

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EDWIN OSWALDO SALINAS REYES

Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico em formas espaciais

Brasília
2019

Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico em formas espaciais

por

Edwin Oswaldo Salinas Reyes

*Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB,
como requisito parcial para obtenção do grau de*

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 04 de dezembro de 2019.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Carlos Maber Carrión Riveros– Orientador (MAT-UnB)



Prof. Dr. José Luis Teruel Carretero (MAT-UnB)



Prof. Dr. Levi Lopes de Lima (UFC)



Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro (UFG)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SED26h Salinas Reyes, Edwin Oswaldo
Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico em formas
espaciais / Edwin Oswaldo Salinas Reyes; orientador Carlos
Maber Carrión Riveros . -- Brasília, 2019.
65 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2019.

1. Transformações de Ribaucour. 2. Formas espaciais. 3.
Hipersuperfícies de Dupin. 4. Rotação de tipo esférico. 5.
Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico. I. Carrión
Riveros , Carlos Maber, orient. II. Título.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO DE TESE EM
FORMATO ELETRÔNICO**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, **AUTORIZO** o Instituto de Exatas da Universidade de Brasília – UnB a reproduzir, inclusive em outro formato ou mídia e através de armazenamento permanente ou temporário, bem como a publicar na rede mundial de computadores (*Internet*) e na biblioteca virtual da UnB, entendendo-se os termos “reproduzir” e “publicar” conforme definições dos incisos VI e I, respectivamente, do artigo 5º da Lei nº 9610/98 de 10/02/1998, a obra abaixo especificada, sem que me seja devido pagamento a título de direitos autorais, desde que a reprodução e/ou publicação tenham a finalidade exclusiva de uso por quem a consulta, e a título de divulgação da produção acadêmica gerada pela Universidade, a partir desta data.

Título: Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico em formas espaciais

Autor(a): Edwin Oswaldo Salinas Reyes

Brasília, 04 de Dezembro de 2019.

Edwin Oswaldo Salinas Reyes – Autor

Dr. Carlos M. Carrión Riveros – Orientador

EDWIN OSWALDO SALINAS REYES

Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico em formas espaciais

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Exatas da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Carlos M. Carrión Riveros

Brasília
2019

EDWIN OSWALDO SALINAS REYES

Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico em formas espaciais

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Exatas da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Programa de Pós-Graduação em Matemática, aprovada em 04 de Dezembro de 2019, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Carlos M. Carrión Riveros
Departamento de Matemática – UnB
Presidente da Banca

Prof. Dr. Armando M. Vasquez Corro
Instituto de Matemática e Estatística – UFG

Prof. Dr. Levi Lopes de Lima
Departamento de Matemática – UFC

Prof. Dr. José L. Teruel Carretero
Departamento de Matemática – UnB

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Edwin Oswaldo Salinas Reyes

Graduou-se em Matemática na UDFJC - Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Durante sua graduação, foi monitor acadêmico no departamento de Matemática da UDFJC. Durante o Mestrado, na UFG- Universidade Federal de Goiás, foi bolsista do CNPq.

Aos meus pais Rafael Salinas e Martha Reyes.

Agradecimentos

A meu orientador, professor Dr. Carlos Maber Carrión Riveros, pelo seu apoio incentivo e pelas horas dedicadas para a realização deste trabalho e também ao professor Dr. Armando Corro da UFG por sua colaboração prestada.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília por permitir-me estudar no programa da Pós Graduação (Doutorado) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-(CNPq) pelo apoio financeiro durante os dois primeiros anos de meu doutorado.

A todos os colegas e professores da pós-graduação em matemática pelo convívio e aprendizado.

À minha família, a qual amo muito, pelo carinho, paciência e incentivo; em especial a minha mãe Martha Cecilia Reyes Rodriguez, quem, apesar das dificuldades sempre me acompanha no caminho.

Aos amigos que fizeram parte desses momentos sempre me ajudando e incentivando.

A geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.

Johannes Kepler,
Astrônomo alemão.

Resumo

Salinas, Edwin . **Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico em formas espaciais**. Brasília, 2019. 65p. Tese de Doutorado Relatório de Graduação. Departamento de Matemática, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília.

Neste trabalho, usando congruências de esferas geodésicas, estendemos os resultados obtidos em [28] para hipersuperfícies em formas espaciais, isto é, generalizamos a parametrização obtida por Machado em [28] no espaço Euclidiano $(n + 1)$ -dimensional, para hipersuperfícies Σ nas formas espaciais $\bar{M}^{n+1}(c)$, $c = 0, \pm 1$. Caracterizamos as hipersuperfícies de $\bar{M}^{n+1}(c)$ que são envelopes de uma congruência de esferas geodésicas em $\bar{M}^{n+1}(c)$ na qual o outro envelope está contido em $M^n(c) \subset \bar{M}^{n+1}(c)$. Mostramos que esta caracterização nos permite obter hipersuperfícies $\Sigma \subset \bar{M}^{n+1}(c)$ localmente associadas a $M^n(c)$ por uma transformação de Ribaucour e construímos superfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura associadas a $\bar{M}^3(c)$, $c = -1, 1$ por uma transformação de Ribaucour. Apresentamos duas generalizações das superfícies de tipo esférico estudadas por [32], a saber as hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico e as hipersuperfícies de tipo esférico em formas espaciais $\bar{M}^{n+1}(c)$. Obtemos uma caracterização dessas hipersuperfícies que nos permite mostrar que a classe de hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico e de tipo esférico coincidem no caso bi-dimensional. Caracterizamos as hipersuperfícies de rotação de tipo esférico em $\bar{M}^{n+1}(c)$ usando funções radiais. Também, classificamos as hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico e de rotação de tipo esférico a través de funções radiais dadas explicitamente. Finalmente, damos uma caracterização das hipersuperfícies de tipo esférico em $\bar{M}^{n+1}(c)$.

Palavras-chave

Transformações de Ribaucour, formas espaciais, hipersuperfícies de Dupin, rotação de tipo esférico, hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico, linhas de curvatura.

Abstract

Salinas, Edwin . **Weingarten hypersurfaces of the spherical type in space forms**. Brasília, 2019. 65p. PhD. Thesis Relatório de Graduação. Departamento de Matemática, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília.

In this thesis, using congruence of geodesic spheres, we extend the results obtained in [28] to hypersurfaces in space forms, that is, we generalize the parameterization obtained by Machado [28] in Euclidean $(n + 1)$ -dimensional space, to hypersurfaces Σ in the space forms $\bar{M}^{n+1}(c)$, $c = 0, \pm 1$. We characterize the hypersurfaces of $\bar{M}^{n+1}(c)$ which are envelopes of a congruence of geodesic spheres in $\bar{M}^{n+1}(c)$ in which the other envelope is contained in $M^n(c) \subset \bar{M}^{n+1}(c)$. We show that this characterization allows us to obtain hypersurfaces $\Sigma \subset \bar{M}^{n+1}(c)$ locally associated to $M^n(c)$ by a Ribaucour transformation and we construct Dupin surfaces parameterized by lines of curvature associated to $M^3(c)$, $c = -1, 1$ by a Ribaucour transformation. We present two generalizations of the surfaces of the spherical type studied in [32], namely the Weingarten hypersurfaces of the spherical type and the hypersurfaces of spherical type in $\bar{M}^{n+1}(c)$ space forms. We obtain a characterization of these hypersurfaces that allows us to show that the class of Weingarten hypersurfaces of the spherical type and the class of hypersurfaces of spherical type coincide in the two-dimensional case. We characterize the hypersurfaces of the spherical type of rotation in $\bar{M}^{n+1}(c)$ using radial functions. Also, we classify the Weingarten hypersurfaces of the spherical type of rotation by radial functions given explicitly. Finally, we give a characterization of the hypersurfaces of spherical type in $\bar{M}^{n+1}(c)$.

Keywords

Ribaucour transformations, space forms, Dupin hypersurfaces, rotation spherical, Weingarten hypersurfaces of the spherical type, lines of curvature.

Sumário

1	Preliminares	15
1.1	Hipersuperfícies em formas espaciais	15
1.2	Congruência de esferas geodésicas em formas espaciais	18
1.3	Projeções estereográficas	21
1.4	Hipersuperfícies de rotação em formas espaciais	26
2	Desenvolvimento	28
2.1	Hipersuperfícies de $\overline{M}^{n+1}(c)$ associadas a $M^n(c)$ por uma congruência de esferas geodésicas	28
2.2	Hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de Curvatura	41
3	Aplicações	49
3.1	Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico em formas espaciais	49
3.2	Superfícies de tipo esférico em formas espaciais	54
3.3	Hipersuperfícies de rotação de tipo esférico e de tipo esférico	57
	Referências Bibliográficas	63

Introdução

As transformações de Ribaucour em formas espaciais foram estudadas por Bianchi em 1918-1919 [3]. A teoria clássica mostra que as transformações de Ribaucour podem ser usadas para construir superfícies de curvatura Gaussiana constante e superfícies de curvatura média constante (cmc) dada uma tal superfície. Porém, a primeira aplicação deste método para superfícies mínimas e curvatura média constante em \mathbb{R}^3 foi obtida por Corro, Ferreira, e Tenenblat em [14], [15]. Eles forneceram novas famílias de superfícies mínimas completas associadas às superfícies de Ennenper e ao catenóide. Além disso, famílias de superfícies cmc completas foram obtidas aplicando a teoria ao cilindro e às superfícies de Delaunay.

Em [15], a teoria clássica das transformações de Ribaucour foi estendida às superfícies Weingarten lineares em \mathbb{R}^3 , fornecendo uma versão unificada de resultados clássicos. Como aplicação, demonstrou-se a existência de superfícies Weingarten hiperbólicas completas imersas em \mathbb{R}^3 , em contraste com o teorema de Hilbert que afirma a inexistência de superfícies completas de curvatura negativa constante imersas em \mathbb{R}^3 . A teoria clássica das transformações de Ribaucour considera hipersuperfícies parametrizadas por linhas de curvatura, cujas curvaturas principais têm multiplicidade um, embora isso não seja declarado explicitamente. Em [13], a definição de uma transformação de Ribaucour no espaço Euclidiano foi modificada, ampliando o conceito para subvariedades com campos normais nulos, cujas curvaturas principais têm multiplicidade maior que um.

Uma hipersuperfície M^n imersa no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , na esfera \mathbb{S}^{n+1} ou no espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} é chamada isoparamétrica se ela possui curvaturas principais constantes. Uma hipersuperfície isoparamétrica em \mathbb{R}^{n+1} pode ter no máximo duas curvaturas principais distintas, e ela deve ser um subconjunto aberto de um hiperplano, hiper-esfera ou um cilindro esférico $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Um resultado similar vale em \mathbb{H}^{n+1} . Entretanto, Cartan [10], [11], [8], [9] mostrou em uma série de quatro artigos publicados no período 1938-1940 que a teoria de hipersuperfícies isoparamétricas na esfera \mathbb{S}^{n+1} é muito mais interessante e complicada. Cartan produziu exemplos de hipersuperfícies isoparamétricas na esfera com $g = 1, 2, 3$ ou 4 curvaturas principais distintas e classificou todas com $g \leq 3$. Aproximadamente quarenta anos depois, Münzner [29], [30], escreveu dois artigos que estendem o trabalho de Cartan, provando que todas hipersuperfícies

isoparamétricas são algébricas e que o número g de curvaturas principais distintas pode ser $g = 1, 2, 3, 4$ ou 6 . O problema de classificação nos casos $g = 4$ e 6 permanece aberto até o momento, porém muitos progressos têm sido feitos.

Uma hipersuperfície M^n numa forma espacial \mathbb{R}^{n+1} , \mathbb{S}^{n+1} ou \mathbb{H}^{n+1} é de Dupin se cada curvatura principal é constante ao longo das correspondentes linhas de curvatura. Isto é, uma generalização da condição isoparamétrica. Uma hipersuperfície de Dupin M é dita ser própria se o número g de curvaturas principais é constante em M . Além das hipersuperfícies isoparamétricas em \mathbb{R}^3 , os primeiros exemplos de superfícies de Dupin são as ciclides de Dupin em \mathbb{R}^3 , obtidas por Dupin em 1822.

Por outra parte, as superfícies de rotação são casos particulares de superfícies invariantes por um subgrupo a um parâmetro de isometrias do \mathbb{R}^3 . A grande vantagem de uma superfície ser invariante por um subgrupo a um parâmetro de isometrias provém do fato de que suas propriedades podem ser obtidas a partir do estudo de sua curva geradora, como acontece com as superfícies de rotação. Essa ideia de considerar superfícies invariantes por subgrupos de isometrias é chamada de Geometria equivariante. Esta área de pesquisa da geometria, iniciou-se com a classificação das superfícies rotacionais com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 , obtidas por Delaunay em 1841, [17]. Recentemente, outros matemáticos como Back, do Carmo e Hsiang, dedicaram-se ao estudo deste tema, adaptando as técnicas do \mathbb{R}^3 para dimensões maiores e considerando hipersuperfícies em outros espaços. Outro fator importante em nosso estudo é a curvatura escalar de uma variedade Riemanniana, que constitui um tema muito pesquisado em geometria diferencial, pois a curvatura escalar é um importante invariante geométrico, e, portanto, o interesse nas variedades com curvatura escalar constante, e em particular estudar hipersuperfícies em \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n , com esta propriedade.

Do Carmo e Dajczer [19] definiram as hipersuperfícies de rotação em formas espaciais e estudaram as hipersuperfícies de rotação com curvatura média constante em formas espaciais. Alguns anos depois, Leite [26] clasificou as hipersuperfícies de rotação completas com curvatura escalar constante em formas espaciais. Em [31], Palmas estudo as hipersuperfícies de rotação com curvaturas H_r constantes em formas espaciais, onde H_r é a r -ésima curvatura média.

Uma superfície orientada $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é dita uma superfície Weingarten se existe uma relação diferenciável W entre as curvaturas média H e Gaussiana K de Σ tal que $W(H, K) = 0$. A classificação geral das superfícies Weingarten é ainda uma questão aberta. No caso em que o funcional W é linear, isto é, $a + bH + cK = 0$ para a, b e c constantes, as superfícies são chamadas de superfícies Weingarten linear. Exemplos simples de superfícies Weingarten linear são as superfícies de curvatura Gaussiana constante ($c \neq 0$ e $b = 0$) e as superfícies de curvatura média constante ($b \neq 0$ e $c = 0$). Schief

[36] estudou duas classes de superfícies $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ que satisfazem uma relação de Weingarten da forma $(\mu \pm \rho)^2 K + 2\mu H + 1 = 0$, onde $\mu, \rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ são funções harmônicas (em certo sentido) definidas sobre a superfície. Essas classes incluem as superfícies clássicas de Bianchi, as superfícies de Bianchi de curvatura positiva e as superfícies com curvatura média inversa harmônica [2].

Em [12], Corro apresentou uma maneira de parametrizar superfícies como envelopes de congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um plano e com função raio associada a um sistema de tipo hidrodinâmico. Como aplicação, Corro estuda superfícies $X : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , no modelo do semi-espaço positivo, tal que a aplicação hiperbólica de Gauss G define uma congruência de esferas para a qual $X(M)$ e $G(X(M))$ são envelopes e o raio de cada esfera define a função raio h . Então, X é dita uma superfície Weingarten generalizada do tipo Bryant (superfícies BGW) se a curvatura média H , a curvatura Gaussiana K_I e a função raio h satisfazem a relação

$$2ach^{\frac{2(c-1)}{c}}(H-1) + (a+b - ach^{\frac{2(c-1)}{c}})K_I = 0,$$

para $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a+b \neq 0$, $c \neq 0$. Esta classe de superfícies incluem as superfícies de Bryant e as superfícies flat do \mathbb{H}^3 [7],[21],[25],[24],[34].

Em [22], Fernandes estuda superfícies M no espaço hiperbólico cuja curvatura média H e a curvatura intrínseca K_I satisfazem a relação

$$2(H-1)e^{2\mu} + K_I(1e^{2\mu}) = 0,$$

onde μ é uma função harmônica com respeito a forma quadrática $\alpha = K_I I + 2(H-1)II$, e I, II representam a primeira e segunda forma quadrática de M , respectivamente. Estas superfícies são chamadas de superfícies Weingarten generalizada de tipo harmônico (superfícies WGH). A autora obtém uma representação tipo Weierstrass para estas superfícies que depende de três funções holomorfas. Além disso, ela obtém uma representação tipo Weierstrass para superfícies de Bryant e classifica as superfícies WGH de rotação. Em [18], Dias estudou uma classe de superfícies orientadas $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ que cumprem uma relação da forma $2\Psi_\nu H + \Delta_\nu K = 0$, onde $\Psi_\nu, \Delta_\nu : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ são dadas por $\Psi_\nu(p) = \langle p - \nu, N(p) \rangle$, $\Delta_\nu(p) = \langle p - \nu, p - \nu \rangle$ e $\nu \in \mathbb{R}^3$ é um vetor fixo.

Uma superfície orientada $\Psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana não nula K e curvatura média H é chamada uma *superfície mínima de Laguerre* se

$$\Delta_{III} \left(\frac{H}{K} \right) = 0,$$

onde Δ_{III} é o laplaciano com respeito a terceira forma fundamental III de Ψ . O estudo

dessas superfícies foi feita por W. Blaschke [5], [4], [6], onde tais superfícies aparecem como pontos críticos do funcional

$$L(\Psi) = \int \frac{H^2 - K}{K} dM,$$

onde dM é o elemento de área da superfície. Em [32], os autores estudam superfícies mínimas de Laguerre como gráficos de funções biarmônicas no modelo isotrópico da Geometria de Laguerre. Em particular estudam as superfícies mínimas de Laguerre de tipo esférico, a saber as superfícies $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ tal que o conjunto de esferas de centro $p + \frac{H(p)}{K(p)}N(p)$, $p \in M$, tangenciam a um plano fixo orientado. Em [23], os autores estudam uma classe de hipersuperfícies orientadas M^n no espaço hiperbólico n -dimensional que satisfazem uma relação Weingarten na forma

$$\sum_{r=0}^n (c - n + 2r)C_r^n H_r = 0,$$

onde c é uma constante real, H_r é a r -ésima curvatura média da hipersuperfície M^n e C_r^n é a combinatória de n em r . Eles mostram como esta classe de hipersuperfície é caracterizada por uma aplicação harmônica derivada das duas aplicações de Gauss hiperbólica. Olhando estas hipersuperfícies como ortogonais para uma congruência de geodésicas, eles também mostram a relação de tais hipersuperfícies com as soluções da equação $\Delta(u) + ku^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$, onde $k \in \{0, \pm 1\}$.

