb')
100 %estimate(arima(valores_m(indice_m),0,0),y)
101
102 %Estima ruído branco pelo resíduo do processo AR(m)
103 k = (valores_m(indice_m)+1):T;
104 aux = zeros(valores_m(indice_m)+1,T-valores_m(indice_m));

```

```

103 for i = 1:(valores_m(indice_m)+1)
104 aux(i,:) = y(k-i+1);
105 end
106 matriz_residuos(indice_m,k) = ((aux')*(ARinf.a'))';
107
108 %Estima parâmetros do ruído de Lévy por máxima verossimilhança
109 %Indexação dos parâmetros na função LogLF_JumpDiffusion: [lambda
    a mu_deltaL sigma_deltaL]
110 u = matriz_residuos(indice_m,k);
111 Af = [];
112 bf = [];
113 Aeq = [];
114 beq = [];
115 estimativa0 = [0.07,0.25,0,0.3];
116 lb = [0.01,0.01,-inf,0.1];
117 ub = [5,inf,inf,inf];
118 [estimativa, fval, exitflag, output] = fmincon(
    @LogLF_JumpDiffusion, estimativa0, Af, bf, Aeq, beq, lb, ub);
119 valores_ResultadoOtim(indice_m) = exitflag;
120 if exitflag > 0
121 matriz_estimativas_Levy(:,indice_m) = estimativa';
122 valores_LogLF(indice_m) = -fval;
123 end
124 indice_m = indice_m + 1;
125 end
126
127 %Escolhe o índice de valores_m com menor critério de informação
    AIC ou BIC
128 %O número de parâmetros corresponde à ordem m do processo
    autorregressivo
129 %Mais os 4 parâmetros (a, lambda, mu_deltaL e sigma_deltaL) que
    definem
130 %a distribuição do ruído branco
131 [aic, bic] = aicbic(valores_LogLF, valores_m+4, T*ones(1,
    num_valores_m));
132 [minimo_aic, indice_m0_aic] = min(aic);
133 [minimo_bic, indice_m0_bic] = min(bic);
134 %Seleciona critério de informação a ser utilizado
135 indice_m0 = indice_m0_aic;
136
137 estimativa = matriz_estimativas_Levy(:, indice_m0);
138 estima_lambda = estimativa(1);
139 estima_a = estimativa(2);
140 estima_mu = estimativa(3);
141 estima_sigma = estimativa(4);
142
143 %Estima nu e theta por mínimos quadrados
144 m0 = valores_m(indice_m0);
145 u = (matriz_residuos(indice_m0,:))';

```

```

146
147 %%Estimação alternativa dos coeficientes phi_1 e phi_2 por OLS
148 %Z = [y(m0+1:T-1) y(m0:T-2) u(m0+1:T-1)];
149 %coeficientes = ((Z'*Z)^(-1))*(Z'*y(m0+2:T));
150 %estima_phi_1 = coeficientes(1);
151 %estima_phi_2 = coeficientes(2);
152 %estima_nu = -estima_phi_2;
153 %fun_theta = @(x)((1-estima_nu)*exp(-x*h)+2*estima_nu*cos(x*h)-
    estima_phi_1);
154 %estima_theta = fsolve(fun_theta,0.5);
155
156 %Indexação dos parâmetros na função ErroQuadratico: [nu theta]
157 Af = [];
158 bf = [];
159 Aeq = [];
160 beq = [];
161 estimativa0 = [0.1,0.1];
162 lb = [-1,0.01];
163 ub = [1,inf];
164 [estimativa, fval, exitflag, output] = fmincon(@ErroQuadratico,
    estimativa0, Af, bf, Aeq, beq, lb, ub);
165 estima_nu = estimativa(1);
166 estima_theta = estimativa(2);
167 estima_media_expflut = mean(v);
168 estima_phi_1 = ((1-estima_nu)*exp(-estima_theta*h)+2*estima_nu*
    cos(estima_theta*h));
169 estima_phi_2 = -estima_nu;
170
171 estima_phi_0 = estima_media_expflut*(1-estima_phi_1-estima_phi_2)
    ;
172 estima_b = ((estima_theta*estima_phi_0)/((1-estima_nu)*(1-exp(-
    estima_theta*h))))-estima_mu*estima_lambda;
173
174 estima_desvio_expflut = std(v);
175 estima_media_erro = mean(erro_simulado);
176 estima_desvio_erro = std(erro_simulado);
177 matriz_estimacoes(:,j)=[estima_nu; estima_theta; estima_lambda;
    estima_b; estima_a; estima_sigma; estima_mu;
    estima_media_expflut; estima_desvio_expflut;
    estima_media_erro; estima_desvio_erro; minimo_aic; minimo_bic
    ; indice_m0_aic; indice_m0_bic];
178 j=j+1
179 end

```

As funções que calculam a log-verossimilhança da estimação do ruído de Lévy, com sinal negativo para ser usada em conjunto com a função `fmincon`, e o erro quadrático usado na estimação dos coeficientes da discretização ARMA seguem abaixo:

```

1 function f = LogLF_JumpDiffusion(parametros)
2 global u
3 global h
4
5 lambda = parametros(1);
6 a = parametros(2);
7 mu = parametros(3);
8 sigma = parametros(4);
9 b = -mu*lambda;
10
11 %Número de normais na mistura de normais
12 n_mistura = 3;
13
14 %Propabilidades ajustadas
15 n = 0:(n_mistura-1);
16 p = (exp(-lambda*h)*(lambda*h).^n)./factorial(n);
17 p(n_mistura) = 1 - sum(p(1:(n_mistura-1)));
18
19 vetor = zeros(size(u));
20 for i = 1:n_mistura
21 vetor = vetor + p(i)*normpdf(u,b*h + (i-1)*mu,sqrt((a^2)*h+(i-1)*
    sigma^2));
22 end
23
24 f = -sum(log(vetor));

1 function f = ErroQuadratico(parametros)
2 global u
3 global h
4 global y
5 global m0
6 global T
7
8 nu = parametros(1);
9 theta = parametros(2);
10
11 phi_1 = ((1-nu)*exp(-theta*h)+2*nu*cos(theta*h));
12 phi_2 = -nu;
13 beta_0 = ((1-nu)*(1-exp(-theta*h))+nu*sin(theta*h))/(theta*h);
14 beta_1 = -nu*sin(theta*h)/(theta*h);
15
16 k = m0+2:T;
17 f = sum((y(k)-phi_1*y(k-1)-phi_2*y(k-2)-beta_0*u(k)-beta_1*u(k-1)
    ).^2);

```

Por fim, segue o código que usa a modificação na estratégia de estimação com a escolha da ordem do processo AR( $m$ ) que minimiza o erro quadrático médio, como discutido na seção 5.4.2:

```

1 %Simula estimação por método de Hannan-Rissanen com

```

```

2      escolha da ordem do
3      %processo AR(m) por erro quadrático médio e dos
4      parâmetros do ruído de Lévy
5      %por Máxima Verossimilhança.
6
7      %Definições iniciais
8      global u
9      global y
10     global h
11     global m
12     global T
13
14     num_simulacoes = 1000;
15     tamanho_amostra = 1000;
16
17     %Conjunto 2 de parâmetros
18     h = 1;
19     T = tamanho_amostra;
20     M = 100;
21     dt = h/M;
22     nu = 0.1374;
23     theta = 0.1048;
24     a = 0.3000;
25     b = 0.2740;
26     lambda = 0.1;
27     mu_deltaL = -0.01;
28     sigma_deltaL = 0.4;
29
30     %Coeficientes do processo ARMA(2,1)
31     phi_0 = (1-nu)*(1-exp(-theta*h))*(b+mu_deltaL*lambda)/
32     theta;
33     phi_1 = ((1-nu)*exp(-theta*h)+2*nu*cos(theta*h));
34     phi_2 = -nu;
35     beta_0 = ((1-nu)*(1-exp(-theta*h))+nu*sin(theta*h))/(
36     theta*h);
37     beta_1 = -nu*sin(theta*h)/(theta*h);
38     X0 = 0;
39
40     %Simulação por soma de Riemann–Stieltjes
41     matriz_estimacoes = zeros(13,num_simulacoes);
42     j = 1;
43     while j <= num_simulacoes
44         %Gera ruído de Lévy
45         %Gera variação do processo de Poisson composto
46         dP = zeros(1,T*M);
47         %Gera número aleatório de saltos em cada intervalo dt
48         n = poissrnd(lambda*dt,1,T*M);
49         for k = 1:T*M
50             %Gera tamanho normal dos saltos se n > 0

```

```

47     if n(k) > 0
48         saltos = normrnd(mu_deltaL, sigma_deltaL, 1, n(k));
49         saltos = sum(saltos);
50     else
51         saltos = 0;
52     end
53     dP(k) = saltos;
54     end
55     %Gera variação do processo de difusão
56     dW = normrnd(b*dt, a*sqrt(dt), 1, T*M);
57
58     %Variação do processo de Lévy dado por difusão com saltos
59     %de tamanho normalmente distribuídos
60     dL = dW + dP;
61
62     %Simulação por Soma de Riemann
63     i = 1:T;
64     V1 = zeros(T,1);
65     V0 = X0;
66     X1 = X0*((1-nu)*exp(-theta*i*h) + nu*cos(theta*i*h));
67
68     for k = 1:T;
69         i = 0:(k*M-1);
70         aux = ((1-nu)*exp(-theta*(k*h-i*dt)) + nu*cos(theta*(k*h-i
71             *dt))).*dL(i+1);
72         V1(k) = X1(k) + sum(aux);
73     end
74
75     %Gera vetor de erros pela relação de recorrência
76     erro_simulado = zeros(T-1,1);
77     erro_simulado(1) = V1(2)-phi_1*V1(1)-phi_2*V0;
78     for k = 2:(T-1)
79         erro_simulado(k) = V1(k+1)-phi_1*V1(k)-phi_2*V1(k-1);
80     end
81     v = V1;
82     y = v - mean(v);
83
84     %Obtém estimativas dos coeficientes do processo AR(m) por
85     %Yule-Walker,
86     %do ruído de Lévy por máxima verossimilhança e dos
87     %coeficientes ARMA
88     %por mínimos quadrados
89     valores_m = [5 10 15 20 25 30];
90     num_valores_m = size(valores_m,2);
91     valores_LogLF = zeros(1,num_valores_m);
92     valores_S = zeros(1,num_valores_m)+(max(v)-min(v))^2;
93     valores_ResultadoOtim = zeros(1,num_valores_m);
94     matriz_estimativas_Levy = zeros(4,num_valores_m);
95     matriz_estimativas_MinimosQuadrados = zeros(2,

```

```

    num_valores_m);
93     matriz_residuos = zeros(num_valores_m,T);
94     indice_m = 1;
95     while indice_m <= num_valores_m
96         %Estimação do processo AR(m) por Yule-Walker
97         ARinf = ar(y, valores_m(indice_m), 'yw');
98         %Algoritmos alternativos que também podem ser usados:
99         %ar(y, valores_m(indice_m), 'ls')
100        %ar(y, valores_m(indice_m), 'burg')
101        %ar(y, valores_m(indice_m), 'fb')
102        %estimate(arima(valores_m(indice_m),0,0),y)
103
104        %Estima ruído branco pelo resíduo do processo AR(m)
105        k = (valores_m(indice_m)+1):T;
106        aux = zeros(valores_m(indice_m)+1,T-valores_m(indice_m));
107        for i = 1:(valores_m(indice_m)+1)
108            aux(i,:) = y(k-i+1);
109        end
110        matriz_residuos(indice_m,k) = ((aux')*(ARinf.a'))';
111
112        %Estima parâmetros do ruído de Lévy por máxima
            verossimilhança
113        %Indexação dos parâmetros na função LogLF_JumpDiffusion:
            [lambda a mu_deltaL sigma_deltaL]
114        u = matriz_residuos(indice_m,k);
115        Af = [];
116        bf = [];
117        Aeq = [];
118        beq = [];
119        estimativa0 = [0.07,0.25,0,0.3];
120        lb = [0.001,0.001,-inf,0.1];
121        ub = [5,inf,inf,inf];
122        [estimativa, fval, exitflag, output] = fmincon(
            @LogLF_JumpDiffusion, estimativa0, Af, bf, Aeq, beq, lb, ub)
            ;
123        valores_ResultadoOtim(indice_m) = exitflag;
124        if exitflag > 0
125            matriz_estimativas_Levy(:,indice_m) = estimativa';
126            valores_LogLF(indice_m) = -fval;
127
128        %Estima nu e theta por mínimos quadrados
129        m = valores_m(indice_m);
130        u = (matriz_residuos(indice_m,:))';
131        %Indexação dos parâmetros na função ErroQuadratico: [nu
            theta]
132        Af = [];
133        bf = [];
134        Aeq = [];
135        beq = [];

```

