Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Emmanuel Chabin

Orientador: Mauro Moraes Alves Patrão

Controlabilidade de Sistemas Lineares em Grupos de Lie

Esta dissertação é submetida como requisito parcial
para a obtenção do título de *mestre em matemática.*

Brasília, Fevereiro de 2020

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C427c

Chabin, Emmanuel
Controlabilidade de Sistemas Lineares em Grupos de Lie / Emmanuel Chabin; orientador Mauro Moraes Alves Patrão. -- Brasília, 2020.
83 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Sistemas de controle afins, lineares e invariantes. 2. Campos de vetores afins, lineares, e invariantes. 3. Controlabilidade. 4. Conjuntos de atingibilidade. 5. Teoria de Lie. I. Patrão, Mauro Moraes Alves, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Controlabilidade de Sistemas Lineares em Grupos de Lie

por

Emmanuel Chabin

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 14 de fevereiro de 2020.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Mauro Moraes Alves Patrão - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Lucas Conque Seco Ferreira – MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Alexandre José Santana – UEM (Membro)

Agradecimentos

Agradeço o apoio da minha esposa Constance nessa jornada. Agradeço minha família. Agradeço meu orientador, cuja atenção e disponibilidade foram muito valiosas nas fases delicadas da pesquisa, seja através de explicações técnicas aprofundadas, sejá através de orientações sobre fontes de informação ou organização. Agradeço o Professor Lucas Seco da UnB, após o curso de Sistemas Dinâmicos de quem resolvi continuar nessa área. Agradeço a equipe de sistemas dinâmicos em geral, que através dos seminários me fez perceber a riqueza da área, e parte das suas inúmeras conexões com as outras áreas da matemática. Agradeço o departamento de matemática da UnB que me permitiu, depois de muito tempo, retomar meus estudos como aluno especial, e depois como aluno regular de mestrado. Agradeço a gentileza e a solidariedade dos meus colegas alunos de mestrado e de doutorado. Agradeço o Professor Philippe Jouan, da Universidade de Rouen, na França, cujos artigos, pela sua qualidade e clareza, me permitiram entrar no campo da teoria do controle, e serviram de base para esta dissertação. Agradeço meus colegas do Lycée Français François Mitterrand de Brasília pelo excellente ambiente de trabalho, que suavizou a dificuldade de combinar os estudos com a vida profissional, e em particular Rafael Aguiar pela ajuda muito concreta na instalação e a utilização do programa LaTex. Agradeço a oportunidade de conhecer um pouco da teoria de Lie, necessária para abordar os assuntos de teoria do controle tratados nesta dissertação. Teoria que tenho agora o maior interesse em aprofundar, junto com a teoria do controle.

Resumo

Começamos com uma breve introdução à teoria de Lie. Em seguida, definimos campos de vetores afins e lineares em grupos de Lie, e provamos a equivalência entre três caracterizações dos campos de vetores lineares. Então definimos os campos de vetores lineares internos, e estabelecemos propriedades deles com relação a campos invariantes à direita. Feito isso, definimos os sistemas de controle lineares, afins, e invariantes à direita, a condição do posto, e a condição ad-rank. Então focamos nos sistemas lineares para definir e estudar seus vários tipos de conjuntos de atingibilidade, e sua álgebra de Lie. Em seguida, tratamos o caso dos sistemas lineares internos. Mostramos que existe um sistema invariante associado, cuja controlabilidade em tempo finito, e com tempo ótimo, estão relacionadas àquelas do sistema linear interno. Depois disso, aplicamos esses resultados ao estudo da controlabilidade dos sistemas lineares em grupos de Lie semi-simples e em grupos de Lie nilpotentes, e dos sistemas de controle afins em grupos de Lie compactos. Terminamos com alguns exemplos.

Palavras-chave: Teoria de Lie, Campos de vetores afins, lineares, e invariantes, Sistemas de controle afins, lineares, e invariantes, Conjuntos de atingibilidade, Controlabilidade.

Abstract

We begin with a brief introduction to Lie theory. Then we define affine and linear vector fields on Lie groups, and we prove the equivalence between three characterizations of linear vector fields. After this, we define the inner linear vector fields, and establish some of their properties with regard to right invariant vector fields. Then we define the affine, linear and right invariant control systems, the rank condition and the ad-rank condition. Then we focus on linear systems to define and study their various types of reachable sets, and their Lie algebras. After this, we study the case of inner linear systems. We show that there exists a related invariant system, whose controllability in finite time, and in optimal time, are related to those of the inner linear system. Then we apply these results to the study of the controllability of linear control systems on semisimple Lie groups and on nilpotent Lie groups, and of affine systems on compact Lie groups. We finish with some examples.

Keywords: Lie theory, Affine, linear, and invariant vector fields, Affine, linear, and invariant control systems, Reachable sets, Controllability.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Fundamentos de teoria de Lie **5**

2.1 Grupos de Lie 5

2.2 Álgebra de Lie de um grupo de Lie 5

2.3 Aplicação exponencial 8

2.4 Homomorfimos 11

2.4.1 Representações 12

2.4.2 Representações adjuntas 13

3 Campos de vetores lineares e afins em grupos de Lie **16**

3.1 Definições e propriedades fundamentais 16

3.2 Caracterização dos campos lineares 20

3.3 Campos lineares internos 24

4 Controlabilidade de sistemas lineares e afins em grupos de Lie **28**

4.1 Sistemas de controle lineares e afins 28

4.2 Controlabilidade e condição do posto 30

4.3 Sistemas de controle lineares 31

4.3.1 Conjuntos de atingibilidade 31

4.3.2 Álgebra de Lie do sistema e condição do posto 35

4.4 Sistemas lineares internos 37

4.4.1 Sistema invariante associado 37

4.4.2 Controlabilidade em tempo finito 42

4.4.3 Controle com tempo ótimo do sistema invariante 45

4.5 Aplicação a algumas classes de Grupos de Lie 50

4.5.1 Grupos de Lie semi-simples 50

4.5.2 Grupos de Lie nilpotentes 53

4.6 Sistemas de controle afins 56

4.6.1 Grupos de Lie Compactos 57

5 Exemplos **61**
5.1 Exemplos no grupo de Heisenberg 61

A Campos de vetores e colchetes de Lie em variedades diferenciáveis **69**
A.1 Campos de vetores 69
A.2 Colchete de Lie 71

Capítulo 1

Introdução

A teoria do controle estuda a possibilidade de agir sobre um sistema dinâmico dependendo da variável temporal, de modo a levar o estado dele até um dado estado em um dado instante. Essa descrição se aplica tanto a um sistema concreto, por exemplo a posição de um barco ou qualquer outro veículo, quanto a um sistema de equações diferenciais. Ao longo da história, os avanços em dois campos, o técnológico e o matemático se estimularam mutualmente, dando lugar a teorias cada vez mais aprofundadas, e a aplicações mais variadas.

Hoje em dia, um ramo importante da teoria do controle é aquele no qual um sistema de controle é um sistema diferencial da forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad x(t) \in M, \qquad u(\cdot) \in \mathcal{U}$$

onde os estados $x(t)$ pertencem a uma variedade diferenciável M, e os controles $u(\cdot)$ pertencem a um conjunto de controles admissíveis $\mathcal{U}$, que é um conjunto de aplicações localmente integráveis definidas em $[0, +\infty)$, com valores em $\mathbb{R}^m$. Neste trabalho, nos encaixamos no caso em que a variedade diferencíavel M é um grupo de Lie conexo, que denotaremos por G, e o sistema de controle é dado por

$$\dot{g} = \mathcal{F}_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_g^j \qquad\qquad (\Sigma_A)$$

onde $u = (u_1, \, \dots \, , u_m)$ pertence a um conjunto de controles admissíveis $\mathcal{U}$, os Y^j são campos de vetores em G invariantes à direita, e $\mathcal{F}$ é um campo de vetores afim em G, como será definido mais adiante.

No capítulo 2, são reunidos os fundamentos de teoria de Lie que foram necessários ao autor para entender os artigos que serviram de suporte a essa dissertação, abrir as demonstrações tanto com respeito às contas, quanto com respeito às articulações entre seus argumentos, ou até fazer aquelas que estavam omitidas ou somente sugeridas. Essa base teórica vem do livro Grupos de Lie de L. San Martin ([13]), trabalho notável pela riqueza e clareza do texto. Ela é apresentada no presente trabalho segundo o princípio seguinte com respeito às propriedades e teoremas: em geral somente as propriedades e teoremas são escritos, com referência à sua demonstração em [13]. E nos poucos casos onde não há demonstração no livro, e onde o autor escreveu uma demonstração própria como exercício para seu entendimento e sua aprendizagem, essa demonstração foi incluida nesta dissertação, indicada por "Demonstração", ou às vezes na forma de um parágrafo começando por "De fato".

Esse princípio vale também para o Apêndice A, que trata de campos de vetores e colchetes de Lie no contexto mais geral de variedades diferenciáveis, e que servem no Capítulo 2.

Um conhecimento de variedades diferenciáveis necessário para abordar esses elementos de teoria de Lie pode ser adquirido em [12].

Uma introdução mais concreta e geométrica à teoria de Lie, através dos grupos de Lie de matrizes (mas que não cobre todos os fundamentos usados neste trabalho), se encontra em [17].