Neste trabalho, motivados pelo trabalho de [28], estenderemos os resultados obtidos pelo autor para formas espaciais $\overline{M}^{n+1}(c)$ usando congruências de esferas geodésicas. Apresentamos duas generalizações das superfícies de tipo esférico estudadas por [32], a saber as hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico e as hipersuperfícies de tipo esférico generalizada nas formas espaciais $\overline{M}^{n+1}(c)$. As hipersuperfícies nas formas espaciais $\Sigma \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ que satisfazem uma relação de Weingarten da forma

$$\sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} r h^{r-1} H_r C_r^n = 0,$$

onde H_r são as r -ésimas curvaturas médias de Σ , serão chamadas de hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico. Daremos uma caracterização destas hipersuperfícies por meio de equações diferenciais parciais lineares, além disso, mostraremos alguns exemplos de tais hipersuperfícies. Definindo as hipersuperfícies de tipo esférico como as hipersuperfícies $\Sigma \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ tais que existem uma hipersuperfície $M^n(c) \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ tal que para todo ponto $p \in \Sigma$ o conjunto de esferas de centro $p + \frac{H_{n-1}(p)}{H_n(p)}N(p)$, com raio $h = \frac{H_{n-1}}{H_n}$ tangenciam $M^n(c)$, obteremos uma caracterização dessas hipersuperfícies que nos permite mostrar que as classes de hipersuperfície Weingarten de tipo esférico e de tipo esférico

coincidem no caso bi-dimensional.

No capítulo 1, apresentaremos algumas definições e resultados que serão úteis para o entendimento dos capítulos 2 e 3, fixaremos a notação para as hipersuperfícies nas formas espaciais $\overline{M}^{n+1}(c)$, assim, como a generalização da congruência de esferas geodésicas nas formas espaciais. Além disso, daremos duas parametrizações para a esfera e o espaço hiperbólico n -dimensional, estas serão utilizadas ao longo deste trabalho. Por último, definiremos as hipersuperfícies de rotação em formas espaciais as quais foram dadas por do Carmo em [19].

No capítulo 2, motivados pelo trabalho de Machado [28], caracterizaremos as hipersuperfícies de $\overline{M}^{n+1}(c)$ que são envelopes de uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^{n+1}(c)$ na qual o outro envelope está contido em $M^n(c) \subset \overline{M}^{n+1}(c)$. Mostraremos ainda que esta caracterização permite obter localmente uma parametrização por uma transformação de Ribaucour das hipersuperfícies contidas em $\overline{M}^{n+1}(c)$ e construiremos superfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura associadas a $\overline{M}^n(c)$ por uma transformação de Ribaucour. Demonstraremos o Teorema 2, o qual é o resultado principal deste trabalho e caracterizaremos todas as superfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura, tais que satisfazem a equação (2-13).

No capítulo 3, generalizaremos os resultados encontrados por Machado em [28]. Definiremos as hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico e de rotação de tipo esférico, assim, como as hipersuperfícies de tipo esférico. No Teorema 3, mostraremos que a hipersuperfície $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ dada pela parametrização (2-14), é uma hipersuperfície de rotação de tipo esférico em $\overline{M}^{n+1}(c)$ se, e somente se, h é uma função radial [19]. Também, classificamos as hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico e de rotação de tipo esférico por meio de uma função radial h (Ver Teorema 4). Finalmente, damos uma caracterização das hipersuperfícies de tipo esférico em $\overline{M}^{n+1}(c)$.

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados que serão úteis para o entendimento dos capítulos 2 e 3 deste trabalho. O leitor pode encontrar mais detalhes das temáticas abordadas neste capítulo nas obras [1],[33], [28], [14], [16], [19], [20], [27],[35] e [37].

1.1 Hipersuperfícies em formas espaciais

Denotaremos por $\overline{M}^{n+1}(c)$ a uma variedade Riemanniana simplesmente conexa de dimensão $(n+1)$ com curvatura seccional constante $c = 0, \pm 1$, isto é, $\overline{M}^{n+1}(c)$ denota ao espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} , se $c = -1$ ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} quando $c = 0$ ou à esfera \mathbb{S}^{n+1} , se $c = 1$. Essas variedades Riemannianas são conhecidas como **formas espaciais**. Denotaremos por $U \subset \mathbb{R}^n$ a um aberto de \mathbb{R}^n , tal que $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ são as coordenadas de $u \in U$. Além disso, dada uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a derivada parcial de f relativa a u_i , $1 \leq i \leq n$, será denotada por $f_{,i}$.

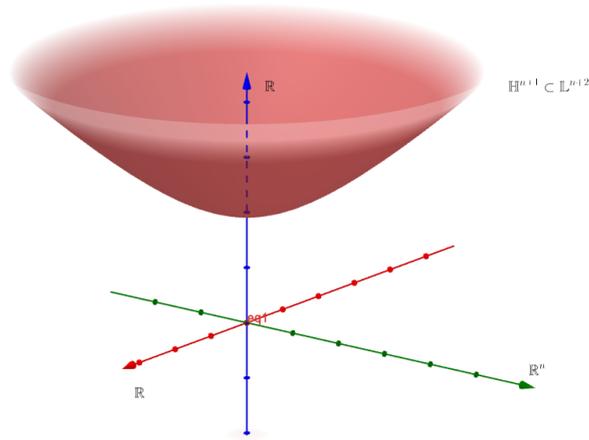
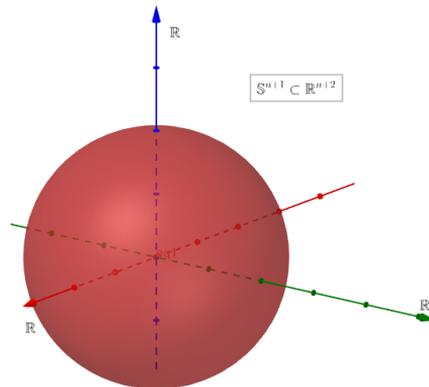
Seja \mathbb{L}^{n+2} o conjunto de $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ munido com a pseudo-métrica $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i - u_{n+2} v_{n+2}$. Um modelo para o espaço hiperbólico é a subvariedade $\mathbb{H}^{n+1} = \{u \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle u, u \rangle = -1, u_{n+2} > 0\}$. Ver figura 1.1.

Um modelo para a esfera \mathbb{S}^{n+1} é o conjunto $\{u \in \mathbb{R}^{n+2}; \|u\| = 1\}$ munido com a métrica Euclidiana. Ver figura 1.2.

Observação 1 De agora em diante, consideraremos $\overline{M}^{n+1}(c) = \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ quando $c = 1$, $\overline{M}^{n+1}(c) = \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ quando $c = -1$ e $\overline{M}^{n+1}(c) = \mathbb{R}^{n+1}$, se $c = 0$.

No caso da definição de uma hipersuperfície M^n em \mathbb{R}^{n+1} , definimos de forma análoga uma hipersuperfície $M^n(c)$ de $\overline{M}^{n+1}(c)$ quando $c = \pm 1$.

Definição 1 Seja M um subconjunto não vazio de $\overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 2$, $c = \pm 1$. Dizemos que M é uma **hipersuperfície** de $\overline{M}^{n+1}(c)$, se para cada $p \in M$, existem uma vizinhança $V \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ de p , um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo diferenciável $X : U \rightarrow V \cap M$,

Figura 1.1: Hiperbolóide de duas folhas, $u_{n+2} > 0$.**Figura 1.2:** Esfera Euclidiana.

tal que a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ é injetora para todo $q \in U$. A aplicação X é chamada de uma **parametrização** de $p \in M$. Em termos de suas componentes, a parametrização X pode ser escrita por $X(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_{n+2}(u))$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$. Dessa forma, X é diferenciável se, e somente se, x_i for diferenciável para todo $i = 1, \dots, n+2$. Além disso, a diferencial dX_q é injetora se, e somente se, os vetores $X_{,i}(q)$, $1 \leq i \leq n$, são linearmente independentes.

Definição 2 Um **vetor tangente** a M em um ponto $p \in M$ é um vetor tangente a uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p , denotado por $T_p M$, é chamado de **hiperplano tangente** a M em p . Se X é uma parametrização de M em p , então $T_p M$ coincide com o subespaço vetorial gerado por $\{X_{,i}(q)\}_{i=1}^n$, onde $p = X(q)$.

Definição 3 Dizemos que M é *orientável*, se for possível determinar um campo vetorial diferenciável unitário N normal a T_pM , para cada $p \in M$. Neste caso, dizemos que N é a *aplicação normal de Gauss* de M e que tal campo determina uma orientação em M . Em coordenadas locais

$$N_{,i} = \sum_{j=1}^n W_{ij} X_{,j}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde X é uma parametrização de M . A matriz $W = (W_{ij})$ é chamada de *matriz de Weingarten* de M .

Definição 4 A *primeira forma fundamental* I de M é a restrição da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\overline{M}^{n+1}(c)$ aos hiperplanos tangentes T_pM . Logo, para cada $p \in M$

$$I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle; \quad w_1, w_2 \in T_pM.$$

A *segunda forma fundamental* II e a *terceira forma fundamental* III de M são definidas por

$$II_p(w_1, w_2) = -\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle; \quad w_1, w_2 \in T_pM,$$

$$III_p(w_1, w_2) = \langle dN_p(w_1), dN_p(w_2) \rangle; \quad w_1, w_2 \in T_pM,$$

respectivamente, onde $p \in M$ e dN_p é a diferencial da normal de Gauss em p .

Observação 2 Para cada $p \in M$, dN_p é auto-adjunto com respeito a primeira forma fundamental I . Consequentemente, a segunda II e a terceira III formas fundamentais são formas bilineares simétricas sobre T_pM , para todo $p \in M$.

Definição 5 As *curvaturas principais* k_1, \dots, k_n de M num ponto p são os autovalores de $-dN_p$. Dessa forma, definimos a *curvatura média* H e a *curvatura de Gauss-Kronecker* K por

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i = \frac{1}{n} \text{tr}(-dN_p),$$

$$K = \prod_{i=1}^n k_i = \det(-dN_p),$$

onde tr e \det denotam, respectivamente, o traço e o determinante.

Além disso, a *r-ésima curvatura média* H_r de M , $1 \leq r \leq n$ é definida por

$$H_r = \frac{\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_r} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r}}{C_r^n},$$

onde C_r^n é a combinatória de n em r .

Definição 6 Dizemos que M é uma *hipersuperfície de Dupin* se cada curvatura principal é constante ao longo da correspondente linha de curvatura i.e., se M é parametrizada por linhas de curvatura, então $k_{i,i} = 0$, $1 \leq i \leq n$, onde k_i são as curvaturas principais de M .

Seja $Y : U \rightarrow M^n(c)$ uma parametrização local ortogonal de $M^n(c)$, isto é, $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$ é tal que $L_{ii} \neq 0$ e $L_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Então, os símbolos de Christoffel de L_{ij} são dados por

$$\begin{cases} \Gamma_{ij}^m = 0, \text{ para } i, j, m \text{ distintos,} \\ \Gamma_{ij}^j = \frac{L_{jj,i}}{2L_{jj}}, \text{ para todo } i, j, \\ \Gamma_{ii}^j = -\frac{L_{ii,j}}{2L_{jj}}, \text{ para } i \neq j. \end{cases} \quad (1-1)$$

De fato, pela expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos L_{ij} , temos:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (L_{jk,i} + L_{ki,j} - L_{ij,k}) L^{km}, \quad 1 \leq i, j, m \leq n, \quad (1-2)$$

onde (L^{km}) é a matriz inversa de (L_{km}) . Como $L_{km} = 0$, se $k \neq m$, então $L^{mm} = \frac{1}{L_{mm}}$, daí,

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2L_{mm}} (L_{jm,i} + L_{mi,j} - L_{ij,m}).$$

1.2 Congruência de esferas geodésicas em formas espaciais

Definição 7 [37] Uma **congruência de esferas geodésicas em $\bar{M}^{n+1}(c)$** é uma família a n-parâmetros de esferas geodésicas em $\bar{M}^{n+1}(c)$, tal que o conjunto dos centros das esferas geodésicas é uma hipersuperfície M^n de $\bar{M}^{n+1}(c)$ e o raio das esferas geodésicas é dado por uma função diferenciável sobre M .

Um *envelope de uma congruência de esferas geodésicas em $\bar{M}^{n+1}(c)$* é uma hipersuperfície M_1 de $\bar{M}^{n+1}(c)$, tal que cada ponto de M_1 é tangente a uma esfera geodésica da congruência de esferas geodésicas.

Definição 8 Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies de $\bar{M}^{n+1}(c)$. Dizemos que M_1 e M_2 estão *associadas por uma congruência de esferas geodésicas em $\bar{M}^{n+1}(c)$* , se existe um difeomorfismo $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$, tal que os pontos correspondentes p e $\Psi(p)$ de M_1 e M_2 , respectivamente, são tangentes à mesma esfera geodésica de uma congruência de esferas geodésicas.

Um caso especial da definição anterior acontece quando Ψ leva linhas de curvatura de M_1 em linhas de curvatura em M_2 .

Definição 9 Seja M_1 uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Uma hipersuperfície M_2 de $\overline{M}^{n+1}(c)$ é associada a M_1 por uma **transformação de Ribaucour**, se existem uma função diferenciável $h : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e um difeomorfismo $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$, tais que

1. $exp_p(h(p)N_1(p)) = exp_{\Psi(p)}(h(p)N_2(\Psi(p)))$, para todo $p \in M_1$, onde exp é a aplicação exponencial de $\overline{M}^{n+1}(c)$ e N_1 e N_2 são os campos de vetores normais unitários de M_1 e M_2 , respectivamente.
2. O subconjunto $S = \{exp_p(h(p)N_1(p)); p \in M_1\}$ é uma subvariedade de dimensão n de $\overline{M}^{n+1}(c)$.
3. Ψ leva linhas de curvatura de M_1 em linhas de curvatura de M_2 .

Dizemos ainda que M_1 e M_2 estão **localmente associados por uma transformação de Ribaucour**, se $\forall p \in M_1$, existe uma vizinhança de p em M_1 associada por uma transformação de Ribaucour a um aberto de M_2 .

Observação 3 Seja M uma hipersuperfície de $\overline{M}^{n+1}(c)$ e N seu campo normal unitário ao longo de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Se $c = \pm 1$, então $\langle N(p), p \rangle = 0$, $\forall p \in M$.

De fato, seja $X : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma parametrização local ortogonal de $p \in \overline{M}^{n+1}(c)$. Logo, $\langle X(u), X(u) \rangle = \pm 1$, $\forall u \in U$, portanto, $\langle X_i(u), X(u) \rangle = 0$, $\forall u \in U$, $1 \leq i \leq n+1$. Se $p \in M$, então, existe $u \in U$, tal que $N(p) = X_i(u)$ e $X(u) = p$ para algum $1 \leq i \leq n+1$.

Considerando $\overline{M}^{n+1}(c)$ como \mathbb{R}^{n+1} , $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ ou $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, a condição (1) da Definição 9 pode ser escrita como

$$p + h(p)N_1(p) = \Psi(p) + h(p)N_2(\Psi(p)), \forall p \in M_1, \quad (1-3)$$

onde

$$h(p) = \begin{cases} \tan(\phi(p)), & \phi : M_1 \rightarrow (0, \frac{\pi}{2}), \text{ se } c = 1, \\ \tanh(\phi(p)), & \phi : M_1 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ se } c = -1. \end{cases} \quad (1-4)$$

De fato, um ponto de \mathbb{S}^{n+1} o qual pertence à geodésica que passa pelo $p \in \mathbb{S}^{n+1}$ na direção $N_1(p)$, pode ser parametrizado como

$$\cos(\phi(p))p + \sin(\phi(p))N_1(p), \phi : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow (0, \pi).$$

Dado que $p \in M_1$ e $\Psi(p) \in M_2$ são tangentes à mesma esfera geodésica em \mathbb{S}^{n+1} , então $\phi(p) \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Analogamente, um ponto de \mathbb{H}^{n+1} o qual pertence à geodésica que passa pelo ponto $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ na direção $N_1(p)$, pode ser parametrizado como

$$\cosh(\phi(p))p + \sinh(\phi(p))N_1(p), \phi : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\phi(p) = \begin{cases} \tan^{-1}(h(p)), & h : M_1 \rightarrow (0, \infty), \text{ se } c = 1, \\ \tanh^{-1}(h(p)), & h : M_1 \rightarrow (-1, 1), \text{ se } c = -1. \end{cases} \quad (1-5)$$

Definimos agora (localmente) o sistema de coordenadas $(n+1)$ -dimensional de $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ e $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ de forma análoga ao sistema de coordenadas esférico no espaço Euclidiano e ao espaço hiperbólico no espaço de Minkowski, respectivamente. Ver [1].

No caso de \mathbb{S}^{n+1} , as coordenadas consistem de $(n+1)$ ângulos coordenados $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n+1}$, onde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \in (0, \pi)$ e $\phi_{n+1} \in (-\pi, \pi)$.

Se u_i , $1 \leq i \leq n+2$ são as coordenadas cartesianas de \mathbb{S}^{n+1} em \mathbb{R}^{n+2} , então

$$\begin{cases} u_1 = \cos(\phi_1), \\ u_2 = \sin(\phi_1)\cos(\phi_2), \\ u_3 = \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3), \\ \vdots \\ u_{n+1} = \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\dots\sin(\phi_n)\cos(\phi_{n+1}), \\ u_{n+2} = \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\dots\sin(\phi_n)\sin(\phi_{n+1}). \end{cases} \quad (1-6)$$

Se $\phi_{n+1} = 0$, então $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$. As coordenadas cartesianas de \mathbb{S}^n em \mathbb{R}^{n+2} vem dadas por

$$\begin{cases} u_1 = \cos(\phi_1), \\ u_2 = \sin(\phi_1)\cos(\phi_2), \\ u_3 = \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3), \\ \vdots \\ u_n = \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\dots\cos(\phi_n), \\ u_{n+1} = \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\dots\sin(\phi_n), \\ u_{n+2} = 0. \end{cases} \quad (1-7)$$

Para \mathbb{H}^{n+1} , as coordenadas consistem de $(n+1)$ ângulos coordenados $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n+1}$, onde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1} \in \mathbb{R}$.

Se u_i , $1 \leq i \leq n+2$ são as coordenadas cartesianas de \mathbb{H}^{n+1} em \mathbb{L}^{n+2} , então

$$\begin{cases} u_1 = \sinh(\phi_1), \\ u_2 = \cosh(\phi_1)\sinh(\phi_2), \\ u_3 = \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2)\sinh(\phi_3), \\ \vdots \\ u_{n+1} = \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2) \dots \cosh(\phi_n)\sinh(\phi_{n+1}), \\ u_{n+2} = \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2) \dots \cosh(\phi_n)\cosh(\phi_{n+1}). \end{cases} \quad (1-8)$$

Se $\phi_{n+1} = 0$, então $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$. As coordenadas cartesianas de \mathbb{H}^n em \mathbb{L}^{n+2} vem dadas por

$$\begin{cases} u_1 = \sinh(\phi_1), \\ u_2 = \cosh(\phi_1)\sinh(\phi_2), \\ u_3 = \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2)\sinh(\phi_3), \\ \vdots \\ u_n = \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2) \dots \sinh(\phi_n), \\ u_{n+1} = 0, \\ u_{n+2} = \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2) \dots \cosh(\phi_n). \end{cases} \quad (1-9)$$

De agora em diante, consideraremos $M^n(c)$ como a hipersuperfície de $\overline{M}^{n+1}(c)$, tal que $M^n(c) = \mathbb{H}^n$ quando $c = -1$, $M^n(c) = \mathbb{R}^n$ quando $c = 0$ ou $M^n(c) = \mathbb{S}^n$, se $c = 1$, com campo normal unitário dado por $N(p) = e_c$, $\forall p \in M^n(c)$, onde e_c é definido por

$$e_c = \begin{cases} (0, 0, \dots, 0, 1, 0) \in \mathbb{L}^{n+2}, \text{ se } c = -1, \\ (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{ se } c = 0, \\ (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+2}, \text{ se } c = 1. \end{cases} \quad (1-10)$$

1.3 Projeções estereográficas

Denotaremos por \mathbb{C} o corpo dos números complexos. Além disso, identificamos \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 pelo isomorfismo

$$G_{\mathbb{R}^2}(z) = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (1-11)$$

Consideremos uma função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde U é um subconjunto aberto do plano complexo \mathbb{C} . Denotaremos por $Re(f)$ e $Im(f)$, a parte real e imaginária de f , respectivamente. Dizemos que f é **R-diferenciável** em $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, se $Re(f)$ e $Im(f)$ são diferenciáveis em (x_0, y_0) .