```

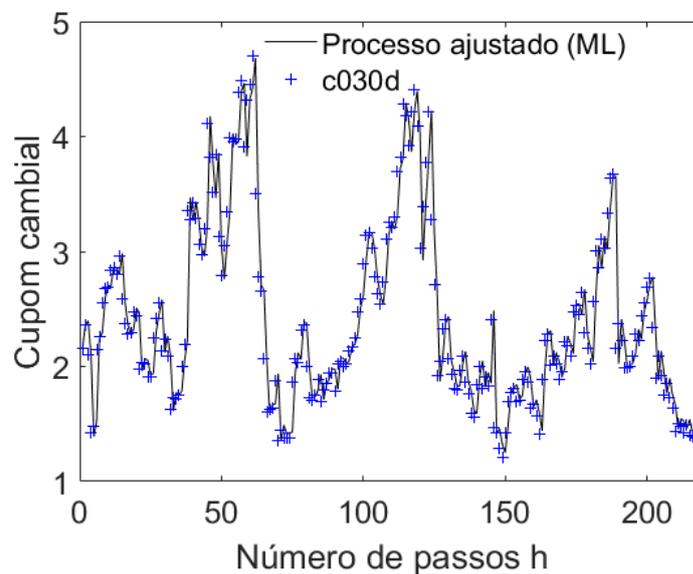
136     estimativa0 = [0.1,0.1];
137     lb = [-1,0.01];
138     ub = [1,inf];
139     [estimativa, fval, exitflag, output] = fmincon(
        @ErroQuadratico, estimativa0, Af, bf, Aeq, beq, lb, ub);
140
141     valores_S(indice_m) = fval;
142     matriz_estimativas_MinimosQuadrados(:, indice_m) =
        estimativa';
143     end
144     indice_m = indice_m + 1;
145     end
146     %Escolhe o índice de valores_m com menor erro quadrático
147     EQ_medio = valores_S./(T-valores_m-1);
148     [minimo_EQ_medio, indice_m_minEQ_medio] = min(EQ_medio);
149     indice_m0 = indice_m_minEQ_medio;
150
151     estimativa = matriz_estimativas_Levy(:, indice_m0);
152     estima_lambda = estimativa(1);
153     estima_a = estimativa(2);
154     estima_mu = estimativa(3);
155     estima_sigma = estimativa(4);
156
157     estimativa = matriz_estimativas_MinimosQuadrados(:,
        indice_m0);
158     estima_nu = estimativa(1);
159     estima_theta = estimativa(2);
160     estima_media_expflut = mean(v);
161     estima_phi_1 = ((1-estima_nu)*exp(-estima_theta*h)+2*
        estima_nu*cos(estima_theta*h));
162     estima_phi_2 = -estima_nu;
163     estima_phi_0 = estima_media_expflut*(1-estima_phi_1-
        estima_phi_2);
164     estima_b = ((estima_theta*estima_phi_0)/((1-estima_nu)
        *(1-exp(-estima_theta*h))))-estima_mu*estima_lambda;
165
166     estima_desvio_expflut = std(v);
167     estima_media_erro = mean(erro_simulado);
168     estima_desvio_erro = std(erro_simulado);
169     matriz_estimacoes(:, j)=[estima_nu; estima_theta;
        estima_lambda; estima_b; estima_a; estima_sigma;
        estima_mu; estima_media_expflut;
        estima_desvio_expflut; estima_media_erro;
        estima_desvio_erro; indice_m0; minimo_EQ_medio];
170     j=j+1
171     end

```

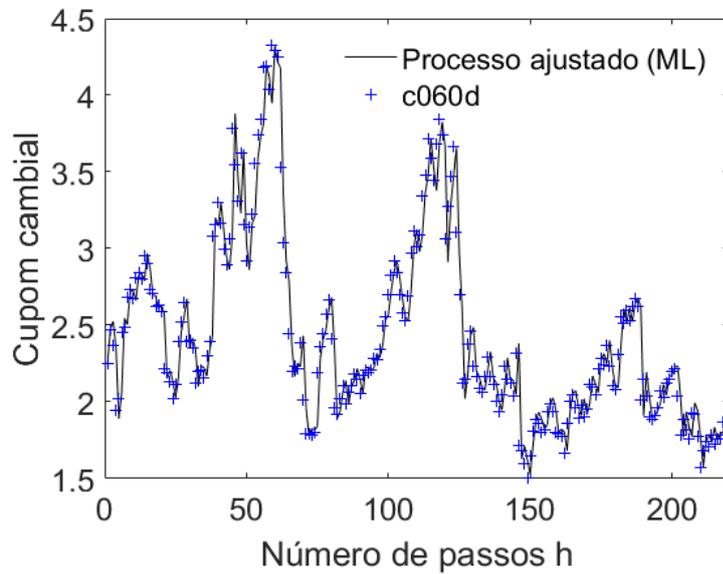
## Apêndice C

# Gráficos de Diagnóstico da Qualidade do Ajuste ao Cupom Cambial

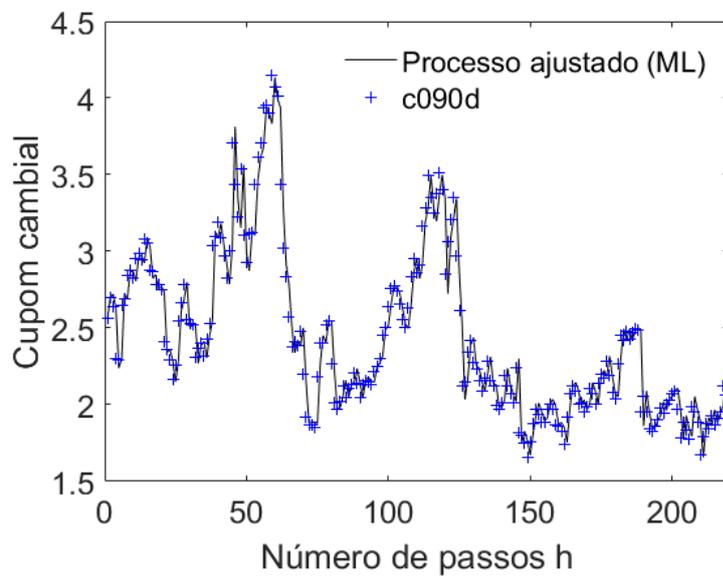
### C.1 Gráficos de Visualização do Ajuste



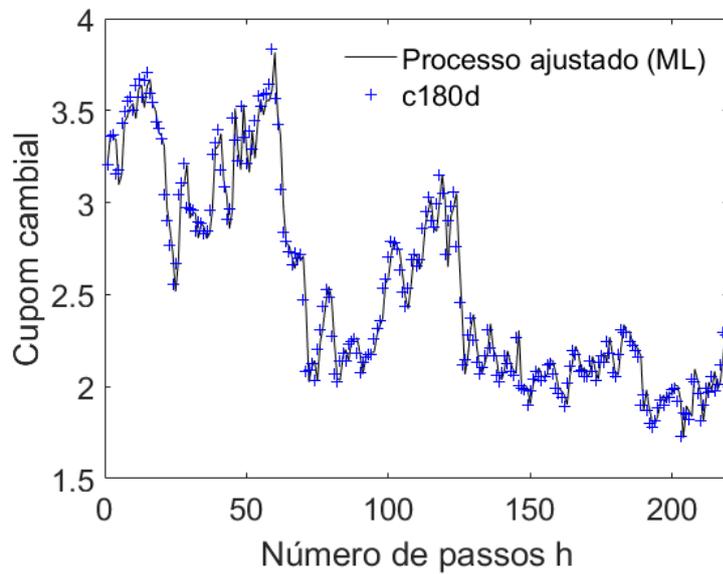
**Figura C.1:** Dados empíricos do cupom cambial de 30 dias (série *c030d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 1.



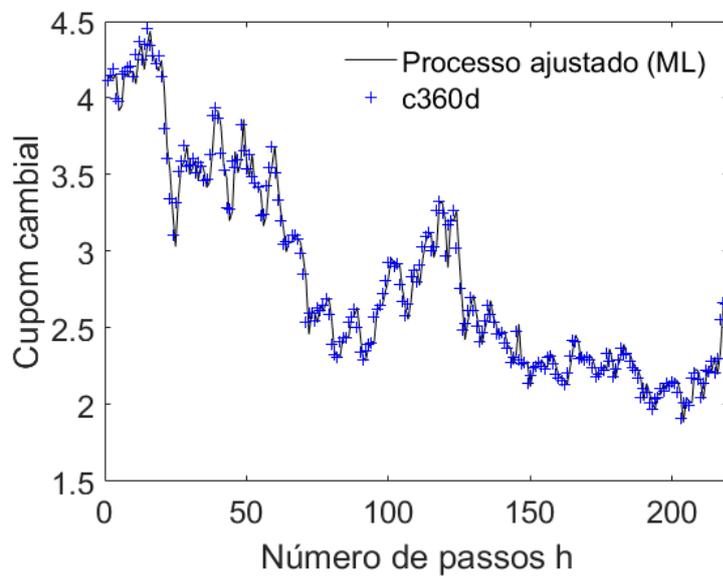
**Figura C.2:** Dados empíricos do cupom cambial de 60 dias (série *c060d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 1.



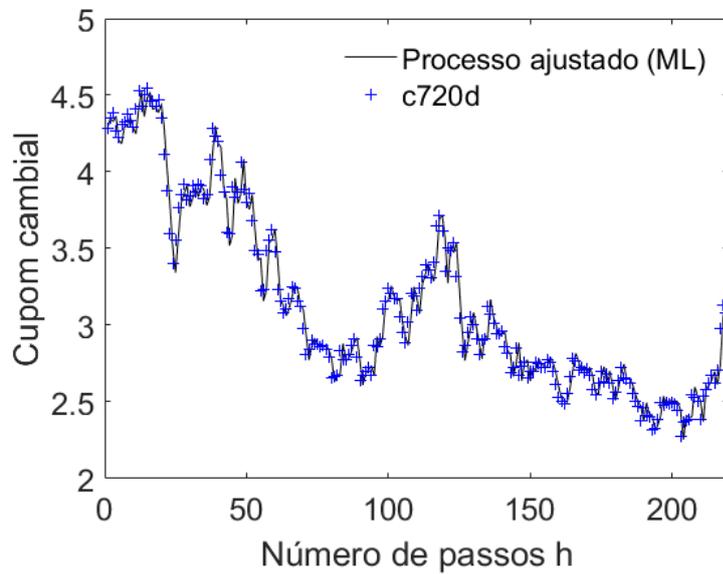
**Figura C.3:** Dados empíricos do cupom cambial de 90 dias (série *c090d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 1.



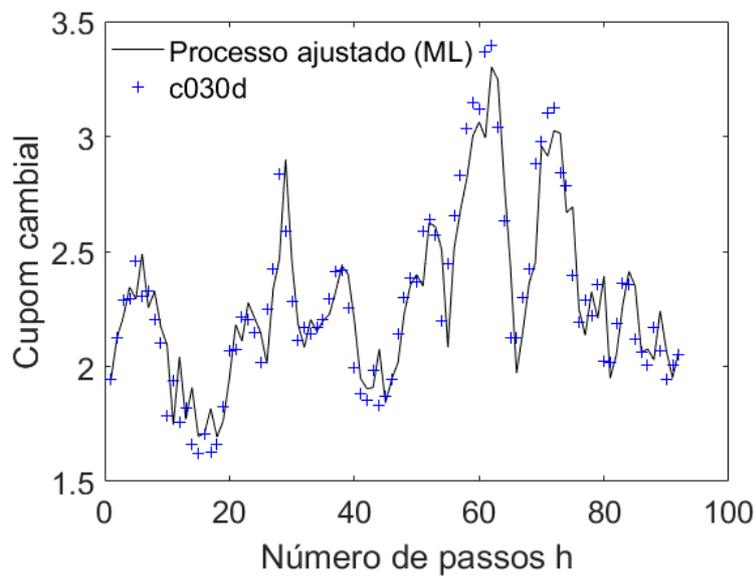
**Figura C.4:** Dados empíricos do cupom cambial de 1800 dias (série *c180d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 1.



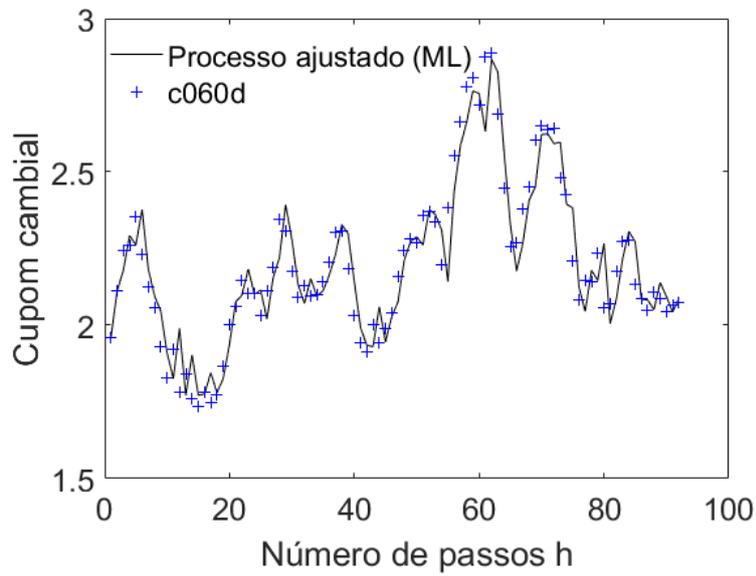
**Figura C.5:** Dados empíricos do cupom cambial de 30 dias (série *c360d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 1.



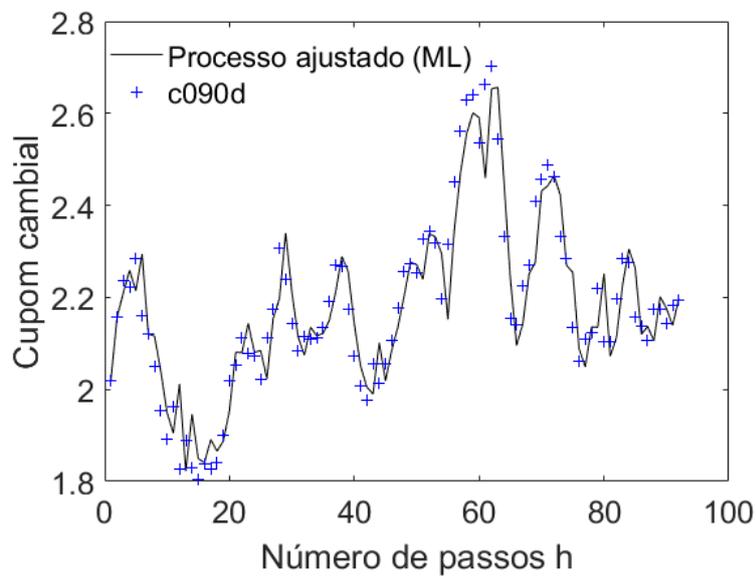
**Figura C.6:** Dados empíricos do cupom cambial de 720 dias (série *c720d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 1.



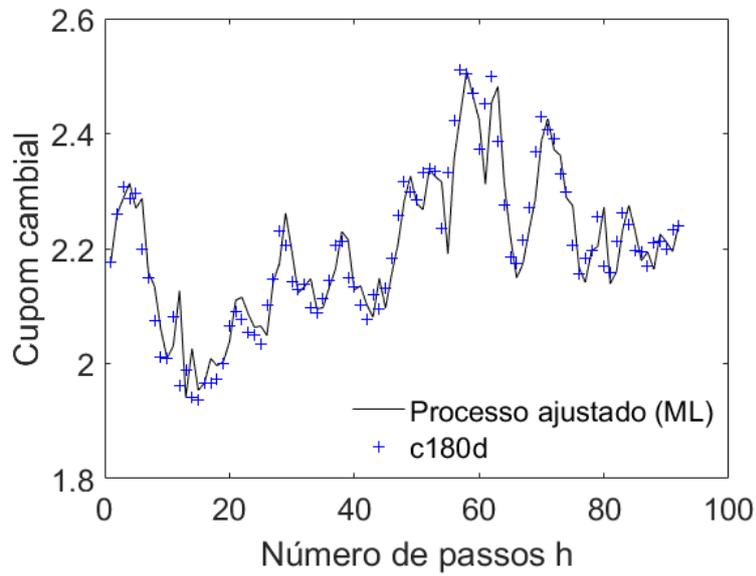
**Figura C.7:** Dados empíricos do cupom cambial de 30 dias (série *c030d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 3.



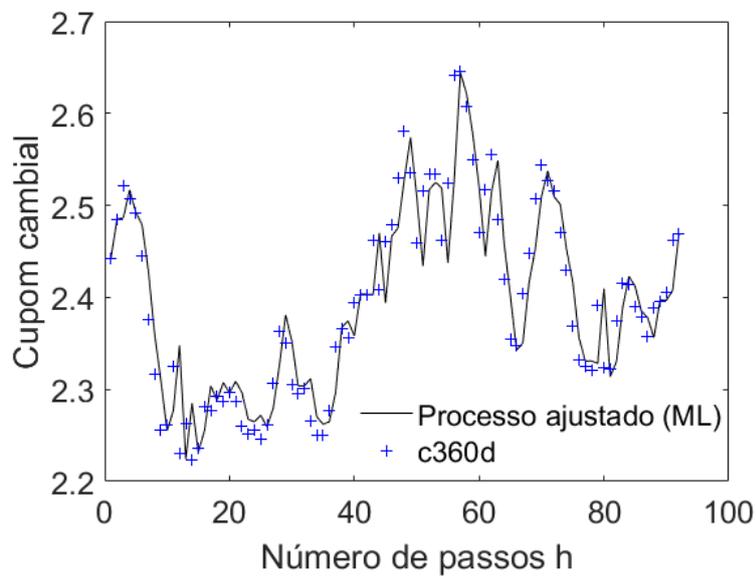
**Figura C.8:** Dados empíricos do cupom cambial de 60 dias (série *c060d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 3.



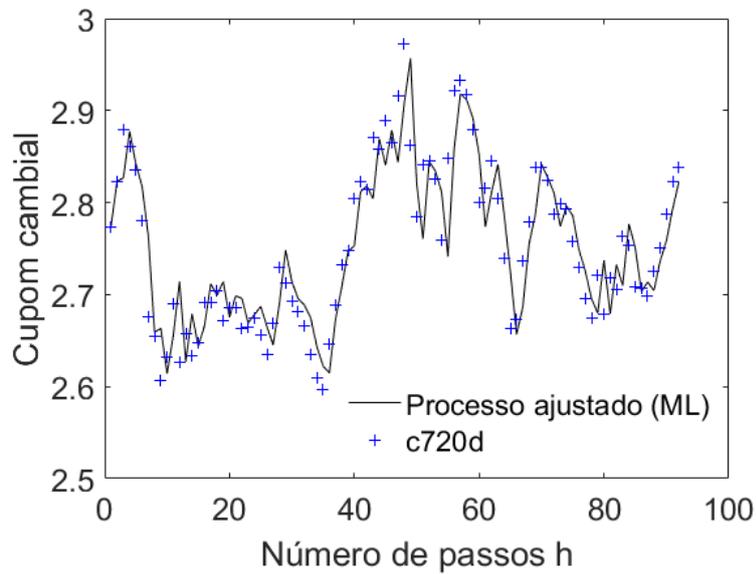
**Figura C.9:** Dados empíricos do cupom cambial de 90 dias (série *c090d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 3.



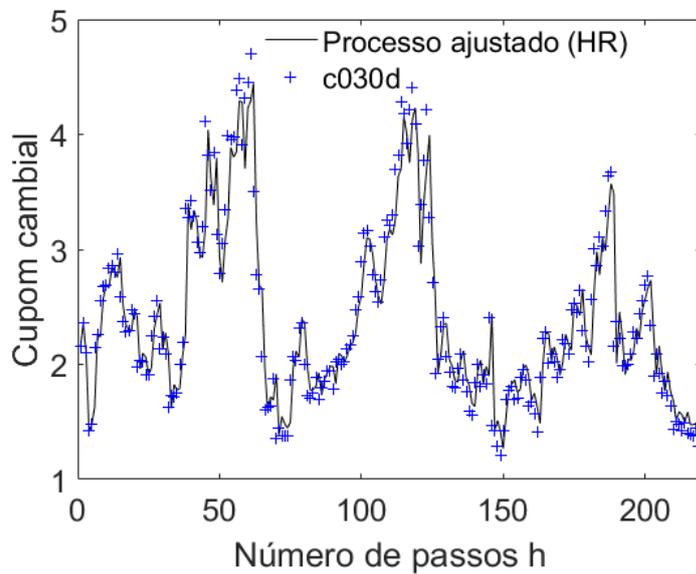
**Figura C.10:** Dados empíricos do cupom cambial de 1800 dias (série *c180d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 3.



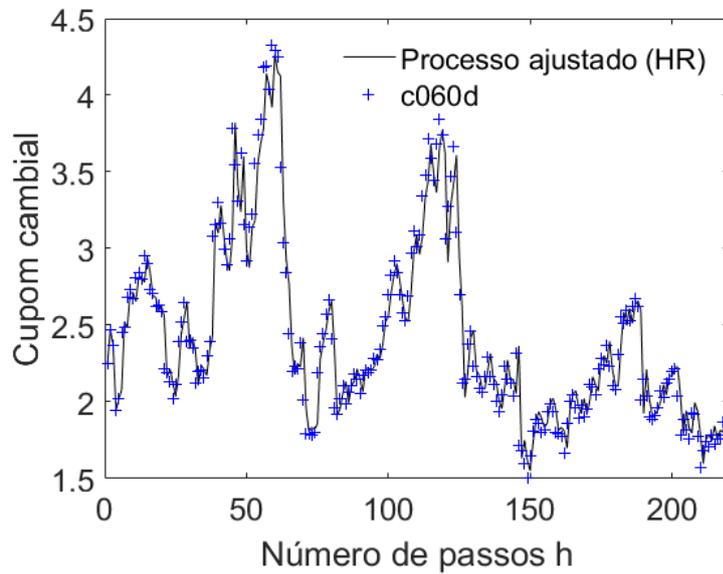
**Figura C.11:** Dados empíricos do cupom cambial de 30 dias (série *c360d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 3.



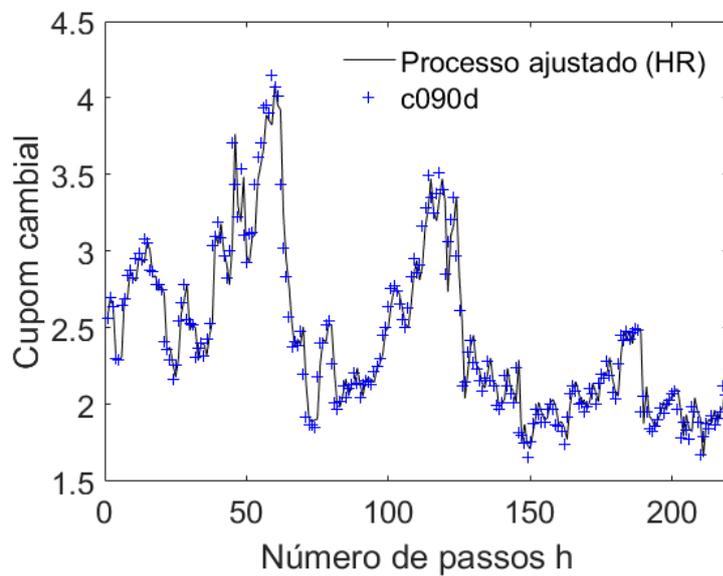
**Figura C.12:** Dados empíricos do cupom cambial de 720 dias (série *c720d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a relação de recorrência estimada por máxima verossimilhança na Amostra 3.



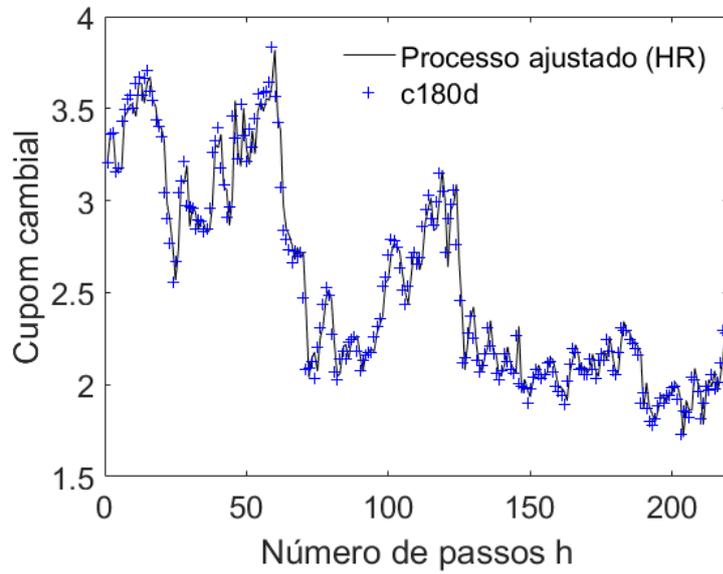
**Figura C.13:** Dados empíricos do cupom cambial de 30 dias (série *c030d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 1.



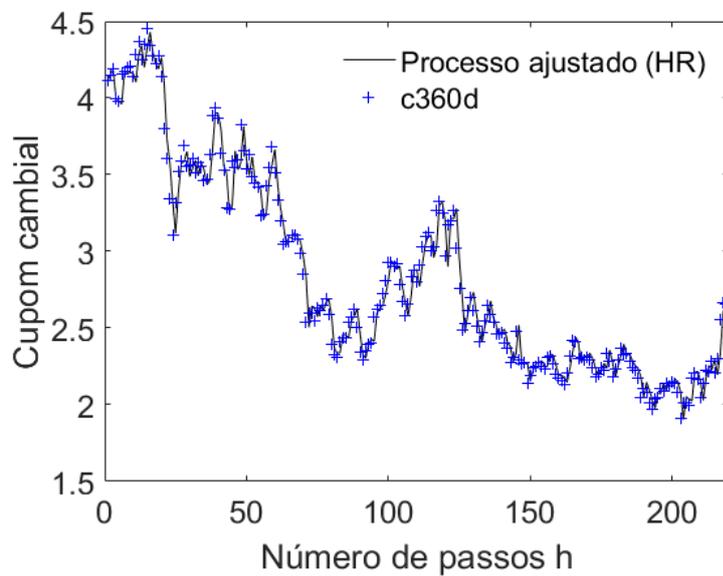
**Figura C.14:** Dados empíricos do cupom cambial de 60 dias (série  $c060d$ ) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 1.



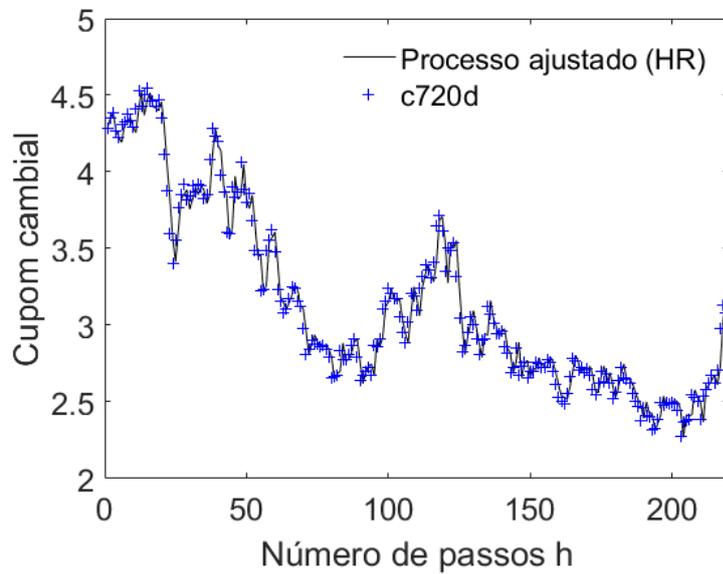
**Figura C.15:** Dados empíricos do cupom cambial de 90 dias (série  $c090d$ ) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 1.



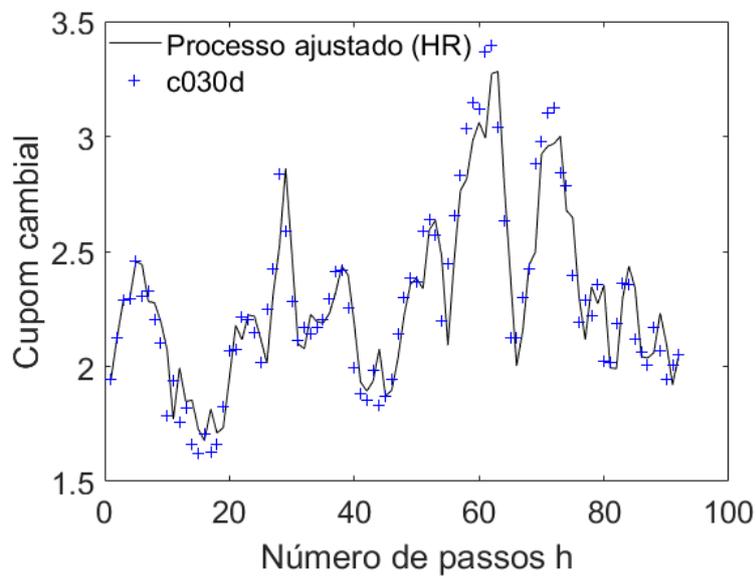
**Figura C.16:** Dados empíricos do cupom cambial de 1800 dias (série *c180d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 1.



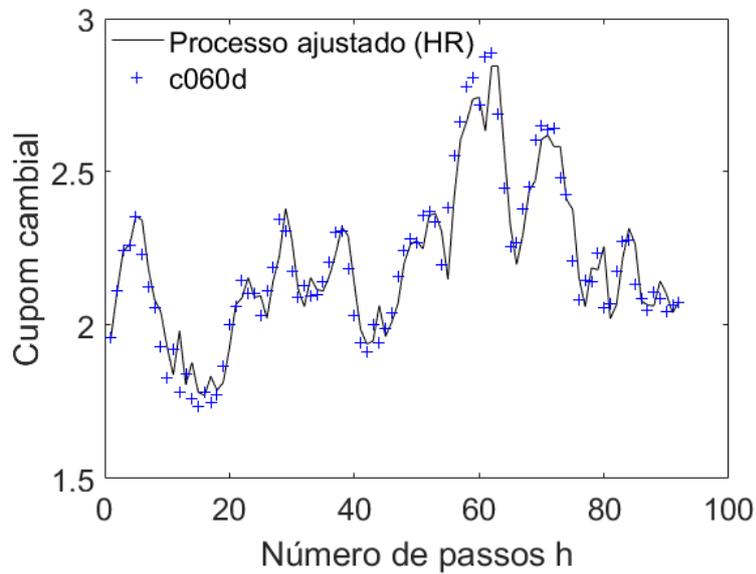
**Figura C.17:** Dados empíricos do cupom cambial de 30 dias (série *c360d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 1.



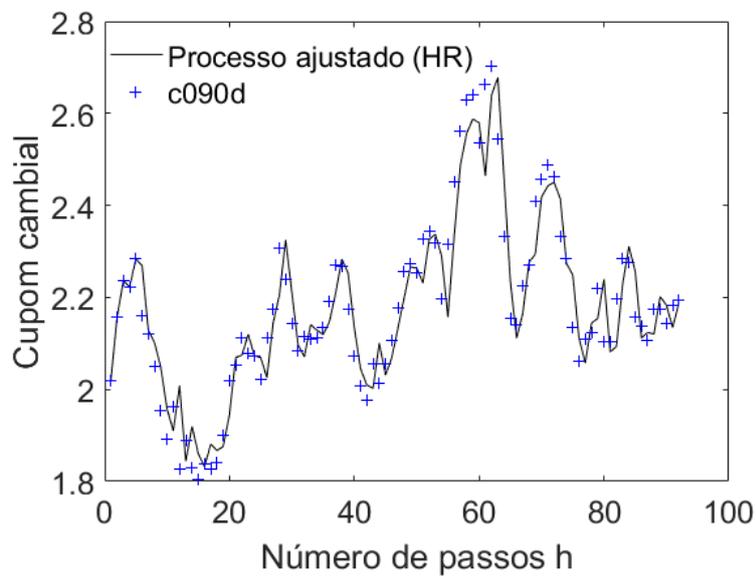
**Figura C.18:** Dados empíricos do cupom cambial de 720 dias (série  $c720d$ ) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 1.



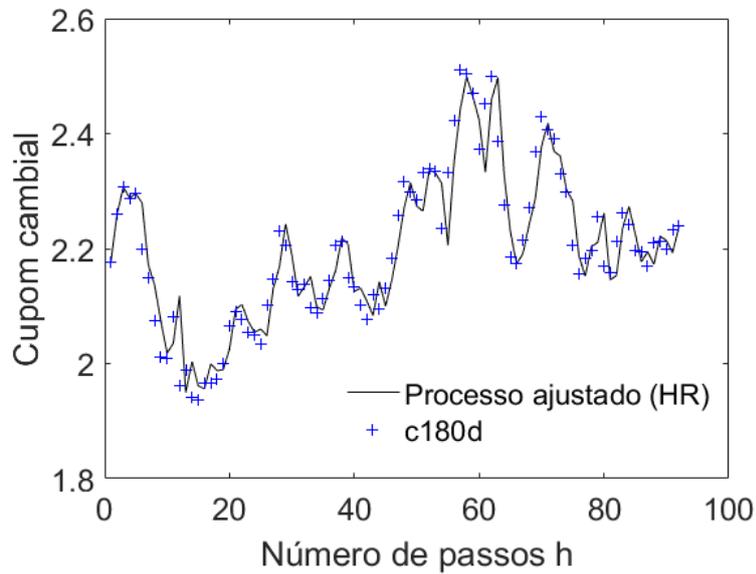
**Figura C.19:** Dados empíricos do cupom cambial de 30 dias (série  $c030d$ ) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 3.



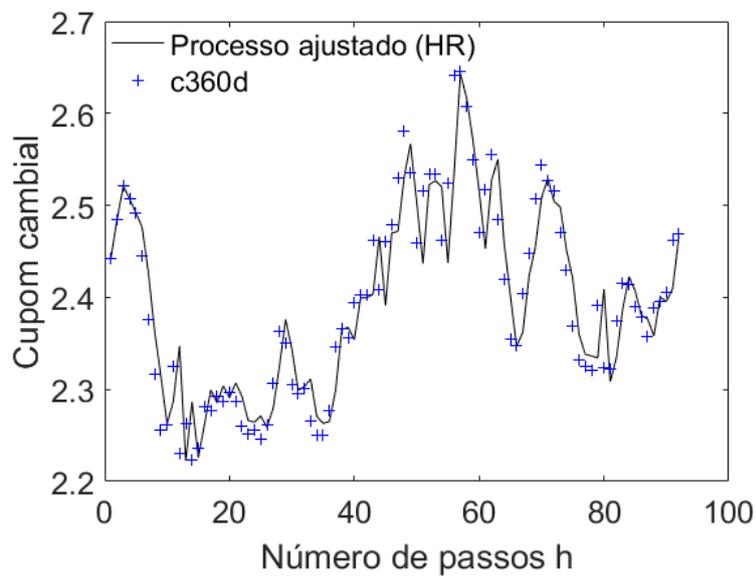
**Figura C.20:** Dados empíricos do cupom cambial de 60 dias (série *c060d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 3.



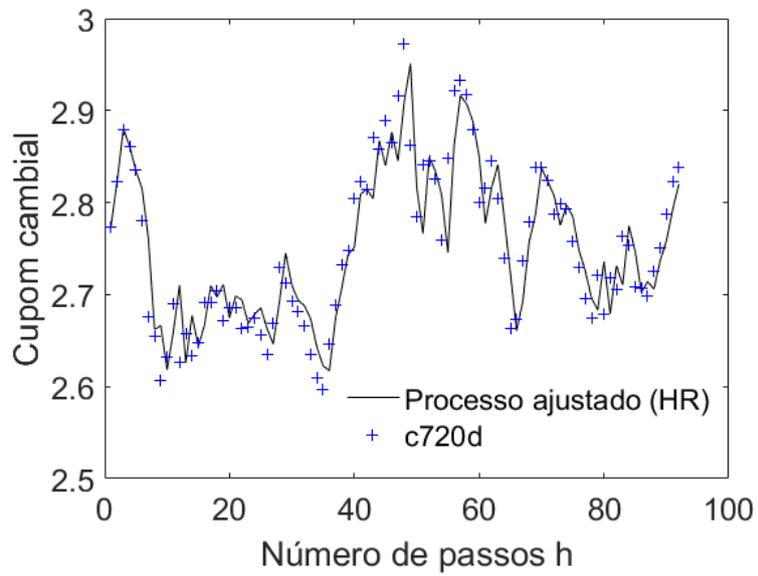
**Figura C.21:** Dados empíricos do cupom cambial de 90 dias (série *c090d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 3.



**Figura C.22:** Dados empíricos do cupom cambial de 1800 dias (série *c180d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 3.

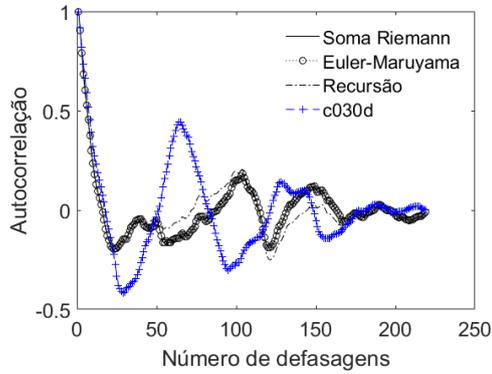


**Figura C.23:** Dados empíricos do cupom cambial de 30 dias (série *c360d*) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 3.

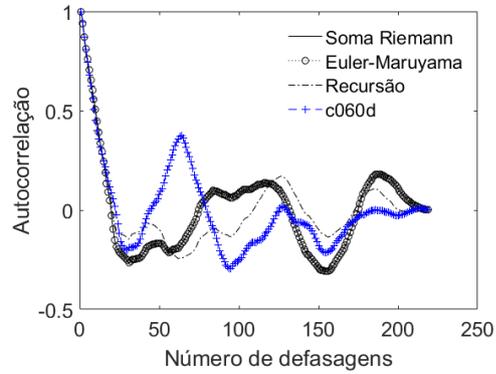