No capítulo 3, estudaremos os campos de vetores afins e lineares em um grupo de Lie conexo. A estrutura desse capítulo segue essencialmente aquela da seção 3 de [6]. Depois de definir um campo de vetores afim como pertencendo a $\mathrm{norm}_{V^\omega(G)}\mathfrak{g}$, e um campo linear como um afim que além disso satisfaz $\mathcal{X}_1 = 0$, provamos propriedades importantes para demonstrações posteriores : Primeiro, que o núcleo da aplicação $F \mapsto \mathrm{ad}(F)$ é o conjunto inv^l dos campos de vetores invariantes à esquerda, e segundo, que todo campo de vetores afim F por ser escrito de modo único como soma $F = \mathcal{X} + Z$, onde $\mathcal{X}$ é linear, e $Z \in \mathrm{inv}^l$. O ponto essencial desse capítulo é a demonstração da equivalência entre as três caracterizações seguintes de campos de vetores lineares:

(1) $\mathcal{X} \in \mathrm{norm}_{V^\omega(G)}\mathfrak{g}$ e $\mathcal{X}_1 = 0$

(2) O fluxo de $\mathcal{X}$ é um grupo a 1-parâmetro de automorfismos de G;

(3) $\mathcal{X}$ satisfaz

$$\forall\ x, y \in G, \qquad \mathcal{X}_{xy} = d(L_x)_y.\mathcal{X}_y + d(R_y)_x.\mathcal{X}_x \tag{1.1}$$

Campos lineares foram considerados num contexto de teoria do controle primeiro por Markus, em grupos de Lie de matrizes (ver [11]), e então no caso geral por Ayala e Tirao (ver [1]). Na literatura sobre grupos de Lie, os campos de vetores lineares em grupos de Lie são chamados de *automorfismos infinitesimais* (ver [3]).

A equivalência entre as caracterizações (1) e (2) já foi estabelecida por Ayala e Tirao em [1], fazendo amplo uso de homomorfismos de recobrimento universal, e das propriedades da álgebra de Lie de um grupo de Lie simplesmente conexo. Em [6], Jouan simplifica essa demonstração, e acrescenta a equivalência da caracterização (3). Uma vantagem da definição (1) com relação à (2) é que ela não necessita o conhecimento do fluxo de $\mathcal{X}$.

No capítulo 4, estudaremos as propriedades de controlabilidade dos sistemas lineares em grupos de Lie. Um sistema linear é definido como um sistema de controle

$$\dot{g} = \mathcal{X}_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_g^j \qquad (\Sigma_L)$$

em um grupo de Lie conexo G, onde $\mathcal{X}$ é um campo linear de vetores, e os Y^j são invariantes à direita.

A motivação para tratar de tais sistemas é dupla. Uma é que são extensões naturais dos sistemas invariantes em grupos de Lie. A outra (que foge do âmbito desta dissertação) é que podem ser generalizados a espaços homogêneos e servir de modelo para uma ampla classe de sistemas, graças ao teorema de equivalência.

Em grupos de Lie, algumas propriedades de controlabilidade de sistemas linearesjá foram provadas (ver [1, 4, 15]):

1. Em um grupo de Lie compacto e conexo, um sistema linear é controlável se, e somente se, satisfaz a rank-condition; isso foi provado em [15];

2. um critério de controlabilidade local (chamado condição ad-rank) foi estabelecido em [1, 4];

3. se um sistema linear em um grupo de Lie semisimples com centro finito é controlável a partir da identidade, então um certo sistema invariante, estritamente relacionado ao sistema linear, é controlável também (ver [15]).

Um campo de vetores linear age sobre a álgebra de Lie de G, pela representação adjunta, como uma derivação. Boa parte desta dissertação trata do caso no qual essa derivação é interna. Então um sistema invariante à direita é associado ao sistema linear de um modo natural (ver subseção 4.4.1). As propriedades de controlabilidade desses dois sistemas são comparadas e, em particular, a controlabilidade do sistema linear é relacionada a um problema de tempo ótimo para o sistema invariante (ver subseção 4.4.3).

Essa análise é aplicada a grupos de Lie semi-simples na subseção 4.5.1. Primeiro, é estabelecido no Teorema 4.5.4 que *o sistema invariante é controlável desde que o linear seja controlável a partir da identidade, ou para a identidade.* O Teorema 4.5.6 estabelece a equivalência entre a controlabilidade do sistema linear e a controlabilidade do sistema invariante à direita no caso em que a condição ad-rank (que será definida mais adiante) é satisfeita.

A subseção 4.5.2 trata de grupos de Lie nilpotentes. O teorema 4.5.12 afirma que *em um grupo de Lie conexo e nilpotente, e desde que a derivação seja interna,* (Σ) *é controlável se, e somente se, a álgebra gerada por* $Y^1, \ldots, Y^m$ *é igual a* $\mathfrak{g}$.

Finalmentente, consideramos sistemas afins na seção 4.6. Um campo de vetores afim é a soma de um campo de vetores linear com um campo de vetores invariante à esquerda, e um sistema afim é obtido substituindo o drift de um sistema linear por um campo de vetores afim. Suas propriedades são estudadas nessa seção, e então aplicadas a grupos de Lie compactos.

Isso permite estabelecer o Teorema 4.6.3, que generaliza os resulatdos conhecidos sobre sistemas invariantes e lineares: *Um sistema de controle afim em um grupo de Lie conexo e compacto é controlável se, e somente se, ele satisfaz a condição do posto.*

No capítulo 5 serão apresentados alguns exemplos no grupo de Lie de Heisenberg.

Observação: No presente trabalho, o valor de um campo de vetores X em um dado ponto p de uma variedade diferenciável M será denotado por $X(p)$ ou por X_p. Essas notações são equivalentes.

Capítulo 2

Fundamentos de teoria de Lie

2.1 Grupos de Lie

Nesta dissertação, os sistema de controle que vamos estudar são definidos em estruturas particulares, chamadas grupos de Lie.

Definição 2.1.1. *Um grupo de Lie é um grupo cujo conjunto subjacente tem uma estrutura de variedade diferenciável, de tal forma que a aplicação produto*

$$p : G \times G \to G$$

é diferenciável.

Observamos que a definição de grupo de Lie não exige *a priori* que a inversa $\iota(g) = g^{-1}$ seja diferenciável ou sequer contínua, pois a diferenciabilidade de p implica a de ι através do teorema da função implícita (Ver Proposição 5.1 em [13]).

Dado $g \in G$, as translações à esquerda e à direita $L_g : G \to G$ e $R_g : G \to G$, são definidas respectivamente por $L_g(h) = gh$ e $R_g(h) = hg$. Essas aplicações são diferenciáveis, e na verdade ambas são difeomorfismos, já que $L_g \circ L_{g^{-1}} = R_g \circ R_{g^{-1}} = Id$. Da mesma forma, os automorfismos internos $C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}, g \in G$, são difeomorfismos.

2.2 Álgebra de Lie de um grupo de Lie

Além dos grupos de Lie, outras estruturas muito importantes são as álgebras de Lie. As relações entre grupos e álgebras, e entre as propriedades deles serão fundamentais no nosso estudo.

Definição 2.2.1. *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *munido de um produto (colchete)* $[\cdot,\cdot] : G \times G \to G$ *que satisfaz as propriedades:*

1) O colchete $[\cdot,\cdot]$ é bilinear, isto é, linear em cada uma das variáveis.

2) Antissimetria, isto é, $[X,Y] = -[Y,X], \forall\ X,Y \in \mathfrak{g}$.

3) Identidade de Jacobi : $\forall\ X,Y,Z \in \mathfrak{g}, [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

Alguns tipos de subespaços de uma álgebra de Lie terão um papel fundamental neste trabalho.

Definição 2.2.2. *Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra se for fechado pelo colchete. Nesse caso $\mathfrak{h}$ é também uma álgebra de Lie.*

Definição 2.2.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{v}$ um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{v}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ se $\forall X \in \mathfrak{g}, [X,\mathfrak{v}] \subset \mathfrak{v}$.*

Observação 2.2.4. *Todo ideal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Proposição 2.2.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A soma de uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, e de um ideal de $\mathfrak{g}$, é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, e $\mathfrak{v}$ um ideal de $\mathfrak{g}$. Então temos: $\forall H_1, H_2 \in \mathfrak{h}, \forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{v}$,

$$[H_1 + Y_1, H_2 + Y_2] = \underbrace{[H_1,H_2]}_{\in\mathfrak{h}} + \underbrace{[H_1,Y_2]}_{\in\mathfrak{v}} + \underbrace{[Y_1,H_2]}_{\in\mathfrak{v}} + \underbrace{[Y_1,Y_2]}_{\in\mathfrak{v}} \in \mathfrak{h} + \mathfrak{v}.$$

■

As definições dos sistemas de controle que vamos estudar são baseadas em tipos particulares de campos vetoriais, que definimos a seguir. Para uma noção mais geral de campo vetorial, veja o Apêndice A

Definição 2.2.6. *Seja G um grupo de Lie. Um campo de vetores X em G é denominado :*

1) Invariante à direita se, $\forall\ g,h \in G, d\left(R_g\right)_h (X(h)) = X(hg)$.

2) Invariante à esquerda se, $\forall\ g,h \in G, d\left(L_g\right)_h (X(h)) = X(gh)$.

A condição de invariância implica que um campo de vetores invariante à direita satisfaz

$$X(g) = d\left(R_g\right)_1 (X(1)), \tag{2.1}$$

e que um campo invariante à esquerda satisfaz

$$X(g) = d(L_g)_1 (X(1)). \tag{2.2}$$

Portanto cada elemento do espaço tangente T_1G determina um único campo invariante à direita, e um único campo invariante à esquerda.

Dado $X \in T_1G$, a notação X^r indica o campo invariante à direita tal que $X^r(1) = X$, e X^l o campo invariante à esquerda tal que $X^l(1) = X$.

Explicitamente, $\forall g \in G, X^r(g) = d(R_g)_1(X)$, e $X^l(g) = d(L_g)_1(X)$.

Denote por Inv^r (resp. Inv^l) o conjuto dos campos invariantes à direita (resp. à esquerda). Esses conjuntos são subespaços vetoriais (sobre $\mathbb{R}$), em geral diferentes, do espaço de todos os campos de vetores em G.

As aplicações $X \in T_1G \to X^r \in inv^r$, e $X \in T_1G \to X^l \in inv^l$ são ismorfismos entre os espaços vetoriais corespondentes, cujas inversas são dadas por $X^{r,l} \in inv^{r,l} \to X^{r,l}(1) \in T_1G$.