Figura 1.3: *Hipersuperfície* $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$.

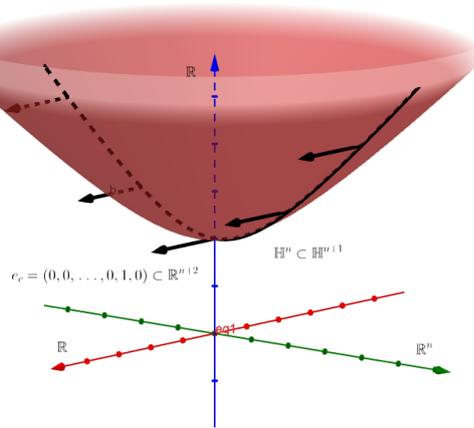


Figura 1.4: *Hipersuperfície* $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

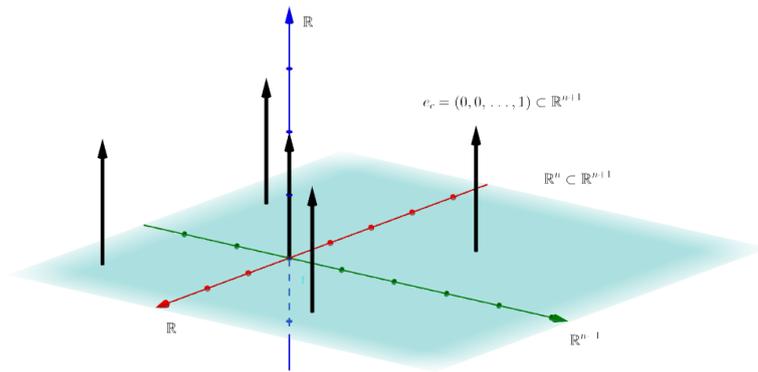
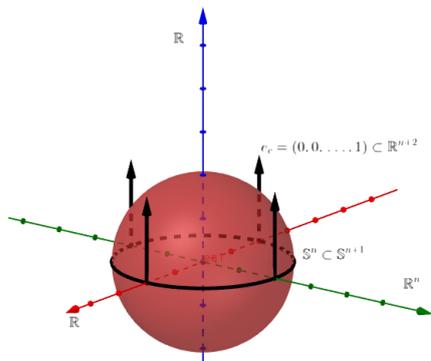


Figura 1.5: *Hipersuperfície* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$.



Por outro lado, f é dita **holomorfa** em $z_0 \in U$ se existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

O número complexo $f'(z_0)$ é chamado de derivada de f em z_0 . Se f for holomorfa em todos os pontos de U , dizemos que f é uma **função holomorfa**.

Teorema 1 [27] *Dada a função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, onde U é um subconjunto aberto de \mathbb{C} , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f é holomorfa em $z_0 \in U$.
2. f é \mathbb{R} -diferenciável em $z_0 \in U$ e $Re(f)$ e $Im(f)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$Re(f)_{,1} = Im(f)_{,2} \quad e \quad Re(f)_{,2} = -Im(f)_{,1} \quad (1-12)$$

em z_0 .

Observação 4 Segue do teorema acima que a derivada de uma função holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $f' = f_{,1} = -if_{,2}$.

A identificação de \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 induz de maneira natural a noção de produto interno de funções holomorfas. Com efeito, dadas as funções holomorfas $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o produto interno $\langle f, g \rangle$ é uma função real definida em U e dada por

$$\langle f, g \rangle = Re(f)Re(g) + Im(f)Im(g).$$

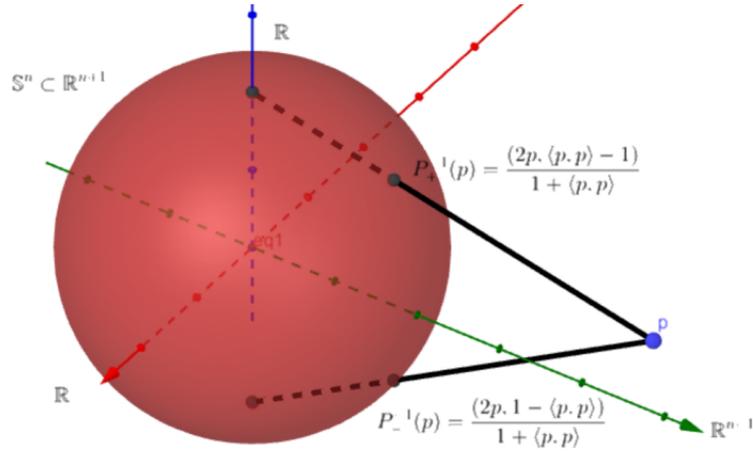
Observemos que $Re(f) = \langle 1, f \rangle$ e $Im(f) = \langle i, f \rangle$.

Definição 10 Uma **superfície de Riemann** M é uma variedade analítica unidimensional, isto é, uma variedade diferenciável conexa M , de dimensão 2, juntamente com uma família de parametrizações $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$, onde U_α é um aberto de \mathbb{C} , tais que as aplicações $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$ e $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ são holomorfas, desde que $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$. $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ é chamada de **estrutura analítica** em M .

Consideremos a esfera $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, dizemos que $e_{n+2} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ e $-e_{n+2} = (0, 0, \dots, 0, -1)$ são o **polo norte** e o **polo sul** de \mathbb{S}^{n+1} , respectivamente.

As **projeções estereográficas esféricas** $P_- : \mathbb{S}^{n+1} - \{-e_{n+2}\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e $P_+ : \mathbb{S}^{n+1} - \{e_{n+2}\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ são difeomorfismos definidos por

$$P_-(q) = \frac{q - \langle q, e_{n+2} \rangle e_{n+2}}{1 + \langle q, e_{n+2} \rangle}, \quad P_+(q) = \frac{q - \langle q, e_{n+2} \rangle e_{n+2}}{1 - \langle q, e_{n+2} \rangle}, \quad q \in \mathbb{S}^{n+1}. \quad (1-13)$$

Figura 1.6: *Pojeção estereográfica esférica.*

Além disso, as respectivas aplicações inversas P_-^{-1} e P_+^{-1} são dadas por

$$P_-^{-1}(p) = \frac{(2p, 1 - \langle p, p \rangle)}{1 + \langle p, p \rangle}, \quad P_+^{-1}(p) = \frac{(2p, \langle p, p \rangle - 1)}{1 + \langle p, p \rangle}, \quad p \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (1-14)$$

A esfera \mathbb{S}^2 munida da estrutura dada pelas inversas das projeções estereográficas (1-14) é uma superfície analítica. De fato, $P_-^{-1}(\mathbb{C}) \cap P_+^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2 - \{-e_3, e_3\}$ e as aplicações $P^+ \circ P_-^{-1}$ e $P_- \circ P_+^{-1}$ dadas por

$$P^+ \circ P_-^{-1}(z) = P_- \circ P_+^{-1}(z) = \frac{z}{\langle z, z \rangle}, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\},$$

são holomorfas.

Um modelo conforme para a esfera \mathbb{S}^2 é dada pelo conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, onde $\infty \notin \mathbb{C}$, munida da estrutura analítica dada pelas parametrizações

$$X_1(z) = z, \quad z \in \mathbb{C} \quad e \quad X_2(z) = \begin{cases} \infty, & \text{se } z = 0, \\ \frac{1}{z}, & \text{se } z \in \mathbb{C} - \{0\}. \end{cases} \quad (1-15)$$

De fato, a aplicação $G_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2$, dada por

$$G_{\mathbb{S}^2}(z) = \begin{cases} P_+^{-1}(z), & \text{se } z \neq \infty, \\ e_3, & \text{se } z = \infty, \end{cases} \quad (1-16)$$

define um difeomorfismo conforme entre \mathbb{S}^2 e \mathbb{C}_∞ . Com a estrutura dada por (1-15), \mathbb{C}_∞ é chamada de *esfera de Riemann*.

O modelo que apresentaremos a seguir é conhecido, na geometria hiperbólica, como o

modelo de Klein. Ver [16]. Consideremos $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ e definimos

$$\begin{aligned} P &: \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\rightarrow P(x), \end{aligned} \quad (1-17)$$

onde $P(x)$ é a interseção do hiperplano

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{(u_1, u_2, \dots, u_{n+1}, u_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}; u_{n+2} = 0\}$$

com a reta que passa pelos pontos x e $(0, 0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+2}$. P é chamada de **projeção estereográfica hiperbólica**.

Proposição 1 Seja $P : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$P(x) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+2}}, \frac{x_2}{1+x_{n+2}}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1+x_{n+2}} \right), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{H}^{n+1}. \quad (1-18)$$

P é um difeomorfismo de \mathbb{H}^{n+1} sobre $B^{n+1}(1) = \{u \in \mathbb{R}^{n+1}; |u| < 1\}$. Consequentemente, $P^{-1} : B^{n+1}(1) \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ definida por

$$P^{-1}(u) = \frac{1}{1 - \langle u, u \rangle} (2u, 1 + \langle u, u \rangle), \quad u \in B^{n+1}(1), \quad (1-19)$$

é uma parametrização para $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$.

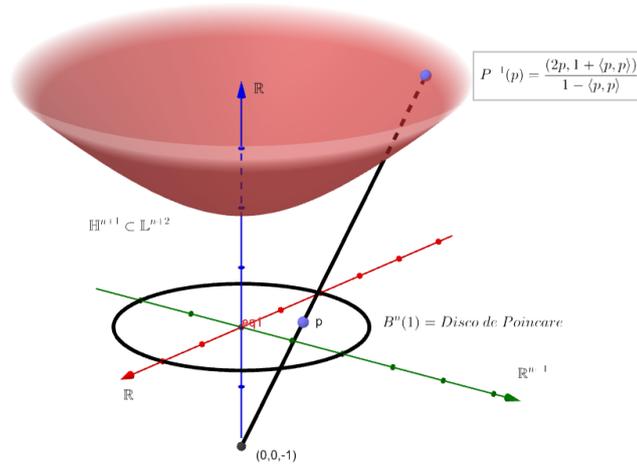
Como P é um difeomorfismo, a métrica em \mathbb{H}^{n+1} induz uma métrica em $B^{n+1}(1)$ de modo que $P : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow B^{n+1}(1)$ seja uma isometria. Um modelo conhecido acontece quando $n = 1$, neste caso, $B^2(1)$ com a métrica induzida por P é chamada de **disco de Poincare**. Dessa forma, uma parametrização para \mathbb{H}^2 é a aplicação $P^{-1} : B^2(1) \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por

$$P^{-1}(u_1, u_2) = \frac{1}{1 - (u_1^2 + u_2^2)} (2u_1, 2u_2, 1 + u_1^2 + u_2^2), \quad (u_1, u_2) \in B^2(1). \quad (1-20)$$

Identificaremos $B^2(1)$ com o conjunto $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Assim, definimos

$$G_{\mathbb{H}^2}(z) = P^{-1}(z) = \frac{1}{1 - \langle z, z \rangle} (2z, 1 + \langle z, z \rangle), \quad z \in B^2(1). \quad (1-21)$$

As projeções estereográficas (esférica e hiperbólica) é, portanto, uma maneira de se definir para o plano complexo \mathbb{C} uma métrica não Euclidiana.

Figura 1.7: *Projeção estereográfica hiperbólica.*

1.4 Hipersuperfícies de rotação em formas espaciais

Definamos as hipersuperfícies de rotação de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Começaremos com o caso $c = -1$. Ver [19].

Uma transformação ortogonal de \mathbb{L}^{n+2} é uma aplicação linear que preserva a pseudo-métrica em \mathbb{L}^{n+2} . As transformações ortogonais induz, por restrição, todas as isometrias de \mathbb{H}^{n+1} . Denotamos por P^k ao subespaço k -dimensional de \mathbb{L}^{n+2} que passa pela origem e por $O(P^2)$ ao conjunto de transformações ortogonais de \mathbb{L}^{n+2} com determinante positivo que deixa P^2 fixo. Denotaremos o subespaço gerado pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_k por $[v_1, v_2, \dots, v_k]$. Dizemos que P^k é Lorentziano se a restrição da pseudo-métrica de \mathbb{L}^{n+2} a P^k é uma métrica Lorentziana, P^k é Riemanniano se a restrição da pseudo-métrica de \mathbb{L}^{n+2} a P^k é uma métrica Riemanniana e P^k é degenerado se a restrição da pseudo-métrica de \mathbb{L}^{n+2} a P^k é uma forma quadrática degenerada.

Definição 11 Escolha P^2 e $P^3 \supset P^2$, tal que $P^3 \cap \mathbb{H}^{n+1} \neq \emptyset$. Seja C uma curva regular em $P^3 \cap \mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{H}^3$ que não intercepta P^2 . A órbita de C sob a ação de $O(P^2)$ é chamada **hipersuperfície de rotação** $M^n(-1) \subset \mathbb{H}^{n+1}$ gerada por C em torno de P^2 . Se $o \in O(P^2)$, a curva $o(C)$ é um **meridiano** de $M^n(-1)$ e a órbita de um ponto de C sob $O(P^2)$ é um **paralelo** de $M^n(-1)$. Além disso, se P^2 é Lorentziano então a **rotação de tipo esférico**, se P^2 é Riemanniano então a **rotação de tipo hiperbólica** e se P^2 é degenerado então a **rotação de tipo parabólico**.

Trocando \mathbb{H}^n por \mathbb{S}^n e \mathbb{L}^{n+2} por \mathbb{R}^{n+2} na definição acima obtém-se a definição para hipersuperfícies de rotação em \mathbb{S}^{n+1} .

Observação 5 Uma hipersuperfície de rotação $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gerada por uma curva C em torno de um eixo l que não intercepta C , é obtida tomando-se a órbita de C sob as

isometrias de \mathbb{R}^{n+1} que deixam l fixado. Nos espaços \mathbb{S}^{n+1} e \mathbb{H}^{n+1} , o equivalente a eixo de rotação, são os grandes círculos e as hipérboles, respectivamente, que são obtidos através da interseção de planos que passam pela origem. As isometrias de $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ e $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, são as isometrias do respectivo espaço ambiente que deixam \mathbb{S}^{n+1} e \mathbb{H}^{n+1} invariantes, então, para que tais isometrias deixem fixados grandes círculos e hipérboles, assim, devemos considerar isometrias do espaço ambiente que mantenha um plano fixado.

Desenvolvimento

Neste capítulo, caracterizaremos as hipersuperfícies de $\overline{M}^{n+1}(c)$ que são envelopes de uma congruência de esferas em $\overline{M}^{n+1}(c)$ na qual o outro envelope está contido em $M^n(c) \subset \overline{M}^{n+1}(c)$. Mostraremos ainda que esta caracterização permite obter localmente uma parametrização por uma transformação de Ribaucour das hipersuperfícies contidas em $\overline{M}^{n+1}(c)$ e construiremos hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura associadas a $\overline{M}^{n+1}(c)$ por uma transformação de Ribaucour.

2.1 Hipersuperfícies de $\overline{M}^{n+1}(c)$ associadas a $M^n(c)$ por uma congruência de esferas geodésicas

A proposição seguinte estabelece condições suficientes para que uma hipersuperfície Σ de $\overline{M}^{n+1}(c)$ esteja localmente associada a $M^n(c) \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ por meio de uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^{n+1}(c)$. Este resultado generaliza o Lema 2.1, obtido em [28].

Proposição 2 *Sejam Σ uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}^{n+1}(c)$ e N o campo normal unitário de Σ em $\overline{M}^{n+1}(c)$, tal que $N(p) \neq e_c, \forall p \in \Sigma$, onde e_c é a aplicação definida por (1-10). Então,*

$$v + h(p)dN_p(v) \neq 0, \forall p \in \Sigma \text{ e } v \in T_p\Sigma \text{ com } v \neq 0, \quad (2-1)$$

se, e somente se, Σ e $M^n(c)$ estão localmente associadas por uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^{n+1}(c)$, onde $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é a função diferenciável definida por

$$h(p) = \frac{\langle p, e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, p \in \Sigma. \quad (2-2)$$

Demonstração: Sejam h a função diferenciável definida por (2-2) e Ψ a aplicação diferenciável definida por

$$\Psi(p) = p + h(p)[N(p) - e_c], p \in \Sigma. \quad (2-3)$$

Então, Ψ é um difeomorfismo local, tal que $p + h(p)N(p) = \Psi(p) + h(p)e_c$, $p \in \Sigma$ e $\Psi(\Sigma) \subset M^n(c)$. De fato, pela definição de Ψ , temos que

$$d\Psi_p(v) = v + dh_p(v)[N(p) - e_c] + h(p)dN_p(v), \quad p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma. \quad (2-4)$$

Daí,

$$\langle d\Psi_p(v), N(p) \rangle = dh_p(v)[1 - \langle N(p), e_c \rangle], \quad p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma,$$

logo

$$dh_p(v) = \frac{\langle d\Psi_p(v), N(p) \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, \quad p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma. \quad (2-5)$$

Se existem $p \in \Sigma$ e $v \in T_p\Sigma$, $v \neq 0$, tais que $d\Psi_p(v) = 0$, segue de (2-4) e (2-5) que $v + h(p)dN_p(v) = 0$, o qual é uma contradição com (2-1).

Por outro lado, de (2-2) e (2-3) obtemos

$$\begin{aligned} \langle \Psi(p), e_c \rangle &= \langle p + h(p)[N(p) - e_c], e_c \rangle \\ &= \langle p, e_c \rangle - h(p)[1 - \langle N(p), e_c \rangle] \\ &= \langle p, e_c \rangle - \langle p, e_c \rangle \\ &= 0, \quad \forall p \in \Sigma. \end{aligned} \quad (2-6)$$

Se $c = 0$, então $\Psi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^n$. Se $c = \pm 1$, pela Observação 3, temos que $\langle N(p), p \rangle = 0$, $\forall p \in \Sigma$, então

$$\begin{aligned} \langle \Psi(p), \Psi(p) \rangle &= \langle p + h(p)[N(p) - e_c], p + h(p)[N(p) - e_c] \rangle \\ &= \langle p, p \rangle + 2h(p)\langle p, N(p) - e_c \rangle + h(p)^2\langle N(p) - e_c, N(p) - e_c \rangle \\ &= \pm 1 - 2h(p)\langle p, e_c \rangle + 2h(p)^2(1 - \langle N(p), e_c \rangle) \\ &= \pm 1 - 2h(p)\langle p, e_c \rangle + 2h(p)\langle p, e_c \rangle \\ &= \pm 1, \quad \forall p \in \Sigma. \end{aligned}$$

Seja $X^0 = \{p + h(p)N(p); p \in \Sigma\} \subset \overline{M}^{n+1}(c)$, mostraremos que X^0 é uma subvariedade de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Para isso, sejam $p \in \Sigma$ e $v \in T_p\Sigma$, $v \neq 0$, então, por hipótese, temos que $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$, daí,

$$\begin{aligned} \langle dX_p^0(v), dX_p^0(v) \rangle &= \langle v + h(p)dN_p(v) + dh_p(v)N(p), v + h(p)dN_p(v) + dh_p(v)N(p) \rangle \\ &= |v + h(p)dN_p(v)|^2 + |dh_p(v)|^2 > 0, \quad \forall p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma \text{ e } v \neq 0, \end{aligned}$$

logo X^0 é uma subvariedade de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Concluimos que Σ e $M^n(c)$ estão localmente associadas por uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^{n+1}(c)$.