**Figura C.24:** Dados empíricos do cupom cambial de 720 dias (série  $c720d$ ) e ajuste do processo de OUG Exponencial Flutuante utilizando a representação ARMA estimada por Hannan-Rissanen na Amostra 3.

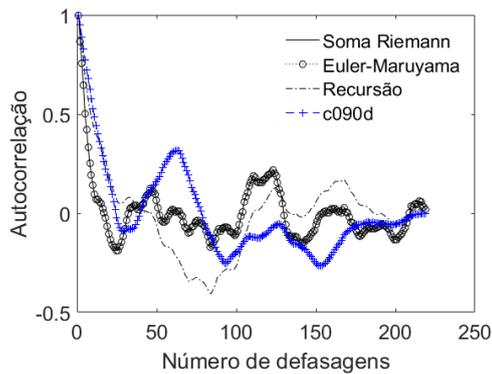
## C.2 Gráficos da Análise de Autocorrelação



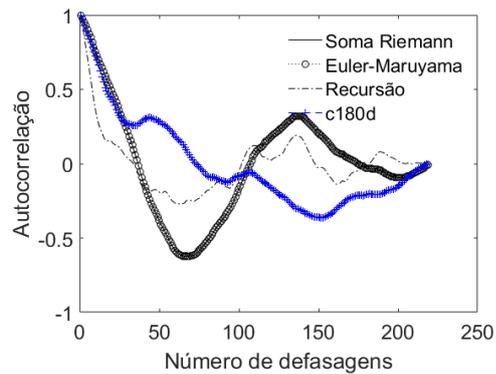
(a) Prazo de 30 dias.



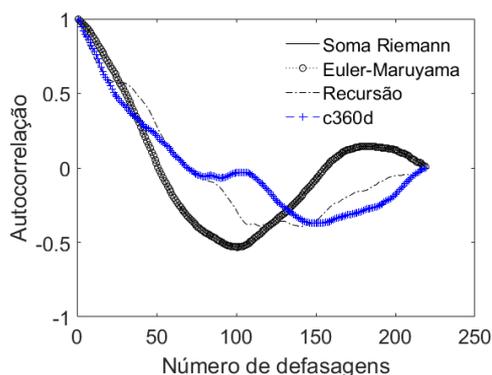
(b) Prazo de 60 dias.



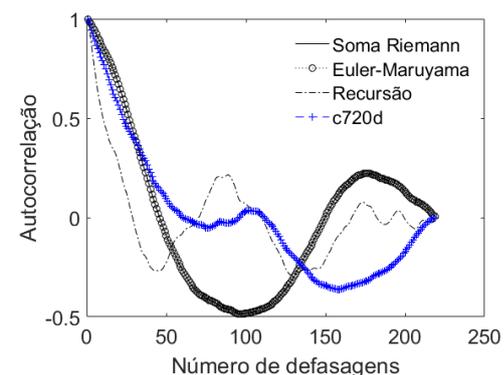
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

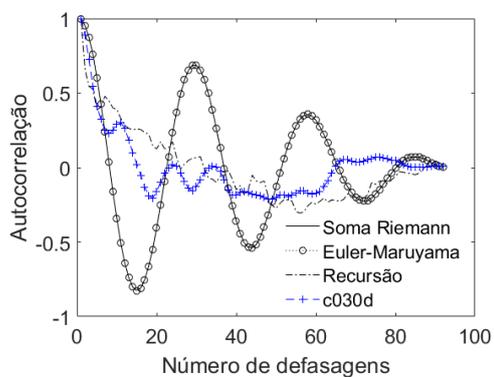


(e) Prazo de 360 dias.

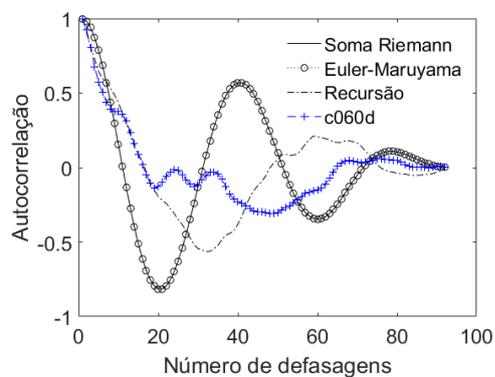


(f) Prazo de 720 dias.

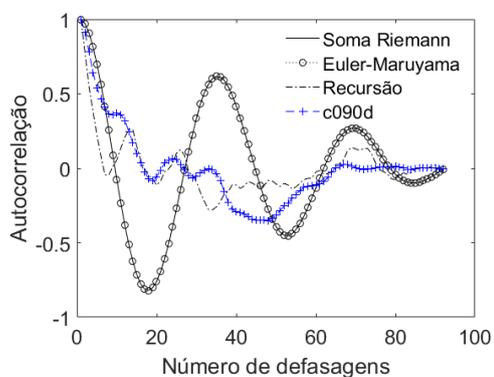
**Tabela C.1:** Funções de autocorrelação das séries do cupom cambial e de exemplos de trajetórias simuladas com ruído de Lévy  $\alpha$ -estável para a Amostra 1.



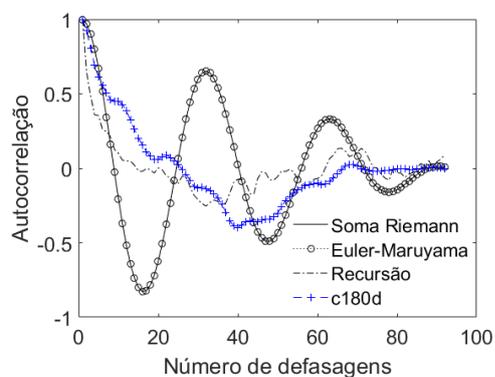
(a) Prazo de 30 dias.



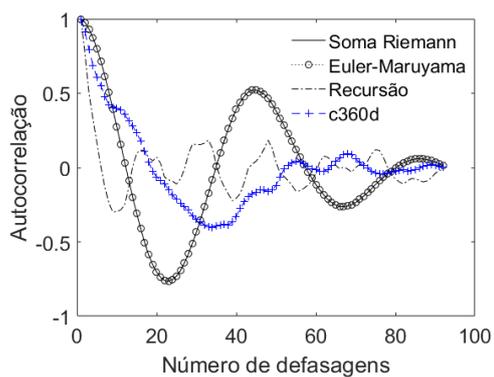
(b) Prazo de 60 dias.



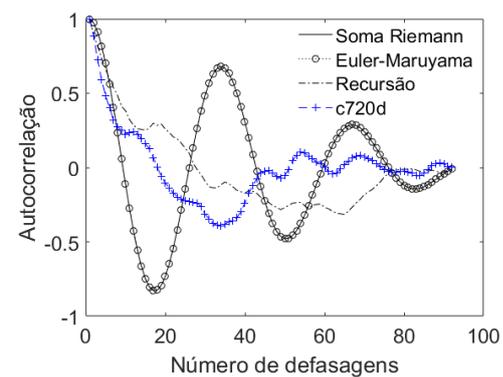
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

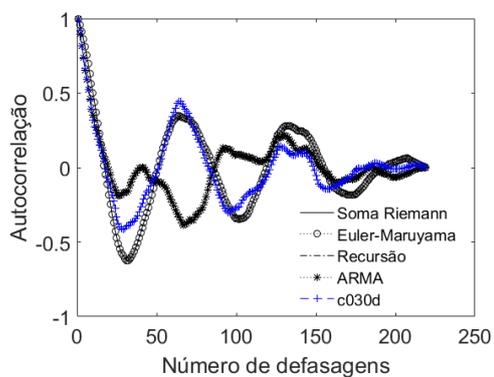


(e) Prazo de 360 dias.

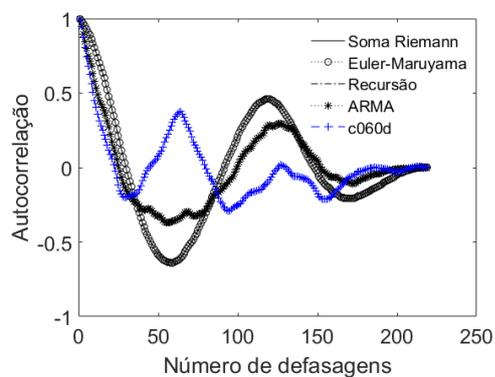


(f) Prazo de 720 dias.

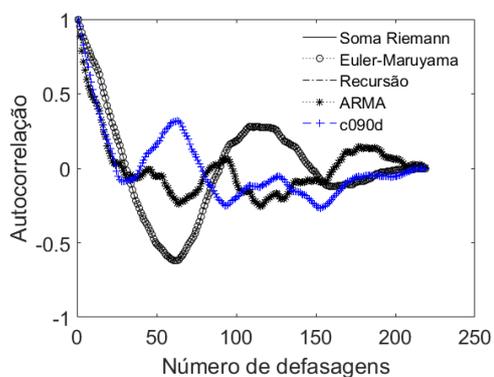
**Tabela C.2:** Funções de autocorrelação das séries do cupom cambial e de exemplos de trajetórias simuladas com ruído de Lévy  $\alpha$ -estável para a Amostra 3.



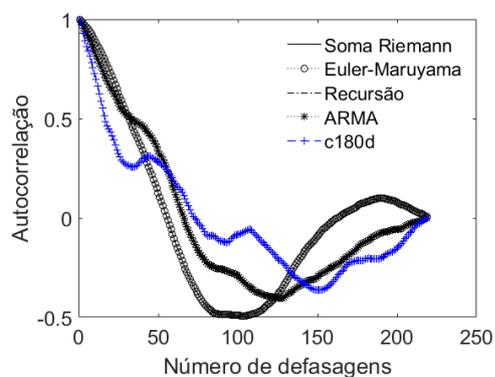
(a) Prazo de 30 dias.



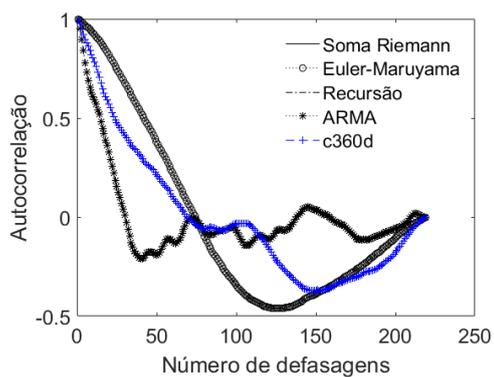
(b) Prazo de 60 dias.



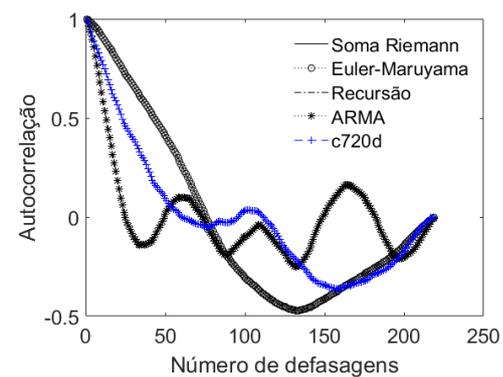
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

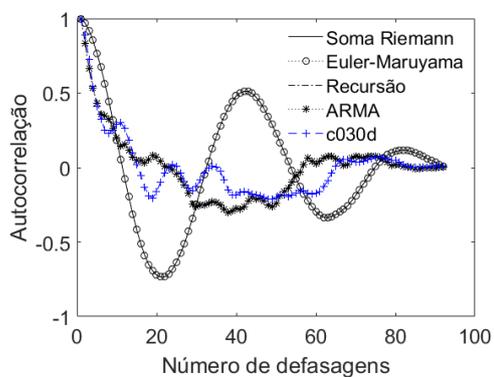


(e) Prazo de 360 dias.

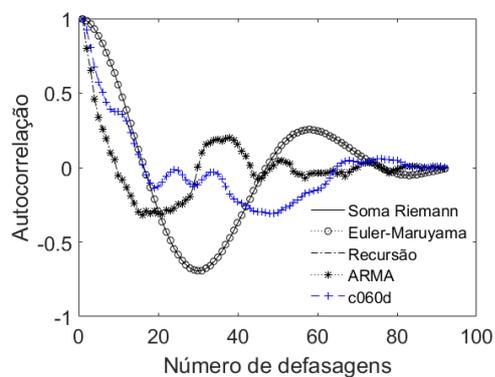


(f) Prazo de 720 dias.

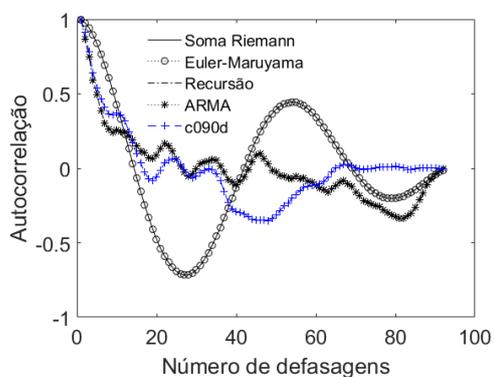
**Tabela C.3:** Funções de autocorrelação das séries do cupom cambial e de exemplos de trajetórias simuladas com ruído de Lévy dado por difusão com salto para a Amostra 1.



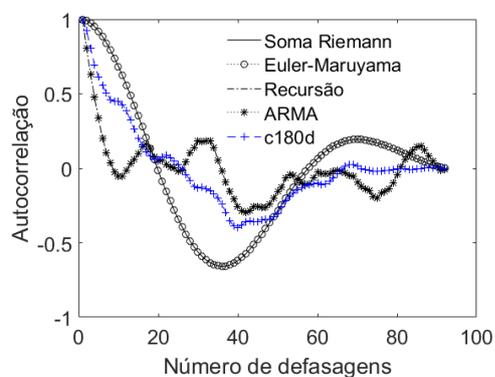
(a) Prazo de 30 dias.



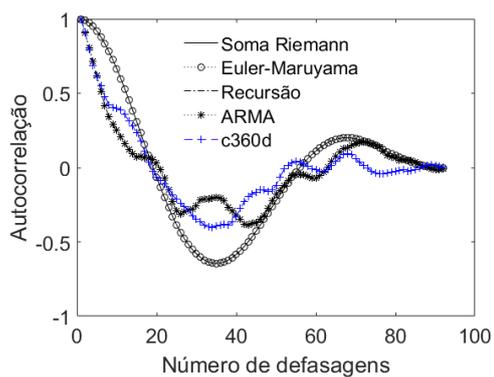
(b) Prazo de 60 dias.



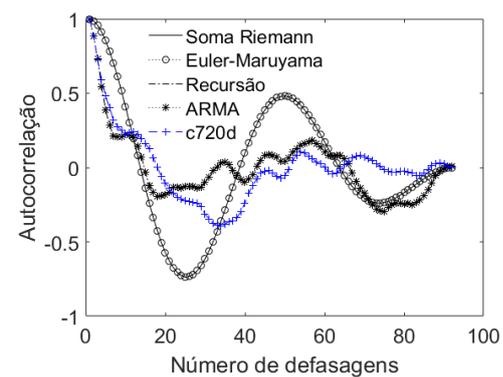
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

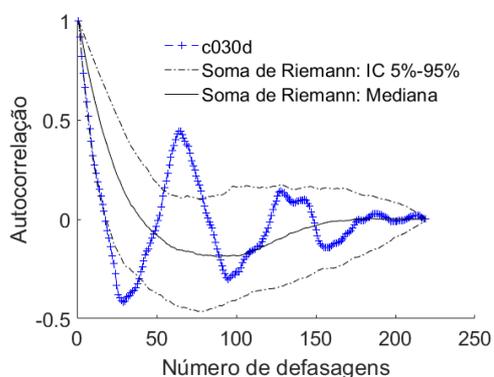


(e) Prazo de 360 dias.

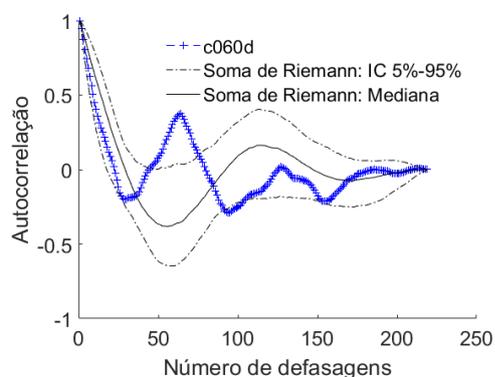


(f) Prazo de 720 dias.

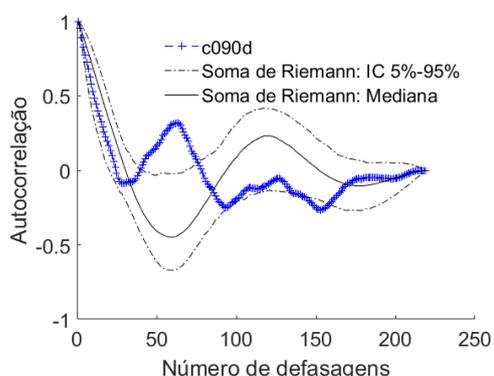
**Tabela C.4:** Funções de autocorrelação das séries do cupom cambial e de exemplos de trajetórias simuladas com ruído de Lévy dado por difusão com salto para a Amostra 3.



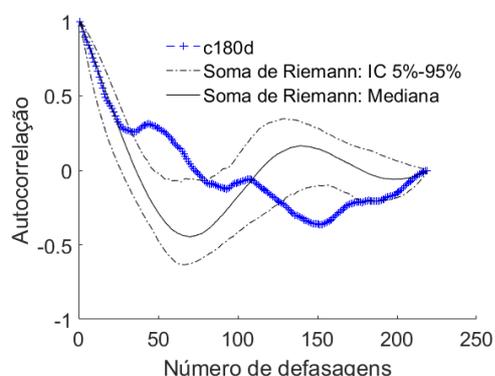
(a) Prazo de 30 dias.



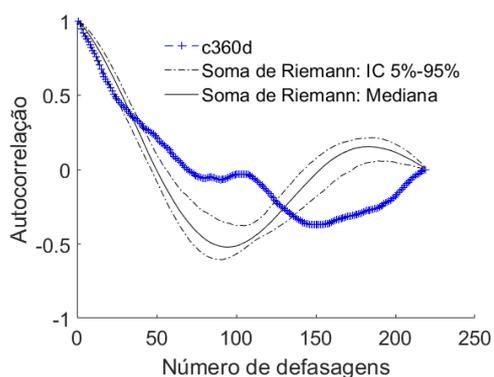
(b) Prazo de 60 dias.



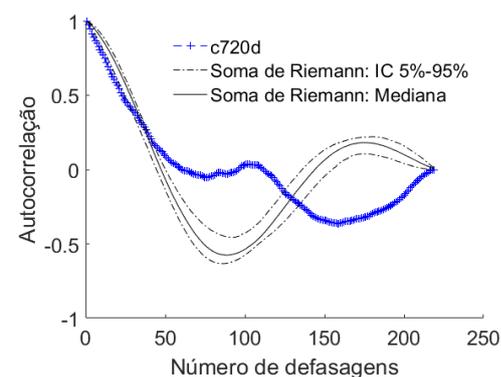
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

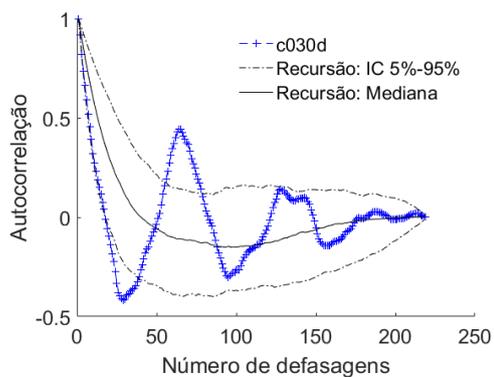


(e) Prazo de 360 dias.

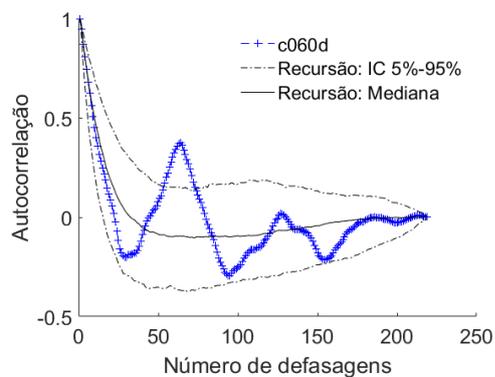


(f) Prazo de 720 dias.

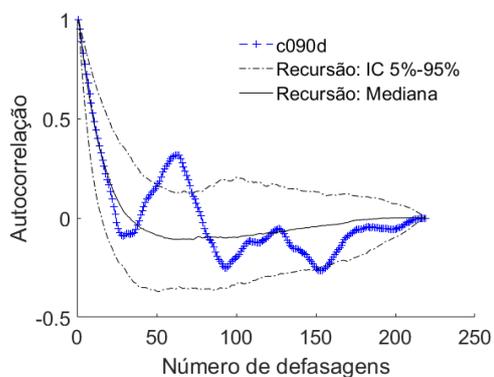
**Tabela C.5:** Intervalos de confiança para a função de autocorrelação empírica das séries do cupom cambial na Amostra 1 dados pelos quantis de 5% e 95% da autocorrelação de 1000 trajetórias simuladas por soma de Riemann-Stieltjes com ruído de Lévy  $\alpha$ -estável.



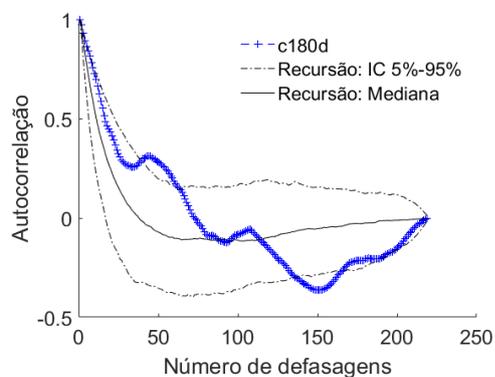
(a) Prazo de 30 dias.



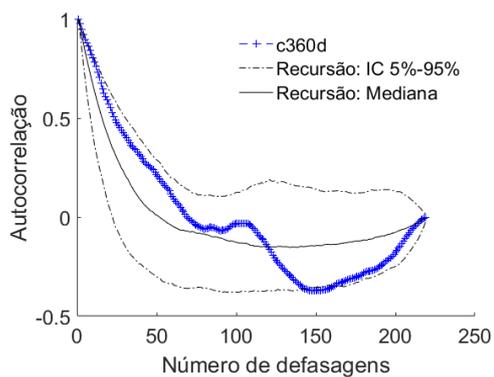
(b) Prazo de 60 dias.



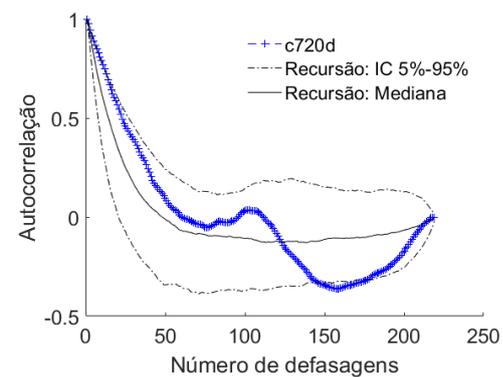
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

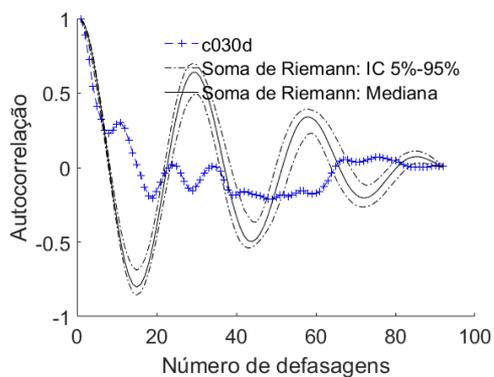


(e) Prazo de 360 dias.

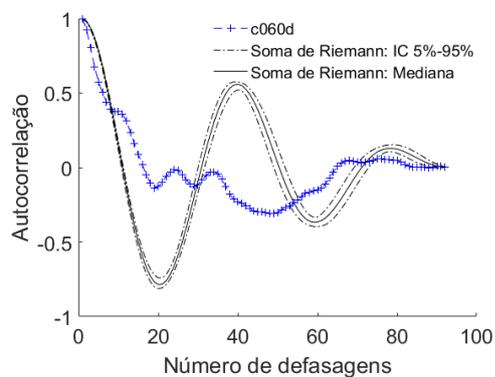


(f) Prazo de 720 dias.

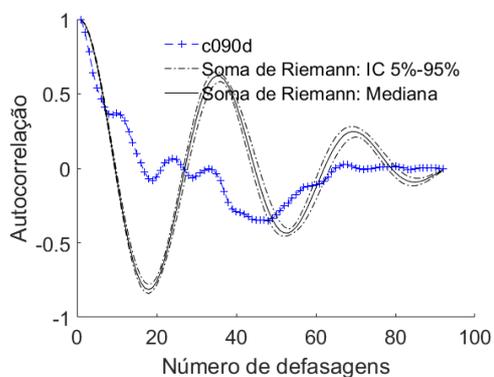
**Tabela C.6:** Intervalos de confiança para a função de autocorrelação empírica das séries do cupom cambial na Amostra 1 dados pelos quantis 5% e 95% da autocorrelação de 1000 trajetórias simuladas por recursão com ruído de Lévy  $\alpha$ -estável.



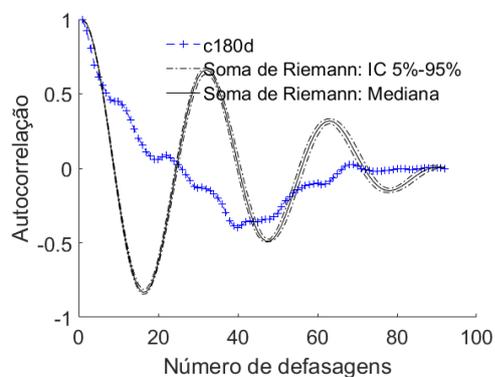
(a) Prazo de 30 dias.



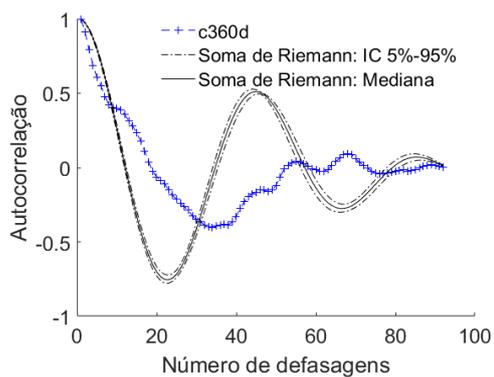
(b) Prazo de 60 dias.



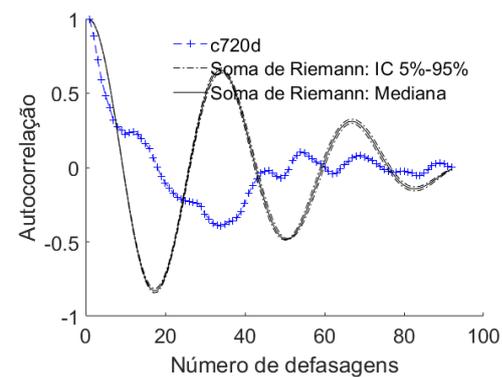
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

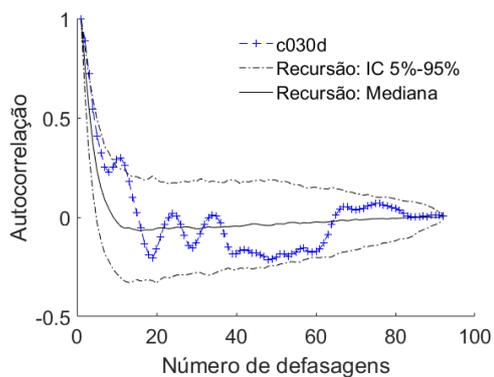


(e) Prazo de 360 dias.

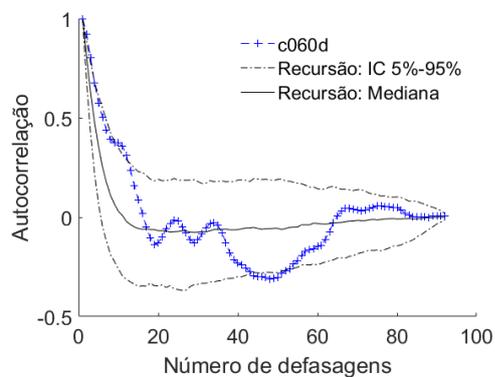


(f) Prazo de 720 dias.

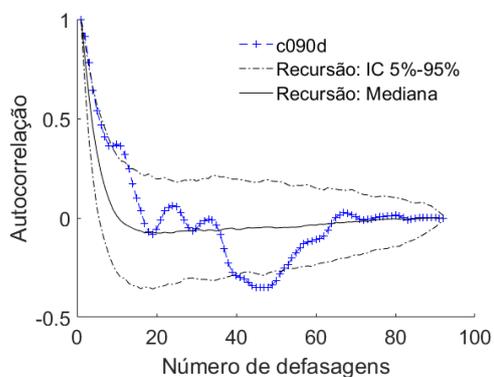
**Tabela C.7:** Intervalos de confiança para a função de autocorrelação empírica das séries do cupom cambial na Amostra 3 dados pelos quantis de 5% e 95% da autocorrelação de 1000 trajetórias simuladas por soma de Riemann-Stieltjes com ruído de Lévy  $\alpha$ -estável.



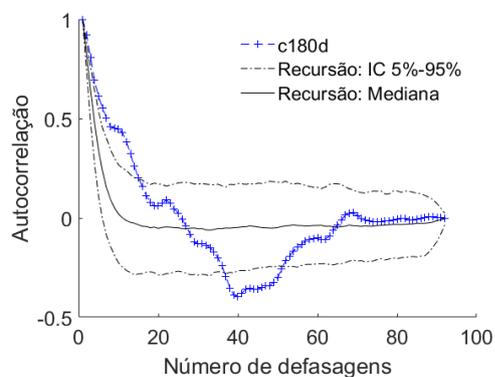
(a) Prazo de 30 dias.



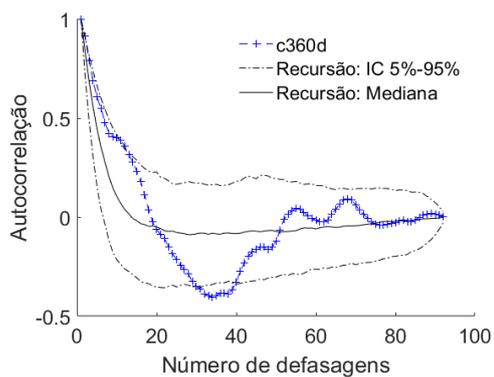
(b) Prazo de 60 dias.



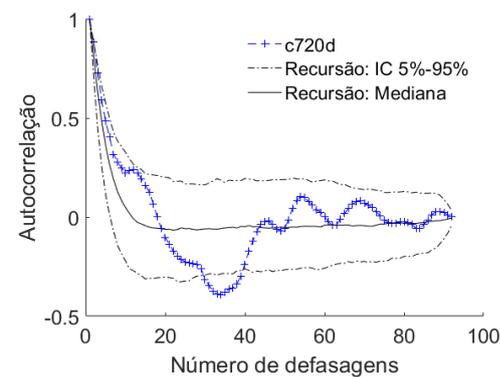
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

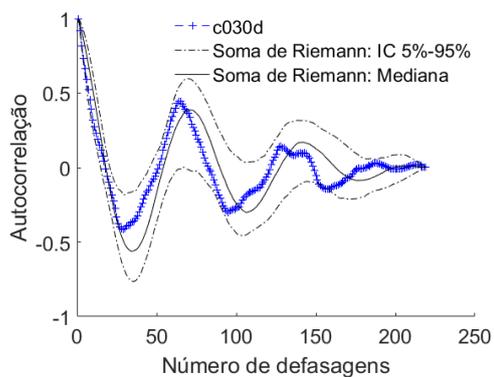


(e) Prazo de 360 dias.

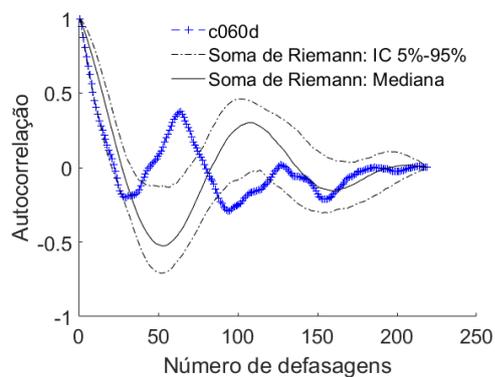


(f) Prazo de 720 dias.

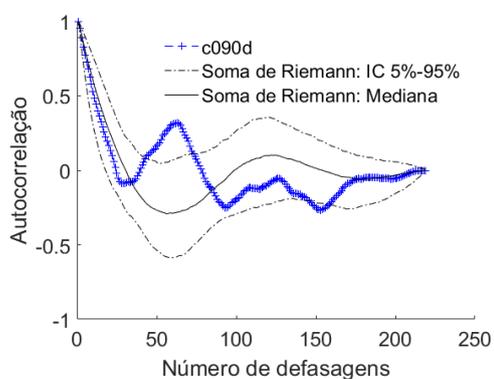
**Tabela C.8:** Intervalos de confiança para a função de autocorrelação empírica das séries do cupom cambial na Amostra 3 dados pelos quantis de 5% e 95% da autocorrelação de 1000 trajetórias simuladas por recursão com ruído de Lévy  $\alpha$ -estável.



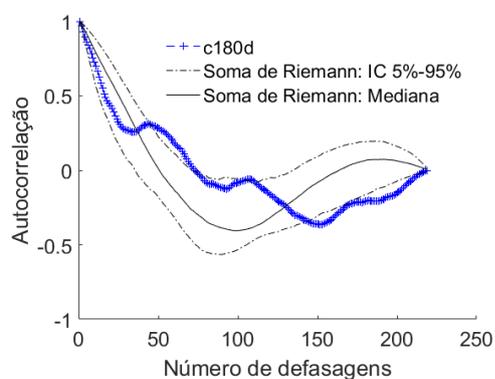
(a) Prazo de 30 dias.



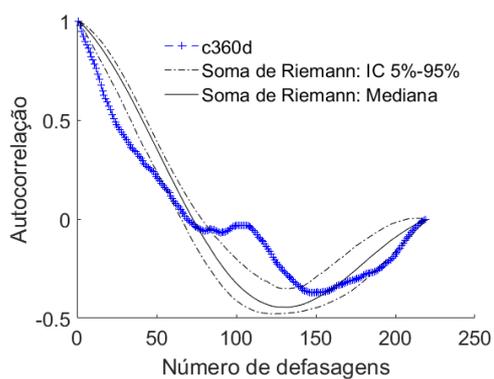
(b) Prazo de 60 dias.



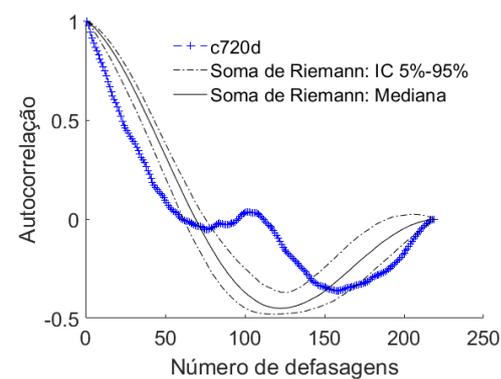
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

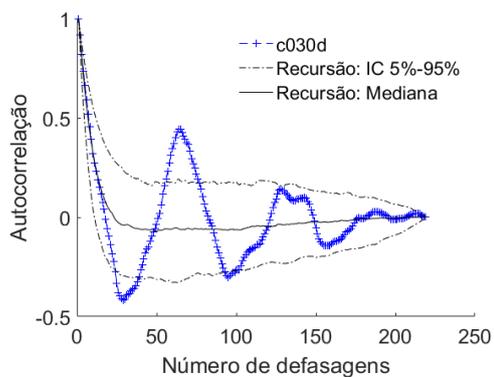


(e) Prazo de 360 dias.

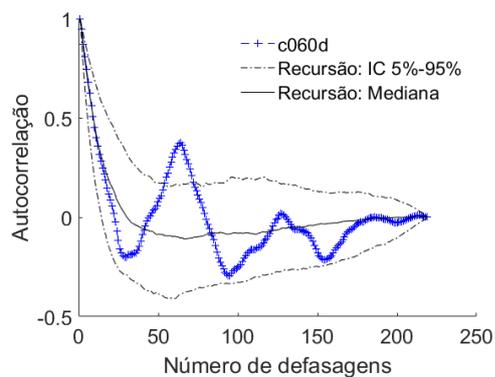


(f) Prazo de 720 dias.

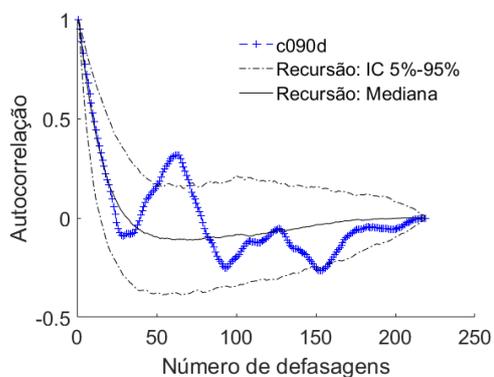
**Tabela C.9:** Intervalos de confiança para a função de autocorrelação empírica das séries do cupom cambial na Amostra 1 dados pelos quantis de 5% e 95% da autocorrelação de 1000 trajetórias simuladas por soma de Riemann-Stieltjes com ruído de Lévy dado por difusão com salto.



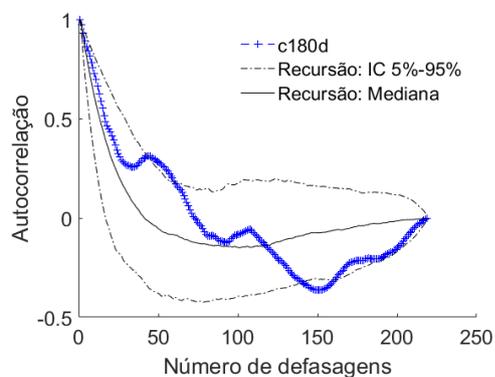
(a) Prazo de 30 dias.



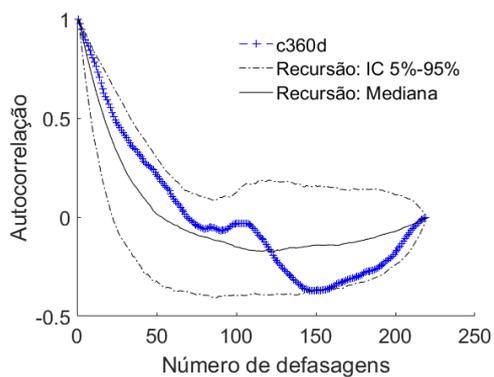
(b) Prazo de 60 dias.



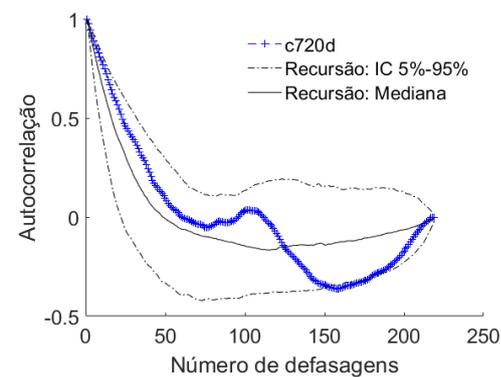