Lema 2.2.7. *Sejam X e Y campos invariantes à direita num grupo de Lie G. Então o colchete de Lie $[X, Y]$ é invariante à direita. A mesma afirmação vale para campos invariantes à esquerda.*

Demonstração: Ver Lema 5.3 em [13]. ■

O espaço tangente T_1G é isomorfo tanto a inv^r quanto a inv^l. Através dos isomorfismos, o colchete de Lie restrito aos espaços de campos invariantes induz colchetes $[\cdot,\cdot]_r$ e $[\cdot,\cdot]_l$ em T_1G. esses colchetes são daos por : $\forall A, B \in T_1G$,

$$[A, B]_r = [A^r, B^r](1) \tag{2.3}$$

$$[A, B]_l = \left[A^l, B^l\right](1) \tag{2.4}$$

O seguinte lema permite relacioná-los.

Lema 2.2.8. *Sejam $A \in T_1G$ e $\mathcal{I}(g) = g^{-1}$ a inversa em G. Então,*

$$(\mathcal{I})_* (A^r) = (-A)^l \quad e \quad (\mathcal{I})_* \left(A^l\right) = (-A)^r$$

Mais precisamente :

$$(d\mathcal{I})_{g^{-1}} \left(A^r\left(g^{-1}\right)\right) = -A^l(g) \quad e \quad (d\mathcal{I})_{g^{-1}} \left(A^l\left(g^{-1}\right)\right) = -A^r(g).$$

Demonstração: Ver Lema 5.4 em [13]. ■

Proposição 2.2.9. *Sejam $A, B \in T_1G$. Então $[A, B]_r = -[A, B]_l$.*

Demonstração: Ver Proposição 5.5 em [13]. ■

As relações acima nos permitem agora definir a álgebra de Lie do grupo G.

Definição 2.2.10. *A* ***álgebra de Lie*** *de G, denotada por $\mathfrak{g}$, é qualquer uma das álgebras de Lie isomorfas inv^r, inv^l, $(T_1G, [\cdot,\cdot]_r)$, ou ainda $(T_1G, [\cdot,\cdot]_l)$.*

2.3 Aplicação exponencial

Para informação sobre a noção de fluxo de um campo de vetores, usada nesta subseção, veja o Apêndice A.

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $X \in \mathrm{inv}^r$. Então, mostrando que as duas trajetórias são solução da mesma equação diferencial com a mesma condição inicial, estabelecemos

$$\forall g, h \in G, X_t(hg) = X_t(h)\, g \tag{2.5}$$

onde X_t denota o fluxo associado ao campo X.
Tomando em particular $h = 1$, fica

$$X_t(g) = X_t(1)\, g \tag{2.6}$$

De maneira análoga, se $Y \in Inv^l$, mostra-se que

$$\forall g, h \in G, Y_t(gh) = gY_t(h) \tag{2.7}$$

$$Y_t(g) = gY_t(1) \tag{2.8}$$

Como as trajetórias são obtidas umas das outras por translação, elas se prolongam ao mesmo intervalo de $\mathbb{R}$, isto é, as soluções maximais dos campos invariantes têm todas o mesmo intervalo de definição. Isso permite mostrar que os campos invariantes são completos, isto é, suas trajetórias se prolongam a $(-\infty, +\infty)$.

Proposição 2.3.1. *Um campo invariante (à esquerda ou à direita) é completo.*

Demonstração: Ver Proposição 5.7 em [13]. ■

Uma outra consequência das propriedades de invariância (2.6) e (2.8) são as igualdades:

- Se $X \in Inv^r$ então $X_{t+s}(1) = X_t(X_s(1)) = X_t(1)\, X_s(1) = X_s(1)\, X_t(1)$.
- Se $Y \in Inv^l$ então $Y_{t+s}(1) = Y_t(Y_s(1)) = Y_t(1)\, Y_s(1) = Y_s(1)\, Y_t(1)$.

Essas igualdades implicam que $X_{-t}(1) = (X_t(1))^{-1}$ e $Y_{-t}(1) = (Y_t(1))^{-1}$. Daí que, se $X \in Inv^r$ e $Y \in Inv^l$, então suas trajetórias que passam pela origem

$$\{X_t(1) : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \{Y_t(1) : t \in \mathbb{R}\}$$

são subgrupos de G. Na verdade, esses subgrupos coincidem caso $X(1) = Y(1)$.

Proposição 2.3.2. *Sejam X e Y campos de vetores invariantes à direita e à esquerda, respectivamente, que coincidem no elemento neutro, isto é, $X(1) = Y(1)$. Então suas trajetórias $X_t(1)$ e $Y_t(1)$, que passam pelo elemento neutro, coincidem para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Ver Proposição 5.8 em [13]. ■

Uma vez feita essa discussão sobre campos invariantes, pode se definir a aplicação exponencial num grupo de Lie.

Definição 2.3.3. *Seja $X \in T_1G$. Então,* $\exp X = (X^r)_{t=1}(1) = \left(X^l\right)_{t=1}(1)$. *Como é usual,* $\exp X$ *também se escreve como* e^X. *Isso define uma aplicação* $\exp : \mathfrak{g} \to G$, *onde $\mathfrak{g} = T_1G$ é a álgebra de Lie de G.*

Se Z é um campo de vetores e $a \in \mathbb{R}$ então as trajetórias de Z e aZ coincidem e seus fluxos satisfazem $(aZ)_t = Z_{at}$. Aplicando essa observação aos campos X^r e X^l, vê-se que suas trajetórias pelo elemento neutro são dadas por :

$$(X^r)_t(1) = \left(X^l\right)_t(1) = \exp tX. \tag{2.9}$$

Pelas propriedades dessas trajetórias enunciadas acima, segue que a aplicação exponencial $t \mapsto \exp(tX)\,, X \in \mathfrak{g}$, é um homomorfismo, isto é,

$$\exp(t+s)X = \exp(tX)\ \exp(sX) = \exp(sX)\ \exp(tX) \tag{2.10}$$

e sua imagem $\{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo de G, denominado de subrupo a **1-parâmetro** gerado por $X \in \mathfrak{g}$.

A seguinte proposição reune propriedades da aplicação exponencial e dos fluxos dos campos invariantes, que foram discutidas acima:

Proposição 2.3.4. *Valem as seguintes afirmações:*

1) Se X é campo invariante à direita então $X_t = L_{\exp(tX)}$, isto é, $X_t(g) = e^{tX}g$.

2) Se X é campo invariante à esquerda então $X_t = R_{\exp(tX)}$, isto é, $X_t(g) = ge^{tX}$.

3) $e^0 = 1$.

4) Se $n \in \mathbb{Z}$ então $\left(e^X\right)^n = e^{nX}$. Em particular, $\left(e^X\right)^{-1} = e^{-X}$.

Demonstração: Ver Proposição 5.10 em [13]. ■

Essas propriedades generalizam propriedades conhecidas de exponenciais em situações concretas.

Além disso, a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é diferenciável. Em particular sua diferencial na origem $0 \in \mathfrak{g}$ é dada por:

Proposição 2.3.5. $d(\exp)_0 = \mathrm{id}$.

Demonstração: Ver Proposição 5.11 em [13]. ■

Como $d(\exp)_0 = \mathrm{id}$ é inversível, aplicando o teorema da função inversa obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.3.6. *Existem uma vizinhança U de $0 \in \mathfrak{g}$ e uma vizinhança V de $1 \in G$, tal que $\exp_{|U} : U \to V$ é um difeomorfismo.*

Demonstração: Ver Corolário 5.12 em [13]. ■

E dele obtemos a propriedade seguinte, que será util no estudo da controlabilidade de sistemas de controle.

Corolário 2.3.7. *Seja G um grupo de Lie conexo e tome $g \in G$. Então existem $X_1, ..., X_s \in \mathfrak{g}$ tal que*

$$g = \exp(X_1) .... \exp(X_s).$$

Demonstração: Ver Corolário 5.13 em [13]. ■

2.4 Homomorfimos

Sejam G e H grupos de Lie. Um homomorfismo $\phi : G \to H$ diferenciável entre G e H é chamado de **homomorfismo de grupos de Lie**. A mesma terminologia se aplica a isomorfismos e automorfismos de grupos de Lie.

A condição de ser diferenciável faz parte da definição de homomorfismo de grupos de Lie. Para verificar se um homomorfismo $\phi : G \to H$ entre grupos de Lie é diferenciável, basta verificar a diferenciabilidade em em único ponto. De fato, para todo $g \in G$, valem as igualdades

$$\phi \circ R_g = R_{\phi(g)} \circ \phi \qquad \text{e} \qquad \phi \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi$$

Da primeira delas, obtem se $\phi = R_{\phi(g)} \circ \phi \circ R_{g^{-1}}$. Aplicando a regra da cadeia, obtem se $d\phi_g = d\left(R_{\phi(g)}\right)_1 \circ d\phi_1 \circ d\left(R_{g^{-1}}\right)_g$. Como as translações à direita R_x são diferenciáveis em todo ponto de G, para todos os $x \in G$, vê-se que, se ϕ é diferenciável no elemento neutro 1, então ϕ também é diferenciável em $g \in G$.

Os homomorfismos entre grupos de Lie dão origem a homomorfismos entre suas álgebras de Lie.

Um homomorfismo entre as álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ é uma aplicação linear $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ que satisfaz $\theta\,[X,Y] = [\theta X, \theta Y]\,, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$. A relação entre os homomorfismos de grupos e de álgebras de Lie é fornecida pela diferencial no elemento neutro. A prova dessa relação usa fórmulas envolvendo homomorfismos de grupos e exponenciais.

Lema 2.4.1. *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo diferenciável (ou seja, um homomorfismo de grupos de Lie), e $X \in \mathfrak{g}$. Então, para todo $g \in G$ vale*

$$d\phi_g\left(X^r(g)\right) = Y^r\left(\phi(g)\right) \qquad e \qquad d\phi_g\left(X^l(g)\right) = Y^l\left(\phi(g)\right)$$

onde $Y = d\phi_1(X)$.