Conseqüentemente, de (2-4) e (2-6) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle d\Psi_p(v), e_c \rangle \\ &= \langle v + dh_p(v)[N(p) - e_c] + h(p)dN_p(v), e_c \rangle \\ &= \langle v + h(p)dN_p(v), e_c \rangle + dh_p(v)(\langle N(p), e_c \rangle - 1), \quad p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma. \end{aligned} \quad (2-7)$$

Consideremos a subvariedade $X^0 = \{p + h(p)N(p); p \in \Sigma\}$ de $\overline{M}^{n+1}(c)$, daí

$$dX_p^0(v) = v + h(p)dN_p(v) + dh_p(v)N(p), \quad p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma.$$

Assumamos que $v + h(p)dN_p(v) = 0$ num ponto $p \in \Sigma$ e $v \in T_p\Sigma$, $v \neq 0$. Segue de (2-7) que $dh_p(v)(\langle N(p), e_c \rangle - 1) = 0$, daí, $dh_p(v) = 0$, de outra forma $\langle N(p), e_c \rangle = 1$, logo $N(p) = e_c$ o qual é uma contradição. Portanto, temos que $dh_p(v) = 0$ e $dX_p^0(v) = 0$, o qual é uma contradição com o fato de que X^0 é uma subvariedade n-dimensional de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Assim, $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$, $\forall p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma, v \neq 0$.

Observação 6 Pela definição de h em (2-2), segue-se

$$dh_p(v) = \frac{\langle v + h(p)dN_p(v), e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, \quad p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma. \quad (2-8)$$

De fato, dados $p \in \Sigma$ e $v \in T_p\Sigma$, obtemos

$$\begin{aligned} dh_p(v) &= \frac{\langle v, e_c \rangle [1 - \langle N(p), e_c \rangle] + \langle dN_p(v), e_c \rangle \langle p, e_c \rangle}{[1 - \langle N(p), e_c \rangle]^2} \\ &= \frac{\langle v, e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle} + \frac{h(p) \langle dN_p(v), e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle} \\ &= \frac{\langle v + h(p)dN_p(v), e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, \quad p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma. \end{aligned}$$

Sejam Σ uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}^{n+1}(c)$ e N o campo normal unitário de Σ em $\overline{M}^{n+1}(c)$, tal que $N(p) \neq e_c$, $\forall p \in \Sigma$. Observe que Σ está localmente associada a $M^n(c)$ por uma congruência de esferas geodésica sempre que $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$, $\forall p \in \Sigma$ e $v \in T_p\Sigma$, $v \neq 0$, onde $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é a função diferenciável definida por (2-2).

O seguinte corolário garante que Σ e $M^n(c)$ estão localmente associadas por uma transformação de Ribaucour.

Corolário 1 *Sejam Σ uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}^{n+1}(c)$, N o campo normal unitário de Σ em $\overline{M}^{n+1}(c)$, tal que $N(p) \neq e_c$, $\forall p \in \Sigma$, onde e_c é a aplicação definida por (1-10) e $\{e_i\}_{i=1}^n$ campos de vetores locais ortonormais de direções principais de*

Σ em p . Além disso, sejam h e Ψ definidas por (2-2) e (2-3), respectivamente. Então, $1 + h(p)\lambda^i \neq 0, \forall p \in \Sigma, 1 \leq i \leq n$, onde λ^i são as curvaturas principais de Σ em $\overline{M}^{n+1}(c)$ se, e somente se, Σ e $M^n(c)$ estão localmente associadas por uma transformação de Ribaucour em $\overline{M}^{n+1}(c)$.

Demonstração: Mostremos que $v + h(p)dN_p(v) \neq 0, \forall p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$ com $v \neq 0$ e $\langle d\Psi_p(e_i), d\Psi_p(e_j) \rangle = 0, \forall p \in \Sigma, 1 \leq i \neq j \leq n$.

Seja $v \in T_p\Sigma, v \neq 0$, então, existem $v_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$, tais que $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, onde $v_i \neq 0$ para algum $1 \leq i \leq n$.

Suponha que $v + h(p)dN_p(v) = 0$, assim,

$$\begin{aligned} 0 &= v + h(p)dN_p(v) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i e_i + h(p)dN_p\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i e_i + h(p) \sum_{i=1}^n v_i dN_p(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i e_i + h(p) \sum_{i=1}^n v_i \lambda^i e_i \\ &= \sum_{i=1}^n (1 + h(p)\lambda^i) v_i e_i, \end{aligned}$$

daí, como $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um conjunto linearmente independente, obtemos

$$(1 + h(p)\lambda^i) v_i = 0, 1 \leq i \leq n.$$

Porém, por hipótese, existe pelo menos um $v_i \neq 0$, então $1 + h(p)\lambda^i = 0$ para algum $1 \leq i \leq n$, isto é uma contradição. Daí, concluímos que $v + h(p)dN_p(v) \neq 0, \forall p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma, v \neq 0$. Pela Proposição 2, temos que Σ e $M^n(c)$ estão associadas por uma congruência de esferas geodésicas.

Por outro lado, observe que por (2-4) e (2-8), temos que

$$d\Psi_p(e_i) = (1 + h(p)\lambda^i) e_i + dh_p(e_i) [N(p) - e_c], p \in \Sigma, 1 \leq i \leq n, \quad (2-9)$$

$$dh_p(e_i) = \frac{(1 + h(p)\lambda^i) \langle e_i, e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, p \in \Sigma, 1 \leq i \leq n. \quad (2-10)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \langle d\Psi_p(e_i), d\Psi_p(e_j) \rangle &= (1 + h(p)\lambda^i)(1 + h(p)\lambda^j) \delta_{ij} - (1 + h(p)\lambda^i) dh_p(e_j) \langle e_i, e_c \rangle - \\ &\quad (1 + h(p)\lambda^j) dh_p(e_i) \langle e_j, e_c \rangle + 2dh_p(e_i) dh_p(e_j) (1 - \langle N(p), e_c \rangle). \end{aligned}$$

Substituindo (2-10) na equação anterior, obtemos que $\langle d\Psi_p(e_i), d\Psi_p(e_j) \rangle = 0$ para $1 \leq i \neq j \leq n$. Logo, $\{d\Psi(e_i)\}_{i=1}^n$ é uma base ortogonal de direções principais de $M^n(c)$ em $\bar{M}^{n+1}(c)$. Portanto, Σ e $M^n(c)$ estão localmente associadas por uma transformação de Ribaucour em $\bar{M}^{n+1}(c)$.

Exemplo 1 Seja $X : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3$, dada por

$$X(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(u_1), \sin(u_1), \cos(u_2), \sin(u_2)). \quad (2-11)$$

O vetor normal unitario de $X(u_1, u_2)$ em \mathbb{S}^3 , é dado por

$$N(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos(u_1), -\sin(u_1), \cos(u_2), \sin(u_2)). \quad (2-12)$$

Uma base ortonormal local de direções principais para o espaço tangente de $X(u_1, u_2)$ em \mathbb{S}^3 , é dada pelo conjunto

$$\{X_{,1}(u_1, u_2) = (-\sin(u_1), \cos(u_1), 0, 0), X_{,2}(u_1, u_2) = (0, 0, -\sin(u_2), \cos(u_2))\}.$$

Seja $Y : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$, a parametrização local da esfera dada por

$$Y(u_1, u_2) = \frac{1}{2 - \sqrt{2}\sin(u_2)} \begin{pmatrix} \cos(u_1) (\sqrt{2} - 2\sin(u_2)), \sin(u_1) (\sqrt{2} - 2\sin(u_2)), \\ \sqrt{2}\cos(u_2), 0 \end{pmatrix}.$$

O vetor normal unitario de $Y(u_1, u_2)$ em \mathbb{S}^3 , é dado por $e_1 = (0, 0, 0, 1)$. Uma base ortogonal para o espaço tangente de $Y(u_1, u_2)$ em \mathbb{S}^3 , é dada pelo conjunto $\{Y_{,1}(u_1, u_2), Y_{,2}(u_1, u_2)\}$, onde

$$Y_{,1}(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{2} - 2\sin(u_2)}{2 - \sqrt{2}\sin(u_2)} (-\sin(u_1), \cos(u_1), 0, 0),$$

$$Y_{,2}(u_1, u_2) = \frac{2}{(2 - \sqrt{2}\sin(u_2))^2} \begin{pmatrix} -\cos(u_2)\cos(u_1), -\cos(u_2)\sin(u_1), \\ 1 - \sqrt{2}\sin(u_2), 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, substituindo (2-11) e (2-12) em (2-2), obtemos

$$h(u_1, u_2) = \frac{\sin(u_2)}{\sqrt{2} - \sin(u_2)}.$$

Observe que $X(u_1, u_2) + h(u_1, u_2)N(u_1, u_2) = Y(u_1, u_2) + h(u_1, u_2)e_1$, portanto, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ está associado localmente por uma transformação de Ribaucour a \mathbb{S}^2 , sempre que $1 \pm h \neq$

0, se, e somente se, $u_2 \neq \frac{\pi}{4}$.

O seguinte teorema estende o teorema 2.3 obtido em [28] para formas espaciais.

Teorema 2 *Sejam Σ uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}^{n+1}(c)$, N o campo normal unitário de Σ em $\overline{M}^{n+1}(c)$, tal que $N(p) \neq e_c, \forall p \in \Sigma$, onde e_c é a aplicação definida por (1-10) e $X : U \rightarrow \Sigma$ uma parametrização local de Σ em p . Suponha que vale (2-1). Então, existe uma parametrização local $Y : U \rightarrow M^n(c)$, tal que*

$$X(u) = Y(u) + h(u)[e_c - N(u)], \quad u \in U. \quad (2-13)$$

Além disso, se Y é uma parametrização local ortogonal de $M^n(c)$, então

$$X = Y - \frac{2h}{S} \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_{,i}}{L_{ii}} Y_{,i} - e_c + chY \right), \quad (2-14)$$

$$N = \frac{2}{S} \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_{,i}}{L_{ii}} Y_{,i} - e_c + chY \right) + e_c, \quad (2-15)$$

onde

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} + ch^2 + 1 \neq 0. \quad (2-16)$$

A I, II e III forma fundamental de Σ em $\overline{M}^{n+1}(c)$, são dadas por

$$I : \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle = L_{ij} - \frac{2h}{S} (V_{ji}L_{ii} + V_{ij}L_{jj}) + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k=1}^n V_{ik}V_{jk}L_{kk}, \quad (2-17)$$

$$II : \langle -N_{,i}, X_{,j} \rangle = \frac{4h}{S^2} \sum_{k=1}^n V_{ik}V_{jk}L_{kk} - \frac{2}{S} V_{ji}L_{ii}, \quad (2-18)$$

$$III : \langle N_{,i}, N_{,j} \rangle = \frac{4}{S^2} \sum_{k=1}^n V_{ik}V_{jk}L_{kk}, \quad (2-19)$$

respectivamente, onde

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ij} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) + ch\delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2-20)$$

sendo Γ_{ij}^l os símbolos de Christoffel da métrica $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle, 1 \leq i, j \leq n$.

A matriz de Weingarten $W = (W_{ij})$, é dada por

$$W = 2V(SI_n - 2hV)^{-1}, \quad (2-21)$$

onde I_n é a matriz identidade e $V = (V_{ij})$.

A condição de regularidade é dada por

$$\det(SI_n - 2hV) \neq 0. \quad (2-22)$$

Reciprocamente, dada uma parametrização local ortogonal $Y : U \rightarrow M^n(c) \subset \overline{M}^{n+1}(c)$, onde U é um aberto conexo de \mathbb{R}^n e uma função diferenciável $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, então (2-14) define uma hipersuperfície em $\overline{M}^{n+1}(c)$ com aplicação normal de Gauss dada por (2-15). Além disso, (2-16)-(2-21) são satisfeitas.

Demonstração: Sejam $Y : U \rightarrow M^n(c)$ uma parametrização local ortogonal de $M^n(c)$, tal que vale (2-13) e N o campo normal unitário de Σ em $\overline{M}^{n+1}(c)$, dado por

$$N = \sum_{i=1}^n b_i Y_{,i} + b_{n+1} e_c + b_{n+2} Y, \text{ se } c = \pm 1 \quad (2-23)$$

e

$$N = \sum_{i=1}^n b_i Y_{,i} + b_{n+1} e_c, \text{ se } c = 0, \quad (2-24)$$

tal que

$$\langle N, N \rangle = \sum_{i=1}^n b_i^2 L_{ii} + b_{n+1}^2 + c b_{n+2}^2 = 1. \quad (2-25)$$

De (2-13), obtemos

$$X_{,i} = Y_{,i} + h_{,i}(e_c - N) - h N_{,i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2-26)$$

Usando (2-23), (2-24) e (2-26), temos que

$$0 = \langle N, X_{,i} \rangle = b_i L_{ii} + h_{,i}(b_{n+1} - 1), \quad 1 \leq i \leq n,$$

que implica

$$b_i = \frac{h_{,i}(1 - b_{n+1})}{L_{ii}}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2-27)$$

Por outro lado, se $c = \pm 1$, usando (2-13), (2-23) e o fato que $\langle X, N \rangle = 0$, obtemos

$$0 = \langle X, N \rangle = \langle Y + h(e_c - N), N \rangle = \langle Y, N \rangle + h(\langle e_c, N \rangle - 1),$$

logo,

$$b_{n+2} = ch(1 - b_{n+1}). \quad (2-28)$$

Substituindo (2-27), (2-28) em (2-25), obtemos

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{h_i}{L_{ii}} \right)^2 (1 - b_{n+1})^2 L_{ii} \right] + b_{n+1}^2 + ch^2(1 - b_{n+1})^2 = 1.$$

Daí,

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{L_{ii}} + ch^2 - 1 \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{L_{ii}} + ch^2 \right) b_{n+1} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{L_{ii}} + ch^2 + 1 \right) b_{n+1}^2 = 0.$$

Substituindo (2-16) na equação anterior, obtemos

$$(S - 2) - 2(S - 1)b_{n+1} + Sb_{n+1}^2 = 0. \quad (2-29)$$

As soluções da equação (2-29) com respeito a b_{n+1} , são dadas por

$$b_{n+1} = 1 \text{ ou } b_{n+1} = 1 - \frac{2}{S}.$$

Se $b_{n+1} = 1$, então, $N = e_c$ o qual é uma contradição, logo

$$b_{n+1} = 1 - \frac{2}{S}. \quad (2-30)$$

Assim, substituindo (2-27), (2-28) e (2-30) em (2-23) e (2-24), obtemos

$$N = \frac{2}{S} \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{L_{ii}} Y_i - e_c + chY \right) + e_c.$$

Substituindo N , dado pela equação acima em (2-13), obtemos

$$X = Y - \frac{2h}{S} \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{L_{ii}} Y_i - e_c + chY \right).$$

Por outro lado, de (2-16), obtemos

$$\begin{aligned}
S_i &= \sum_{j=1}^n \frac{2h_{,j}h_{,ji}L_{jj} - L_{jj,i}h_{,j}^2}{L_{jj}^2} + 2ch_{,i}, \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{2}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}}{2L_{jj}} \right) h_{,j} + 2ch_{,i} + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j}}{L_{ii}L_{jj}} h_{,i}h_{,j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j}}{L_{ii}L_{jj}} h_{,i}h_{,j} \right), \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{2}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}}{2L_{jj}} \right) h_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j}}{L_{ii}L_{jj}} h_{,i}h_{,j} - \\
&\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j}}{L_{ii}L_{jj}} h_{,i}h_{,j} + \frac{2}{L_{ii}} \left(h_{,ii} - \frac{L_{ii,i}h_{,i}}{2L_{ii}} \right) h_{,i} + 2ch_{,i}, \\
&= \frac{2}{L_{ii}} \left(h_{,ii} - \frac{L_{ii,i}h_{,i}}{2L_{ii}} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n \frac{L_{ii,l}}{2L_{ll}} h_{,l} \right) h_{,i} + \\
&\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{2}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}}{2L_{jj}} - \frac{L_{ii,j}h_{,i}}{2L_{ii}} \right) h_{,j} + 2ch_{,i}, \\
&= \frac{2}{L_{ii}} \left(h_{,ii} - \Gamma_{ii}^i h_{,i} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n \Gamma_{ii}^l h_{,l} \right) h_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{2}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) h_{,j} + 2ch_{,i}, \\
&= 2 \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) + ch\delta_{ij} \right] h_{,j}, \quad 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo (2-20) na equação anterior, obtemos

$$S_i = 2 \sum_{j=1}^n V_{ij} h_{,j}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2-31)$$

Observemos que

$$Y_{,ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k Y_{,k} + \overline{b_{n+1}} e_c + \overline{b_{n+2}} Y, \quad \text{se } c = \pm 1, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (2-32)$$

e

$$Y_{,ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k Y_{,k} + \overline{b_{n+1}} e_c, \quad \text{se } c = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2-33)$$

Se $c = \pm 1$, então $\langle Y, Y_j \rangle = 0$, $1 \leq j \leq n$, daí, $\langle Y_i, Y_j \rangle + \langle Y, Y_{,ji} \rangle = 0$, portanto, $\overline{b_{n+2}} = -cL_{ij}$. Por outra parte, como $\langle Y_{,j}, e_c \rangle = 0$, $1 \leq j \leq n$, então, $\langle Y_{,ji}, e_c \rangle = 0$, daí, $\overline{b_{n+1}} = 0$. Substituindo $\overline{b_{n+1}} = 0$ e $\overline{b_{n+2}} = -cL_{ij}$ em (2-32) e (2-33), obtemos

$$Y_{,ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k Y_{,k} - cL_{ij}Y, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2-34)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} &= \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \left[\sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k Y_{,k} - cL_{ji}Y \right], \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^j Y_{,j} + \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \Gamma_{ji}^k Y_{,k} - c \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j} L_{ji}}{L_{jj}} Y, \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^j Y_{,j} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^k Y_{,k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \Gamma_{ji}^k Y_{,k} - ch_{,i}Y, \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^j Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^j Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^i Y_{,i} - ch_{,i}Y. \end{aligned}$$

Usando as relações em (1-1) na equação anterior, obtemos

$$\sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} = \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j} L_{jj,i}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{h_{,i} L_{ii,j}}{2L_{jj} L_{ii}} Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{h_{,j} L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} Y_{,i} - ch_{,i}Y,$$

logo,

$$\sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} = \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j} L_{jj,i}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} (h_{,j} Y_{,i} - h_{,i} Y_{,j}) - ch_{,i}Y. \quad (2-35)$$