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

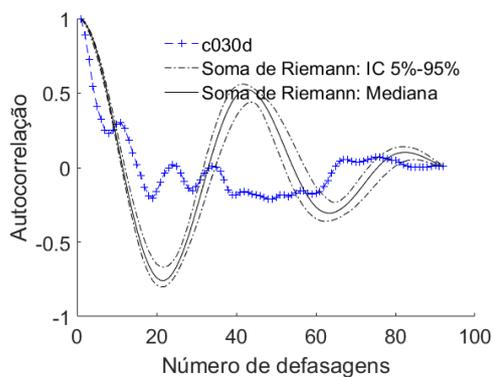


(e) Prazo de 360 dias.

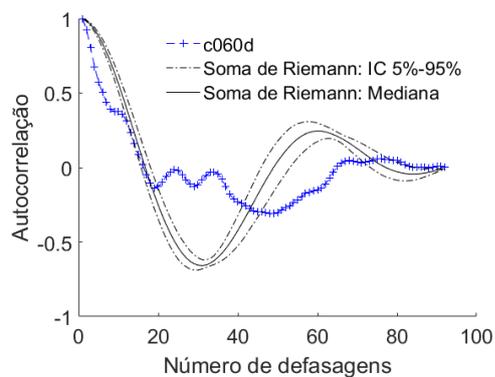


(f) Prazo de 720 dias.

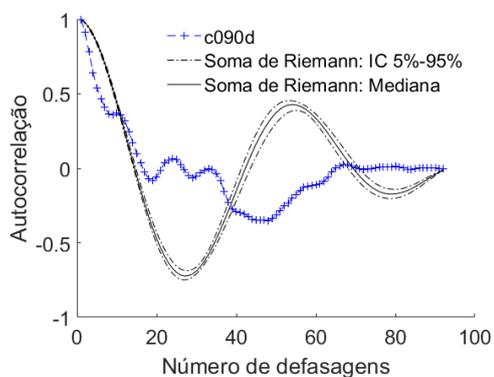
**Tabela C.10:** Intervalos de confiança para a função de autocorrelação empírica das séries do cupom cambial na Amostra 1 dados pelos quantis de 5% e 95% da autocorrelação de 1000 trajetórias simuladas por recursão com ruído de Lévy dado por difusão com salto.



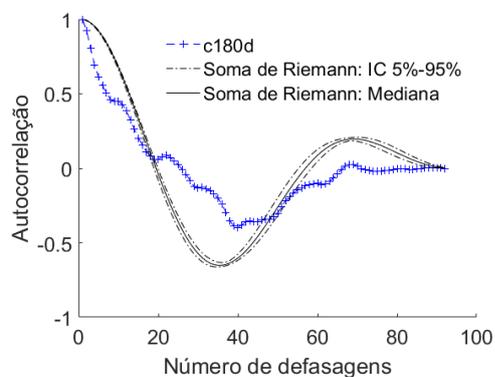
(a) Prazo de 30 dias.



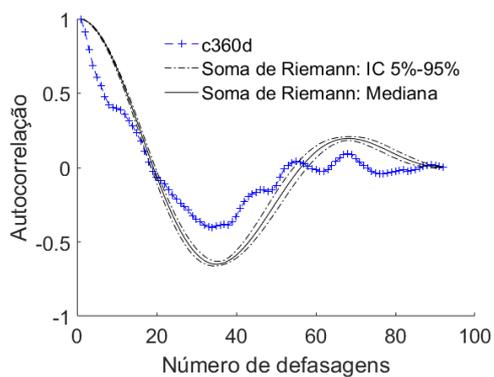
(b) Prazo de 60 dias.



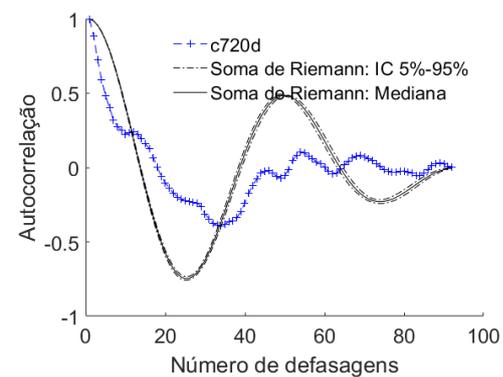
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

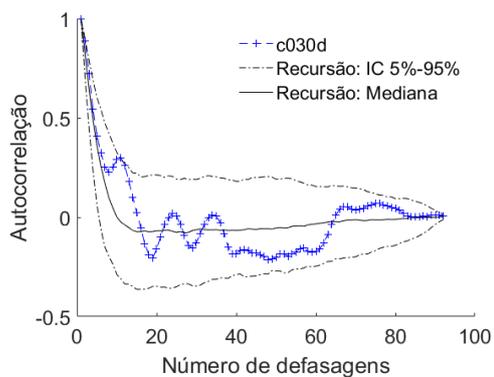


(e) Prazo de 360 dias.

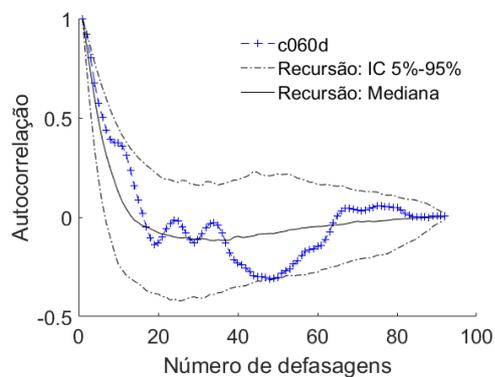


(f) Prazo de 720 dias.

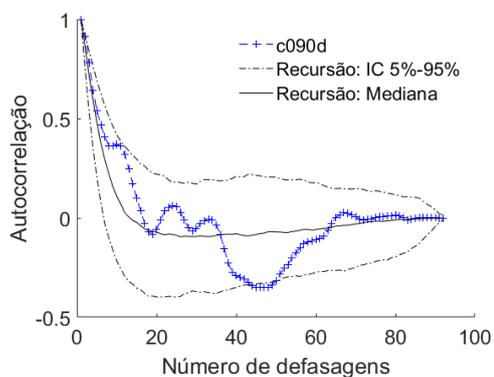
**Tabela C.11:** Intervalos de confiança para a função de autocorrelação empírica das séries do cupom cambial na Amostra 3 dados pelos quantis de 5% e 95% da autocorrelação de 1000 trajetórias simuladas por soma de Riemann-Stieltjes com ruído de Lévy dado por difusão com salto.



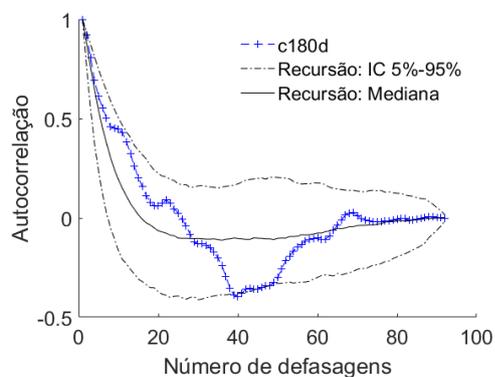
(a) Prazo de 30 dias.



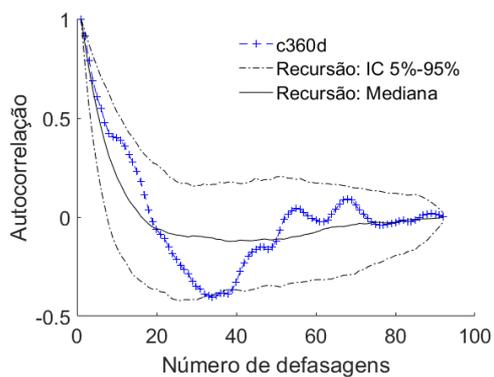
(b) Prazo de 60 dias.



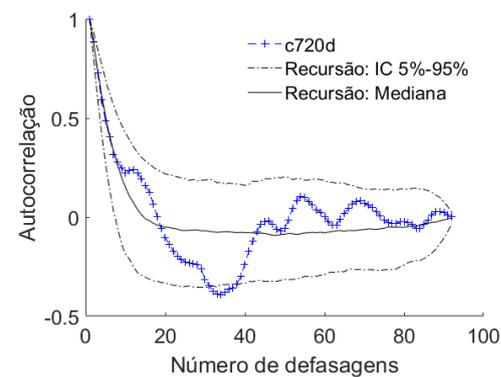
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.



(e) Prazo de 360 dias.

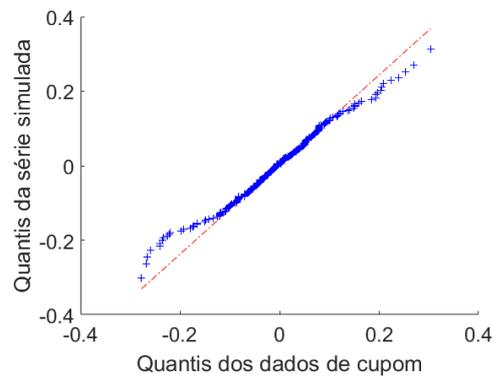
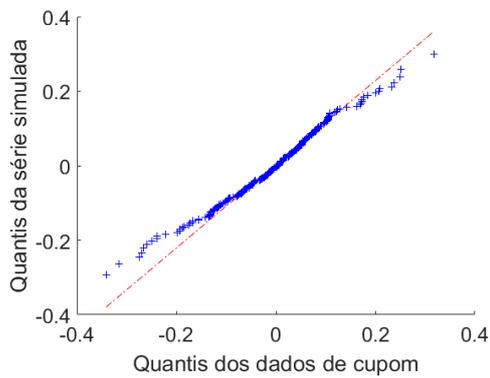
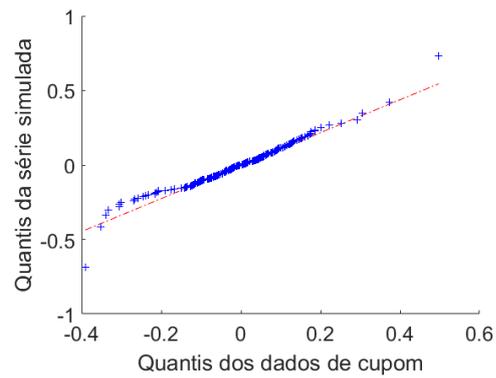
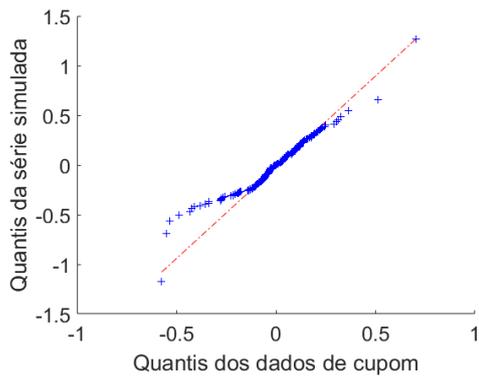
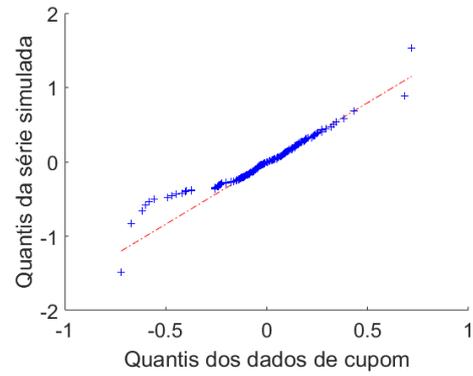
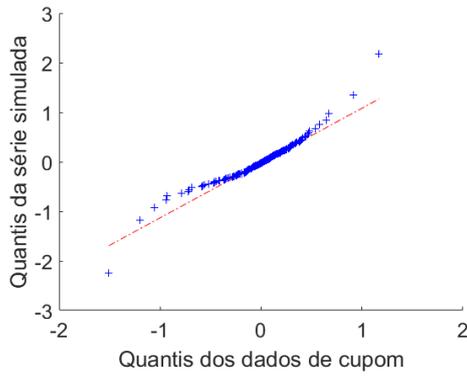


(f) Prazo de 720 dias.

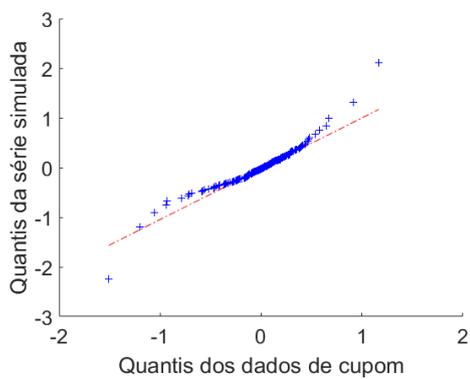
**Tabela C.12:** Intervalos de confiança para a função de autocorrelação empírica das séries do cupom cambial na Amostra 3 dados pelos quantis de 5% e 95% da autocorrelação de 1000 trajetórias simuladas por recursão com ruído de Lévy dado por difusão com salto.

## C.3 Gráficos da Análise Não-Paramétrica

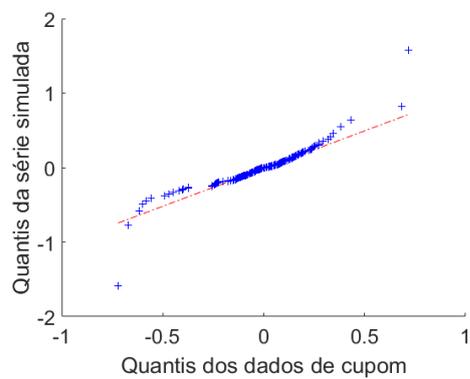
### C.3.1 Estimação por Máxima Verossimilhança



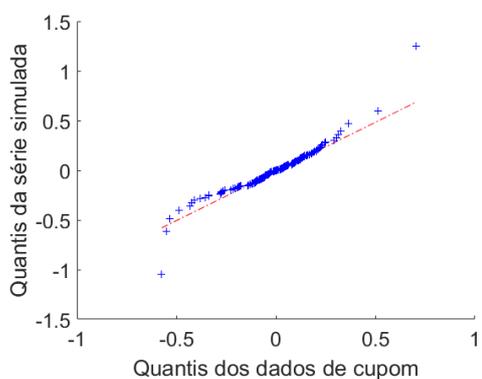
**Tabela C.13:** Gráficos quantil a quantil das distribuições em primeira diferença do cupom cambial e da série simulada por soma de Riemann para a Amostra 1.



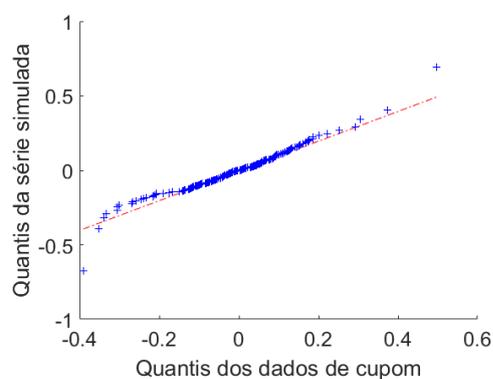
(a) Prazo de 30 dias.



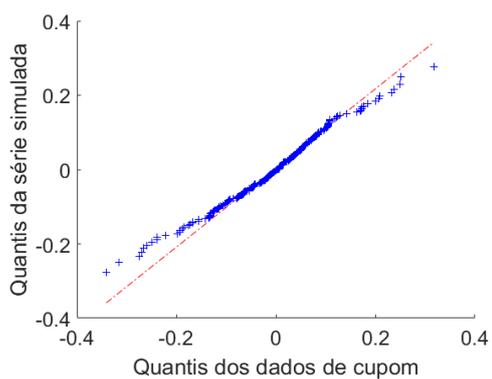
(b) Prazo de 60 dias.



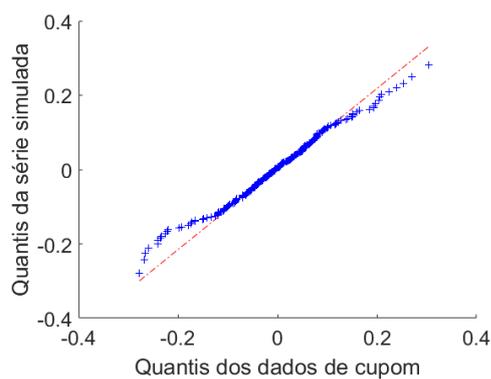
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

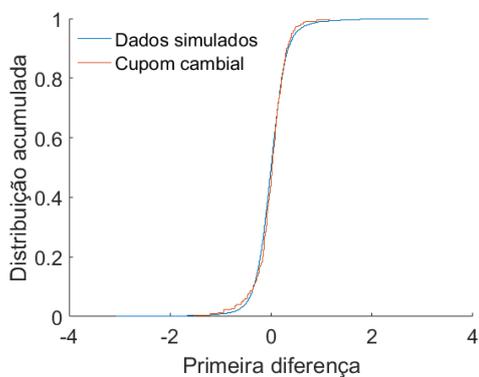


(e) Prazo de 360 dias.

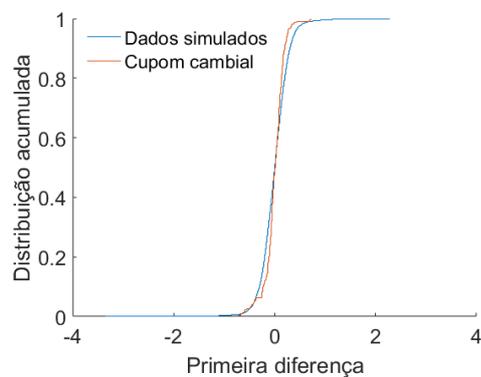


(f) Prazo de 720 dias.

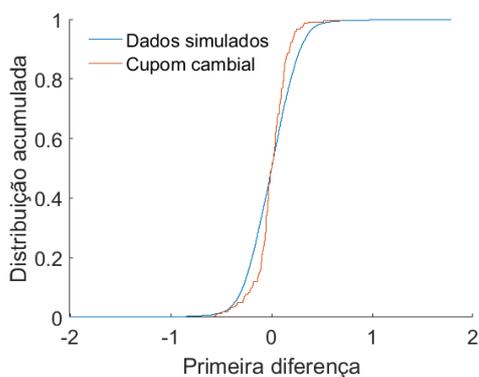
**Tabela C.14:** Gráficos quantil a quantil das distribuições em primeira diferença do cupom cambial e da série simulada pela equação de recursão para a Amostra 1.



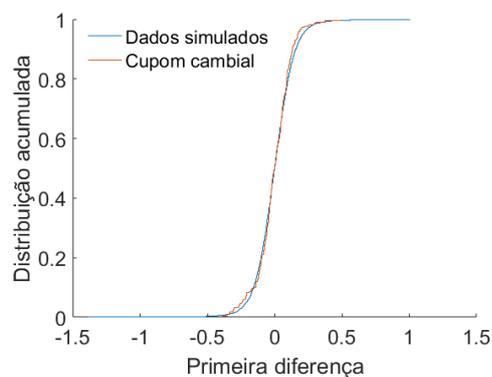
(a) Prazo de 30 dias.



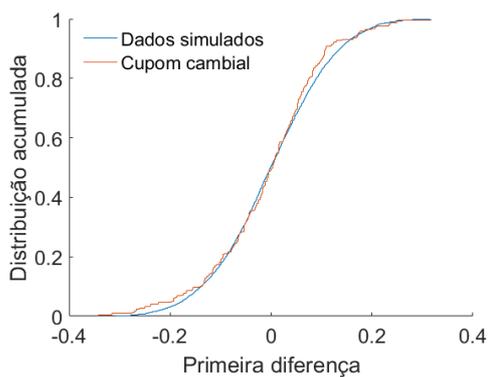
(b) Prazo de 60 dias.



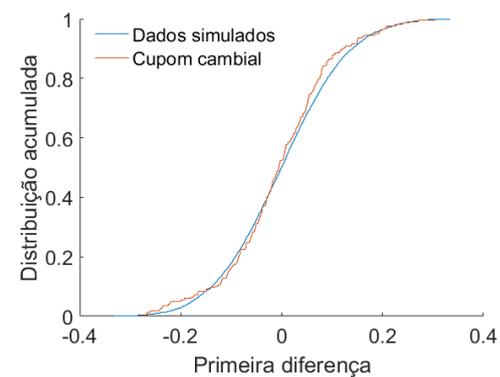
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

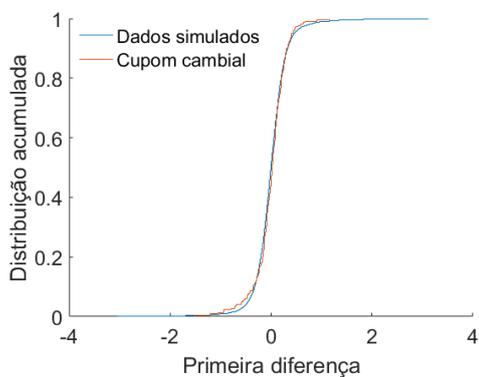


(e) Prazo de 360 dias.

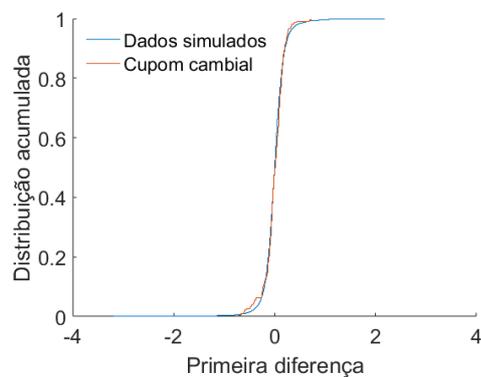


(f) Prazo de 720 dias.

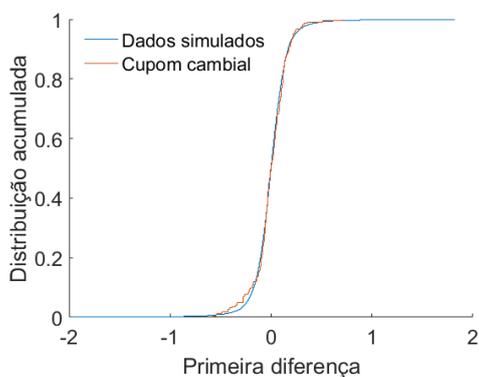
**Tabela C.15:** Gráficos das distribuições acumuladas da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas por soma de Riemann para a Amostra 1.



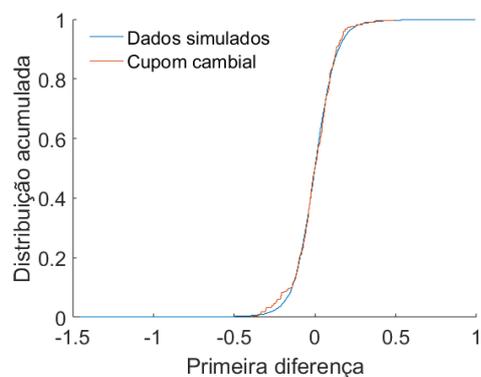
(a) Prazo de 30 dias.



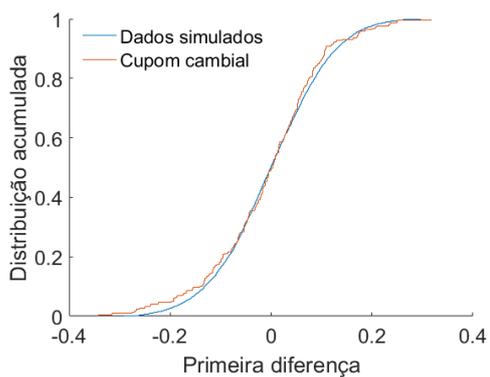
(b) Prazo de 60 dias.



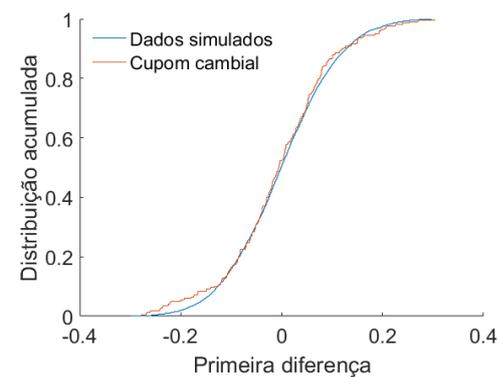
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

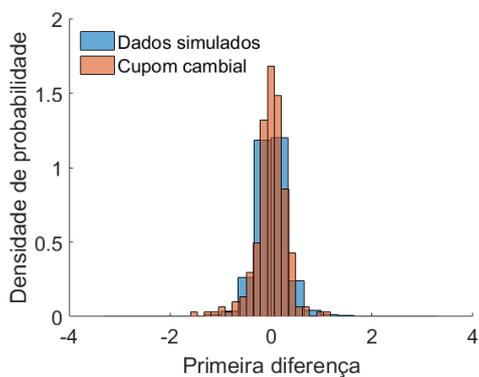


(e) Prazo de 360 dias.

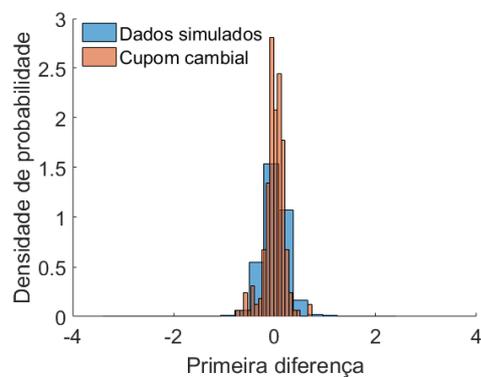


(f) Prazo de 720 dias.

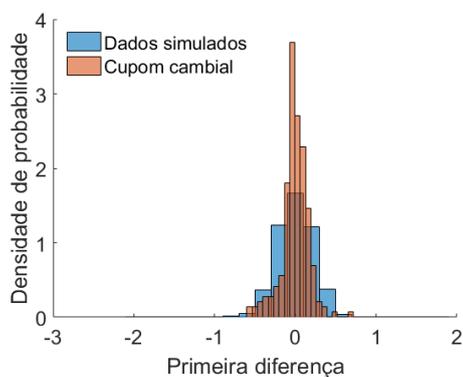
**Tabela C.16:** Gráficos das distribuições acumuladas da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas pela equação de recorrência para a Amostra 1.



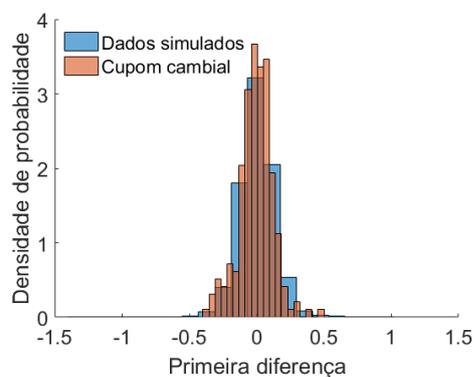
(a) Prazo de 30 dias.



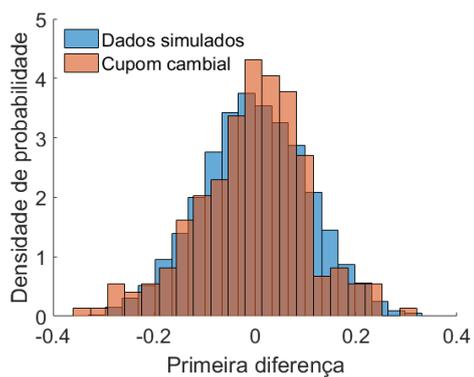
(b) Prazo de 60 dias.



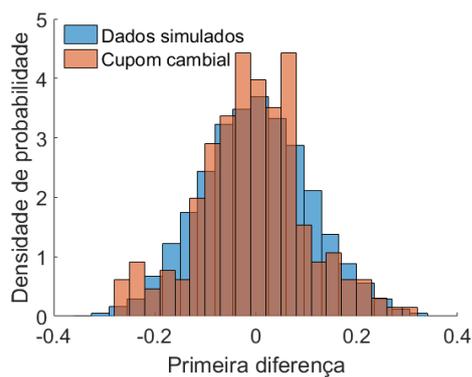
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

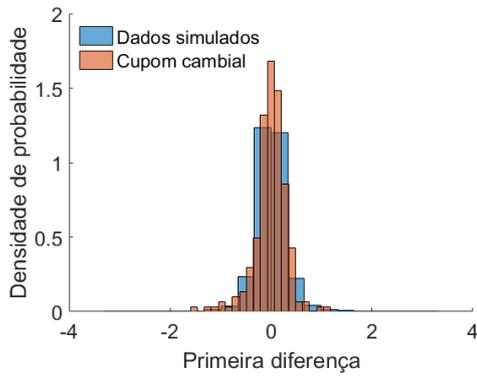


(e) Prazo de 360 dias.

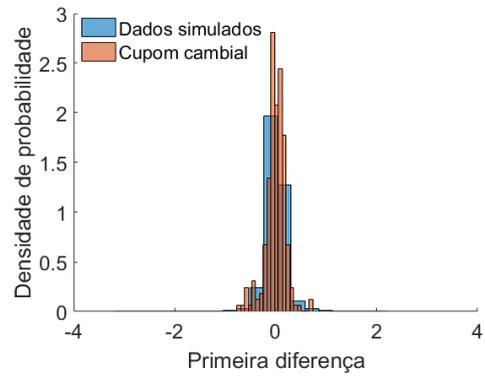


(f) Prazo de 720 dias.

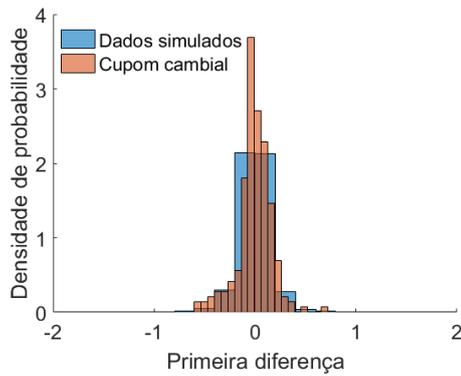
**Tabela C.17:** Comparação dos histogramas de área unitária da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas por soma de Riemann para a Amostra 1.



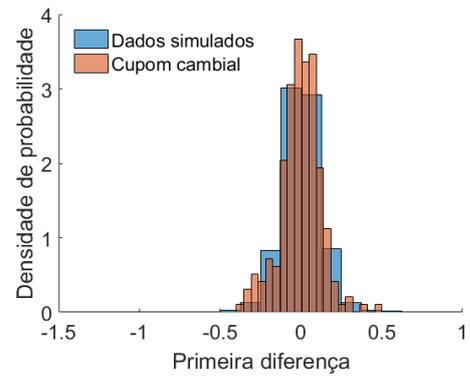
(a) Prazo de 30 dias.



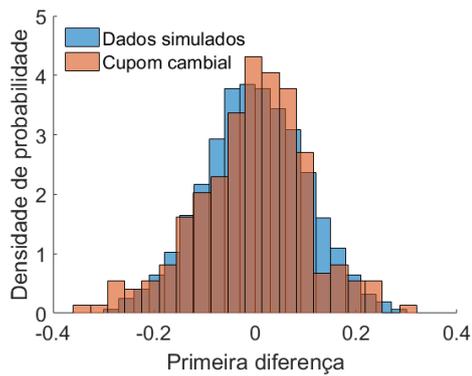
(b) Prazo de 60 dias.



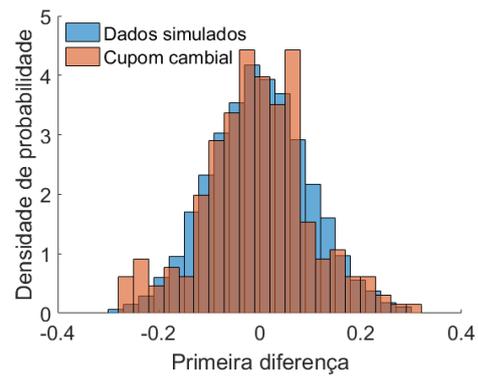
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

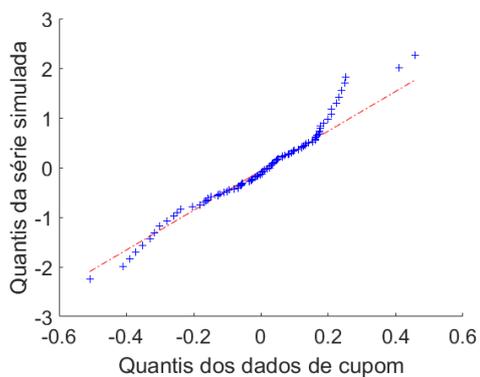


(e) Prazo de 360 dias.

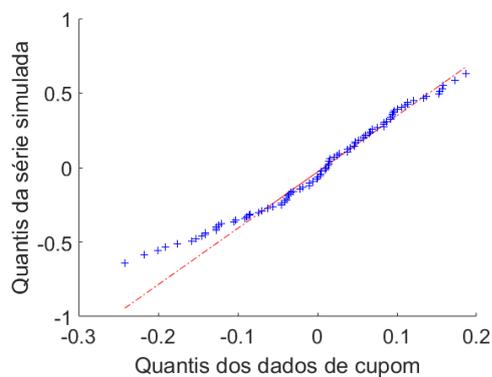


(f) Prazo de 720 dias.

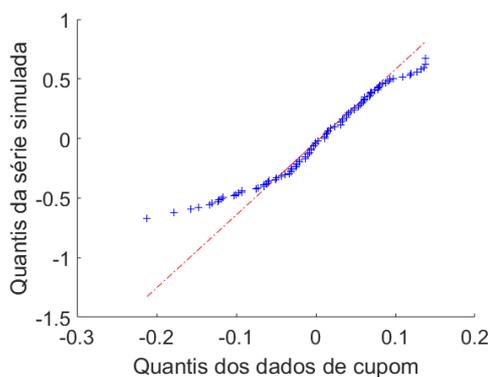
**Tabela C.18:** Comparação dos histogramas de área unitária da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas pela equação de recorrência para a Amostra 1.



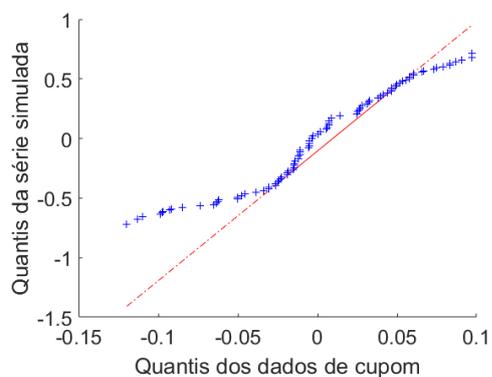
(a) Prazo de 30 dias.



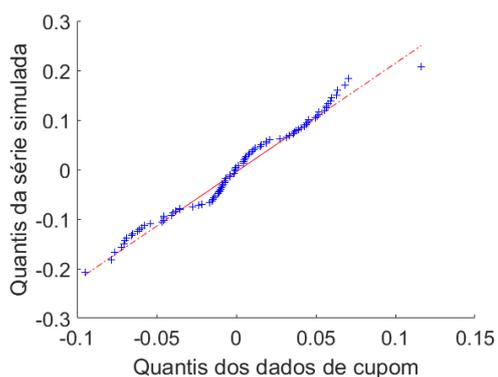
(b) Prazo de 60 dias.



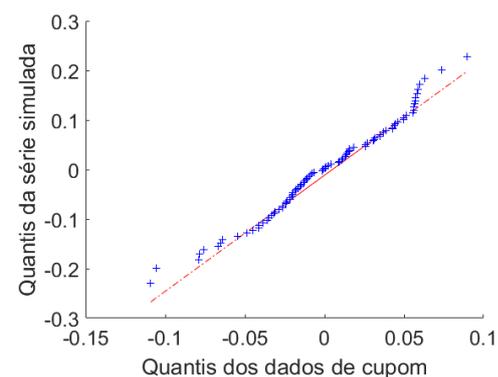
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

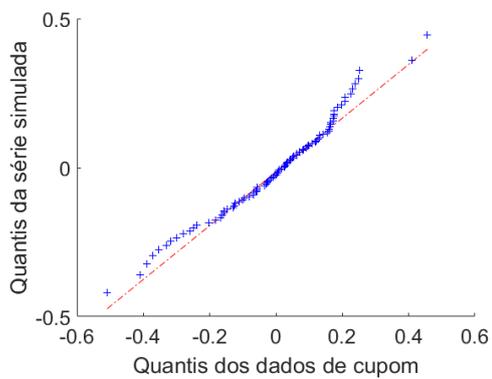


(e) Prazo de 360 dias.

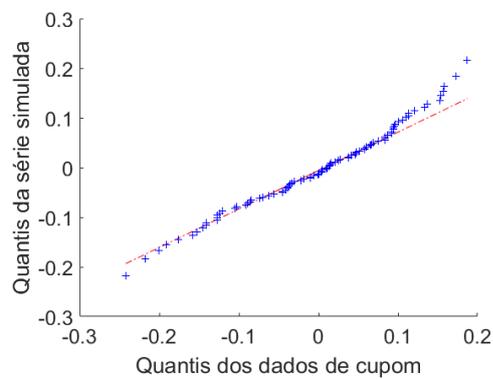


(f) Prazo de 720 dias.

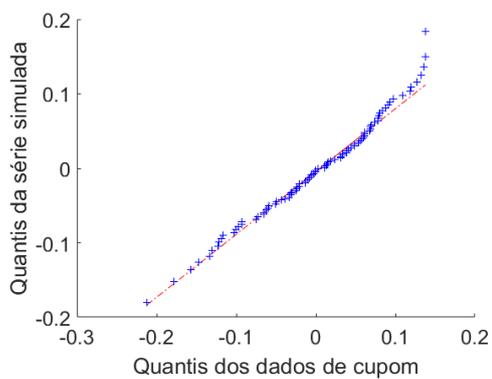
**Tabela C.19:** Gráficos quantil a quantil das distribuições em primeira diferença do cupom cambial e da série simulada por soma de Riemann para a Amostra 3.



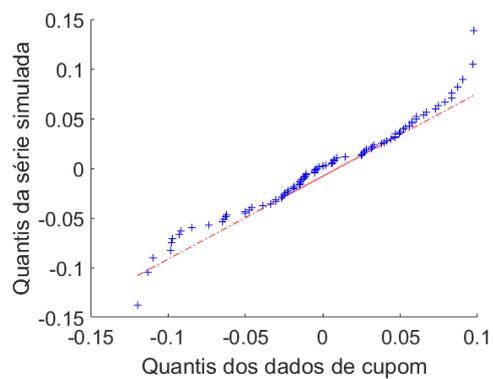
(a) Prazo de 30 dias.



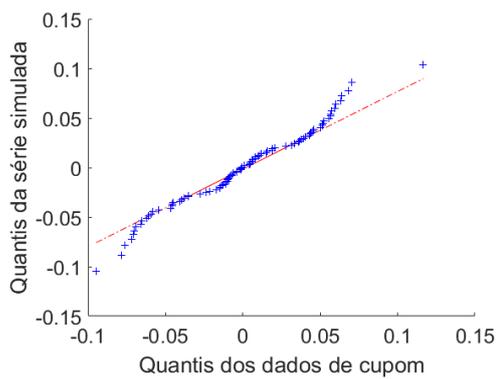
(b) Prazo de 60 dias.



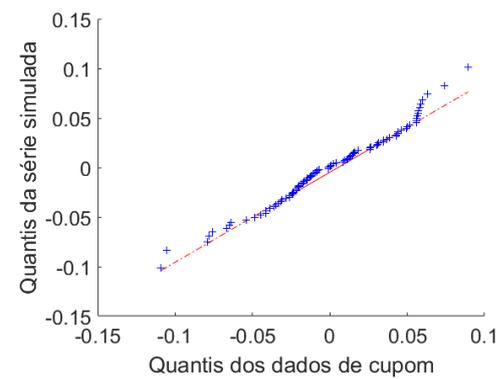
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

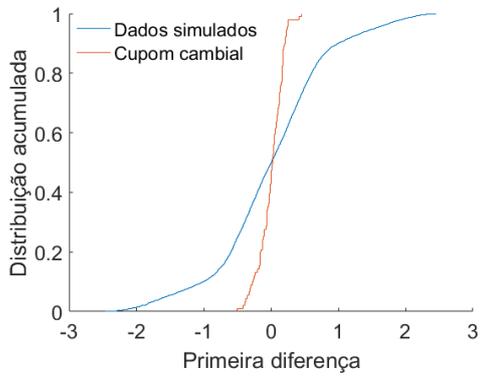


(e) Prazo de 360 dias.

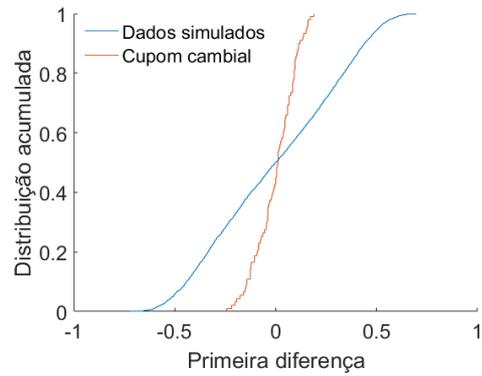


(f) Prazo de 720 dias.

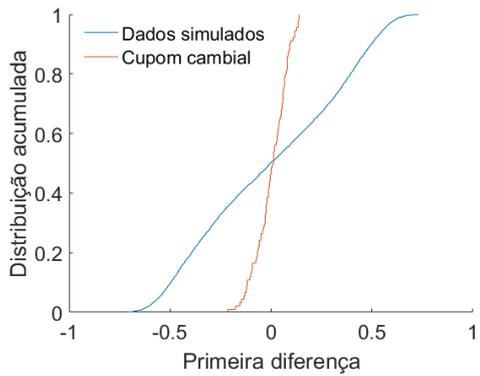