Demonstração: Ver Lema 5.14 em [13]. ■

Dois campos de vetores X e Y são ditos ϕ-relacionados se para todo $x \in G, d\phi_x(X(x)) = Y(\phi(x))$. Nesse caso, as trajetórias de Y são imagens por ϕ das trajetórias de X (veja Apêndice A). O lema anterior garante que os campos invariantes à direita (ou à esquerda) definidos por $X \in T_1G$ e $Y = d\phi_1(X)$ são ϕ-relacionados.

Como as trajetórias dos campos invariantes são dadas pelas respectivas exponenciais, segue do Lema acima a seguinte fórmula fundamental para homomorfismos.

Proposição 2.4.2. *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo diferenciável (ou seja, um homomorfismo de grupos de Lie), e $X \in \mathfrak{g}$. Então,*

$$\phi(\exp(X)) = \exp(d\phi_1(X)).$$

Demonstração: Ver Proposição 5.15 em [13]. ■

Uma outra propriedade dos campos ϕ-relacionados é que seus colchetes de Lie também são ϕ-relacionados (Veja Proposição A.2.2 em Apêndice A). Segue então do Lema 2.4.1 a propriedade de homomorfismos da diferencial $d\phi_1$.

Proposição 2.4.3. *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo diferenciável. Então $d\phi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é homomorfismo, isto é,*

$$d\phi_1[X, Y] = [d\phi_1 X, d\phi_1 Y],$$

com o colchete invariante à direita ou à esquerda.

Demonstração: Ver Proposição 5.16 em [13]. ■

2.4.1 Representações

Um caso particular de homomorfismo entre grupos de Lie é quando o contradomínio é um grupo linear $\mathrm{Gl}(V)$. Nesse caso o homomorfismo é chamado **representação** de G no espaço vetorial V. O espaço V é chamado de **espaço da representação** e $\dim V$ sua dimensão. A seguir, V é um espaço vetorial real. (Veja [13], Cap 4, para mais informações sobre representações de grupos.)

Seja ρ uma representação de dimensão finita (diferenciável) de G em V. A Álgebra de Lie do grupo $\mathrm{Gl}(V)$ é denotada por $\mathfrak{gl}(V)$, ela coincide com o espaço vetorial das transformações lineares $V \to V$ com o colchete dado pelo comutador. A diferencial de ρ na identidade $d\rho_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie e como tal uma representação em V da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Essa representação é denominada **representação infinitesimal** associada a ρ. É comum denotar a representação infinitesimal com a mesma notação (isto é, $\rho = d\rho_1$). A formula que relaciona as duas representações é dada pela Proposição 2.4.2 :

$$\rho(\exp X) = \exp(d\rho_1(X)).$$

A exponencial no segundo membro é a do grupo linear e, portanto, pode ser escrita como uma série de potências.

2.4.2 Representações adjuntas

Existe uma representação natural de um grupo de Lie G na sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Ela é construida da seguinte forma: um elemento $g \in G$ define o automorfismo interno $C_g(x) = gxg^{-1}$. É claro que $C_g(1) = 1$, portanto $d(C_g)_1$ é uma aplicação linear $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Dados $g, h \in G$,

$$C_g \circ C_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = C_{gh}(x),$$

o que implica que $d(C_g)_1 \circ d(C_h)_1 = d(C_{gh})_1$. Daí que a aplicação $g \mapsto d(C_g)_1$ é uma representação de G em $\mathfrak{g}$, isto é, um homomorfismo de G em $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$.

Definição 2.4.4. *A **representação adjunta*** $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$*, de G em sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é definida por*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(g) = d(C_g)_1 &= d(L_g \circ R_{g^{-1}})_1 = d(R_{g^{-1}} \circ L_g)_1 \\ &= (dL_g)_{g^{-1}} \circ (dR_{g^{-1}})_1 = (dR_{g^{-1}})_g \circ (dL_g)_1 .\end{aligned}$$

A representação Ad é diferenciável.

De acordo com a Proposição 2.4.3, para qualquer $g \in G, \mathrm{Ad}(g) = d(C_g)_1$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$. Na verdade, um automorfismo, uma vez que $\mathrm{Ad}(g)^{-1} = \mathrm{Ad}(g^{-1})$. Isso significa que a imagem de Ad está contida no grupo dos automorfismos $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. (Qué um grupo de Lie como é verificado em [13], Cap 6.)

Uma fórmula bastante utilizada em relações envolvendo a representação adjunta é obtida aplicando a Proposição 2.4.2 a $\phi = C_g$. Dessa proposição, obtém-se que $C_g(\exp X) = \exp\left((dC_g)_1(X)\right)$, isto é,

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g) X).$$

Como Ad é uma representação diferenciável, pode-se considerar sua representação infinitesimal, que é uma representação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em si mesma, isto é, um homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(g)$.
Abaixo será estabelcido que essa representação infinitesimal é a representação adjunta de $\mathfrak{g}$, que é definida a seguir.

Definição 2.4.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Sua* ***representação adjunta*** *é a aplicação ad :* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *definida por*

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y].$$

A identidade de Jacobi garante que a aplicação ad é de fato um homomorfismo de álgebras de Lie, onde o colchete em $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é dado pelo comutador.

Definição 2.4.6. *Uma aplicação linear* $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *é denominada* ***derivação*** *se*

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \tag{2.11}$$

A propriedade de Jacobi para colchetes em álgebras de Lie garante que as aplicações $\mathrm{ad}(X), X \in \mathfrak{g}$ são derivações de $\mathfrak{g}$. Elas são denominadas de **derivações internas** de $\mathfrak{g}$.

As representações adjuntas Ad e ad são relacionadas através da exponencial, como vemos na seguinte proposição.

Proposição 2.4.7. *Seja G um grupo de Lie, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com o colchete dado pelos campos invariantes à esquerda. Então,* $d(\mathrm{Ad})_1(X) = \mathrm{ad}_l(X)$ *para todo* $X \in \mathfrak{g}$ *e vale a igualdade*

$$\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp(\mathrm{ad}_l(X)).$$

(O subíndice "l" foi colocado para enfatizar que o colchete é dado pelos campos invariantes à esquerda).

Demonstração: Ver Proposição 5.19 em [13]. ■

A igualdade $[X, Y]_l = -[X, Y]_r$ implica que $\mathrm{ad}_l(X) = -\mathrm{ad}_r(X), X \in \mathfrak{g}$, o que acrescenta um sinal na fórmula da proposição anterior, para o caso dos campos invariantes à direita.

Proposição 2.4.8. *Se na proposição anterior forem tomados campos invariantes à direita então* $d(\mathrm{Ad})_1(X) = -\mathrm{ad}_r(X)$ *para todo* $X \in \mathfrak{g}$ *e*

$$\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp(-\mathrm{ad}_r(X)).$$

Demonstração: Ver Proposição 5.20 em [13]. ■

Outra noção útil no nosso estudo , é o *centro* de um grupo.

Definição 2.4.9. *Seja G um grupo. O centro de G, denotado por $Z(G)$, é o conjunto dos elementos de G que comutam com todos os elementos de G pelo produto em G. Isto é,*

$$Z(G) := \{g \in G; \forall h \in G, gh = hg\}.$$

Definição 2.4.10. *Um conjunto H munido de uma operação binária $*$ é denominado semigrupo se*

1) H é fechado pela operação $*$.

2) A operação $*$ é associativa.

Capítulo 3

Campos de vetores lineares e afins em grupos de Lie

3.1 Definições e propriedades fundamentais

Seja G um grupo de Lie conexo, e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, isto é o conjunto dos campos de vetores invariantes à direita. O conjunto dos campos de vetores analíticos em G é denotado por $V^{\omega}(G)$, e o normalizador de $\mathfrak{g}$ em $V^{\omega}(G)$ é por definição

$$\mathcal{N} = \mathrm{norm}_{V^{\omega}(G)}\mathfrak{g} = \{F \in V^{\omega}(G); \forall Y \in \mathfrak{g} \quad [F, Y] \in \mathfrak{g}\}.$$

Definição 3.1.1. *Um campo de vetores F em G é denominado afim se pertencer a $\mathcal{N}$. Um tal campo de vetores F é denominado linear se, além disso, satisfaz $F(1) = 0$, onde 1 designa a identidade do grupo G.*

Primeiro vamos verificar que $\mathcal{N}$ é uma álgebra de Lie. De fato,

$\forall\ U, V \in \mathcal{N}, \forall\ Y \in \mathfrak{g}, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$[\lambda U + V, Y] = [\lambda U, Y] + [V, Y] = \lambda[U, Y] + [V, Y]$$

onde por definição de $\mathcal{N}$, $[U, Y]$ e $[V, Y]$ pertencem a $\mathfrak{g}$. Portanto, $\mathcal{N}$ é um subespaço vetorial de $V^{\omega}(G)$.

Agora vamos mostrar que $\mathcal{N}$ é fechado pelo colchete de Lie. Sejam $U, V \in \mathcal{N}$, $Y \in \mathfrak{g}$. A identidade de Jacobi nos dá: $[Y, [U, V]] + [U, [V, Y]] + [V, [Y, U]] = 0$. Portanto

$$[[U, V], Y] = [U, [V, Y]] + [V, [Y, U]].$$

onde por definição de $\mathcal{N}$: $Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [V, Y] \in \mathfrak{g} \Rightarrow [U, [V, Y]] \in \mathfrak{g}$. E identicamente $[V, [Y, U]] \in \mathfrak{g}$. Assim $\mathcal{N}$ é fechado pelo colchete de Lie. Portanto $\mathcal{N}$ é uma subálgebra de Lie de $V^{\omega}(G)$.

Seja $F \in \mathcal{N}$. Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(F) : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ Y &\mapsto [F, Y] \end{aligned}$$

$\mathrm{ad}(F)$ é claramente linear, pela bilinearidade do colchete. Além disso, para todos $Y, Z \in \mathfrak{g}$, temos, pela identidade de Jacobi

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(F)([Y, Z]) &= [F, [Y, Z]] = [[F, Y], Z] + [Y, [F, Z]] \\ &= [\mathrm{ad}(F)(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}(F)(Z)] \end{aligned}$$

isto é, $\mathrm{ad}(F)$ satisfaz a igualdade (2.11), chamada identidade de Leibniz. Assim, pela Definição 2.4.6, $\mathrm{ad}(F)$ é uma derivação de $\mathfrak{g}$.