Definimos

$$C = Y + he_c \quad e \quad D = \sum_{i=1}^n \frac{h_{,i}}{L_{ii}} Y_{,i} + chY + \left(\frac{S}{2} - 1 \right) e_c. \quad (2-36)$$

Daí,

$$C_{,i} = Y_{,i} + h_{,i} e_c, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2-37)$$

$$\begin{aligned}
D_{,i} &= \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{h_{,ji}L_{jj} - L_{jj,i}h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} \right] + ch_{,i}Y + chY_{,i} + \frac{S_{,i}}{2} e_c, \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} \right] + ch_{,i}Y + chY_{,i} + \\
&\quad \sum_{j=1}^n \left(\frac{2h_{,j}h_{,ji}L_{jj} - L_{jj,i}h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} \right) e_c + chh_{,i}e_c, \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} + \left(\frac{h_{,j}h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} \right) e_c \right] + \\
&\quad chC_{,i} + ch_{,i}Y.
\end{aligned}$$

Usando (2-35) na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
D_{,i} &= \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j}L_{jj,i}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} + \left(\frac{h_{,j}h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} \right) e_c \right] + \\
&\quad chC_{,i} + ch_{,i}Y + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii}L_{jj}} (h_{,j}Y_{,i} - h_{,i}Y_{,j}) - ch_{,i}Y, \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} Y_{,j} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} + \frac{h_{,j}h_{,ji}}{L_{jj}} e_c - \frac{L_{jj,i}h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} e_c \right) + chC_{,i} + \\
&\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii}L_{jj}} (h_{,j}Y_{,i} - h_{,i}Y_{,j}), \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}}{2L_{jj}^2} \right) C_{,j} + chC_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii}L_{jj}} (h_{,j}Y_{,i} - h_{,i}Y_{,j}), \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}}{2L_{jj}} \right) C_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii}L_{jj}} (h_{,j}Y_{,i} - h_{,i}Y_{,j}) + chC_{,i} + \\
&\quad \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j}h_{,j}h_{,i}}{2L_{ii}L_{jj}} e_c - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j}h_{,j}h_{,i}}{2L_{ii}L_{jj}} e_c \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{,i} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{2L_{jj}} \right) C_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j} h_{,j}}{2L_{ii} L_{jj}} C_{,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j} h_{,i}}{2L_{ii} L_{jj}} C_{,j} + chC_{,i}, \\
&= \frac{h_{,ii}}{L_{ii}} C_{,i} - \frac{L_{ii,i} h_{,i}}{2L_{ii} L_{ii}} C_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{2L_{jj}} \right) C_{,j} + \\
&\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j} h_{,j}}{2L_{ii} L_{jj}} C_{,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j} h_{,i}}{2L_{ii} L_{jj}} C_{,j} + chC_{,i}, \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{2L_{jj}} - \frac{L_{ii,j} h_{,i}}{2L_{ii}} \right) C_{,j} + \\
&\quad \frac{1}{L_{ii}} \left(h_{,ii} - \frac{L_{ii,i} h_{,i}}{2L_{ii}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{L_{ii,j} h_{,j}}{2L_{jj}} \right) C_{,i} + chC_{,i}, \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \Gamma_{ij}^j h_{,j} - \Gamma_{ij}^i h_{,i} \right) C_{,j} + \frac{1}{L_{ii}} \left(h_{,ii} - \Gamma_{ii}^i h_{,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Gamma_{ii}^j h_{,j} \right) C_{,i} + chC_{,i}, \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) C_{,j} + \frac{1}{L_{ii}} \left(h_{,ii} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ii}^l h_{,l} \right) C_{,i} + chC_{,i}, \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) C_{,j} + chC_{,i}, \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) + ch\delta_{ij} \right] C_{,j}.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo (2-20) na equação anterior, obtemos

$$D_{,i} = \sum_{j=1}^n V_{ij} C_{,j}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2-38)$$

Observemos que

$$X = C - \frac{2Dh}{S} \quad \text{e} \quad N = \frac{2D}{S}. \quad (2-39)$$

De (2-39), (2-31), (2-37) e (2-38), obtemos

$$\begin{aligned}
 X_i &= C_i - 2 \left(\frac{h_i S - h S_i}{S^2} \right) D - \frac{2h}{S} D_i, \\
 &= C_i - \frac{2h_i D}{S} + \left(2 \sum_{j=1}^n V_{ij} h_{,j} \right) \frac{2hD}{S^2} - \frac{2h}{S} \sum_{j=1}^n V_{ij} C_{,j}, \\
 &= C_i - h_{,i} N + \left(\sum_{j=1}^n V_{ij} h_{,j} \right) \frac{2hN}{S} - \frac{2h}{S} \sum_{j=1}^n V_{ij} C_{,j}, \\
 &= C_i - h_{,i} N + \frac{2h}{S} \sum_{j=1}^n V_{ij} (h_{,j} N - C_{,j}), \quad 1 \leq i \leq n,
 \end{aligned} \tag{2-40}$$

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{2SD_{,i} - 2S_i D}{S^2}, \\
 &= \frac{2}{S} \left[\sum_{j=1}^n V_{ij} C_{,j} - \left(\sum_{j=1}^n V_{ij} h_{,j} \right) \frac{2D}{S} \right], \\
 &= \frac{2}{S} \sum_{j=1}^n V_{ij} (C_{,j} - h_{,j} N), \quad 1 \leq i \leq n.
 \end{aligned} \tag{2-41}$$

Como $X_i + h_{,i} N + h N_{,i} = C_i$ para $1 \leq i \leq n$, então

$$C_i - h_{,i} N = X_i + h N_{,i}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2-42}$$

Substituindo (2-42) em (2-41) e utilizando o fato que $N_i = \sum_{k=1}^n W_{ik} X_{,k}$, $1 \leq i \leq n$, obtemos

$$S \sum_{k=1}^n W_{ik} X_{,k} - 2h \sum_{j=1}^n V_{ij} \sum_{k=1}^n W_{jk} X_{,k} = 2 \sum_{k=1}^n V_{ik} X_{,k}.$$

Logo

$$\sum_{k=1}^n \left[S W_{ik} - 2h \sum_{j=1}^n V_{ij} W_{jk} \right] X_{,k} = 2 \sum_{k=1}^n V_{ik} X_{,k}.$$

Como $\{X_{,k}\}_{k=1}^n$ é uma base, na equação anterior, obtemos

$$S W_{ik} - 2h \sum_{j=1}^n V_{ij} W_{jk} = 2V_{ik}.$$

Em notação matricial, a equação anterior é escrita como $(S I_n - 2hV)W = 2V$, portanto,

$$W = 2V(S I_n - 2hV)^{-1}.$$

Por outro lado,

$$\langle C_{,k}, C_{,l} \rangle = L_{kl} + h_{,k}h_{,l} \quad e \quad \langle C_{,k}, N \rangle = h_{,k}, \quad 1 \leq k, l \leq n,$$

assim,

$$\begin{aligned} \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle &= \left\langle C_{,i} - h_{,i}N + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{ik} (h_{,k}N - C_{,k}), C_{,j} - h_{,j}N + \frac{2h}{S} \sum_{l=1}^n V_{jl} (h_{,l}N - C_{,l}) \right\rangle, \\ &= L_{ij} - \frac{2h}{S} \sum_{l=1}^n V_{jl} L_{il} - \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{ik} L_{jk} + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k,l=1}^n V_{ik} V_{jl} L_{kl}, \\ &= L_{ij} - \frac{2h}{S} V_{ji} L_{ii} - \frac{2h}{S} V_{ij} L_{jj} + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk}, \\ &= L_{ij} - \frac{2h}{S} (V_{ji} L_{ii} + V_{ij} L_{jj}) + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle X_{,i}, -N_{,j} \rangle &= \left\langle C_{,i} - h_{,i}N + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{ik} (h_{,k}N - C_{,k}), -\frac{2}{S} \sum_{l=1}^n V_{jl} (C_{,l} - h_{,l}N) \right\rangle, \\ &= -\frac{2}{S} \sum_{l=1}^n V_{jl} L_{il} + \frac{4h}{S^2} \sum_{k,l=1}^n V_{ik} V_{jl} L_{kl}, \\ &= -\frac{2}{S} V_{ji} L_{ii} + \frac{4h}{S^2} \sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle N_{,i}, N_{,j} \rangle &= \frac{4}{S^2} \left\langle \sum_{k=1}^n V_{ik} (C_{,k} - h_{,k}N), \sum_{l=1}^n V_{jl} (C_{,l} - h_{,l}N) \right\rangle, \\ &= \frac{4}{S^2} \sum_{k,l=1}^n V_{ik} V_{jl} L_{kl}, \\ &= \frac{4}{S^2} \sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

2.2 Hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de Curvatura

Nesta seção obtemos alguns resultados como uma consequência imediata do teorema 2. O resultado principal desta seção, é caracterizar todas as superfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura, tais que satisfazem a equação (2-13).

Corolário 2 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ uma parametrização de uma hipersuper-*

fície dada por (2-14). Então, a sua curvatura de Gauss-Kronecker K , é dada por

$$K = \frac{2^n}{P} \det(V), \quad (2-43)$$

onde $P = \det(SI_n - 2hV)$.

Demonstração: Como a matriz de Weingarten W associada a Σ , é dada por (2-21), então

$$K = \det(W) = \det(2V [SI_n - 2hV]^{-1}) = 2^n \det(V) \det([SI_n - 2hV]^{-1}).$$

Corolário 3 Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ uma parametrização de uma hipersuperfície dada por (2-14). Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. X está parametrizada por linhas de curvatura,
2. $V_{ij} = 0$ para $1 \leq i \neq j \leq n$,
3. $N_{,i} = -k_{,i} X_{,i}$, $1 \leq i \leq n$,

onde

$$k_i = \frac{2V_{ii}}{2hV_{ii} - S}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2-44)$$

são as curvaturas principais de X .

Demonstração: Pela equação (2-21), se a matriz de Weingarten W é diagonal, então a matriz V , também é diagonal. Portanto, V é diagonal se, e somente se, X está parametrizada por linhas de curvatura.

Se $V_{ij} = 0$ para $1 \leq i \neq j \leq n$, então, pelas equações (2-41) e (2-42), obtemos

$$N_{,i} = \frac{2}{S} V_{ii} (X_{,i} + hN_{,i}),$$

isolando $N_{,i}$ da equação anterior, obtemos que

$$N_{,i} = \left(\frac{2V_{ii}}{S - 2hV_{ii}} \right) X_{,i}.$$

Como V é uma matriz diagonal, V_{ii} são os autovalores da matriz V . Pela equação (2-21) temos

$$-k_i = \frac{2V_{ii}}{S - 2hV_{ii}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Observação 7 Pela equação (2-44) obtemos os autovalores σ_i da matriz V , os quais são dados por

$$\sigma_i = \frac{Sk_i}{2(hk_i - 1)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2-45)$$

onde k_i são os autovalores da matriz de Weingarten W .

Proposição 3 *Se h é uma solução não nula do sistema de EDP's linear, dado por*

$$h_{,ij} - \cot(\phi_i)h_{,j} = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Então, a hipersuperfície Σ de \mathbb{S}^{n+1} dada pela parametrização (2-14), é parametrizada por linhas de curvatura.

Demonstração: Seja $Y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ a parametrização local ortogonal de \mathbb{S}^n , dada por (1-7), então

$$Y_{,1} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\phi_1), \cos(\phi_1)\cos(\phi_2), \cos(\phi_1)\text{sen}(\phi_2)\cos(\phi_3), \dots, \\ \cos(\phi_1)\text{sen}(\phi_2) \cdots \text{sen}(\phi_{n-1})\cos(\phi_n), \cos(\phi_1)\text{sen}(\phi_2) \cdots \text{sen}(\phi_{n-1})\text{sen}(\phi_n), 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_{,2} = \begin{pmatrix} 0, -\text{sen}(\phi_1)\text{sen}(\phi_2), -\text{sen}(\phi_1)\cos(\phi_2)\cos(\phi_3), \dots, \\ \text{sen}(\phi_1)\cos(\phi_2) \cdots \text{sen}(\phi_{n-1})\cos(\phi_n), \text{sen}(\phi_1)\cos(\phi_2) \cdots \text{sen}(\phi_{n-1})\text{sen}(\phi_n), 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_{,3} = \begin{pmatrix} 0, 0, -\text{sen}(\phi_1)\text{sen}(\phi_2)\text{sen}(\phi_3), \dots, \text{sen}(\phi_1)\text{sen}(\phi_2)\cos(\phi_3) \cdots \text{sen}(\phi_{n-1})\cos(\phi_n), \\ \text{sen}(\phi_1)\text{sen}(\phi_2)\cos(\phi_3) \cdots \text{sen}(\phi_{n-1})\text{sen}(\phi_n), 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$Y_{,n-1} = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0, \text{sen}(\phi_1)\text{sen}(\phi_2) \cdots \text{sen}(\phi_{n-2})\cos(\phi_{n-1})\cos(\phi_n), \\ \text{sen}(\phi_1)\text{sen}(\phi_2) \cdots \text{sen}(\phi_{n-2})\cos(\phi_{n-1})\text{sen}(\phi_n), 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_{,n} = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0, -\text{sen}(\phi_1)\text{sen}(\phi_2) \cdots \text{sen}(\phi_{n-2})\text{sen}(\phi_{n-1})\text{sen}(\phi_n), \\ \text{sen}(\phi_1)\text{sen}(\phi_2) \cdots \text{sen}(\phi_{n-2})\text{sen}(\phi_{n-1})\cos(\phi_n), 0 \end{pmatrix}$$

É fácil verificar que a métrica $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$, vem dada por

$$L_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$L_{11} = 1,$$

$$L_{22} = \text{sen}^2(\phi_1),$$

$$L_{33} = \text{sen}^2(\phi_1)\text{sen}^2(\phi_2),$$

$$\vdots$$

$$L_{ii} = \text{sen}^2(\phi_1)\text{sen}^2(\phi_2) \cdots \text{sen}^2(\phi_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Portanto, se $1 \leq i < j \leq n$, os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii}} = 0 \quad e \quad \Gamma_{ij}^j = \Gamma_{ji}^j = \frac{L_{jj,i}}{2L_{jj}} = \cot(\phi_i).$$

Substituindo as equações anteriores em (2-20), obtemos

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} (h_{,ij} - \cot(\phi_i)h_{,j}), \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Exemplo 2 Seja $Y : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ uma parametrização local ortogonal de \mathbb{S}^2 , dada por

$$Y(u_1, u_2) = (\cos(u_1), \sin(u_1)\cos(u_2), \sin(u_1)\sin(u_2), 0). \quad (2-46)$$

A base local ortogonal para o espaço tangente associada a $Y(u_1, u_2)$, é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{,1}(u_1, u_2) = (-\sin(u_1), \cos(u_1)\cos(u_2), \cos(u_1)\sin(u_2), 0), \\ Y_{,2}(u_1, u_2) = (0, -\sin(u_1)\sin(u_2), \sin(u_1)\cos(u_2), 0) \end{array} \right\}.$$

Observe que a métrica $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$, é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{12}(u_1, u_2) = L_{21}(u_1, u_2) = 0, \\ L_{11}(u_1, u_2) = 1, \\ L_{22}(u_1, u_2) = \sin^2(u_1). \end{array} \right. \quad (2-47)$$

Daí, os símbolos de Christoffel associados L_{ij} , são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1(u_1, u_2) = \Gamma_{11}^2(u_1, u_2) = \Gamma_{12}^1(u_1, u_2) = \Gamma_{22}^2(u_1, u_2) = 0, \\ \Gamma_{12}^2(u_1, u_2) = \cot(u_1), \\ \Gamma_{22}^1(u_1, u_2) = -\sin(u_1)\cos(u_1). \end{array} \right. \quad (2-48)$$

Substituindo (2-47) e (2-48) em (2-20), obtemos

$$\begin{aligned} V_{11}(u_1, u_2) &= h_{,11} + h, \\ V_{12}(u_1, u_2) &= \csc^2(u_1) [h_{,12} - \cot(u_1)h_{,2}], \\ V_{21}(u_1, u_2) &= h_{,21} - \cot(u_1)h_{,2}, \\ V_{22}(u_1, u_2) &= \csc^2(u_1) [h_{,22} + \sin(u_1)\cos(u_1)h_{,1}] + h. \end{aligned} \quad (2-49)$$

Observação 8 Em geral, as soluções da EDP linear $h_{,12} - \cot(u_1)h_{,2} = 0$, garantem em \mathbb{S}^3 , superfícies parametrizadas por linhas de curvatura. Daí, $h(u_1, u_2) = \sin(u_1)f(u_2) + g(u_1)$, onde f, g são funções reais.

Proposição 4 *Se h é uma solução não nula do sistema de EDP's linear dado por*

$$h_{,ij} - \tanh(\phi_i)h_{,j} = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Então, a hipersuperfície Σ de \mathbb{H}^{n+1} dada pela parametrização (2-14), é parametrizada por linhas de curvatura.