**Tabela C.20:** Gráficos quantil a quantil das distribuições em primeira diferença do cupom cambial e da série simulada pela equação de recursão para a Amostra 3.



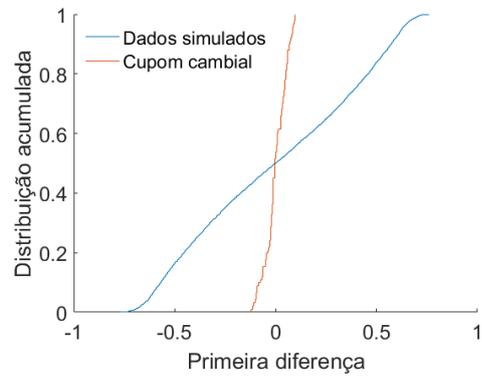
(a) Prazo de 30 dias.



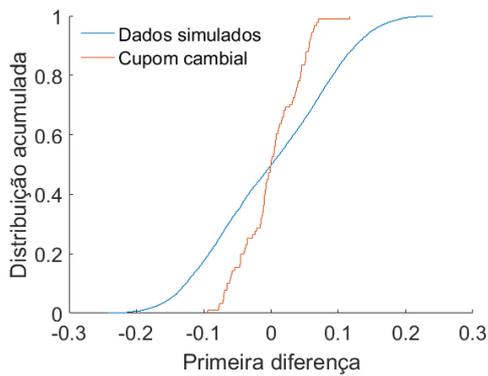
(b) Prazo de 60 dias.



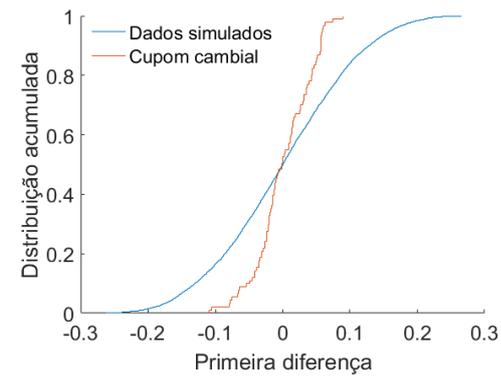
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

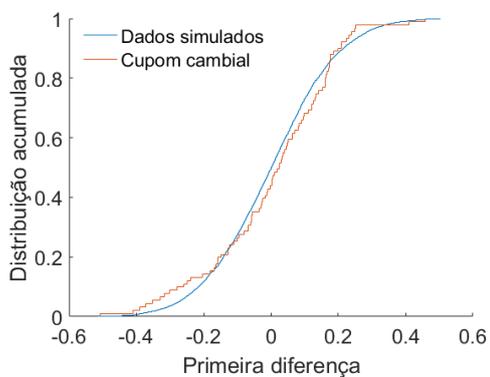


(e) Prazo de 360 dias.

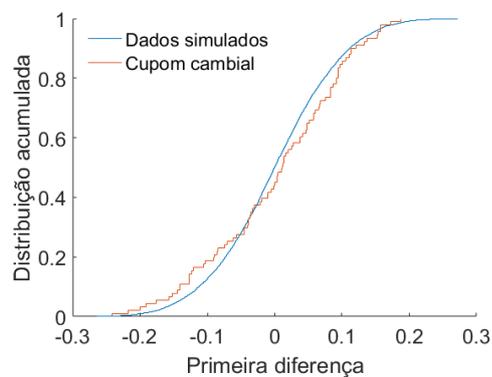


(f) Prazo de 720 dias.

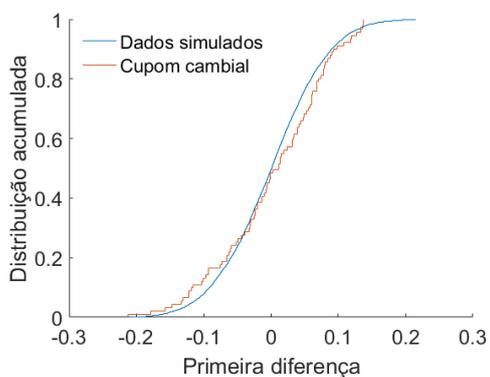
**Tabela C.21:** Gráficos das distribuições acumuladas da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas por soma de Riemann para a Amostra 3.



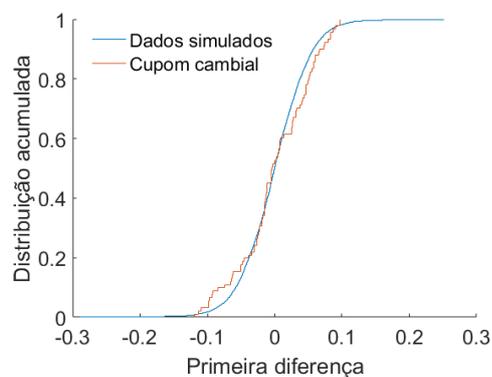
(a) Prazo de 30 dias.



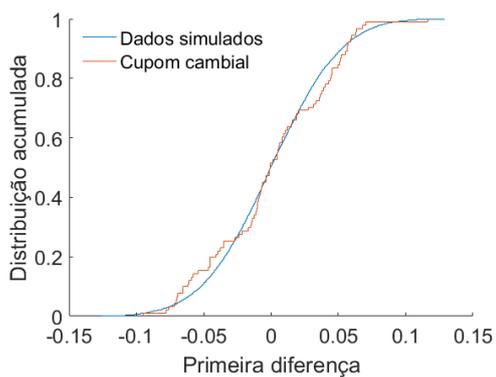
(b) Prazo de 60 dias.



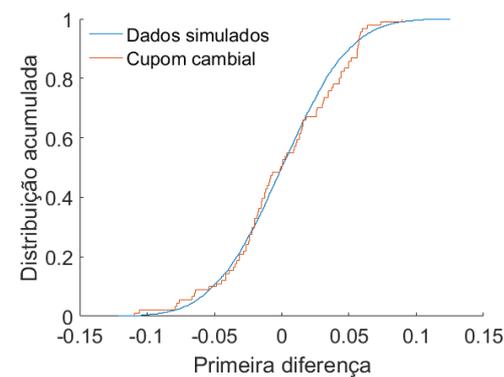
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

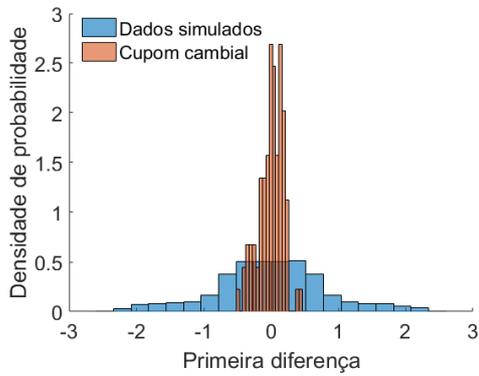


(e) Prazo de 360 dias.

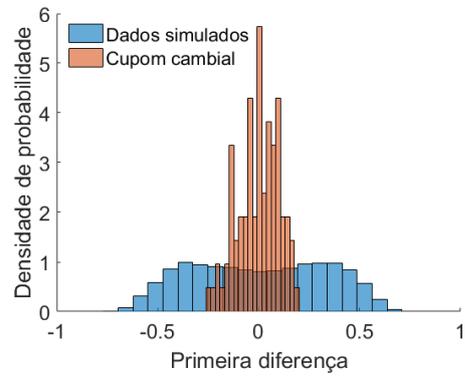


(f) Prazo de 720 dias.

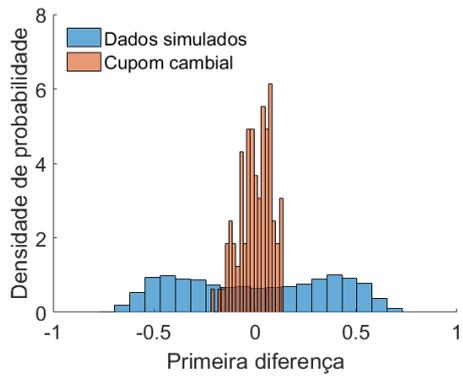
**Tabela C.22:** Gráficos das distribuições acumuladas da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas pela equação de recorrência para a Amostra 3.



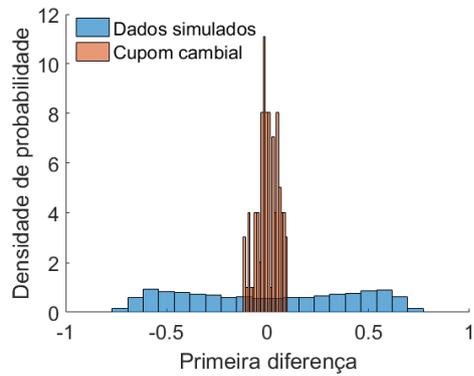
(a) Prazo de 30 dias.



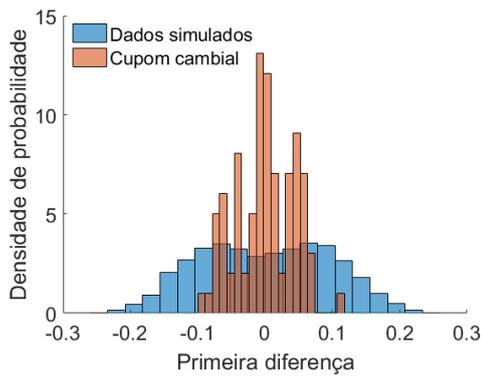
(b) Prazo de 60 dias.



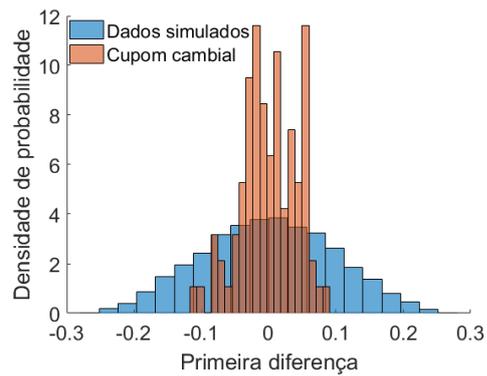
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

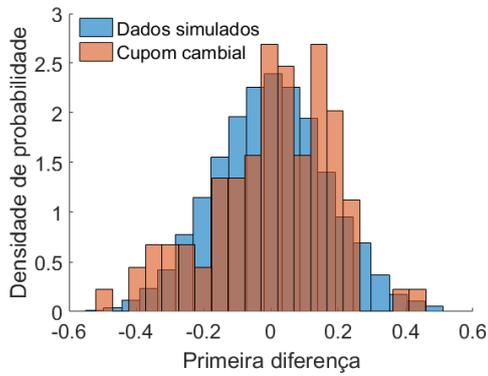


(e) Prazo de 360 dias.

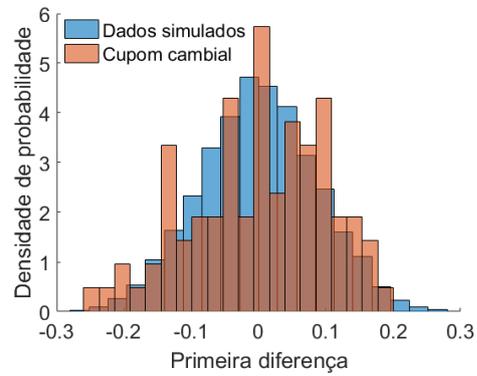


(f) Prazo de 720 dias.

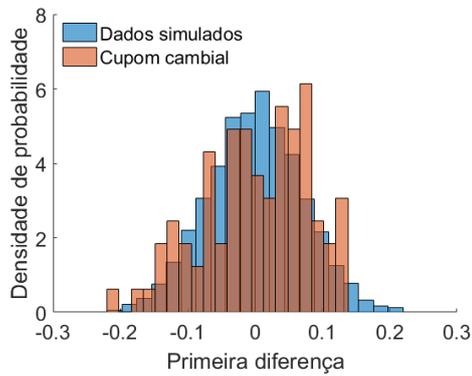
**Tabela C.23:** Comparação dos histogramas de área unitária da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas por soma de Riemann para a Amostra 3.



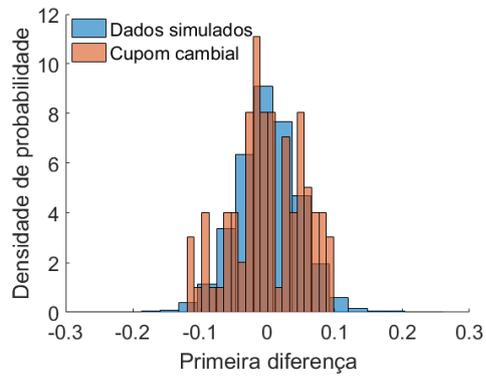
(a) Prazo de 30 dias.



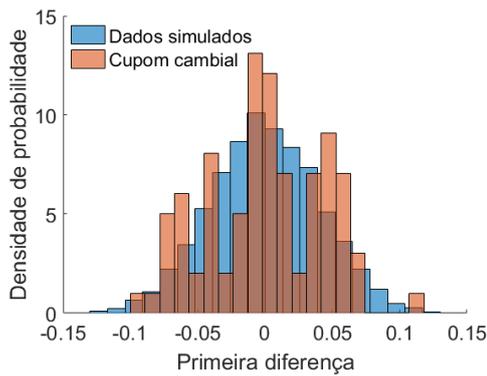
(b) Prazo de 60 dias.



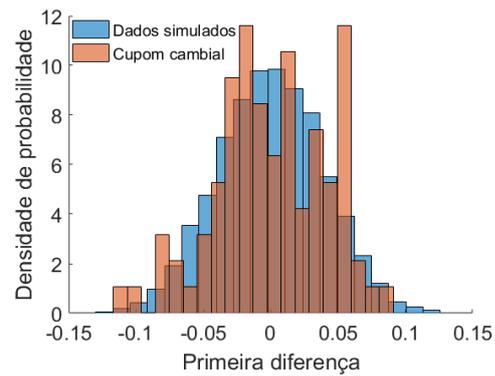
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.



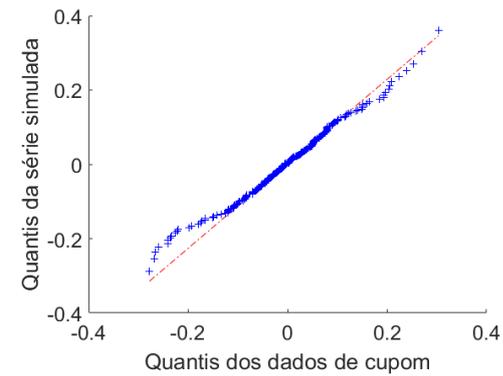
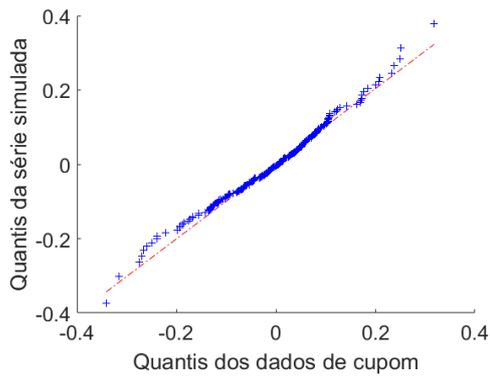
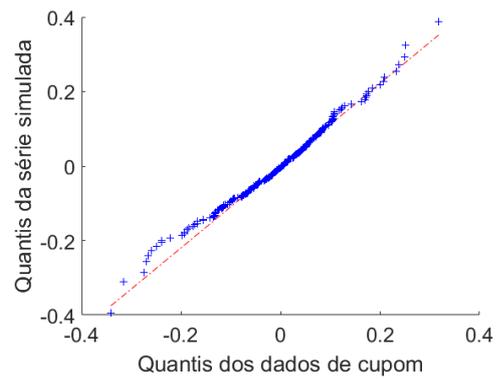
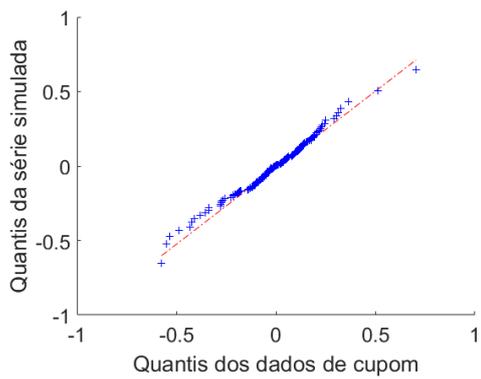
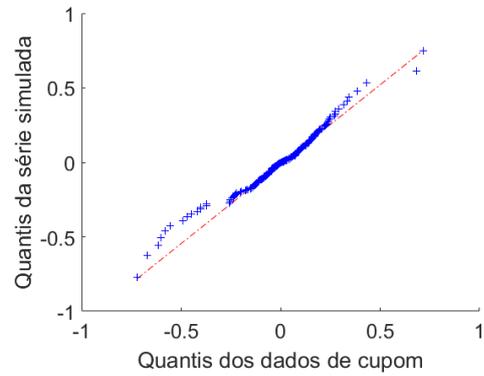
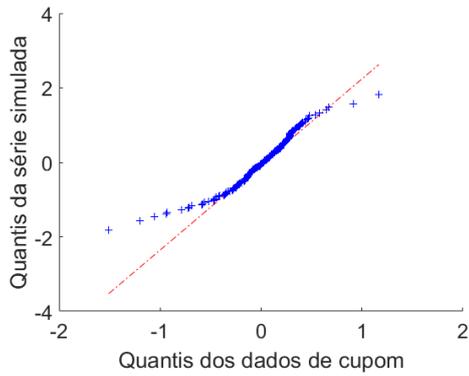
(e) Prazo de 360 dias.



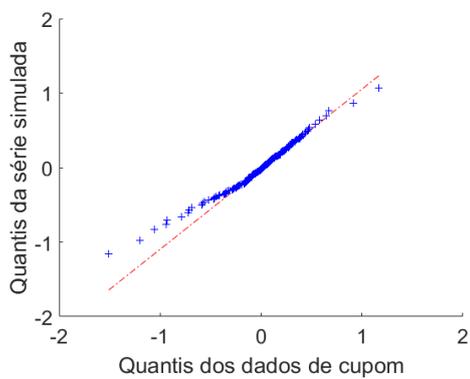
(f) Prazo de 720 dias.

**Tabela C.24:** Comparação dos histogramas de área unitária da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas pela equação de recorrência para a Amostra 3.

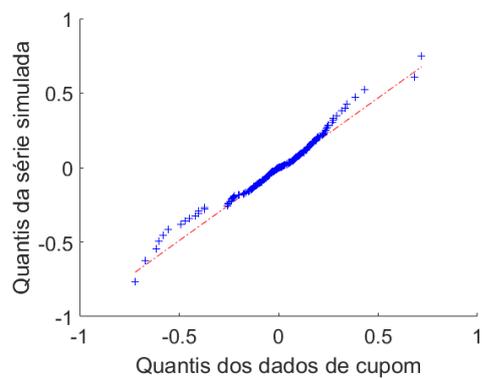
### C.3.2 Estimação do Processo ARMA por Hannan-Rissanen



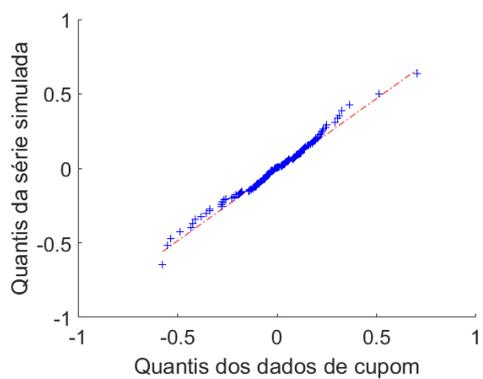
**Tabela C.25:** Gráficos quantil a quantil das distribuições em primeira diferença do cupom cambial e da série simulada por soma de Riemann para a Amostra 1.



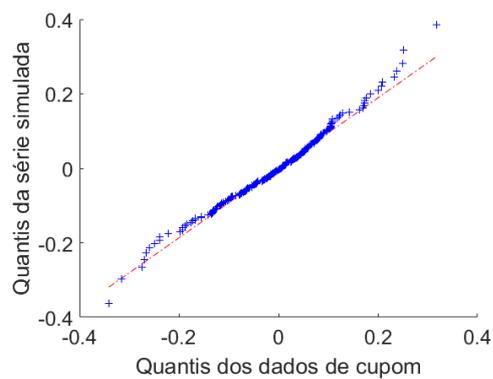
(a) Prazo de 30 dias.



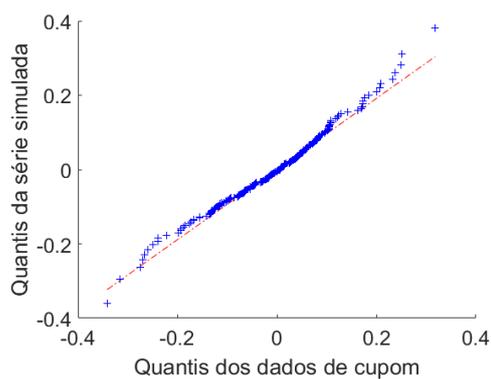
(b) Prazo de 60 dias.



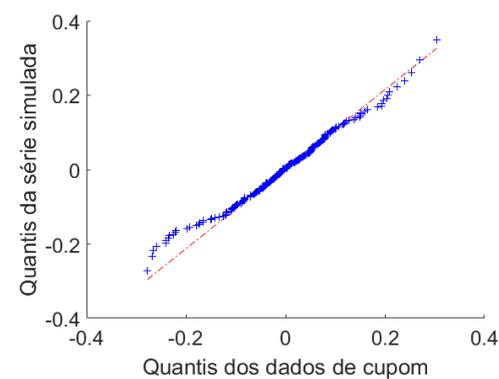
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

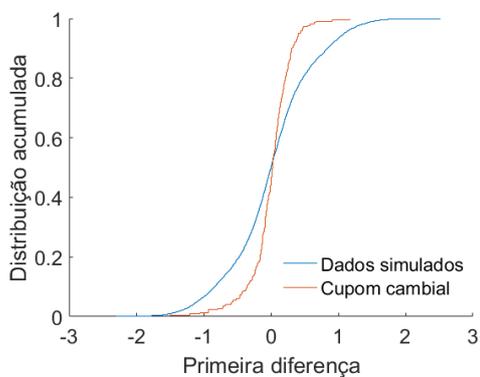


(e) Prazo de 360 dias.

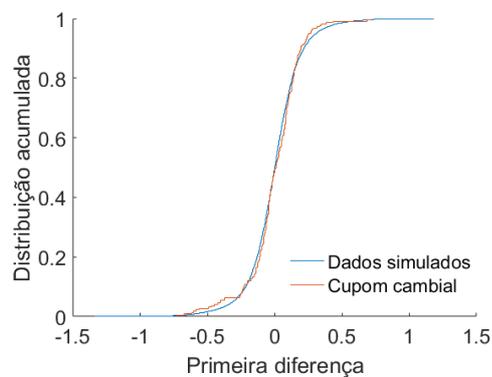


(f) Prazo de 720 dias.

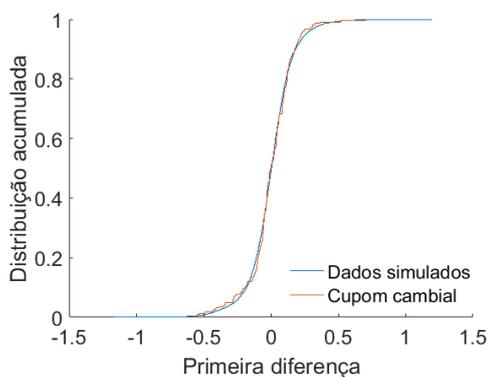
**Tabela C.26:** Gráficos quantil a quantil das distribuições em primeira diferença do cupom cambial e da série simulada pela equação de recursão para a Amostra 1.



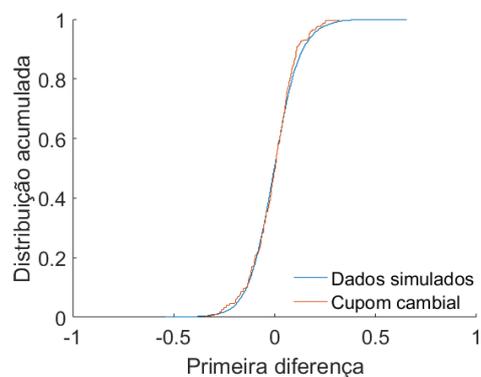
(a) Prazo de 30 dias.



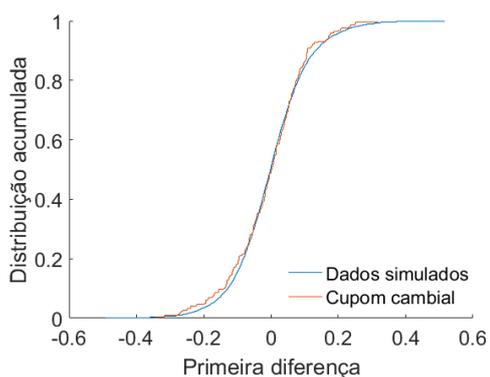
(b) Prazo de 60 dias.



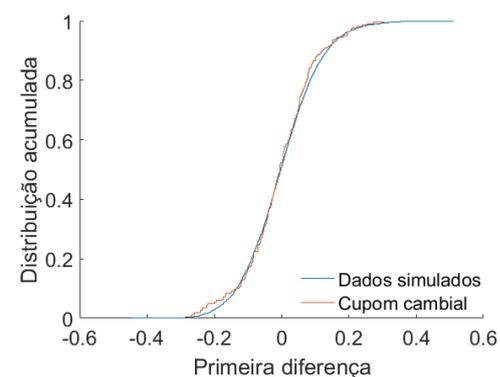
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

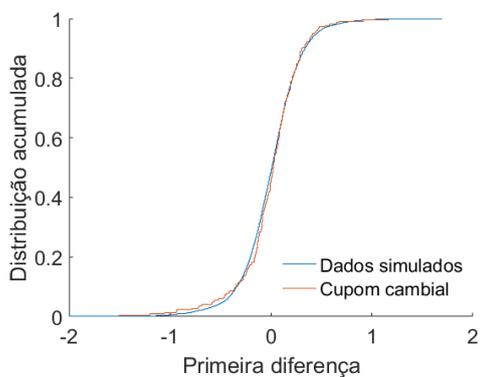


(e) Prazo de 360 dias.

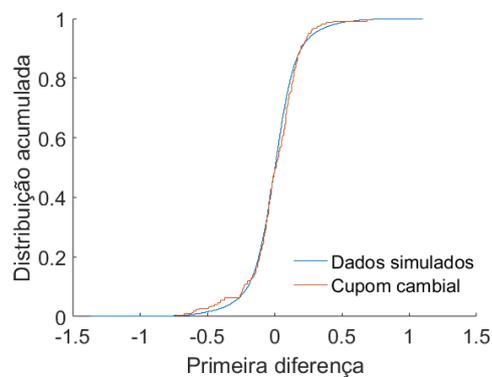


(f) Prazo de 720 dias.

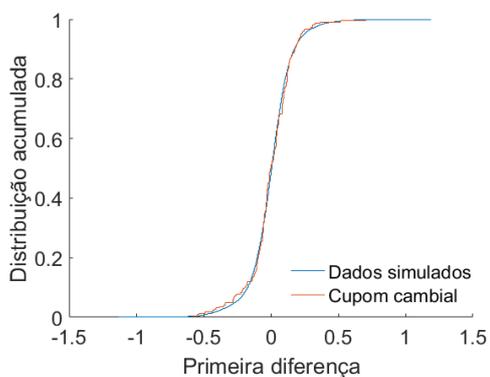
**Tabela C.27:** Gráficos das distribuições acumuladas da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas por soma de Riemann para a Amostra 1.



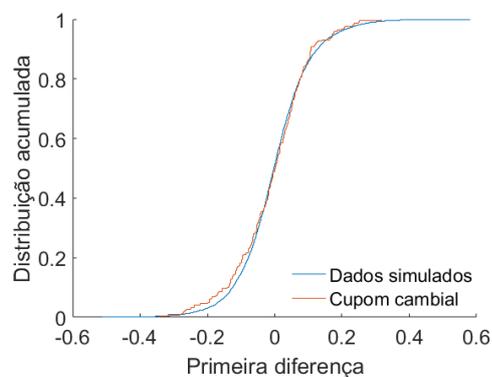
(a) Prazo de 30 dias.



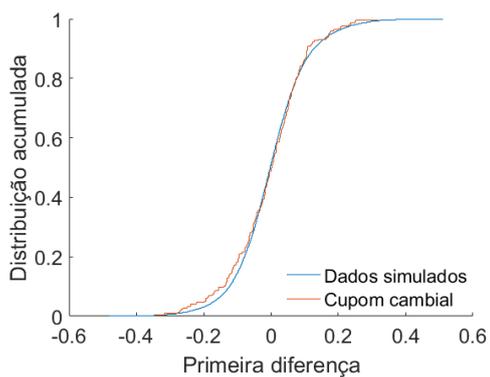
(b) Prazo de 60 dias.



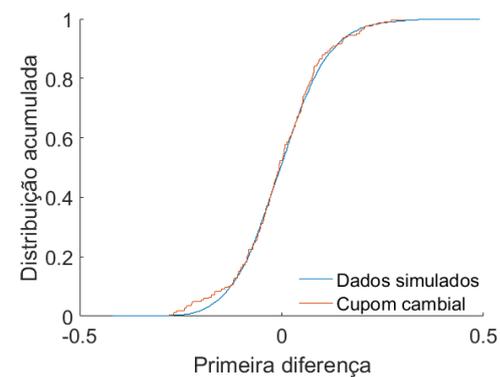
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

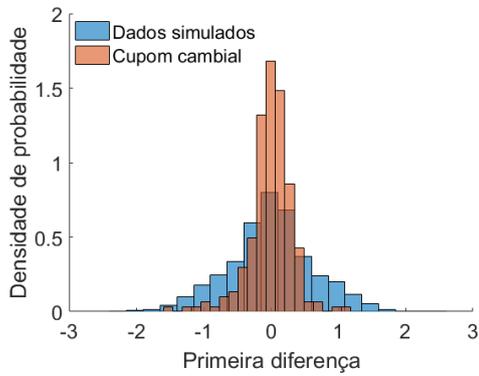


(e) Prazo de 360 dias.

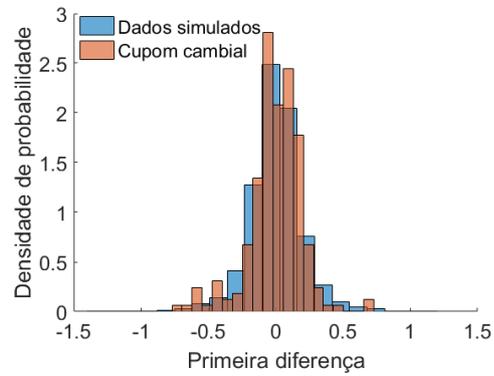


(f) Prazo de 720 dias.

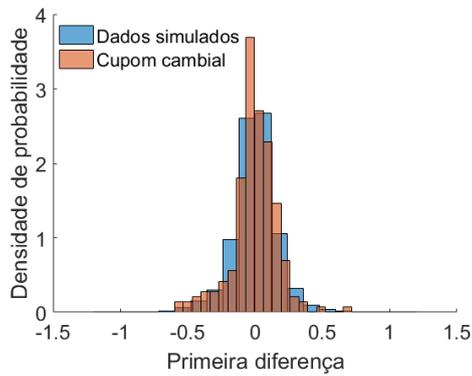
**Tabela C.28:** Gráficos das distribuições acumuladas da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas pela equação de recorrência para a Amostra 1.



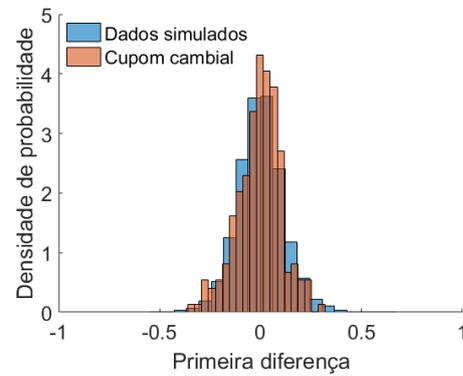
(a) Prazo de 30 dias.



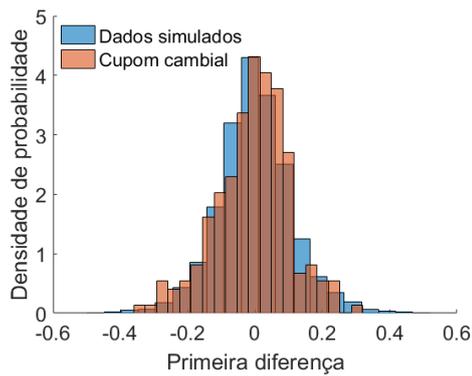
(b) Prazo de 60 dias.



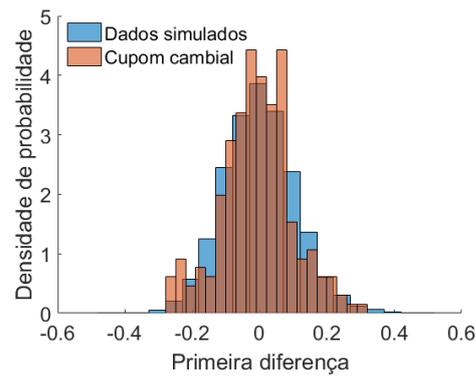
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

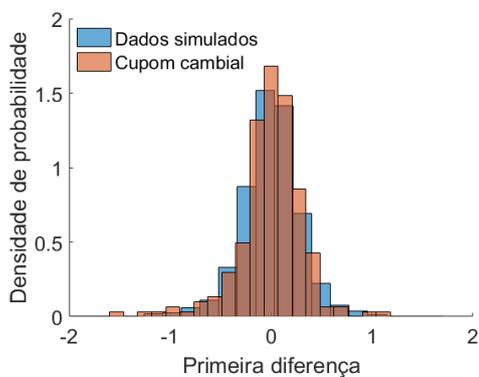


(e) Prazo de 360 dias.

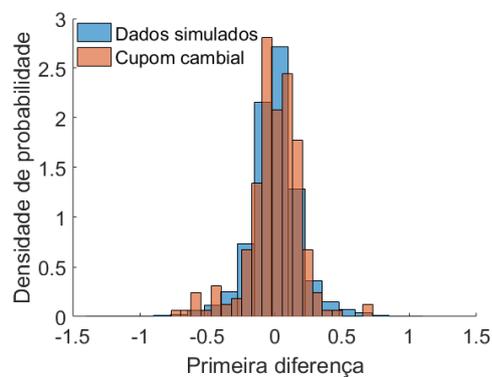


(f) Prazo de 720 dias.

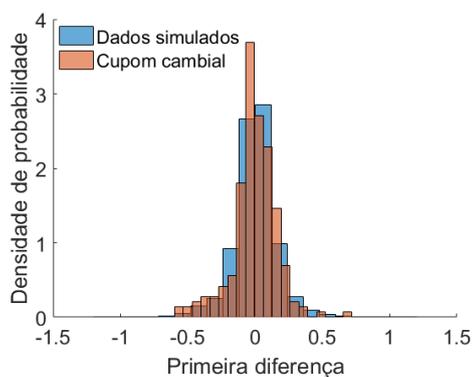
**Tabela C.29:** Comparação dos histogramas de área unitária da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas por soma de Riemann para a Amostra 1.



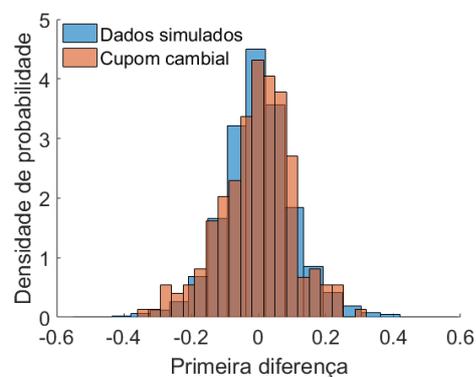
(a) Prazo de 30 dias.



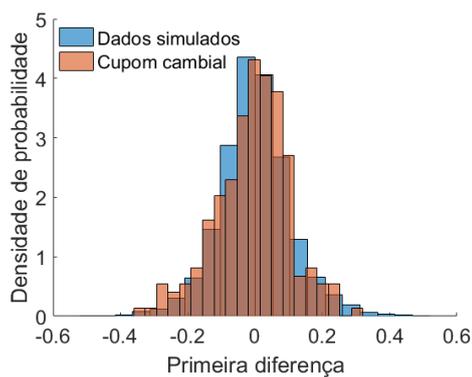
(b) Prazo de 60 dias.



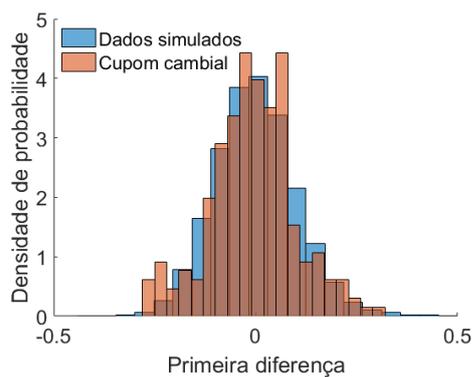
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

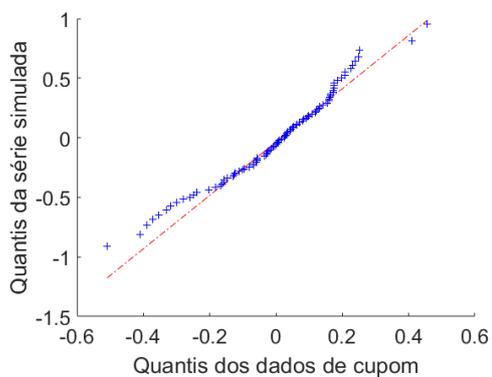


(e) Prazo de 360 dias.

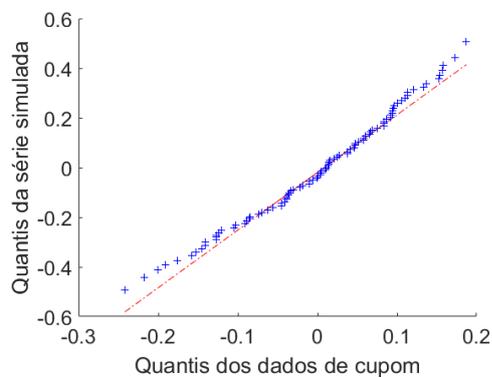


(f) Prazo de 720 dias.

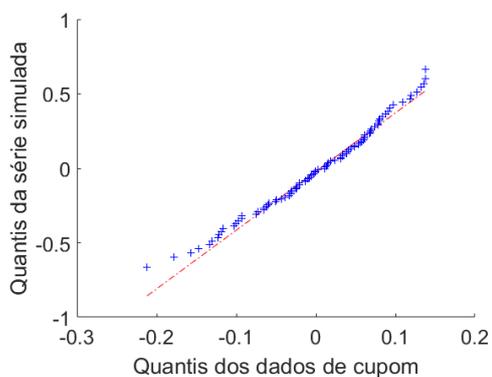
**Tabela C.30:** Comparação dos histogramas de área unitária da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas pela equação de recorrência para a Amostra 1.



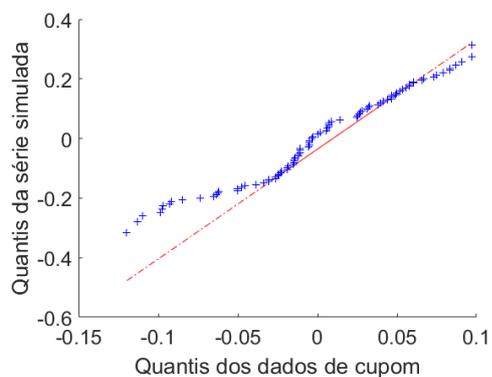
(a) Prazo de 30 dias.



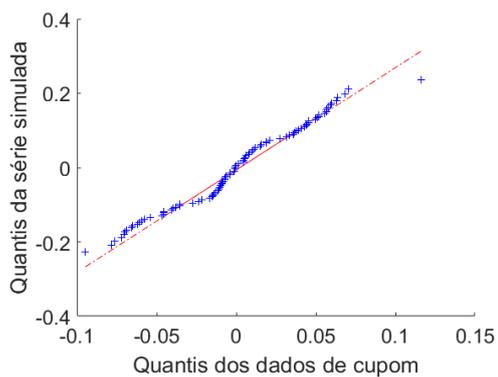
(b) Prazo de 60 dias.



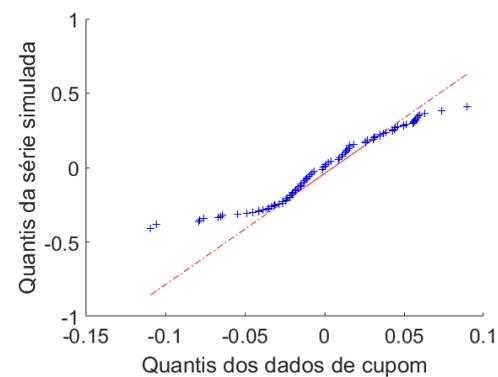
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

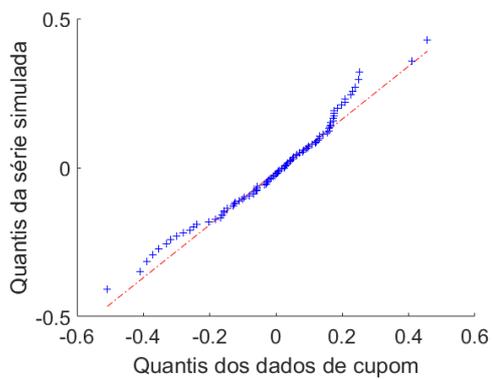


(e) Prazo de 360 dias.

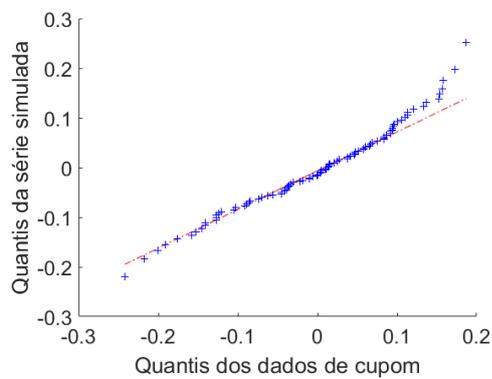


(f) Prazo de 720 dias.

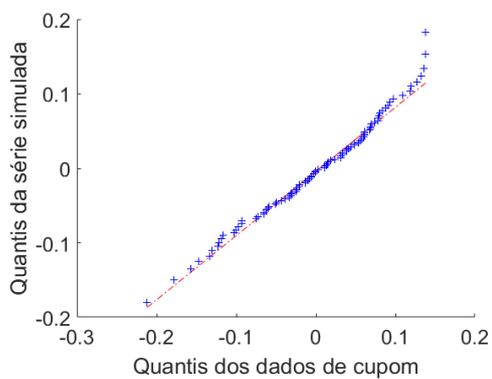