Para terminar essa apresentação do contexto no qual esse trabalho vai ser desenvolvido, vamos mostrar que a aplicação $F \mapsto \mathrm{ad}(F)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie de $\mathcal{N}$ em $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$, o conjunto das derivações de $\mathfrak{g}$.

Pela bilinearidade do colchete de Lie, a aplicação ad é claramente linear. Além disso, vamos mostrar que ela preserva os colchetes de Lie, sendo aquele em $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ o comutador. De fato, para todos $U, V \in \mathcal{N}$ e todo $Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}([U, V])(Y) &= [[U, V], Y] = -[Y, [U, V]] = [U, [V, Y]] - [V, [U, Y]] \\ &= \mathrm{ad}(U)(\mathrm{ad}(V)(Y)) - \mathrm{ad}(V)(\mathrm{ad}(U)(Y)) \\ &= (\mathrm{ad}(U) \circ \mathrm{ad}(V) - \mathrm{ad}(V) \circ \mathrm{ad}(U))(Y) \\ &= [\mathrm{ad}(U), \mathrm{ad}(V)](Y) \end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{ad}([U, V]) = [\mathrm{ad}(U), \mathrm{ad}(V)]$. Portanto a aplicação ad é um homomorfismo de álgebras de Lie de $\mathcal{N}$ em $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$.

Proposição 3.1.2. *Seja G um grupo de Lie conexo. Então*

1) O núcleo da aplicação $\mathrm{ad} : \mathcal{N} \to \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ *é o conjunto dos campos de vetores invariantes à esquerda, isto é,* $\ker(\mathrm{ad}) = \mathrm{inv}^l$.

2) Um campo de vetores afim F pode ser expresso de maneira única como uma soma

$$F = \mathcal{X} + Z$$

onde $\mathcal{X}$ é linear, e Z invariante à esquerda.

Essa proposição não vale mais caso o grupo G não seja conexo.

Demonstração: 1) Seja $Z \in \ker(\mathrm{ad})$, isto é $Z \in \mathcal{N}$ tal que, $\forall\ Y \in \mathfrak{g}, [Z,Y] = 0$. Então, pela Proposição A.2.3, os fluxos z_t de Z e y_s de Y comutam. Isso se escreve

$$\forall\ x \in G, \qquad z_t(y_s(x)) = y_s(z_t(x))$$

para todos t, s para os quais isso faz sentido.

Como $Y \in \mathrm{inv}^r$, pela Proposição 2.3.4 e a igualdade (2.9), temos que $y_s(x) = y_s(1)x = \exp(sY)x$.

Além disso, como G é conexo, pelo Corolário 2.3.7, existem $k \in \mathbb{N}$, e $Y^1, ..., Y^k \in \mathfrak{g}$ tais que

$$x = \exp(Y^1)\ ...\exp(Y^k).$$

Portanto,

$$z_t(x) = z_t(\exp(Y^1)\ ...\exp(Y^k))$$

Usando o fato que todos os $Y^j, j = 1, ..., k$, são invariantes à direita, temos pela Definição 2.3.3 que $\forall\ j = 1, ...k,\ \exp(Y^j) = (y^j)_1(1)$, onde $(y^j)_t$ designa o fluxo do campo Y^j. Portanto

$$\begin{aligned} z_t(x) &= z_t\left((y^1)_1(1).(y^2)_1(1).\ ...\ .(y^k)_1(1)\right) \\ &= z_t\left((y^1)_1\left((y^2)_1(1).\ ...\ .(y^k)_1(1)\right)\right) \end{aligned}$$

Já que os fluxos de Z e dos Y^j comutam para todo $j = 1, ..., k$, obtemos

$$z_t(x) = (y^1)_1\left(z_t\left((y^2)_1(1).\ ...\ .(y^k)_1(1)\right)\right)$$

Continuando comutando (z_t) com os $(y^j)_1$ até $j = k$, obtemos

$$z_t(x) = (y^1)_1\left((y^2)_1\left((y^3)_1\left(\ \ ...\ \ \left((y^{k-1})_1\left((y^k)_1(z_t(1))\right)\ ...\ \right)\right)\right)\right)$$

Agora, aplicando de novo a igualdade (2.6), vamos poder escrever de novo essa expressão como um produto. De fato

$$
\begin{aligned}
z_t(x) &= (y^1)_1\left((y^2)_1\left((y^3)_1\left(\ \dots\ \left((y^{k-1})_1\left((y^k)_1(z_t(1))\right)\ \dots\ \right)\right)\right)\right)\\
&= (y^1)_1\left((y^2)_1\left((y^3)_1\left(\ \dots\ \left((y^{k-1})_1\left((y^k)_1(1).z_t(1)\right)\ \dots\ \right)\right)\right)\right)\\
&= (y^1)_1\left((y^2)_1\left((y^3)_1\left(\ \dots\ \left((y^{k-1})_1(1).(y^k)_1(1).z_t(1)\right)\ \dots\ \right)\right)\right)\\
&= \quad \dots\dots\\
&= (y^1)_1(1)\ .\ (y^2)_1(1)\ .\ \dots\ .\ (y^{k-1})_1(1)\ .\ (y^k)_1(1)\ .\ z_t(1)\\
&= \exp(Y^1).\exp(Y^2).\ \dots\ .\exp(Y^k).z_t(1)\\
&= x.z_t(1)
\end{aligned}
$$

Assim, para todo $x \in g$, temos $z_t(x) = x.z_t(1)$, para todo t suficientemente pequeno. Além disso,

$$
\begin{aligned}
Z_x &= \frac{d}{dt}_{|t=0} z_t(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} x.z_t(1)\\
&= \frac{d}{dt}_{|t=0} (L_x \circ z_t(1))\\
&= d\left(L_x\right)_{z_0(1)} \left(\frac{d}{dt}_{|t=0} z_t(1)\right)\\
&= d\left(L_x\right)_1 Z(z_0(1))\\
&= d\left(L_x\right)_1 Z_1
\end{aligned}
$$

O que mostra, pela igualdade (2.2), que Z é invariante à esquerda. E assim concluimos que $\ker(\mathrm{ad}) \subset \mathrm{inv}^l$.

Reciprocamente, sejam $Z \in \mathrm{inv}^l, Y \in \mathfrak{g}$. Vamos mostar que $[Z, Y] = 0$.

Pela Proposição A.2.3, sabemos que dois campos de vetores comutam se e somente seus fluxos comutam.

Aqui, para todo $g \in G$, e todos t, s onde fizer sentido, aplicando a igualdade (2.6) a $Y \in \mathfrak{g} = \mathrm{inv}^r$, e a igualdade (2.8) a $Z \in \mathrm{inv}^l$, obtemos

$$
\begin{aligned}
y_s \circ z_t(g) &= y_s(g.z_t(1)) = y_s(1).g.z_t(1)\\
&= y_s(g).z_t(1) = z_t(y_s(g))\\
&= z_t \circ y_s(g)
\end{aligned}
$$

Assim os fluxos de Z et de Y comutam, portanto os campos comutam, isto é $[Z, Y] = 0$.

Ou seja : $\forall\ Z \in \mathrm{inv}^l,\ \mathrm{ad}(Z) = 0$, isto é: $\mathrm{inv}^l \subset \ker(\mathrm{ad})$.

2) Seja $F \in \mathcal{N}$. Considere $Z \in \mathrm{inv}^l$ tal que $Z_1 = F_1$, e $\mathcal{X} := F - Z$. Então

i) $\mathcal{X}_1 = F_1 - Z_1 = 0$

ii) $\forall\ Y \in \mathfrak{g}, [\mathcal{X}, Y] = [F - Z, Y] = \underbrace{[F, Y]}_{\in\ \mathfrak{g}} - \underbrace{[Z, Y]}_{=0} \in \mathfrak{g} \Rightarrow \mathcal{X} \in \mathcal{N}$

Portanto, $\mathcal{X}$ é linear, e temos $F = \mathcal{X} + Z$. Assim, temos

$$\mathcal{N} \subset \{\text{vetores lineares}\} + \mathrm{inv}^l.$$

Reciprocamente, é claro que $\{\text{vetores lineares}\} \subset \mathcal{N}$, e que $\mathrm{inv}^l \subset \mathcal{N}$. Portanto,

$$\mathcal{N} = \{\text{vetores lineares}\} + \mathrm{inv}^l.$$

Por outro lado, seja $V \in \{\text{vetores lineares}\} \cap \mathrm{inv}^l$. Então $V_1 = 0$, e $\forall\ x \in G, V_x = d\left(L_x\right)_1 V_1 = 0$. Portanto $V = 0$. Assim, $\{\text{vetores lineares}\} \cap \mathrm{inv}^l = 0$, e portanto

$$\mathcal{N} = \{\text{vetores lineares}\} \oplus \mathrm{inv}^l.$$

Ou seja, todo vetor afim F pode ser escrito de maneira única como uma soma $F = \mathcal{X} + Z$, onde $\mathcal{X}$ é linear, e $Z \in \mathrm{inv}^l$. ■

3.2 Caracterização dos campos lineares

Teorema 3.2.1. *Seja $\mathcal{X}$ um campo de vetores em um grupo de Lie G conexo. As condições seguintes são equivalentes :*

1) $\mathcal{X}$ é linear;

2) O fluxo de $\mathcal{X}$ é um grupo a 1-parâmetro de automorfismos de G;

3) $\mathcal{X}$ satisfaz

$$\forall\ x, y \in G, \qquad \mathcal{X}_{xy} = d(L_x)_y.\mathcal{X}_y + d(R_y)_x.\mathcal{X}_x \tag{3.1}$$

Demonstração:

1) $\Longrightarrow$ 3):
O campo $\mathcal{X}$ é linear $\Longrightarrow \forall\ Y \in \mathfrak{g}, [\mathcal{X}, Y] \in \mathfrak{g} = \mathrm{inv}^r$. Portanto,

$$\forall x \in G, \quad [\mathcal{X}, Y] = R_{x*}[\mathcal{X}, Y] = [R_{x*}\mathcal{X}, \underbrace{R_{x*}Y}_{=Y}] = [R_{x*}\mathcal{X}, Y].$$