Demonstração: Seja $Y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ a parametrização local ortogonal de \mathbb{H}^n , dada por (1-9), então

$$Y_{,1} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi_1), \sinh(\phi_1)\sinh(\phi_2), \sinh(\phi_1)\cosh(\phi_2)\sinh(\phi_3), \dots, \\ \sinh(\phi_1)\cosh(\phi_2) \cdots \cosh(\phi_{n-1})\sinh(\phi_n), 0, \sinh(\phi_1)\cosh(\phi_2) \cdots \cosh(\phi_{n-1})\cosh(\phi_n) \end{pmatrix}$$

$$Y_{,2} = \begin{pmatrix} 0, \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2), \cosh(\phi_1)\sinh(\phi_2)\sinh(\phi_3), \dots, \\ \cosh(\phi_1)\sinh(\phi_2) \cdots \cosh(\phi_{n-1})\sinh(\phi_n), 0, \cosh(\phi_1)\sinh(\phi_2) \cdots \cosh(\phi_{n-1})\cosh(\phi_n) \end{pmatrix}$$

$$Y_{,3} = \begin{pmatrix} 0, 0, \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2)\cosh(\phi_3), \dots, \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2)\sinh(\phi_3) \cdots \cosh(\phi_{n-1})\sinh(\phi_n), \\ 0, \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2)\sinh(\phi_3) \cdots \cosh(\phi_{n-1})\cosh(\phi_n) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$Y_{,n-1} = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0, \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2) \cdots \cosh(\phi_{n-2})\sinh(\phi_{n-1})\sinh(\phi_n), \\ 0, \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2) \cdots \cosh(\phi_{n-2})\sinh(\phi_{n-1})\cosh(\phi_n) \end{pmatrix}$$

$$Y_{,n} = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0, \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2) \cdots \cosh(\phi_{n-2})\cosh(\phi_{n-1})\cosh(\phi_n), \\ 0, \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2) \cdots \cosh(\phi_{n-2})\cosh(\phi_{n-1})\sinh(\phi_n) \end{pmatrix}$$

A métrica $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$, é dada por

$$L_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$L_{11} = 1,$$

$$L_{22} = \cosh^2(\phi_1),$$

$$L_{33} = \cosh^2(\phi_1)\cosh^2(\phi_2),$$

$$\vdots$$

$$L_{ii} = \cosh^2(\phi_1)\cosh^2(\phi_2) \cdots \cosh^2(\phi_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Portanto, se $1 \leq i < j \leq n$, os símbolos de Christoffel, são dados por

$$\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii}} = 0 \quad e \quad \Gamma_{ij}^j = \Gamma_{ji}^j = \frac{L_{jj,i}}{2L_{jj}} = \tanh(\phi_i).$$

Substituindo as equações anteriores em (2-20), obtemos

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} (h_{,ij} - \tanh(\phi_i)h_{,j}), \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Exemplo 3 Seja $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ uma parametrização local ortogonal de \mathbb{H}^2 , dada por

$$Y(u_1, u_2) = (\sinh(u_1), \cosh(u_1)\sinh(u_2), 0, \cosh(u_1)\cosh(u_2)). \quad (2-50)$$

A base local ortogonal para o espaço tangente associada a $Y(u_1, u_2)$, é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{,1}(u_1, u_2) = (\cosh(u_1), \sinh(u_1)\sinh(u_2), 0, \sinh(u_1)\cosh(u_2)), \\ Y_{,2}(u_1, u_2) = (0, \cosh(u_1)\cosh(u_2), 0, \cosh(u_1)\sinh(u_2)) \end{array} \right\}.$$

Observemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{12}(u_1, u_2) = L_{21}(u_1, u_2) = 0, \\ L_{11}(u_1, u_2) = 1, \\ L_{22}(u_1, u_2) = \cosh^2(u_1). \end{array} \right. \quad (2-51)$$

Portanto, os símbolos de Christoffel associados à métrica $L_{ij}(u_1, u_2) = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle(u_1, u_2)$, são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1(u_1, u_2) = \Gamma_{11}^2(u_1, u_2) = \Gamma_{12}^1(u_1, u_2) = \Gamma_{22}^2(u_1, u_2) = 0, \\ \Gamma_{12}^2(u_1, u_2) = \tanh(u_1), \\ \Gamma_{22}^1(u_1, u_2) = -\cosh(u_1)\sinh(u_1). \end{array} \right. \quad (2-52)$$

Substituindo (2-51) e (2-52) em (2-20), obtemos

$$\begin{aligned} V_{11}(u_1, u_2) &= h_{,11} - h, \\ V_{12}(u_1, u_2) &= \operatorname{sech}^2(u_1) [h_{,12} - \tanh(u_1)h_{,2}], \\ V_{21}(u_1, u_2) &= h_{,21} - \tanh(u_1)h_{,2}, \\ V_{22}(u_1, u_2) &= \operatorname{sech}^2(u_1) [h_{,22} + \cosh(u_1)\sinh(u_1)h_{,1}] - h. \end{aligned} \quad (2-53)$$

Observação 9 As soluções da EDP linear $h_{,12} - \tanh(u_1)h_{,2} = 0$ garantem superfícies de \mathbb{H}^3 , parametrizadas por linhas de curvatura. Daí, $h(u_1, u_2) = \cosh(u_1)f(u_2) + g(u_1)$, onde f, g são funções reais.

Proposição 5 Seja $\Sigma \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície como no teorema 2, parametrizada por linhas de curvatura. Então, Σ é uma hipersuperfície de Dupin em $\overline{M}^{n+1}(c)$ se, e

somente se,

$$V_{ii,i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Demonstração: Suponha que Σ é parametrizada por linhas de curvatura, então, pelo corolário 3 obtemos que $V_{ij} = 0, 1 \leq i \neq j \leq n$ e

$$k_i = \frac{2V_{ii}}{2hV_{ii} - S}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde $k_i, 1 \leq i \leq n$ são as curvaturas principais de Σ em $\bar{M}^{n+1}(c)$. Daí,

$$\begin{aligned} k_{i,i} &= \frac{2V_{ii,i}(2hV_{ii} - S) - (2h_{,i}V_{ii} + 2hV_{ii,i} - S_{,i})(2V_{ii})}{(2hV_{ii} - S)^2} \\ &= \frac{4hV_{ii}V_{ii,i} - 2SV_{ii,i} - 4h_{,i}V_{ii}^2 - 4hV_{ii}V_{ii,i} + 2V_{ii}S_{,i}}{(2hV_{ii} - S)^2} \\ &= \frac{-2SV_{ii,i} - 4h_{,i}V_{ii}^2 + 2V_{ii}S_{,i}}{(2hV_{ii} - S)^2}, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Por (2-31) e o fato que $V_{ij} = 0, 1 \leq i \neq j \leq n$, então $S_{,i} = 2V_{ii}h_{,i}, 1 \leq i \leq n$.

Substituindo na equação anterior, obtemos

$$k_{i,i} = \frac{-2SV_{ii,i}}{(2hV_{ii} - S)^2}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Daí, $k_{i,i} = 0$ se, e somente se, $V_{ii,i} = 0, 1 \leq i \leq n$.

Corolário 4 *Seja $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ uma superfície como no teorema 2, tal que $Y : U \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ é a parametrização dada por (2-46). Se $h(u_1, u_2) = \text{sen}(u_1)f(u_2) + g(u_1)$, onde f, g são funções reais definidas por*

$$g(u_1) = a_1 \text{sen}(u_1) + b_1 \cos(u_1) + c_1,$$

$$f(u_2) = a_2 \text{sen}(u_2) + b_2 \cos(u_2) + c_2,$$

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ são números reais constantes. Então, Σ é uma superfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura em \mathbb{S}^3 .

Demonstração: Pela observação 8, se $h(u_1, u_2) = \text{sen}(u_1)f(u_2) + g(u_1)$, então, Σ é uma superfície parametrizada por linhas de curvatura. Pela proposição 5, Σ é uma superfícies de Dupin se, e somente se, $V_{11,1} = V_{22,2} = 0$.

Pela equação (2-49), temos

$$V_{11}(u_1, u_2) = h_{,11} + h,$$

$$V_{22}(u_1, u_2) = \text{csc}^2(u_1) [h_{,22} + \text{sen}(u_1)\cos(u_1)h_{,1}] + h.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
V_{11,1} &= h_{,111} + h_{,1}, \\
&= -\cos(u_1)f(u_2) + g_{,111}(u_1) + \cos(u_1)f(u_2) + g_{,1}(u_1), \\
&= g_{,111}(u_1) + g_{,1}(u_1), \\
V_{22,2} &= \csc^2(u_1)[h_{,222} + \sen(u_1)\cos(u_1)h_{,12}] + h_{,2}, \\
&= \csc^2(u_1)[\sen(u_1)f_{,222}(u_2) + \sen(u_1)\cos^2(u_1)f_{,2}(u_2)] + \sen(u_1)f_{,2}(u_2), \\
&= \csc(u_1)f_{,222}(u_2) + \csc(u_1)\cos^2(u_1)f_{,2}(u_2) + \sen(u_1)f_{,2}(u_2), \\
&= \csc(u_1)[f_{,222}(u_2) + f_{,2}(u_2)].
\end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos um resultado semelhante em \mathbb{H}^3 .

Corolário 5 *Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície como no teorema 2, tal que $Y : U \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ é a parametrização dada por (2-50). Se $h(u_1, u_2) = \cosh(u_1)f(u_2) + g(u_1)$, onde f, g são funções reais definidas por*

$$g(u_1) = a_1 \senh(u_1) + b_1 \cosh(u_1) + c_1,$$

$$f(u_2) = a_2 \senh(u_2) + b_2 \cosh(u_2) + c_2,$$

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ são números reais constantes. Então, Σ é uma superfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura em \mathbb{H}^3 .

Demonstração: Pela observação 9, se $h(u_1, u_2) = \cosh(u_1)f(u_2) + g(u_1)$, obtemos que Σ é uma superfície parametrizada por linhas de curvatura. Pela proposição 5, Σ é uma superfície de Dupin se, e somente se, $V_{11,1} = V_{22,2} = 0$. Pela equação (2-53), temos que

$$\begin{aligned}
V_{11}(u_1, u_2) &= h_{,11} - h, \\
V_{22}(u_1, u_2) &= \sech^2(u_1)[h_{,22} + \cosh(u_1)\senh(u_1)h_{,1}] - h.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
V_{11,1} &= h_{,111} - h_{,1}, \\
&= \senh(u_1)f(u_2) + g_{,111}(u_1) - \senh(u_1)f(u_2) - g_{,1}(u_1), \\
&= g_{,111}(u_1) - g_{,1}(u_1), \\
V_{22,2} &= \sech^2(u_1)[h_{,222} + \cosh(u_1)\senh(u_1)h_{,12}] - h_{,2}, \\
&= \sech^2(u_1)[\cosh(u_1)f_{,222}(u_2) + \cosh(u_1)\senh^2(u_1)f_{,2}(u_2)] - \cosh(u_1)f_{,2}(u_2), \\
&= \sech(u_1)f_{,222}(u_2) + \sech(u_1)\senh^2(u_1)f_{,2}(u_2) - \cosh(u_1)f_{,2}(u_2), \\
&= \sech(u_1)[f_{,222}(u_2) - f_{,2}(u_2)].
\end{aligned}$$

Aplicações

Neste capítulo, generalizaremos os resultados encontrados em [28]. No teorema 3, mostraremos que h é uma função radial se, e somente se, a hipersuperfície $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ dada pela parametrização (2-14), é uma hipersuperfície de rotação de tipo esférico em $\overline{M}^{n+1}(c)$. Ver [19].

3.1 Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico em formas espaciais

Definição 12 Seja Σ uma hipersuperfície de $\overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 2$. Dizemos que Σ é uma *hipersuperfície Weingarten de tipo esférico em $\overline{M}^{n+1}(c)$* , se as r -ésimas curvaturas médias de Σ em $\overline{M}^{n+1}(c)$ satisfazem a relação

$$\sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} r h^{r-1} H_r C_r^n = 0,$$

onde C_r^n é a combinatória de n em r e h é uma função diferenciável definida em Σ .

Lema 1 *Sejam*

$$P_i = (1 - hk_1)(1 - hk_2) \dots \overbrace{(1 - hk_i)} \dots (1 - hk_{n-1})(1 - hk_n), \quad 1 \leq i \leq n, \quad n \geq 2,$$

$h, k_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definidas sobre um aberto U de \mathbb{R}^n . Aqui, $\overbrace{(1 - hk_i)}$ significa que o fator está ausente na expressão. Então,

$$\begin{aligned} P_i = & 1 - h(S_1 - k_i) + h^2 \left(S_2 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_i \right) - h^3 \left(S_3 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 \leq n \\ j_1, j_2 \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} k_i \right) + \\ & \dots + (-1)^{n-1} h^{n-1} \left(S_{n-1} - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-2} \leq n \\ j_1, \dots, j_{n-2} \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-2}} k_i \right), \end{aligned}$$

onde

$$S_r = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Demonstração: para $n=2$, obtemos

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - h(S_1 - k_1) + h^2(S_2 - k_2 k_1) \\ &= 1 - h(k_1 + k_2 - k_1) + h^2(k_1 k_2 - k_2 k_1) \\ &= 1 - h k_2. \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos $P_2 = 1 - h k_1$.

Suponha que a igualdade vale para n , isto é,

$$\begin{aligned} P_i &= (1 - h k_1)(1 - h k_2) \dots \overbrace{(1 - h k_i)} \dots (1 - h k_{n-1})(1 - h k_n) \\ &= 1 - h(S_1 - k_i) + h^2 \left(S_2 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_i \right) - h^3 \left(S_3 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 \leq n \\ j_1, j_2 \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} k_i \right) + \\ &\quad \dots + (-1)^{n-1} h^{n-1} \left(S_{n-1} - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-2} \leq n \\ j_1, \dots, j_{n-2} \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-2}} k_i \right), \end{aligned}$$

onde

$$S_r = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Provaremos para $n + 1$.

$$\begin{aligned}
P_i &= (1 - hk_1)(1 - hk_2) \dots \overbrace{(1 - hk_i)} \dots (1 - hk_{n-1})(1 - hk_n)(1 - hk_{n+1}) \\
&= 1 - h(S_1 - k_i) + h^2 \left(S_2 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_i \right) - h^3 \left(S_3 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 \leq n \\ j_1, j_2 \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} k_i \right) + \\
&\quad \dots + (-1)^{n-1} h^{n-1} \left(S_{n-1} - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-2} \leq n \\ j_1, \dots, j_{n-2} \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-2}} k_i \right) - \\
&\quad hk_{n+1} + h^2 k_{n+1} (S_1 - k_i) - h^3 k_{n+1} \left(S_2 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_i \right) + \\
&\quad h^4 k_{n+1} \left(S_3 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 \leq n \\ j_1, j_2 \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} k_i \right) + \dots + \\
&\quad (-1)^n h^n k_{n+1} \left(S_{n-1} - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-2} \leq n \\ j_1, \dots, j_{n-2} \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-2}} k_i \right) \\
&= 1 - h(S_1 + k_{n+1} - k_i) + h^2 \left(S_2 + k_{n+1} S_1 - k_{n+1} k_i - \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_i \right) - \\
&\quad h^3 \left(S_3 + k_{n+1} S_2 - k_{n+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_i - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 \leq n \\ j_1, j_2 \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} k_i \right) + \dots + \\
&\quad (-1)^n h^n \left(k_{n+1} S_{n-1} - k_{n+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-2} \leq n \\ j_1, \dots, j_{n-2} \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-2}} k_i \right),
\end{aligned}$$

supondo

$$\bar{S}_r = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n+1} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r}, \quad 1 \leq r \leq n+1,$$

da igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
P_i &= 1 - h(\overline{S}_1 - k_i) + h^2 \left(\overline{S}_2 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n+1 \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_i \right) - \\
&h^3 \left(\overline{S}_3 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{n+1} k_{j_1} k_i - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 \leq n \\ j_1, j_2 \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} k_i \right) + \dots + \\
&(-1)^n h^n \left(\overline{S}_n - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-2} \leq n \\ j_1, \dots, j_{n-2} \neq i}} k_{n+1} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-2}} k_i \right) \\
&= 1 - h(\overline{S}_1 - k_i) + h^2 \left(\overline{S}_2 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n+1 \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_i \right) - \\
&h^3 \left(\overline{S}_3 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 \leq n+1 \\ j_1, j_2 \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} k_i \right) + \dots + \\
&(-1)^n h^n \left(\overline{S}_n - \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-1} \leq n+1 \\ j_1, \dots, j_{n-2} \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-2}} k_{j_{n-1}} k_i \right).
\end{aligned}$$

Proposição 6 *Seja Σ uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 2$ dada pelo Teorema 2. Então Σ é uma hipersuperfície Weingarten de tipo esférico em $\overline{M}^{n+1}(c)$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^n V_{ii} = 0$.*

Demonstração: Pela observação 7, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n V_{ii} &= \frac{S}{2} \left[\frac{k_1}{(hk_1 - 1)} + \frac{k_2}{(hk_2 - 1)} + \dots + \frac{k_n}{(hk_n - 1)} \right] \\
&= -\frac{S}{2} \left[\frac{k_1 P_1 + k_2 P_2 + \dots + k_n P_n}{(1 - hk_1)(1 - hk_2) \dots (1 - hk_n)} \right],
\end{aligned}$$

logo, $\sum_{i=1}^n V_{ii} = 0$ se, e somente, se $k_1 P_1 + k_2 P_2 + \dots + k_n P_n = 0$.

Pelo Lema 1, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= k_1 - k_1 h S_1 + k_1 h k_1 + k_1 h^2 S_2 - k_1 h^2 \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_1 + \dots + \\
&\quad (-1)^{n-1} k_1 h^{n-1} S_{n-1} - (-1)^{n-1} k_1 h^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-2} \leq n \\ j_1, \dots, j_{n-2} \neq i}} k_{j_1} \dots k_{j_{n-2}} k_1 + \dots + \\
&\quad k_n - k_n h S_1 + k_n h k_n + k_n h^2 S_2 - k_n h^2 \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_n + \dots + (-1)^{n-1} k_n h^{n-1} S_{n-1} - \\
&\quad (-1)^{n-1} k_n h^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-2} \leq n \\ j_1, \dots, j_{n-2} \neq i}} k_{j_1} \dots k_{j_{n-2}} k_n.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
0 &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n) - h(k_1 S_1 - k_1^2 + k_2 S_1 - k_2^2 + \dots + k_n S_1 - k_n^2) + \\
&\quad h^2 \left(k_1 S_2 - k_1 \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_1 + k_2 S_2 - k_2 \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_2 + \dots + \right. \\
&\quad \quad \left. k_n S_2 - \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n \\ j_1 \neq i}} k_{j_1} k_n \right) + \dots + \\
&\quad (-1)^{n-1} h^{n-1} \left(k_1 S_{n-1} - k_1 \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-2} \leq n \\ j_1, \dots, j_{n-2} \neq i}} k_{j_1} \dots k_{j_{n-2}} k_1 + \dots + \right. \\
&\quad \quad \left. k_n S_{n-1} - k_n \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-2} \leq n \\ j_1, \dots, j_{n-2} \neq i}} k_{j_1} \dots k_{j_{n-2}} k_n \right) \\
&= S_1 - 2h S_2 + 3h^2 S_3 + \dots + (-1)^{n-1} h^{n-1} n S_n.
\end{aligned}$$

Observação 10 Seja Y uma parametrização de $M^n(c) \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ definida por

$$Y := \begin{cases} P_-^{-1}, P_+^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, \text{ se } c = 1, \\ I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ se } c = 0, \\ P^{-1} : B^n(1) \rightarrow \mathbb{H}^n, \text{ se } c = -1, \end{cases} \quad (3-1)$$

onde P_-^{-1}, P_+^{-1} , são as projeções estereográficas inversas da esfera \mathbb{S}^n dadas por (1-14), I é a função identidade de \mathbb{R}^n e P^{-1} é a projeção estereográfica inversa hiperbólica dada por (1-19). Seja \bar{J}_c a função definida por

$$\bar{J}_c(u) = \begin{cases} \frac{4}{(1+\langle u, u \rangle)^2}, u \in \mathbb{R}^n, \text{ se } c = 1, \\ 1, u \in \mathbb{R}^n, \text{ se } c = 0, \\ \frac{4}{(1-\langle u, u \rangle)^2}, u \in B^n(1), \text{ se } c = -1. \end{cases} \quad (3-2)$$

Por (1-1), os símbolos de Christoffel associados a Y , são dados por

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{\bar{J}_{c,i}}{2\bar{J}_c} \quad \text{e} \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{\bar{J}_{c,j}}{2\bar{J}_c} = -\Gamma_{ii}^j, \quad 1 \leq i \neq j \leq n. \quad (3-3)$$

Corolário 6 *Seja Σ uma hipersuperfície orientável de $\bar{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 2$ dada pelo teorema 2. Então Σ é uma hipersuperfície Weingarten de tipo esférico em $\bar{M}^{n+1}(c)$ se, e somente se, h é solução da equação diferencial linear dada por*

$$\frac{\Delta h}{\bar{J}_c} + \frac{(n-2)}{2\bar{J}_c^2} \langle \nabla \bar{J}_c, \nabla h \rangle + nch = 0, \quad (3-4)$$

onde \bar{J}_c é definida por (3-2).