**Tabela C.31:** Gráficos quantil a quantil das distribuições em primeira diferença do cupom cambial e da série simulada por soma de Riemann para a Amostra 3.



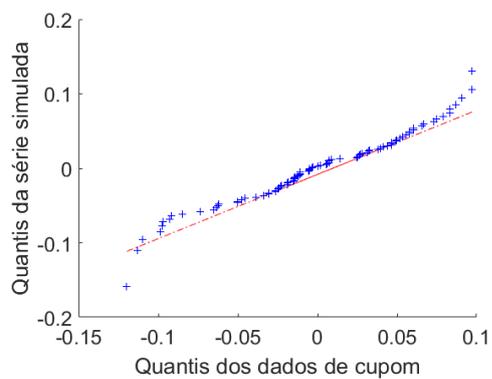
(a) Prazo de 30 dias.



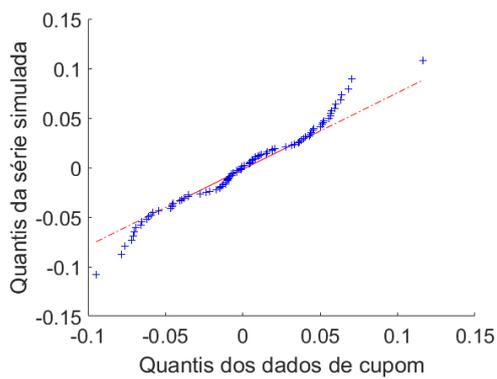
(b) Prazo de 60 dias.



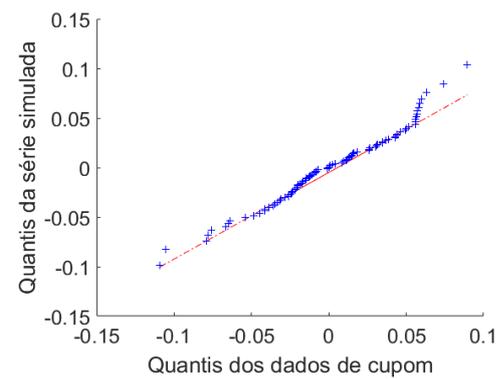
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

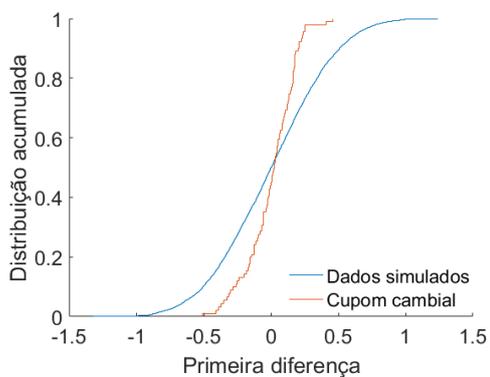


(e) Prazo de 360 dias.

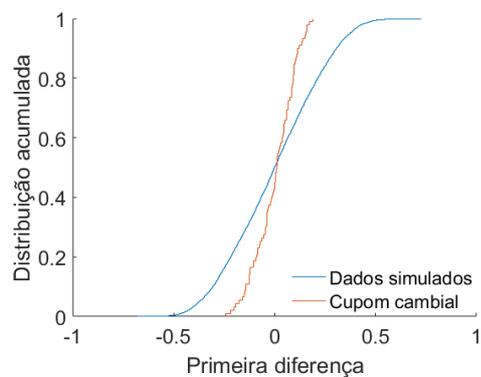


(f) Prazo de 720 dias.

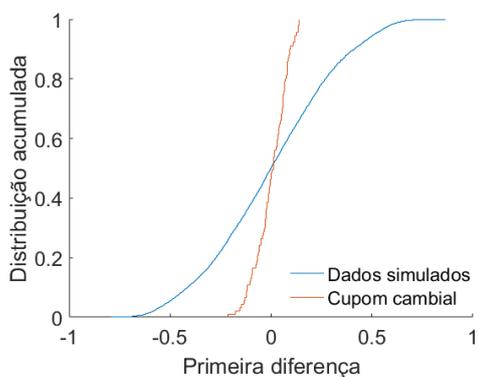
**Tabela C.32:** Gráficos quantil a quantil das distribuições em primeira diferença do cupom cambial e da série simulada pela equação de recursão para a Amostra 3.



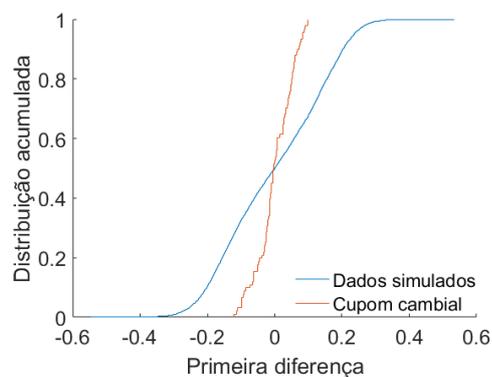
(a) Prazo de 30 dias.



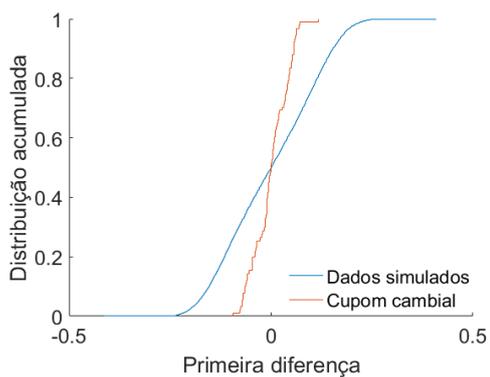
(b) Prazo de 60 dias.



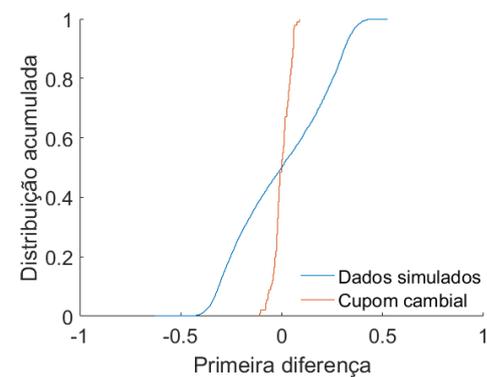
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

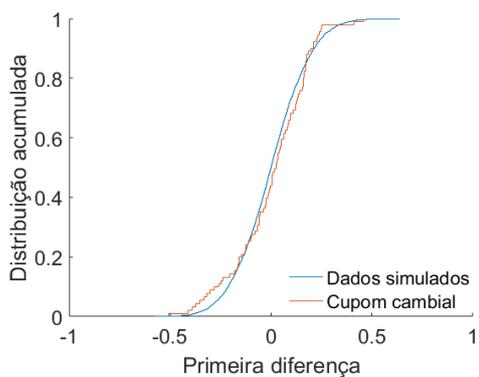


(e) Prazo de 360 dias.

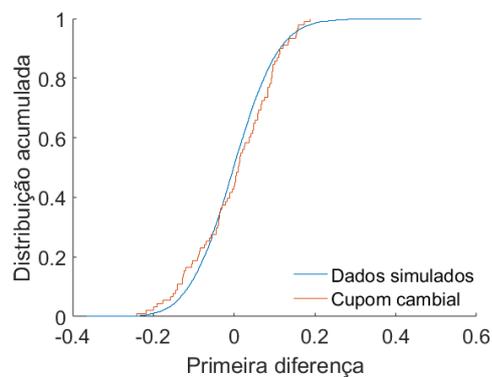


(f) Prazo de 720 dias.

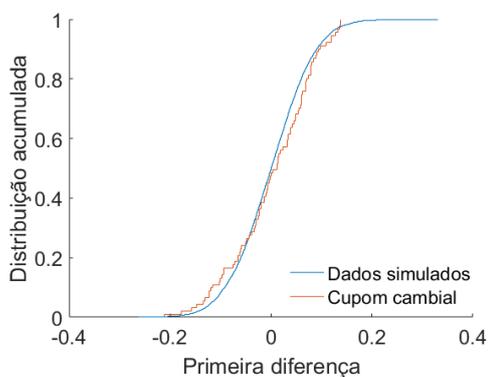
**Tabela C.33:** Gráficos das distribuições acumuladas da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas por soma de Riemann para a Amostra 3.



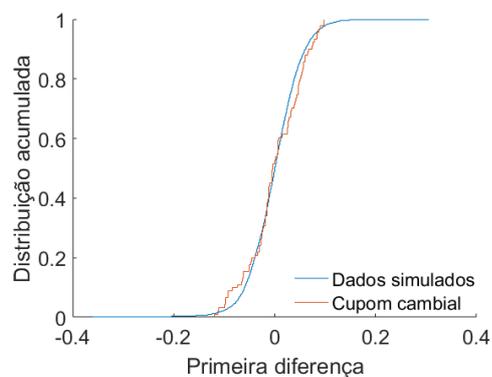
(a) Prazo de 30 dias.



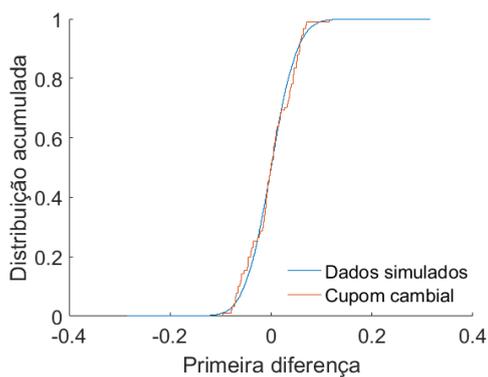
(b) Prazo de 60 dias.



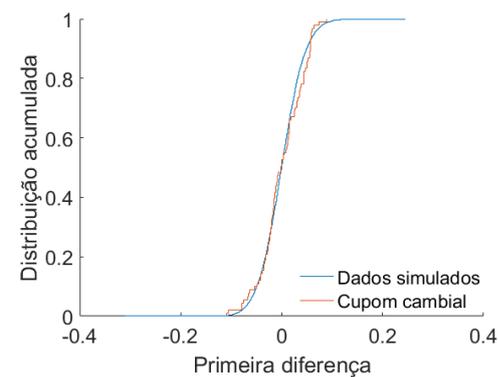
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

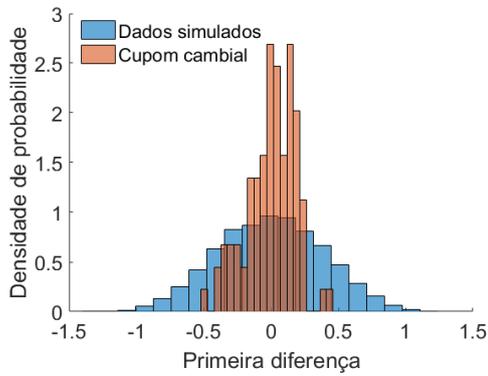


(e) Prazo de 360 dias.

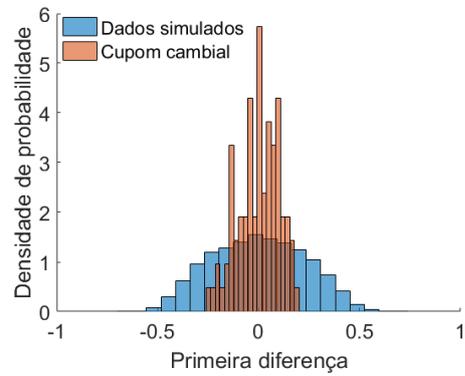


(f) Prazo de 720 dias.

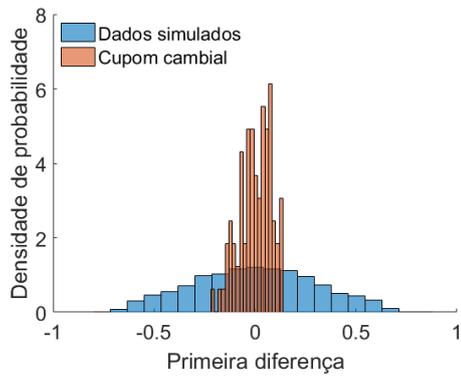
**Tabela C.34:** Gráficos das distribuições acumuladas da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas pela equação de recorrência para a Amostra 3.



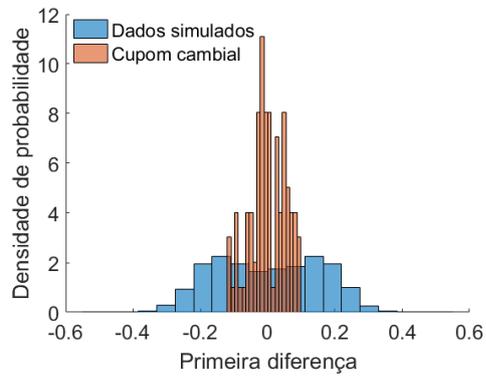
(a) Prazo de 30 dias.



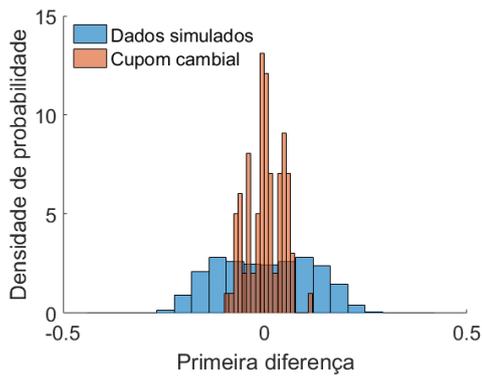
(b) Prazo de 60 dias.



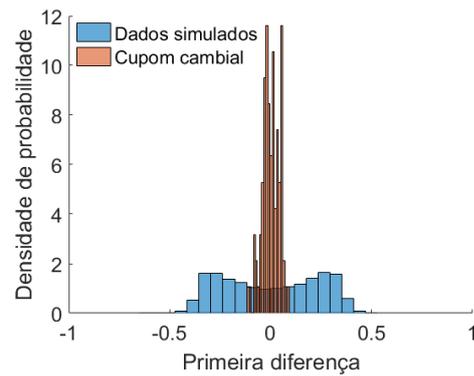
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.

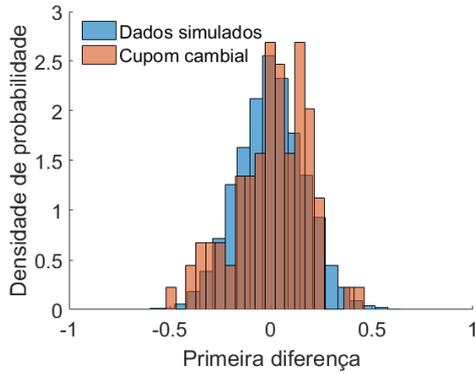


(e) Prazo de 360 dias.

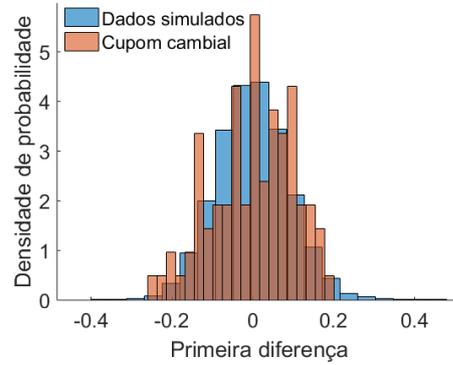


(f) Prazo de 720 dias.

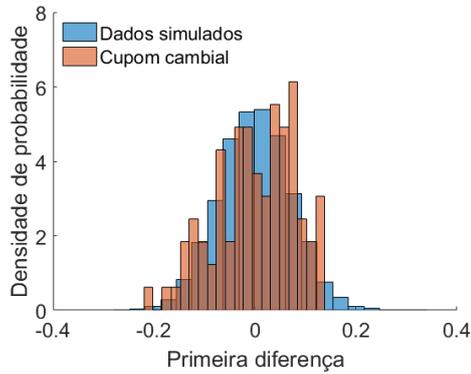
**Tabela C.35:** Comparação dos histogramas de área unitária da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas por soma de Riemann para a Amostra 3.



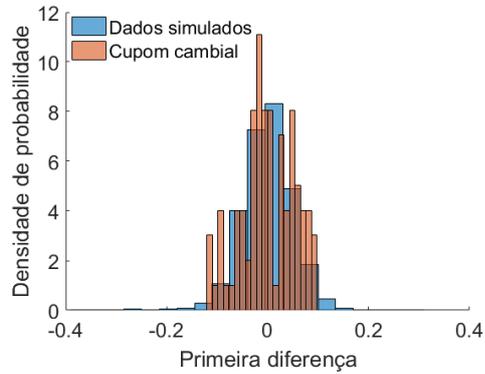
(a) Prazo de 30 dias.



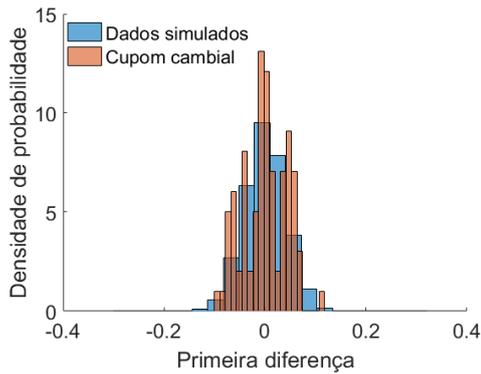
(b) Prazo de 60 dias.



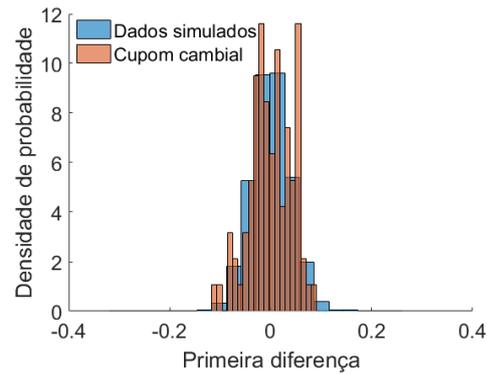
(c) Prazo de 90 dias.



(d) Prazo de 180 dias.



(e) Prazo de 360 dias.



(f) Prazo de 720 dias.

**Tabela C.36:** Comparação dos histogramas de área unitária da primeira diferença das séries de cupom cambial e da primeira diferença das séries simuladas pela equação de recorrência para a Amostra 3.

## Referências Bibliográficas

- Andrews, Donald W. K., & Chen, Hong-Yuan. 1994. Approximately Median-Unbiased Estimation of Autoregressive Models. **12**(2), 187–204.
- Applebaum, D. 2009. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. 2 edn. Cambridge University Press.
- Ash, Robert B. 1972. *Real Analysis and Probability*. Academic Press.
- Avdjiev, S., Du, W., Koch, C., & Shin, H. S. 2016 (november). *The Dollar, Bank Leverage and the Deviation from Covered Interest Parity*. BIS Working Papers, n. 592. Bank for International Settlements (BIS). Disponível em: <https://www.bis.org/publ/work592.pdf>.
- Barbosa Filho, Fernando de Holanda. 2017. A crise econômica de 2014/2017. *Estudos Avançados*, **31**(04), 51 – 60.
- Barndorff-Nielsen, Ole E., & Shephard, Neil. 2001. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, **63**(2), 167–241.
- BCB. 2015. *Medidas de Simplificação na Área de Câmbio*. Legislação e Normas Técnicas. Banco Central do Brasil (BCB). Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/rex/LegCE/Port/Ftp/Medidas-Simplificacao-Area-de-Cambio.pdf>.
- Beckers, Stan. 1981. A Note on Estimating the Parameters of the Diffusion-Jump Model of Stock Returns. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **16**(1), 127–140. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2330670>.
- Biernacki, Christophe, & Chrétien, Stéphane. 2003. Degeneracy in the Maximum Likelihood Estimation of Univariate Gaussian Mixtures with EM. *Statistics & Probability Letters*, **61**(4), 373 – 382. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167715202003966>.

- BIS CCA Consultative Group of Directors of Operations. 2017 (march). *Foreign Exchange Liquidity in Americas*. BIS Papers, n. 90. Monetary and Economic Department. Bank for International Settlements (BIS). Disponível em: <https://www.bis.org/publ/work592.pdf>.
- Brennan, Michael J. 1991. The Price of Convenience and the Valuation of Commodity Contingent Claims. In: Lund, Diderik, & Øksendal, Bernt (eds), *Stochastic Models and Option Values: Applications to Resources, Environment, and Investment Problems*. Elsevier/North-Holland.
- Brigo, D., Dalessandro, A., Neugebauer, M., & Triki, F. 2009. A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management. *Journal of Risk Management in Financial Institutions*, **3**.
- Brockwell, Peter J. 2009. Lévy-Driven Continuous-Time ARMA Processes. In: Mikosch, Thomas, Kreiß, Jens-Peter, Davis, Richard A., & Andersen, Torben Gustav (eds), *Handbook of Financial Time Series*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Brockwell, Peter J., & Davis, Richard A. 2016. *Introduction to Time Series and Forecasting*. 3rd. edn. Springer.
- Brooks, Chris. 2008. *Introductory Econometrics for Finance*. 2nd. edn. Cambridge University Press.
- Casassus, Jaime, & Collin-Dufresne, Pierre. 2005. Stochastic Convenience Yield Implied from Commodity Futures and Interest Rates. *The Journal of Finance*, **60**(5), 2283–2331.
- Cont, Rama, & Tankov, Peter. 2004. *Financial Modelling with Jump Processes*. Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC.
- Davidson, Russell, & MacKinnon, James G. 2004. *Econometric Theory and Methods*. Oxford University Press.