Isso mostra que, primeiramente, $\forall\ Y \in \mathfrak{g}, [R_{x*}\mathcal{X}, Y] \in \mathfrak{g}$, ou seja, $R_{x*}\mathcal{X} \in \mathcal{N}$, e segundo que $\mathrm{ad}(R_{x*}\mathcal{X}) = \mathrm{ad}(\mathcal{X})$, ou seja $R_{x*}\mathcal{X} - \mathcal{X} \in \ker(\mathrm{ad}) = \mathrm{inv}^l$. Portanto existe $Z \in \mathrm{inv}^l$ tal que

$$R_{x*}\mathcal{X} = \mathcal{X} + Z \tag{3.2}$$

onde $Z_1 = (R_{x*}\mathcal{X})_1 - \underbrace{\mathcal{X}_1}_{=0} = (R_{x*}\mathcal{X})_1$.

onde, aplicando a igualdade (A.4), temos

$$\begin{aligned}(R_{x*}\mathcal{X})_1 &= d(R_x)_{R_{x^{-1}}(1)}\left(\mathcal{X}(R_{x^{-1}}(1))\right)\\ &= d(R_x)_{x^{-1}}\mathcal{X}(x^{-1})\end{aligned}$$

Assim, como $Z \in \mathrm{inv}^l$, temos para todo $y \in G$

$$\begin{aligned}Z_y &= d(L_y)_1 Z_1 = d(L_y)_1 d(R_x)_{x^{-1}}\mathcal{X}(x^{-1})\\ &= d(L_y \circ R_x)_{x^{-1}}\mathcal{X}(x^{-1}) = d(R_x \circ L_y)_{x^{-1}}\mathcal{X}(x^{-1})\\ &= d(R_x)_{yx^{-1}} d(L_y)_{x^{-1}}\mathcal{X}(x^{-1})\end{aligned}$$

A igualdade (3.2) avaliada no ponto y se torna

$$(R_{x*}\mathcal{X})_y = \mathcal{X}_y + Z_y$$

e, considerando que pela igualdade (A.4), $(R_{x*}\mathcal{X})_y = d(R_x)_{yx^{-1}}\mathcal{X}_{yx^{-1}}$, temos :

$$d(R_x)_{yx^{-1}}\mathcal{X}_{yx^{-1}} = \mathcal{X}_y + d(R_x)_{yx^{-1}} d(L_y)_{x^{-1}}\mathcal{X}_{x^{-1}}$$

Agora basta aplicar $\left(d(R_x)_{yx^{-1}}\right)^{-1}$ que vale $d(R_{x^{-1}})_y$ aos dois membros para obter

$$\mathcal{X}_{yx^{-1}} = d(R_{x^{-1}})_y\mathcal{X}_y + d(L_y)_{x^{-1}}\mathcal{X}_{x^{-1}}$$

e trocar x^{-1} por x para obter

$$\mathcal{X}_{yx} = d(R_x)_y\mathcal{X}_y + d(L_y)_x\mathcal{X}_x$$

e, trocando x e y :

$$\mathcal{X}_{xy} = d(L_x)_y\mathcal{X}_y + d(R_y)_x\mathcal{X}_x$$

3) $\Longrightarrow$ 2):

Denote por φ_t o fluxo de $\mathcal{X}$, definido em um domínio de $\mathbb{R} \times G$. Então, para todos $x, y \in G$

- a curva $t \mapsto \varphi_t(x)$ é definida em um intervalo aberto $(a, b) \ni 0$.

- a curva $t \mapsto \varphi_t(y)$ é definida em um intervalo aberto $(c,d) \ni 0$.

portanto a curva $t \mapsto \varphi_t(x)\varphi_t(y)$ é definida no intervalo aberto $(a,b) \cap (c,d)$ que contém 0, e toma o valor xy em $t=0$.

Além disso, para todo t suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi_t(x)\varphi_t(y)) &= d(L_{\varphi_t(x)})_{\varphi_t(y)}\frac{d}{dt}\varphi_t(y) + d(R_{\varphi_t(y)})_{\varphi_t(x)}\frac{d}{dt}\varphi_t(x)\\ &= d(L_{\varphi_t(x)})_{\varphi_t(y)}\mathcal{X}_{\varphi_t(y)} + d(R_{\varphi_t(y)})_{\varphi_t(x)}\mathcal{X}_{\varphi_t(x)}\end{aligned}$$

e aplicando a igualdade (3.1) ao membro de direita, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t(x)\varphi_t(y)) = \mathcal{X}_{\varphi_t(x)\varphi_t(y)}$$

Assim vemos que $\varphi_t(x)\varphi_t(y)$ e $\varphi_t(xy)$ satisfazem a mesma equação diferencial. Além disso, temos

$$\varphi_0(x)\varphi_0(y) = xy = \varphi_0(xy).$$

Portanto, pela unicidade da solução da equação diferencial para uma dada condição inicial, temos que $\varphi_t(x)\varphi_t(y) = \varphi_t(xy)$, desde que o lado esquerdo existe (isto é, no intervalo $(a,b) \cap (c,d)$ definido acima).

Resta provar que o campo $\mathcal{X}$ é completo.

Avaliando a igualdade (3.1) em $x = y = 1$, temos

$$\underbrace{d(L_1)_1}_{=id}\mathcal{X}_1 + \underbrace{d(R_1)_1}_{=id}\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1,$$

o que implica $\mathcal{X}_1 = 0$.

Sejam $x \in G$ e $t \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{X}_1 = 0 \Longrightarrow \forall\ t \in \mathbb{R},\quad \varphi_t(1) = 1$. Assim φ_t é definido em 1 para todo $t \in \mathbb{R}$, portanto em uma vizinhança V_t de 1.

Por outro lado, como G é conexo, então pela Proposição 2.16 em [13], ele é gerado por V_t, isto é $G = \bigcup_{k\geq 0} V_t^k$. Portanto, exitem $n \in \mathbb{N}$ e $x_1,\ ..., x_n \in V_t$ tais que $x = x_1x_2\ \ ...\ x_n$, e

$$\begin{aligned}\varphi_t(x) &= \varphi_t(x_1x_2\ ...x_n)\\ &= \varphi_t(x_1)\ ...\ \varphi_t(x_n)\end{aligned}$$

onde $\forall i = 1, \ \ldots, n, \ \varphi_t(x_i)$ é bem definido. Portanto $\varphi_t(x)$ é bem definido para todos $x \in G, t \in \mathbb{R}$. Isso prova que $\mathcal{X}$ é completo, e que φ_t é um automorfismo de G para todo $t \in \mathbb{R}$.

2) $\Longrightarrow$ 1):

Seja $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}\}$ um grupo a 1-parâmetro de automorfismos de G, $\mathcal{X}$ seu gerador infinitesimal (Ver Apêndice A), e Y um campo de vetores invariante à direita.

Pela expressão do colchete de Lie dada pela igualdade (A.5), temos:

$$[\mathcal{X}, Y]_1 = \frac{d}{dt}\Big(d(\varphi_{-t})_{\varphi_t(1)}\left(Y_{\varphi_t(1)}\right)\Big)_{|t=0}$$

onde para todo $t \in \mathbb{R}$: φ_t automorphismo de $G \Rightarrow \varphi_t(1) = \varphi_t(1 \cdot 1) = \varphi_t(1)\varphi_t(1) \Rightarrow \varphi_t(1) = 1$. Assim

$$[\mathcal{X}, Y]_1 = \frac{d}{dt}\Big(d(\varphi_{-t})_1\left(Y_1\right)\Big)_{|t=0} \tag{3.3}$$

Considerando, para todo $y \in G$

$$\begin{aligned}\varphi_{-t} \circ R_{\varphi_t(x)}(y) &= \varphi_{-t}(y\varphi_t(x)) = \varphi_{-t}(y)\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) \\ &= \varphi_{-t}(y)x = R_x \circ \varphi_{-t}(y)\end{aligned}$$

obtemos

$$\varphi_{-t} \circ R_{\varphi_t(x)} = R_x \circ \varphi_{-t}$$

Assim, para todo $x \in G$:

$$\begin{aligned}[\mathcal{X}, Y]_x &= \frac{d}{dt}\Big(d(\varphi_{-t})_{\varphi_t(x)}\left(Y_{\varphi_t(x)}\right)\Big)_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(d(\varphi_{-t})_{\varphi_t(x)}\ d\left(R_{\varphi_t(x)}\right)_1 Y_1\Big)_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(d\left(\varphi_{-t} \circ R_{\varphi_t(x)}\right)_1 Y_1\Big)_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(d\left(R_x \circ \varphi_{-t}\right)_1 Y_1\Big)_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(d\left(R_x\right)_{\varphi_{-t}(1)} \circ d(\varphi_{-t})_1 Y_1\Big)_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(d\left(R_x\right)_1 \circ d(\varphi_{-t})_1 Y_1\Big)_{|t=0}\end{aligned}$$

Onde pela linearidade da diferencial $d\left(R_x\right)_1$, podemos escrever ela fora da derivada com relação a t. Assim :

$$[\mathcal{X}, Y]_x = d\left(R_x\right)_1\Big(\frac{d}{dt}\left(d(\varphi_{-t})_1 Y_1\right)\Big)_{|t=0}$$

e pela igualdade (3.3),

$$[\mathcal{X}, Y]_x = d\,(R_x)_1\,[\mathcal{X}, Y]_1$$

o que prova que $\forall\ Y \in \mathfrak{g}, [\mathcal{X}, Y] \in \mathrm{inv}^r = \mathfrak{g}$, isto é, que $\mathcal{X}$ é afim (ou seja $\mathcal{X} \in \mathcal{N}$).