Demonstração: Pela proposição 6, devemos mostrar que

$$\sum_{i=1}^n V_{ii} = \frac{\Delta h}{\bar{J}_c} + \frac{(n-2)}{2\bar{J}_c^2} \langle \nabla \bar{J}_c, \nabla h \rangle + nch.$$

Pela observação 10 e a equação (2-20), obtemos

$$V_{ii} = \frac{1}{\bar{J}_c} \left(h_{,ii} + \frac{\bar{J}_{c,1}}{2\bar{J}_c} h_{,1} + \dots + \frac{\bar{J}_{c,i-1}}{2\bar{J}_c} h_{,i-1} - \frac{\bar{J}_{c,i}}{2\bar{J}_c} h_{,i} + \frac{\bar{J}_{c,i+1}}{2\bar{J}_c} h_{,i+1} + \dots + \frac{\bar{J}_{c,n}}{2\bar{J}_c} h_{,n} \right) + ch,$$

logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n V_{ii} &= \frac{1}{\bar{J}_c} (h_{,11} + \dots + h_{,nn}) + \frac{(n-2)}{2\bar{J}_c^2} (\bar{J}_{c,1} h_{,1} + \dots + \bar{J}_{c,n} h_{,n}) + nch \\ &= \frac{\Delta h}{\bar{J}_c} + \frac{(n-2)}{2\bar{J}_c^2} \langle \nabla \bar{J}_c, \nabla h \rangle + nch. \end{aligned}$$

3.2 Superfícies de tipo esférico em formas espaciais

Definição 13 Dizemos que uma superfície Σ de $\bar{M}^3(c)$ é uma *superfície de tipo esférico em $\bar{M}^3(c)$* , se existe uma congruência de esferas geodésicas entre Σ e $M^2(c)$ com função raio h , dada por

$$h = \frac{H}{K}, \quad K \neq 0,$$

onde H e K são a curvatura média e Gaussiana, respectivamente, da superfície Σ em $\bar{M}^3(c)$.

Pela observação 7, se $n = 2$, então

$$\begin{aligned}
 V_{11} + V_{22} &= \sigma_1 + \sigma_2 & (3-5) \\
 &= \frac{Sk_1}{2(hk_1 - 1)} + \frac{Sk_2}{2(hk_2 - 1)} \\
 &= \frac{2Sk_1(hk_2 - 1) + 2Sk_2(hk_1 - 1)}{4(hk_1 - 1)(hk_2 - 1)} \\
 &= \frac{4Shk_1k_2 - 2S(k_1 + k_2)}{4(hk_1 - 1)(hk_2 - 1)} \\
 &= \frac{S(hK - H)}{(hk_1 - 1)(hk_2 - 1)},
 \end{aligned}$$

onde H é a curvatura média, K é a curvatura Gaussiana de Σ em $\overline{M}^3(c)$, h é a função raio e S é dado por (2-16). Assim, $V_{11} + V_{22} = 0$, se, e somente se, $h = \frac{H}{K}$, sempre que $K \neq 0$.

Seja $Y(z) = g(z)$ a parametrização de $M(c) \subset \overline{M}^3(c)$, definida por (1-11), (1-16) e (1-21), isto é,

$$g(z) := \begin{cases} G_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2, & \text{se } c = 1, \\ G_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, & \text{se } c = 0, \\ G_{\mathbb{H}^2} : B^2(1) \rightarrow \mathbb{H}^2, & \text{se } c = -1. \end{cases} \quad (3-6)$$

Se $c = 0$, utilizando as equações de Cauchy-Riemann dadas em (1-12), temos que $Y_{,1} = g'$ e $Y_{,2} = ig'$. Daí, obtemos $L_{11} = L_{22} = 1$ e $L_{12} = 0$, logo, Y é uma parametrização ortogonal de \mathbb{R}^2 com seus símbolos de Christoffel identicamente nulos, isto é, $\Gamma_{ij}^m = 0$, para todo $1 \leq i, j, m \leq 2$. Daí, por (2-20), obtemos $V_{11} = h_{,11}$, $V_{12} = V_{21} = h_{,12}$, $V_{22} = h_{,22}$. Consequentemente,

$$tr(V) = h_{,11} + h_{,22} = \Delta h.$$

Se $c = \pm 1$, então $L_{12} = 0$ e $L_{11} = L_{22} = J_c$, onde J_c é a função definida por

$$J_c(z) = \begin{cases} \frac{4}{(1 + \langle z, z \rangle)^2}, & \text{se } c = 1, \\ \frac{4}{(1 - \langle z, z \rangle)^2}, & \text{se } c = -1. \end{cases} \quad (3-7)$$

Logo, Y é uma parametrização ortogonal de \mathbb{S}^2 e \mathbb{H}^2 , respectivamente.

Por (1-1), os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{J_{c,i}}{2J_c} \quad e \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{J_{c,j}}{2J_c} = -\Gamma_{ii}^j, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2. \quad (3-8)$$

Daí, por (2-20), os coeficientes da matriz V , são dados por

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{1}{J_c} \left(h_{,11} - \frac{J_{c,1}}{2J_c} h_{,1} + \frac{J_{c,2}}{2J_c} h_{,2} \right) + ch, \\ V_{12} &= V_{21} = \frac{1}{J_c} \left(h_{,12} - \frac{J_{c,2}}{2J_c} h_{,1} - \frac{J_{c,1}}{2J_c} h_{,2} \right), \\ V_{22} &= \frac{1}{J_c} \left(h_{,22} + \frac{J_{c,1}}{2J_c} h_{,1} - \frac{J_{c,2}}{2J_c} h_{,2} \right) + ch. \end{aligned} \quad (3-9)$$

Consequentemente,

$$\text{tr}(V) = \frac{h_{,11} + h_{,22}}{J_c} + 2ch = \frac{\Delta h}{J_c} + 2ch.$$

Proposição 7 *Seja Σ uma superfície de $\overline{M}^3(c)$ dada pela parametrização (2-14). Então, Σ é uma superfície de tipo esférico em $\overline{M}^3(c)$ se, e somente se, $\text{tr}(V)=0$. Equivalentemente, Σ é uma superfície de tipo esférico em $\overline{M}^3(c)$ se, e somente se, h é solução da equação de Helmholtz (ver [33]), dada por*

$$\Delta h + 2J_c ch = 0, \quad (3-10)$$

onde J_c é definida por (3-7).

Quando $c = 0$, verificamos que $\Sigma \subset \overline{M}^3(c)$ é uma superfície de tipo esférico se, e somente se, h é uma função harmônica. Ver [28].

Nos casos $c = \pm 1$, mostraremos algumas soluções de (3-10), encontradas em [33].

Em [33], foi considerada a equação bidimensional de Helmholtz por $h(z)$ definida por

$$\Delta(h(z)) + c(K(z)^2)h(z) = 0, \quad (3-11)$$

onde $K(z)$ indica o número de onda e c é um número real constante diferente de zero.

Proposição 8 [33] *Seja g uma função holomorfa, c um número constante real não nulo e $K = \frac{2\sqrt{2|g'|}}{c+|g|^2}$. Então, a função $h = \frac{\langle 1, A \rangle + \langle g, B \rangle}{c+|g|^2}$ são soluções da equação de Helmholtz (3-11), onde A é uma função holomorfa e B é uma função holomorfa, tal que $B = \frac{1}{c} \int [A'g - Ag' + ic_1g'] dz$, onde c_1 é um número real constante.*

Observação 11 Se $K = \sqrt{2J_c}$ e $c = \pm 1$ em (3-11), então h dada na proposição 8, é solução da equação de Helmholtz dada por (3-10). Além disso, se A e B são funções radiais, então, h é uma solução radial de (3-10).

3.3 Hipersuperfícies de rotação de tipo esférico e de tipo esférico

Observação 12 A função \bar{J}_c definida por (3-2), é uma função radial, isto é, constante ao longo de circunferências centradas na origem e raio r , onde $0 \leq r < 1$, se $c = -1$, e $r \geq 0$, se $c = 1$. Por outra parte, se $n = 2$ observamos que $J_c = \bar{J}_c$. Para $c = 0$, obtemos que a equação (3-4) é satisfeita se, e somente se, h é uma função harmônica e coincide com os resultados obtidos em [28].

Suponha então que h é uma função radial, isto é, $h(u_1, u_2, \dots, u_n) = f(r)$, $r = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$, daí, usando (3-2), a equação (3-4) se reduz a

$$2rf'' + \frac{(n + cr(4 - n))f'}{1 + cr} + \frac{2cnf}{(1 + cr)^2} = 0. \quad (3-12)$$

De fato, como

$$\bar{J}_{c,i}(r) = \frac{-16cu_i}{(1 + cr)^3}, \quad f_{,i}(r) = 2f'(r)u_i \quad e \quad f_{,ii}(r) = 4f''(r)u_i^2 + 2f'(r),$$

para todo $1 \leq i \leq n$, obtemos

$$\frac{\Delta f}{\bar{J}_c} + \frac{(n-2)}{2\bar{J}_c^2} \langle \nabla \bar{J}_c, \nabla f \rangle + ncf = 2rf'' + \frac{(n + cr(4 - n))f'}{1 + cr} + \frac{2cnf}{(1 + cr)^2}.$$

Portanto, se $c = 0$, as soluções explícitas de (3-12) são dadas por

$$f(r) = \begin{cases} C_1 \ln(r) + C_2, & \text{se } n = 2, \\ \frac{C_1 r^{1-\frac{n}{2}}}{n-2} + C_2, & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \quad (3-13)$$

Se $c = \pm 1$ e $n = 2$, as soluções explícitas de (3-12) são dadas por

$$f(r) = \begin{cases} \frac{C_1(r-1) + C_2(\ln(r)(r-1)-4)}{1+r}, & \text{se } c = 1, \\ \frac{C_1(r+1) + C_2(\ln(r)(r+1)+4)}{r-1}, & \text{se } c = -1. \end{cases} \quad (3-14)$$

Por último, se $c = \pm 1$ e $n \geq 3$, as soluções explícitas de (3-12) são dadas por

$$f(r) = \frac{C_1(cr-1)}{c(1+cr)} + \frac{C_2 r^{-\frac{n}{2}} (1+cr)^{n-1} \left(\frac{cr}{cr-1}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{cr+1}{cr-1}\right)^{-n} \text{AppellF1}\left[\frac{2-n}{2}, -n, \frac{n}{2}, \frac{4-n}{2}, \frac{2}{1-cr}, \frac{1}{1-cr}\right]}{n-2}, \quad (3-15)$$

onde C_1 e C_2 são constantes e AppellF1 é a função hipergeométrica de Appell.

A continuação, caracterizaremos as hipersuperfícies de rotação de tipo esférico em $\bar{M}^{n+1}(c)$. Ver definição 11.

Lema 2 *Sejam $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis tais que $f_1 f_2 = c$, onde c é um número real constante. Então, f_1 é constante se, e somente se, $f_1 \neq \frac{c}{f_2}$, $f_2 \neq 0$.*

Teorema 3 *Seja Σ uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}^{n+1}(c)$ dada pelo teorema 2. Então, Σ é uma hipersuperfície de rotação de tipo esférico em $\overline{M}^{n+1}(c)$ se, e somente se, h é uma função radial.*

Demonstração: Para $c = 0$, ver [28]. Para $c = \pm 1$, sem perda de generalidade, podemos supor que o plano de rotação é dado por $[e_c, Y]$. Suponha então que Σ é uma hipersuperfície de rotação de tipo esférico. Dessa forma, as seções ortogonais de Σ com hiperplanos paralelos ao hiperplano $[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$, determinam em Σ , esferas $(n-1)$ dimensionais centradas no plano $[e_c, Y]$. Seja então $\overline{\Sigma}$, a interseção de Σ com um hiperplano paralelo a $[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$, daí, pela equação (2-14), $\overline{\Sigma}$ pode ser parametrizada por

$$\overline{X} = -\frac{2h}{S} \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_{,i}}{L_{ii}} Y_{,i} \right).$$

Logo,

$$|\overline{X}|^2 = \langle \overline{X}, \overline{X} \rangle = \left(\frac{2h}{S} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} \right) = h^2 \left(\frac{4}{S^2} \sum_{i=1}^n \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} \right) = A,$$

onde $A \geq 0$, é um número real constante. Se $A = 0$ e $h \neq 0$, então $\sum h_{,i}^2 = 0$, isto é, $h_{,i} = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$, conseqüentemente, h é uma função constante. Se $A > 0$, então $h^2 \left(\frac{4}{S^2} \sum_{i=1}^n \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} \right)$ é constante ao longo de esferas $(n-1)$ dimensionais, portanto, pelo lema 2, h^2 é constante ao longo dessas esferas $(n-1)$ dimensionais.

Portanto, concluímos que h é uma função radial.

Reciprocamente, seja Y uma parametrização de $M^n(c) \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ dada pela observação 10, então $L_{ii} = \overline{J}_c$, para todo $1 \leq i \leq n$, onde \overline{J}_c é a função radial dada por (3-2). Suponha também que h é uma função radial, isto é, $h = f(r)$, $r = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$, então

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{f_{,i}^2}{L_{ii}} + c f^2 + 1 = \sum_{i=1}^n \frac{(2f' u_i)^2}{\overline{J}_c} + c f^2 + 1 = \frac{4(f')^2}{\overline{J}_c} r + c f^2 + 1,$$

portanto, S é uma função radial. Conseqüentemente,

$$\langle \overline{X}, \overline{X} \rangle = f^2 \left(\frac{4}{S^2} \sum_{i=1}^n \frac{f_{,i}^2}{L_{ii}} \right) = f^2 \left(\frac{4}{S^2} \sum_{i=1}^n \frac{4(f')^2 u_i^2}{\overline{J}_c} \right) = \frac{16 f^2 (f')^2}{S^2 \overline{J}_c} r.$$

Logo, $\langle \overline{X}, \overline{X} \rangle$ é constante ao longo de esferas $(n-1)$ dimensionais. Portanto, Σ é uma hipersuperfície de rotação de tipo esférico centrada no plano $[e_c, Y]$.

Teorema 4 *Seja Σ uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}^{n+1}(c)$ dada pelo teorema 2 e Y uma parametrização de Σ dada pela observação 10. Então, Σ é uma hipersuperfície Weingarten de tipo esférico e de rotação de tipo esférico em $\overline{M}^{n+1}(c)$ se, e somente se, h é função radial dada por (3-13), (3-14) e (3-15), respectivamente.*

Demonstração: Segue-se do teorema 3 e da observação 12.

Com as hipóteses do teorema 4, se $n = 2$ e $c = 1$, então $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \subset \overline{M}^3(c) = \mathbb{S}^3$, é uma superfície Weingarten de tipo esférico e de rotação de tipo esférico em \mathbb{S}^3 tal que sua parametrização é dada por $X(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2), x_4(u_1, u_2))$, onde

$$\begin{aligned} x_1(u_1, u_2) = & ((2C_2^2 u_1 u_2^2 + 2C_2^2 u_1^3) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + (2C_2^2 u_1 u_2^4 + (4C_2^2 u_1^3 + (8C_2^2 + \\ & 4C_1 C_2) u_1) u_2^2 + 2C_2^2 u_1^5 + (8C_2^2 + 4C_1 C_2) u_1^3 - 2C_2^2 u_1) \ln(u_2^2 + u_1^2) + (2C_2^2 + 2C_1 C_2) u_1 u_2^4 + \\ & ((4C_2^2 + 4C_1 C_2) u_1^3 + (4C_2^2 + 8C_1 C_2 + 2C_1^2 + 2) u_1) u_2^2 + (2C_2^2 + 2C_1 C_2) u_1^5 + (4C_2^2 + 8C_1 C_2 + \\ & 2C_1^2 + 2) u_1^3 + (-6C_2^2 - 2C_1 C_2) u_1) / ((C_2^2 u_2^4 + (2C_2^2 u_1^2 + C_2^2) u_2^2 + C_2^2 u_1^4 + C_2^2 u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + \\ & ((4C_2^2 + 2C_1 C_2) u_2^4 + ((8C_2^2 + 4C_1 C_2) u_1^2 + 4C_2^2 + 2C_1 C_2) u_2^2 + (4C_2^2 + 2C_1 C_2) u_1^4 + (4C_2^2 + \\ & 2C_1 C_2) u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) + C_2^2 u_2^6 + (3C_2^2 u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + 1) u_2^4 + (3C_2^2 u_1^4 + (14C_2^2 + \\ & 8C_1 C_2 + 2C_1^2 + 2) u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + 1) u_2^2 + C_2^2 u_1^6 + (7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + 1) u_1^4 + \\ & (7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + 1) u_1^2 + C_2^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(u_1, u_2) = & ((2C_2^2 u_2^3 + 2C_2^2 u_1^2 u_2) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + (2C_2^2 u_2^5 + (4C_2^2 u_1^2 + 8C_2^2 + \\ & 4C_1 C_2) u_2^3 + (2C_2^2 u_1^4 + (8C_2^2 + 4C_1 C_2) u_1^2 - 2C_2^2) u_2) \ln(u_2^2 + u_1^2) + (2C_2^2 + 2C_1 C_2) u_2^5 + \\ & ((4C_2^2 + 4C_1 C_2) u_1^2 + 4C_2^2 + 8C_1 C_2 + 2C_1^2 + 2) u_2^3 + ((2C_2^2 + 2C_1 C_2) u_1^4 + (4C_2^2 + 8C_1 C_2 + \\ & 2C_1^2 + 2) u_1^2 - 6C_2^2 - 2C_1 C_2) u_2) / ((C_2^2 u_2^4 + (2C_2^2 u_1^2 + C_2^2) u_2^2 + C_2^2 u_1^4 + C_2^2 u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + \\ & ((4C_2^2 + 2C_1 C_2) u_2^4 + ((8C_2^2 + 4C_1 C_2) u_1^2 + 4C_2^2 + 2C_1 C_2) u_2^2 + (4C_2^2 + 2C_1 C_2) u_1^4 + (4C_2^2 + \\ & 2C_1 C_2) u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) + C_2^2 u_2^6 + (3C_2^2 u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + 1) u_2^4 + (3C_2^2 u_1^4 + (14C_2^2 + \\ & 8C_1 C_2 + 2C_1^2 + 2) u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + 1) u_2^2 + C_2^2 u_1^6 + (7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + 1) u_1^4 + \\ & (7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + 1) u_1^2 + C_2^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3(u_1, u_2) = & -((C_2^2 u_2^4 + (2C_2^2 u_1^2 - C_2^2) u_2^2 + C_2^2 u_1^4 - C_2^2 u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + \\ & (2C_1 C_2 u_2^4 + (4C_1 C_2 u_1^2 - 8C_2^2 - 2C_1 C_2) u_2^2 + 2C_1 C_2 u_1^4 + (-8C_2^2 - 2C_1 C_2) u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) - \\ & C_2^2 u_2^6 + (-3C_2^2 u_1^2 - 5C_2^2 + C_1^2 - 1) u_2^4 + (-3C_2^2 u_1^4 + (-10C_2^2 + 2C_1^2 - 2) u_1^2 - 11C_2^2 - 8C_1 C_2 - \\ & C_1^2 + 1) u_2^2 - C_2^2 u_1^6 + (-5C_2^2 + C_1^2 - 1) u_1^4 + (-11C_2^2 - 8C_1 C_2 - C_1^2 + 1) u_1^2 + C_2^2) / ((C_2^2 u_2^4 + \\ & (2C_2^2 u_1^2 + C_2^2) u_2^2 + C_2^2 u_1^4 + C_2^2 u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + ((4C_2^2 + 2C_1 C_2) u_2^4 + ((8C_2^2 + 4C_1 C_2) u_1^2 + \\ & 4C_2^2 + 2C_1 C_2) u_2^2 + (4C_2^2 + 2C_1 C_2) u_1^4 + (4C_2^2 + 2C_1 C_2) u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) + C_2^2 u_2^6 + (3C_2^2 u_1^2 + \\ & 7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + 1) u_2^4 + (3C_2^2 u_1^4 + (14C_2^2 + 8C_1 C_2 + 2C_1^2 + 2) u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + \\ & 1) u_2^2 + C_2^2 u_1^6 + (7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + 1) u_1^4 + (7C_2^2 + 4C_1 C_2 + C_1^2 + 1) u_1^2 + C_2^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4(u_1, u_2) = & ((2C_2 u_2^4 + (4C_2 u_1^2 - 2C_2) u_2^2 + 2C_2 u_1^4 - 2C_2 u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) + 2C_1 u_2^4 + \\ & (4C_1 u_1^2 - 8C_2 - 2C_1) u_2^2 + 2C_1 u_1^4 + (-8C_2 - 2C_1) u_1^2) / ((C_2 u_2^4 + (2C_2 u_1^2 + C_2) u_2^2 + C_2 u_1^4 + \end{aligned}$$

$$C_2^2 u_1^2 \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + ((4C_2^2 + 2C_1C_2)u_2^4 + ((8C_2^2 + 4C_1C_2)u_1^2 + 4C_2^2 + 2C_1C_2)u_2^2 + (4C_2^2 + 2C_1C_2)u_1^4 + (4C_2^2 + 2C_1C_2)u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) + C_2^2 u_2^6 + (3C_2^2 u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 + 1)u_2^4 + (3C_2^2 u_1^4 + (14C_2^2 + 8C_1C_2 + 2C_1^2 + 2)u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 + 1)u_2^2 + C_2^2 u_1^6 + (7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 + 1)u_1^4 + (7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 + 1)u_1^2 + C_2^2).$$