- Day, N. E. 1969. Estimating the Components of a Mixture of Normal Distributions. *Biometrika*, **56**(3), 463–474. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2334652>.
- Dempster, A. P., Laird, N. M., & Rubin, D. B. 1977. Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **39**(1), 1–38. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2984875>.

- Dias, Daniel, & Marques, Carlos Robalo. 2005 (march). *Using Mean Reversion as a Measure of Persistence*. Working Paper Series n. 450. European Central Bank (ECB). Disponível em: <https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp450.pdf>.
- Dick, Nathan P., & Bowden, David C. 1973. Maximum Likelihood Estimation for Mixtures of Two Normal Distributions. *Biometrics*, **29**(4), 781–790.
- dos Santos, Fabiano Fortunato Teixeira. 2011. *Classes de Soluções para a Equação de Langevin Generalizada*. Tese (Doutorado em Matemática). Departamento de Matemática, Universidade de Brasília (UnB).
- Durbin, J. 1960. The Fitting of Time-Series Models. *Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute*, **28**(3), 233–244.
- Frühwirth-Schnatter, Sylvia. 2006. *Finite Mixture and Markov Switching Models*. Springer.
- Fuhrer, Jeffrey C. 2009. *Inflation Persistence*. Research Department Working Papers n. 09-14. Federal Reserve Bank of Boston. Disponível em: <https://www.bostonfed.org/-/media/Documents/Workingpapers/PDF/wp0914.pdf>.
- Fuller, W. 1996. *Introduction to Statistical Time Series*. 2nd. edn. Wiley.
- Garcia, M. G. P., & Urban, F. 2004. *O Mercado Interbancário de Câmbio no Brasil*. Textos para discussão. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ). Disponível em: <http://www.econ.puc-rio.br/PDF/td509.pdf>.
- Geman, Hélyette. 2005. *Commodities and Commodity Derivatives: Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals, and Energy*. John Wiley & Sons.
- Gibson, Rajna, & Schwartz, Eduardo S. 1990. Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims. *The Journal of Finance*, **45**(3), 959 – 976.
- Gloter, Arnaud, Loukianova, Dasha, & Mai, Hilmar. 2016. *Jump filtering and efficient drift estimation for Lévy-Driven SDE'S*. Working Paper n. 2016-04. Center for Research in Economics and Statistics. Disponível em: <http://crest.science/RePEc/wpstorage/2016-04.pdf>. Acessado em 8 de fevereiro de 2019.

- Gonçalves, Flavio B., Latuszynski, Krzysztof G., & Roberts, Gareth O. 2017. Exact Monte Carlo Likelihood-Based Inference for Jump-Diffusion Processes. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1707.00332>.
- Gourieroux, Christian, & Jasiak, Joann. 2001. *Financial Econometrics: Problems, Models, and Methods*. Princeton University Press.
- Hamilton, James D. 1991. A Quasi-Bayesian Approach to Estimating Parameters for Mixtures of Normal Distributions. *Journal of Business & Economic Statistics*, **9**(1), 27–39. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1391937>.
- Hamilton, James D. 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hannan, E. J., & Kavalieris, L. 1984. A method for autoregressive-moving average estimation. *Biometrika*, **71**(2), 273–280.
- Hannan, E. J., & Rissanen, J. 1982. Recursive Estimation of Mixed Autoregressive-Moving Average Order. *Biometrika*, **69**(1), 81–94.
- Hansen, Peter Reinhard, & Lunde, Asger. 2010 (february). *Estimating the Persistence and the Autocorrelation Function of a Time Series that is Measured with Error*. CREATES Research Paper n. 2010-08. Aarhus University. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1550269>.
- Hanson, Floyd B., & Westman, John J. 2002. Stochastic Analysis of Jump-Diffusions for Financial Log-Return Processes. *Pages 169–183 of: Pasik-Duncan, Bozenna (ed), Stochastic Theory and Control*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Hanson, Floyd B., & Zhu, Zongwu. 2004. Comparison of Market Parameters for Jump-Diffusion Distributions Using Multinomial Maximum Likelihood Estimation. *Proc. 42nd. IEEE Conference on Decision and Control*, p. 3919 – 3924. Disponível em: <http://homepages.math.uic.edu/hanson/pub/CDC2004/cdc04v8c17finweb.pdf>. Acessado em 9 de fevereiro de 2019.
- Harvey, Andrew C. 1993. *Time Series Models*. 2nd. edn. MIT Press.
- Hathaway, Richard J. 1985. A Constrained Formulation of Maximum-Likelihood Estimation for Normal Mixture Distributions. *The Annals of Statistics*, **13**(2), 795–800. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2241213>.
- Hayashi, Fumio. 2000. *Econometrics*. Princeton University Press.

- Hernández, Luis A. Salomón, & Lirio, Rolando J. Biscay. 2007. A Simulation Study of the Local Linearization Method for the Numerical (strong) Solution of Stochastic Differential Equations Driven by Alpha-Stable. **28**(1), 51–60.
- Honoré, Peter. 1998 (November). *Pitfalls in Estimating Jump-Diffusion Models*. Working Paper Series, n. 18. Centre for Analytical Finance. Aarhus School of Business. University of Aarhus. Disponível em: <https://ssrn.com/abstract=61998>. Acessado em 8 de fevereiro de 2019.
- Hu, Y., & Long, H. 2009. Least Square Estimator for Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by  $\alpha$ -Stable Motions. *Stochastic Processes and their Applications*, **119**, 2465–2480.
- Hull, John C. 2018. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 10th. edn. Pearson Education.
- Jacod, Jean, Kurtz, Thomas G., Méléard, Sylvie, & Protter, Philip. 2005. The Approximate Euler Method for Lévy Driven Stochastic Differential Equations. *Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques*, **41**(3), 523–558.
- James, Barry R. 2015. *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. IMPA.
- Johannes, Michael S., Polson, Nicholas G., & Stroud, Jonathan R. 2009. Optimal Filtering of Jump Diffusions: Extracting Latent States from Asset Prices. *The Review of Financial Studies*, **22**(7), 2759–2799.
- Johnston, Jack, & DiNardo, John. 2001. *Métodos Econométricos*. 4th. edn. McGraw-Hill.
- Jongbloed, G., Meulen, F. H. Van Der, & Vaart, A. W. Van Der. 2005. Non-parametric Inference for Lévy-Driven Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Bernoulli*, **11**(5), 759–791.