Além disso, como para todo $t \in \mathbb{R}$, temos $\varphi_t(1) = 1$, então

$$\mathcal{X}_1 = \frac{d}{dt}(\varphi_t(1))_{|t=0} = \frac{d}{dt}(1)_{|t=0} = 0.$$

Assim, temos $\mathcal{X} \in \mathcal{N}$ e $\mathcal{X}_1 = 0$, portanto $\mathcal{X}$ é linear.

■

3.3 Campos lineares internos

Relembramos aqui o Teorema 3.2.1 que estabelece uma equivalência entre critérios para definir um campo de vetores linear:

Seja $\mathcal{X}$ um campo de vetores em um grupo de Lie G conexo. As condições seguintes são equivalentes :

1) $\mathcal{X}$ é linear;

2) O fluxo de $\mathcal{X}$ é um grupo a 1-parâmetro de automorfismos de G;

3) $\mathcal{X}$ satisfaz

$$\forall\ x, y \in G, \qquad \mathcal{X}_{xy} = d(L_x)_y.\mathcal{X}_y + d(R_y)_x.\mathcal{X}_x$$

Pelo primeiro item, a derivação $D = \mathrm{ad}(\mathcal{X})$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G é associada ao campo de vetores linear $\mathcal{X}$.

Definição 3.3.1. *Uma derivação D é denominada interna se existir um $X \in \mathfrak{g}$ tal que $D = \mathrm{ad}(X)$.*

Vamos agora ver uma propriedade dos campos cuja derivação associada é interna, que será útil no próximo capítulo, que trata da controlabilidade de sistemas lineares e afins.

Proposição 3.3.2. *Seja $\mathcal{X}$ um campo de vetores linear. Suponha que a derivação $D = \mathrm{ad}(\mathcal{X})$ é interna, isto é, $D = \mathrm{ad}(X)$ para algum campo de vetores X invariante à direita. Então*

1)

$$\mathcal{X} = X + \mathcal{I}_* X. \tag{3.4}$$

onde $\mathcal{I}$ designa o difeomorfismo $g \in G \mapsto \mathcal{I}(g) = g^{-1}$. Portanto, $\mathcal{X}$ é a soma do campo de vetores X invariante à direita e do campo $\mathcal{I}_*X$ invariante à esquerda.

2) Denotando por $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ o fluxo do campo linear $\mathcal{X}$, temos, para todo $g \in G$

$$\varphi_t(g) = exp(tX)\ g\ exp(-tX) \tag{3.5}$$

Demonstração:

1) Primeiro vamos provar que $\mathcal{I}_*X$ é invariante à esquerda. Observamos que o difeomorfismo $\mathcal{I}$ é sua propria aplicação inversa. A igualdade A.4 na Proposição A.1.3 dá, para todo $x \in G$

$$(\mathcal{I}_*X)(x) = d\mathcal{I}_{\mathcal{I}^{-1}(x)}(X(\mathcal{I}^{-1}(x))) = d\mathcal{I}_{x^{-1}}X(x^{-1}) \tag{3.6}$$

Assim, para todo $y \in G$ temos

$$\begin{aligned} d(L_y)_x((\mathcal{I}_*X)(x)) &= d(L_y)_x(d\mathcal{I}_{x^{-1}}X(x^{-1})) = d(L_y)_{\mathcal{I}(x^{-1})} \circ d\mathcal{I}_{x^{-1}}(X(x^{-1})) \\ &= d(L_y \circ \mathcal{I})_{x^{-1}}X(x^{-1}) = d(\mathcal{I} \circ R_{y^{-1}})_{x^{-1}}X(x^{-1}) \\ &= d\mathcal{I}_{x^{-1}y^{-1}} \circ d(R_{y^{-1}})_{x^{-1}}X(x^{-1}) \end{aligned}$$

Onde $d(R_{y^{-1}})_{x^{-1}}X(x^{-1}) = X(x^{-1}y^{-1}) = X((yx)^{-1})$, já que X é invariante à direita. Assim

$$\begin{aligned} d(L_y)_x((\mathcal{I}_*X)(x)) &= d\mathcal{I}_{(yx)^{-1}}X((yx)^{-1}) \\ &= (\mathcal{I}_*X)(yx), \forall x, y \in G. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{I}_*X$ é invariante à esquerda.

Por outro lado temos

$$(\mathcal{I}_*X)_1 = d\mathcal{I}_{\mathcal{I}^{-1}(1)}(X(\mathcal{I}^{-1}(1))) = d\mathcal{I}_1 X(1)$$

onde $d\mathcal{I}_1 = -\mathrm{id}$. Assim temos

$$(\mathcal{I}_*X)_1 = -X_1.$$

Agora vamos provar a igualdade $\mathcal{X} = X + \mathcal{I}_*X$:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(\mathcal{X}) = \mathrm{ad}(X) &\Longleftrightarrow \forall\ Y \in \mathfrak{g}, \mathrm{ad}(\mathcal{X})Y = \mathrm{ad}(X)Y \\ &\Longleftrightarrow \forall\ Y \in \mathfrak{g}, [\mathcal{X}, Y] = [X, Y] \\ &\Longleftrightarrow \forall\ Y \in \mathfrak{g}, [\mathcal{X} - X, Y] = 0 \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{X} - X \in \ker(\mathrm{ad}) \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1.2, temos que $\ker(\mathrm{ad}) = \mathrm{inv}^l$, portanto $\exists\ Z \in \mathrm{inv}^l$ tal que $\mathcal{X} - X = Z$. Assim, $\mathcal{X} = X + Z$ onde $X \in \mathrm{inv}^r$ e $Z \in \mathrm{inv}^l$. Como $\mathcal{X}_1 = 0$, temos $Z_1 = -X_1$.

Portanto, ambos Z e $\mathcal{I}_* X$ são campos invariantes à esquerda, que são iguais na unidade 1 de G. E sabemos que a igualdade (2.2) tem como consequência que todo elemento de T_1G determina um único campo invariante à esquerda. Portanto, $Z = \mathcal{I}_* X$, e finalmente $\mathcal{X} = X + \mathcal{I}_* X$

2) Para simplificar as notações, denotemos $Z := \mathcal{I}_* X$. Sabemos pelo item anterior que Z é invariante à esquerda, e que $Z_1 = -X_1$. Além disso, $(-X)$ é um campo invariante à direita como X. Portanto, aplicando a Proposição 2.3.2 juntamente com a Definição 2.3.3, temos para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(-tX) = (-X)_t(1) = Z_t(1) = \exp(tZ)$$

Então temos :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\exp(tX)g\exp(-tX)) &= d(L_{\exp(tX)g})_{\exp(-tX)}\ \frac{d}{dt}(\exp(-tX)) \\
&\qquad + d(R_{\exp(-tX)})_{\exp(tX)g}\ \frac{d}{dt}(\exp(tX)g) \\
&= d(L_{\exp(tX)g})_{\exp(-tX)}\ \frac{d}{dt}(Z_t(1)) \\
&\qquad + d(R_{\exp(-tX)})_{\exp(tX)g}\frac{d}{dt}(X_t(1)g) \\
&= d(L_{\exp(tX)g})_{\exp(-tX)}\ Z(Z_t(1)) \\
&\qquad + d(R_{\exp(-tX)})_{\exp(tX)g}\frac{d}{dt}(X_t(g)) \\
&= d(L_{\exp(tX)g})_{\exp(-tX)}\ Z(Z_t(1)) \\
&\qquad + d(R_{\exp(-tX)})_{\exp(tX)g}\ X(X_t(g)) \\
&= d(L_{\exp(tX)g})_{\exp(-tX)}\ Z(\exp(-tX)) \\
&\qquad + d(R_{\exp(-tX)})_{\exp(tX)g}\ X(\exp(tX)g)
\end{aligned}$$

Como X é invariante à direita e Z é invariante à esquerda, aplicando a igualdade do item 2) da Definição (2.2.6) (resp. o item 1)) ao primeiro (resp. segundo) termo dessa soma, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\exp(tX)g\exp(-tX)\right) &= Z(\exp(tX)\ g\ \exp(-tX)) \\ &\qquad + X(\exp(tX)\ g\ \exp(-tX)) \\ &= (X+Z)(\exp(tX)\ g\ \exp(-tX)) \\ &= \mathcal{X}(\exp(tX)\ g\ \exp(-tX)).\end{aligned}$$

Portanto, $t \mapsto \exp(tX)\ g\ \exp(-tX)$ é uma trajetória de $\mathcal{X}$.

Além disso, $(\exp(tX)\ g\ \exp(-tX))_{|t=0} = g = \varphi_0(g)$.
Portanto, $\varphi_t(g) = \exp(tX)\ g\ \exp(-tX))$, $\forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in G$. ■

Capítulo 4

Controlabilidade de sistemas lineares e afins em grupos de Lie

4.1 Sistemas de controle lineares e afins

Definição 4.1.1. *Um sistema afim em um grupo de Lie conexo é um sistema de controle*

$$\dot{g} = \mathcal{F}_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_g^j, \qquad (\Sigma_A)$$

onde $\mathcal{F}$ é um campo de vetores afim chamado de drift, e os Y^j são campos de vetores invariantes à direita. O controle $u = (u_1, ..., u_m)$ toma seus valores em $\mathbb{R}^m$.
No caso particular em que o campo $\mathcal{F}$ é linear, ele é denotado por $\mathcal{X}$, e temos o sistema, denominado sistema linear

$$\dot{g} = \mathcal{X}_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_g^j, \qquad (\Sigma_L)$$

E no caso particular em que o campo $\mathcal{F}$ é invariante à direita, ele é denotado por X, e temos o sistema, denominado sistema invariante (à direita)

$$\dot{g} = X_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_g^j, \qquad (\Sigma_I)$$

O conjunto $\mathbf{U}$ dos controles admissíveis é um subconjunto de $L^{\infty}_{\text{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^m)$, que contém as funções constantes por parte e é estável por concatenação, isto é, se ω e ν pertencem a $\mathbf{U}$, então a função w definida por

$$w(t) = \begin{cases} \omega(t), & t \in [0, T) \\ \nu(t - T), & t \in [T, +\infty) \end{cases}$$

pertence também a $\mathbf{U}$.