De forma análoga, se $n = 2$ e $c = -1$, então $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \subset \overline{M}^3(c) = \mathbb{H}^3$, é uma superfície Weingarten de tipo esférico e de rotação de tipo esférico em \mathbb{H}^3 tal que sua parametrização é dada por $X(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2), x_4(u_1, u_2))$,

onde

$$x_1(u_1, u_2) = -((2C_2^2 u_1 u_2^2 + 2C_2^2 u_1^3) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + (-2C_2^2 u_1 u_2^4 + ((8C_2^2 + 4C_1C_2)u_1 - 4C_2^2 u_1^3)u_2^2 - 2C_2^2 u_1^5 + (8C_2^2 + 4C_1C_2)u_1^3 + 2C_2^2 u_1) \ln(u_2^2 + u_1^2) + (-2C_2^2 - 2C_1C_2)u_1 u_2^4 + ((-4C_2^2 - 4C_1C_2)u_1^3 + (4C_2^2 + 8C_1C_2 + 2C_1^2 - 2)u_1)u_2^2 + (-2C_2^2 - 2C_1C_2)u_1^5 + (4C_2^2 + 8C_1C_2 + 2C_1^2 - 2)u_1^3 + (6C_2^2 + 2C_1C_2)u_1) / ((C_2^2 u_2^4 + (2C_2^2 u_1^2 - C_2^2)u_2^2 + C_2^2 u_1^4 - C_2^2 u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + ((4C_2^2 + 2C_1C_2)u_2^4 + ((8C_2^2 + 4C_1C_2)u_1^2 - 4C_2^2 - 2C_1C_2)u_2^2 + (4C_2^2 + 2C_1C_2)u_1^4 + (-4C_2^2 - 2C_1C_2)u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) - C_2^2 u_2^6 + (-3C_2^2 u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 - 1)u_2^4 + (-3C_2^2 u_1^4 + (14C_2^2 + 8C_1C_2 + 2C_1^2 - 2)u_1^2 - 7C_2^2 - 4C_1C_2 - C_1^2 + 1)u_2^2 - C_2^2 u_1^6 + (7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 - 1)u_1^4 + (-7C_2^2 - 4C_1C_2 - C_1^2 + 1)u_1^2 + C_2^2),$$

$$x_2(u_1, u_2) = -((2C_2^2 u_2^3 + 2C_2^2 u_1^2 u_2) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + (-2C_2^2 u_2^5 + (-4C_2^2 u_1^2 + 8C_2^2 + 4C_1C_2)u_2^3 + (-2C_2^2 u_1^4 + (8C_2^2 + 4C_1C_2)u_1^2 + 2C_2^2)u_2) \ln(u_2^2 + u_1^2) + (-2C_2^2 - 2C_1C_2)u_2^5 + ((-4C_2^2 - 4C_1C_2)u_1^2 + 4C_2^2 + 8C_1C_2 + 2C_1^2 - 2)u_2^3 + ((-2C_2^2 - 2C_1C_2)u_1^4 + (4C_2^2 + 8C_1C_2 + 2C_1^2 - 2)u_1^2 + 6C_2^2 + 2C_1C_2)u_2) / ((C_2^2 u_2^4 + (2C_2^2 u_1^2 - C_2^2)u_2^2 + C_2^2 u_1^4 - C_2^2 u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + ((4C_2^2 + 2C_1C_2)u_2^4 + ((8C_2^2 + 4C_1C_2)u_1^2 - 4C_2^2 - 2C_1C_2)u_2^2 + (4C_2^2 + 2C_1C_2)u_1^4 + (-4C_2^2 - 2C_1C_2)u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) - C_2^2 u_2^6 + (-3C_2^2 u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 - 1)u_2^4 + (-3C_2^2 u_1^4 + (14C_2^2 + 8C_1C_2 + 2C_1^2 - 2)u_1^2 - 7C_2^2 - 4C_1C_2 - C_1^2 + 1)u_2^2 - C_2^2 u_1^6 + (7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 - 1)u_1^4 + (-7C_2^2 - 4C_1C_2 - C_1^2 + 1)u_1^2 + C_2^2),$$

$$x_3(u_1, u_2) = -((2C_2 u_2^4 + (4C_2 u_1^2 + 2C_2)u_2^2 + 2C_2 u_1^4 + 2C_2 u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) + 2C_1 u_2^4 + (4C_1 u_1^2 + 8C_2 + 2C_1)u_2^2 + 2C_1 u_1^4 + (8C_2 + 2C_1)u_1^2) / ((C_2^2 u_2^4 + (2C_2^2 u_1^2 - C_2^2)u_2^2 + C_2^2 u_1^4 - C_2^2 u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + ((4C_2^2 + 2C_1C_2)u_2^4 + ((8C_2^2 + 4C_1C_2)u_1^2 - 4C_2^2 - 2C_1C_2)u_2^2 + (4C_2^2 + 2C_1C_2)u_1^4 + (-4C_2^2 - 2C_1C_2)u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) - C_2^2 u_2^6 + (-3C_2^2 u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 - 1)u_2^4 + (-3C_2^2 u_1^4 + (14C_2^2 + 8C_1C_2 + 2C_1^2 - 2)u_1^2 - 7C_2^2 - 4C_1C_2 - C_1^2 + 1)u_2^2 - C_2^2 u_1^6 + (7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 - 1)u_1^4 + (-7C_2^2 - 4C_1C_2 - C_1^2 + 1)u_1^2 + C_2^2),$$

$$x_4(u_1, u_2) = ((C_2^2 u_2^4 + (2C_2^2 u_1^2 + C_2^2)u_2^2 + C_2^2 u_1^4 + C_2^2 u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + (2C_1C_2 u_2^4 + (4C_1C_2 u_1^2 + 8C_2^2 + 2C_1C_2)u_2^2 + 2C_1C_2 u_1^4 + (8C_2^2 + 2C_1C_2)u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) + C_2^2 u_2^6 + (3C_2^2 u_1^2 - 5C_2^2 + C_1^2 + 1)u_2^4 + (3C_2^2 u_1^4 + (-10C_2^2 + 2C_1^2 + 2)u_1^2 + 11C_2^2 + 8C_1C_2 + C_1^2 + 1)u_2^2 + C_2^2 u_1^6 + (-5C_2^2 + C_1^2 + 1)u_1^4 + (11C_2^2 + 8C_1C_2 + C_1^2 + 1)u_1^2 + C_2^2) / ((C_2^2 u_2^4 + (2C_2^2 u_1^2 - C_2^2)u_2^2 + C_2^2 u_1^4 - C_2^2 u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2)^2 + ((4C_2^2 + 2C_1C_2)u_2^4 + ((8C_2^2 + 4C_1C_2)u_1^2 - 4C_2^2 - 2C_1C_2)u_2^2 + (4C_2^2 + 2C_1C_2)u_1^4 + (-4C_2^2 - 2C_1C_2)u_1^2) \ln(u_2^2 + u_1^2) - C_2^2 u_2^6 + (-3C_2^2 u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 - 1)u_2^4 + (-3C_2^2 u_1^4 + (14C_2^2 + 8C_1C_2 + 2C_1^2 - 2)u_1^2 - 7C_2^2 - 4C_1C_2 - C_1^2 + 1)u_2^2 - C_2^2 u_1^6 + (7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 - 1)u_1^4 + (-7C_2^2 - 4C_1C_2 - C_1^2 + 1)u_1^2 + C_2^2),$$

$$(4C_2^2 + 2C_1C_2)u_1^4 + (-4C_2^2 - 2C_1C_2)u_1^2 \ln(u_2^2 + u_1^2) - C_2^2 u_2^6 + (-3C_2^2 u_1^2 + 7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 - 1)u_2^4 + (-3C_2^2 u_1^4 + (14C_2^2 + 8C_1C_2 + 2C_1^2 - 2)u_1^2 - 7C_2^2 - 4C_1C_2 - C_1^2 + 1)u_2^2 - C_2^2 u_1^6 + (7C_2^2 + 4C_1C_2 + C_1^2 - 1)u_1^4 + (-7C_2^2 - 4C_1C_2 - C_1^2 + 1)u_1^2 + C_2^2).$$

Definição 14 Uma hipersuperfície $\Sigma \subset \overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 2$, é uma **hipersuperfície de tipo esférico em $\overline{M}^{n+1}(c)$** , se para todo ponto $p \in \Sigma$, o conjunto de esferas de centro $p + \frac{H_{n-1}(p)}{H_n(p)}N(p)$ e raio $h = \frac{H_{n-1}(p)}{H_n(p)}$ tangenciam $M^n(c) \subset \overline{M}^{n+1}(c)$.

Proposição 9 Seja $\Sigma \subset \overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 2$, uma hipersuperfície como no teorema 2. Então,

$$\text{tr}(V^{-1}) = \frac{2n}{S} \left(h - \frac{H_{n-1}}{H_n} \right).$$

Além disso, Σ é uma hipersuperfície de tipo esférico em $\overline{M}^{n+1}(c)$ se, e somente se, $\text{tr}(V^{-1}) = 0$.

Demonstração: Pela observação 7, temos que os autovalores de V são dados por

$$\sigma_i = \frac{Sk_i}{2(hk_i - 1)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde k_i , $1 \leq i \leq n$, são as curvaturas principais de Σ em $\overline{M}^{n+1}(c)$. Então, os autovalores de V^{-1} são dados por

$$\frac{1}{\sigma_i} = \frac{2(hk_i - 1)}{Sk_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{tr}(V^{-1}) &= \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n} & (3-16) \\ &= \frac{2(hk_1 - 1)}{Sk_1} + \frac{2(hk_2 - 1)}{Sk_2} + \dots + \frac{2(hk_n - 1)}{Sk_n} \\ &= \frac{2(hk_1 - 1)k_2k_3 \dots k_n + \dots + 2(hk_n - 1)k_1k_2 \dots k_{n-1}}{S(k_1k_2 \dots k_n)} \\ &= \frac{2nhH_n - 2(k_2k_3 \dots k_n + k_1k_3 \dots k_n + \dots + k_1k_2 \dots k_{n-1})}{SH_n} \\ &= \frac{2n}{S} \left(h - \frac{H_{n-1}}{H_n} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, da equação anterior obtemos que o $\text{tr}(V^{-1}) = 0$ se, e somente se,

$$h = \frac{H_{n-1}}{H_n}.$$

Corolário 7 *Seja $\Sigma \subset \overline{M}^3(c)$, uma superfície como no teorema 2. Então Σ é uma superfície de tipo esférico em $\overline{M}^3(c)$ se, e somente se, Σ é uma superfície Weingarten de tipo esférico em $\overline{M}^3(c)$.*

Demonstração: Como V é uma matriz quadrada de ordem 2, então

$$\operatorname{tr}(V^{-1}) = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\operatorname{tra}(V)}{\sigma_1 \sigma_2},$$

onde σ_1, σ_2 são os autovalores da matriz V , daí, $\operatorname{tr}(V) = 0$ se, e somente se, $\operatorname{tr}(V^{-1}) = 0$.

Logo, pelas proposições 6 e 9, obtemos o resultado desejado.

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, A. L. **Possibilidade de confinamento no modelo SU (2)-Cor.** Universidade Estadual Paulista (UNESP), 1994.
- [2] BIANCHI, L. **Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali.** *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1867-1897)*, 18(1):301–358, 1890.
- [3] BIANCHI, L. **Le trasformazioni di ribaucour dei sistemi n pli ortogonali e il teorema generale di permutabilità.** *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1898-1922)*, 27(1):183–257, 1918.
- [4] BLASCHKE, G.; THOMSEM, G. **Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie III: Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln**, volume 29. Springer-Verlag, 2013.
- [5] BLASCHKE, W. **Über die geometrie von laguerre: I. grundformeln der flächentheorie.** *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 3:176–194, 1924.
- [6] BLASCHKE, W. **II. flächentheorie in ebenenkoordinaten.** In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 3, p. 195–212. Springer, 1924.
- [7] BRYANT, R. **Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space.** *Astérisque*, 154:321–347, 1987.
- [8] CARTAN, E. **Sur quelques familles remarquables d’hypersurfaces, cr congrès math.** *Liège*, p. 30–41, 1939.
- [9] CARTAN, É. **Sur des familles d’hypersurfaces isoparamétriques: des espaces sphériques a 5 et a 9 dimensions.** 1930.
- [10] CARTAN, É. **Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante.** *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 17(1):177–191, 1938.
- [11] CARTAN, E. **Sur des familles remarquables d’hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques.** *Mathematische Zeitschrift*, 45(1):335–367, 1939.

- [12] CORRO, A. V. **Generalized weingarten surfaces of bryant type in hyperbolic 3-space.** *Mat. Contemp.*, 30:71–89, 2006.
- [13] CORRO, A. V.; TENENBLAT, K. **Ribaucour transformations revisited.** *Communications in Analysis and Geometry*, 12(5):1055–1082, 2004.
- [14] CORRO, A.; FERREIRA, W.; TENENBLAT, K. **Minimal surfaces obtained by ribaucour transformations.** *Geometriae Dedicata*, 96(1):117–150, 2003.
- [15] CORRO, A.; FERREIRA, W.; TENENBLAT, K. **Ribaucour transformations for constant mean curvature and linear weingarten surfaces.** *Pacific journal of mathematics*, 212(2):265–297, 2003.
- [16] COSTA, S. S. **A description of several coordinate systems for hyperbolic spaces.** *arXiv preprint math-ph/0112039*, 2001.
- [17] DELAUNAY, C. **Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante.** *Journal de mathématiques pures et appliquées*, p. 309–314, 1841.
- [18] DIAS, D. G. **Classes de hipersuperfícies Weingarten generalizada no espaço Euclidiano.** Universidade Federal de Goiás, [Tese de Doutorado], Goiás: IME-UFG, 2014.
- [19] DO CARMO, M.; DAJCZER, M. **Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature.** In: *Manfredo P. do Carmo—Selected Papers*, p. 195–219. Springer, 2012.
- [20] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana.** IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [21] EARP, R. S.; TOUBIANA, E. **Symmetry of properly embedded special weingarten surfaces in \mathbb{H}^3 .** *Transactions of the American Mathematical Society*, 351(12):4693–4712, 1999.
- [22] FERNANDES, K. V.; OTHERS. **Superfícies Weingarten generalizada tipo harmônico no espaço hiperbólico.** Universidade Federal de Goiás, [Tese de Doutorado], Goiás:IME-UFG, 2013.
- [23] FERREIRA, W.; ROITMAN, P. **Hypersurfaces in hyperbolic space associated with the conformal scalar curvature equation $\delta u + \kappa u + 2n - 2 = 0$.** *Differential Geometry and its Applications*, 27(2):279–295, 2009.
- [24] GÁLVEZ, J.; MARTÍNEZ, A.; MILÁN, F. **Complete linear weingarten surfaces of bryant type. a plateau problem at infinity.** *Transactions of the American Mathematical Society*, 356(9):3405–3428, 2004.

- [25] GÁLVEZ, J. A.; MARTÍNEZ, A.; MILÁN, F. **Flat surfaces in the hyperbolic 3-space.** *Mathematische Annalen*, 316(3):419–435, 2000.
- [26] LEITE, M. L. **Rotational hypersurfaces of space forms with constant scalar curvature.** *manuscripta mathematica*, 67(1):285–304, 1990.
- [27] LINS NETO, A. **Funções de uma variável complexa.** 2008.
- [28] MACHADO, C. D. F. **Hipersuperfícies weingarten de tipo esférico.** [Tese de Doutorado], Brasília:UnB, 2018.
- [29] MÜNZNER, H. F. **Isoparametrische hyperflächen in sphären.** *Mathematische Annalen*, 251(1):57–71, 1980.
- [30] MUNZNER, M. **Isoparametrische hyperflächen in sphären ii.** *Math. Ann.*, 256:215–232, 1981.
- [31] PALMAS, O. **Complete rotation hypersurfaces with h k constant in space forms.** *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 30(2):139–161, 1999.
- [32] POTTMANN, H.; GROHS, P.; MITRA, N. J. **Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity.** *Advances in computational mathematics*, 31(4):391, 2009.
- [33] RIVEROS, C. M. C.; CORRO, A. M. V. **Generalized helmholtz equation.** *Selecciones Matemáticas*, 06(01):19–25, 2019.
- [34] ROITMAN, P. **Flat surfaces in hyperbolic space as normal surfaces to a congruence of geodesics.** *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 59(1):21–37, 2007.
- [35] SALINAS, E. O. R.; RIVEROS, C. M. C. **Congruence of geodesic spheres in h 3 and s 3.** *Selecciones Matemáticas*, 05(02):212–229, 2018.
- [36] SCHIEF, W. **On laplace–darboux-type sequences of generalized weingarten surfaces.** *Journal of Mathematical Physics*, 41(9):6566–6599, 2000.
- [37] TENENBLAT, K.; WANG, Q. **Ribaucour transformations for hypersurfaces in space forms.** *Annals of Global Analysis and Geometry*, 29(2):157, 2006.