- Kallenberg, Olav. 2002. *Foundations of Modern Probability*. 2nd. edn. Springer-Verlag.
- Kannan, D. 1977. On the Generalized Langevin Equation. *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, **11**(1), 1–24.
- Kapetanios, George. 2002 (november). *Measuring Conditional Persistence in Time Series*. Working Paper n. 474. Queen Mary University of London. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.358405>.

- Khaldi, K., Djeddour, K., & Meddahi, S. 2014. Comparison of Jump-Diffusion Parameters Using Passage Times Estimation. *Journal of Applied Mathematics*, **2014**. Disponível em: <http://downloads.hindawi.com/journals/jam/2014/975418.pdf>.
- Kiefer, Nicholas M. 1978. Discrete Parameter Variation: Efficient Estimation of a Switching Regression Model. *Econometrica*, **46**(2), 427–434.
- Kohatsu-Higa, A., & Protter, P. 1991. The Euler Scheme for SDE's Driven by Semimartingales. *Pages 141 – 151 of: Kuo, H. H. (ed), Stochastic Analysis on Infinite Dimensional Spaces*. Longman Scientific and Technical.
- Kou, S. G. 2007. Jump-Diffusion Models for Asset Pricing in Financial Engineering. In: Birge, John R., & Linetsky, Vadim (eds), *Financial Engineering*. Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 15. Elsevier.
- Kou, S. G., & Wang, Hui. 2003. First Passage Times of a Jump Diffusion Process. *Advances in Applied Probability*, **35**(2), 504–531.
- Kubo, R. 1966. The Fluctuation-Dissipation Theorem. *Reports on Progress in Physics*, **29**, 255–284.
- Kuo, Hui-Hsiung. 2006. *Introduction to Stochastic Integration*. Springer.
- Mai, H. 2014. Efficient Maximum Likelihood Estimation for Lévy-Driven Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Bernoulli*, **20**(2), 919–957.
- McLachlan, G., & Peel, D. 2000. *Finite Mixture Models*. John Wiley & Sons.
- Medino, Ary V. 2005. *Índice de Difusão Anômala, Processos de Lévy e Equação de Langevin Generalizada*. Tese (Doutorado em Matemática). Departamento de Matemática, Universidade de Brasília (UnB).
- Medino, Ary V., Lopes, Sílvia R.C., Morgado, Rafael, & Dorea, Chang C.Y. 2012. Generalized Langevin equation driven by Lévy processes: A probabilistic, numerical and time series based approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **391**(3), 572 – 581. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437111007631>.
- Merton, R. C. 1976. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, **3**(1), 125–144.
- Mori, H. 1965. Transport, Collective Motion, and Brownian Motion. *Progress of Theoretical Physics*, **33**(3), 423–455.

- Pechukas, P. 1967. Generalized Langevin Equation of Mori and Kubo. *Physical Review*, **164**, 174–175.
- Platen, Eckhard, & Bruti-Liberati, Nicola. 2010. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance*. Springer-Verlag.
- Press, S. James. 1967. A Compound Events Model for Security Prices. *The Journal of Business*, **40**(3), 317–335. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2351754>.
- Privault, Nicolas. 2019 (Janeiro). *Notes on Stochastic Finance*. Disponível em: <http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/index.html>. Acessado em 4 de fevereiro de 2019.
- Redner, Richard A., & Walker, Homer F. 1984. Mixture Densities, Maximum Likelihood and the Em Algorithm. *SIAM Review*, **26**(2), 195–239. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2030064>.
- Samorodnitsky, G., & Taqqu, M. S. 1994. *Stable non-Gaussian Random Processes*. Chapman & Hall.
- Sato, Ken-Iti. 1999. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press.
- Schwartz, Eduardo S. 1997. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. *The Journal of Finance*, **52**(3), 923–973. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1540-6261.1997.tb02721.x>.
- Spanos, Aris. 1999. *Probability Theory and Statistical Inference: Econometric Modeling with Observational Data*. Cambridge University Press.
- Spiliopoulos, K. 2009. Method of Moments Estimation of Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by General Lévy Process. *Annales de l’I.S.U.P.*, vol. 53, nos. 2–3. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/0807.2832>.
- Stein, J., Lopes, S. R. C., & Medino, A. V. 2016. Continuous Processes Derived from the Solution of Generalized Langevin Equation: Theoretical Properties and Estimation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/00949655.2016.1132318>.
- Sushko, V., Borio, C., McCauley, R., & McGuire, P. 2016 (october). *The Failure of Covered Interest Parity: FX Hedging Demand and Cosly Banlance*

- Sheets*. BIS Working Papers, n. 590. Bank for International Settlements (BIS). Disponível em: [https://www.bis.org/publ/qtrpdf/r\\_qt1609e.pdf](https://www.bis.org/publ/qtrpdf/r_qt1609e.pdf).
- Synowiec, Daniel. 2008. Jump-diffusion models with constant parameters for financial log-return processes. *Computers & Mathematics with Applications*, **56**(8), 2120 – 2127. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122108003477>.
- Tankov, Peter, & Voltchkova, Ekaterina. 2009. Jump-Diffusion Models: a Practitioner's Guide. *Banque et Marchés*, **99**. Disponível em: [https://www.lpsm.paris/pageperso/tankov/tankov\\_voltchkova.pdf](https://www.lpsm.paris/pageperso/tankov/tankov_voltchkova.pdf).
- UBS Global Macro Strategy. 2017 (february). *Global FX Atlas: Is There a USD Funding Shortage?* Global Research. UBS.
- Valdivieso, L., Schoutens, W., & Tuerlinckx, F. 2009. Maximum Likelihood Estimation in Processes of Ornstein-Uhlenbeck Type. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **12**, 1–19.
- Wang, Shiu-Huei. 2006. Jump Diffusion Model. In: Lee, Cheng-Few, & Lee, Alice C. (eds), *Encyclopedia of Finance*. Boston, MA: Springer US.
- Wei, William W. S. 2006. *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. 2nd. edn. Pearson.
- Wooldridge, Jeffrey M. 2003. *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. 2nd. edn. Thomson/South-Western.
- Zhang, S., & Zhang, X. 2013. A Least Square Estimator for Discretely Observed Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by Symmetric  $\alpha$ -Stable Motions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **65**, 89–103.