As definições até o final desta subseção são dadas para um sistema de controle afim (Σ_A).

Definição 4.1.2. *Dado um tal controle, $g_u(t)$ (ou mais simplesmente $g(t)$) designa a trajetória de (Σ_A) que satisfaz $g_u(0) = g$.*

Seja $\mathfrak{h}$ a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por $\{Y^1, ..., Y^m\}$. Em tudo o que segue, denotaremos por $\mathfrak{h}^D$ o menor subespaço D-invariante de $\mathfrak{g}$ que contém $\mathfrak{h}$, onde D é a derivação associada a $\mathcal{F}$. Temos

$$\mathfrak{h}^D = \text{ger}\{D^k Y; Y \in \mathfrak{h},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

onde a notação ger designa o espaço vetorial gerado pelo conjunto definido entre chaves. E denotaremos por $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por $\mathfrak{h}^D$.

Definição 4.1.3. *Seja*

$$\dot{g} = \mathcal{F}_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_g^j, \qquad (\Sigma_A)$$

um sistema de controle afim de classe $\mathcal{C}^\infty$ em um grupo de Lie conexo. Seja $\mathcal{L}$ a álgebra de Lie de campos de vetores $\mathcal{C}^\infty$ gerada por $\mathcal{F}, Y_1,\ ...\ , Y_m$.
O ideal de tempo zero $\mathcal{L}_0$ do sistema é o menor ideal de $\mathcal{L}$ que contém $Y_1,\ ...\ , Y_m$. Ele satisfaz a igualdade

$$\mathcal{L} = \mathbb{R}\mathcal{F} + \mathcal{L}_0$$

Agora vamos definir duas condições de posto, fundamentais para o estudo da controlabilidade de sistemas de controle.

Definição 4.1.4. *Dizemos que o sistema (Σ_A) satisfaz a condição do posto se $\mathcal{L} = \mathfrak{g}$.*

Definição 4.1.5. *Dizemos que o sistema (Σ_A) satisfaz a condição ad-rank se $\mathfrak{h}^D = \mathfrak{g}$.*

Vamos considerar vários tipos de conjuntos de atingibilidade de um sistema afim, que definiremos aqui.

Definição 4.1.6. *Sejam $g \in G, t \geq 0$.*

1) O conjunto $\mathcal{A}(g,t) := \{g_u(t); u \in L^\infty[0,t]\}$ é chamado de conjunto de atingibilidade a partir de g no tempo t do sistema de controle afim (Σ_A).

2) O conjunto $\mathcal{A}(g, \leq t) := \{g_u(s); u \in L^\infty[0,s], 0 \leq s \leq t\}$ é chamado de conjunto de atingibilidade a partir de g em tempo menor ou igual a t de (Σ_A).

3) O conjunto $\mathcal{A}(g) := \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{A}(g,t)$ é chamado de conjunto de atingibilidade a partir de g em tempo qualquer de (Σ_A).

Em particular, os conjuntos de atingibilidade a partir da identidade 1 são denotados por

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}(1,t), \qquad \mathcal{A}_{\leq t} = \mathcal{A}(1, \leq t), \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}(1).$$

Finalmente, relembramos aqui definições com respeito a vários tipos de controlabilidade, que podem ser encontradas em [5], e que vamos usar no que segue.

Definição 4.1.7. *Um sistema de controle afim (Σ_A) em um grupo de Lie G é denominado*

1) controlável se, $\forall\ g \in G, \mathcal{A}(g) := \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{A}(g,t) = G$.

2) controlável em tempo finito se $\exists T \geq 0$ tal que $\forall\ g \in G, \mathcal{A}(g, \leq T) = G$.

3) controlável em tempo exato se $\exists T \geq 0$ tal que $\forall\ g \in G, \mathcal{A}(g,T) = G$.

No caso 2) de um sistema controlável em tempo finito, dizemos também, considerando o tempo T da definição acima, que (Σ_A) *é controlável em tempo menor ou igual a T*.
E no caso 3) de um sistema controlável em tempo exato, dizemos também, considerando o tempo T da definição acima, que (Σ) *é controlável em tempo T*.

4.2 Controlabilidade e condição do posto

A proposição seguinte estabelece o fato que a controlabilidade a partir de um dado ponto, de um sistema de controle afim, em um grupo de Lie conexo, implica na condição do posto em todo ponto.

Proposição 4.2.1. *Sejam G um grupo de Lie conexo, (Σ_A) um sistema de controle afim em G, e $g \in G$ um ponto dado. Se o sistema (Σ_A) é controlável a partir de g, então ele satisfaz a condição do posto em todo ponto de G.*

A demonstração dessa proposição, que está baseada em resultados de [18], foge do escopo desta dissertação, mas vamos mencionar seu argumento abaixo:

Em [18], no contexto de variedades diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^\infty$ e paracompactas, o teorema principal diz que a órbita de um dado ponto por uma dada família de campos de vetores diferenciaveis é uma subvariedade diferenciavel imersa, que é a subvariedade integral da álgebra de Lie gerada pela dada família. Mas a órbita de um dado ponto pela família dos campos de vetores de um dado sistema de controle é exatamente o conjunto de acessibilidade a partir desse dado ponto. Portanto, o conjunto de acessibilidade a partir desse dado ponto é a subvariedade integral da álgebra de Lie gerada pela família dos campos de vetores do sistema de controle. Se não vale a condição do posto num dado ponto, então a subvariedade integral não é a variedade toda, de modo que o conjunto de acessibilidade a partir desse dado ponto não é a variedade toda, e portanto o sistema não é controlável a partir desse dado ponto. Então controlabilidade a partir de um dado ponto implica na condição do posto para todos os pontos.

A recíproca não é verdade : no Cap 5, o sistema (L_1) satisfaz a condição do posto em todos os pontos, mas não é controlável.

4.3 Sistemas de controle lineares

Nesta seção, vamos usar as propriedades de um campo linear vistas acima, para estabelecer propriedades específicas dos conjuntos de atingibilidade, e da álgebra de Lie, do sistema linear associado.

4.3.1 Conjuntos de atingibilidade

Primeiro vamos estabelecer um resultado que será útil para provar relações entre conjuntos de atingibilidade, como será feito na Proposição 4.3.3.

Proposição 4.3.1. *Para um controle u dado, denote $e(t)$ a trajetória de (Σ_L) partindo da unidade 1. Para a condição inicial g, a trajetória é*

$$g_u(t) = e(t)\varphi_t(g)$$

onde φ_t é o fluxo de $\mathcal{X}$.

Demonstração:

$$\frac{d}{dt}(e(t)\varphi_t(g)) = d\left(L_{e(t)}\right)_{\varphi_t(g)} \frac{d}{dt}(\varphi_t(g)) + d\left(R_{\varphi_t(g)}\right)_{e(t)} \frac{d}{dt}(e(t))$$

onde

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t(g)) = \mathcal{X}_{\varphi_t(g)}, \text{ e } \frac{d}{dt}(e(t)) = \mathcal{X}_{e(t)} + \textstyle\sum_{j=1}^m u_j Y^j_{e(t)}$$

Portanto, substituindo e aplicando a linearidade de $d(R_{\varphi_t(g)})_{e(t)}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(e(t)\varphi_t(g)) = d\left(L_{e(t)}\right)_{\varphi_t(g)} \mathcal{X}_{\varphi_t(g)} + d\left(R_{\varphi_t(g)}\right)_{e(t)} \mathcal{X}_{e(t)} + \sum_{j=1}^m u_j \; d\left(R_{\varphi_t(g)}\right)_{e(t)} Y^j_{e(t)}$$

Pelo item 3) da caracterizaçõ dos campos lineares, temos que

$$d\left(L_{e(t)}\right)_{\varphi_t(g)} \mathcal{X}_{\varphi_t(g)} + d\left(R_{\varphi_t(g)}\right)_{e(t)} \mathcal{X}_{e(t)} = \mathcal{X}_{e(t)\varphi_t(g)}$$

,

e como os campos Y^j são invariantes à direita, temos que

$$\sum_{j=1}^m u_j \; d\left(R_{\varphi_t(g)}\right)_{e(t)} Y^j_{e(t)} = \sum_{j=1}^m u_j Y^j_{e(t)\varphi_t(g)}$$

Assim, obtemos

$$\frac{d}{dt}(e(t)\varphi_t(g)) = \mathcal{X}_{e(t)\varphi_t(g)} + \sum_{j=1}^m u_j Y^j_{e(t)\varphi_t(g)} \tag{4.1}$$

ou seja : $e(t)\varphi_t(g)$ e $g_u(t)$ satisfazem a mesma equação diferencial.

Além disso, $e(0)\varphi_0(g) = g = g_u(0)$, portanto

$$\forall t \in \mathbb{R}, e(t)\varphi_t(g) = g_u(t)$$

. ■

Observação 4.3.2. *Caso os campos de vetores Y^j fossem invariantes à esquerda, teriamos $g_u(t) = \varphi_t(g)e(t)$. A demonstração é análoga, calculando $\frac{d}{dt}(\varphi_t(g)e(t))$, e aplicando a invariância à esquerda dos campos de vetores Y^j ao lugar da invariância à direita.*

Os conjuntos de atingibilidade de um sistema de controle linear (Σ_L) são relacionados pelas seguintes igualdades e relações.

Proposição 4.3.3. *1) Para todo $t \geq 0$, $\mathcal{A}(1, \leq t) = \mathcal{A}(1,t) = \mathcal{A}_t$;*

2) Para todo $0 \leq s \leq t$, $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$;

3) Para todo $g \in G$, $\mathcal{A}(g,t) = \mathcal{A}_t\varphi_t(g)$;

4) Para todos $s, t \geq 0$, $\mathcal{A}_{t+s} = \mathcal{A}_t \varphi_t(\mathcal{A}_s) = \mathcal{A}_s \varphi_s(\mathcal{A}_t)$.

Demonstração:
2) Sejam $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq s \leq t$. Então $[0, t] = [0, s] \cup [s, t]$.
Seja $x \in \mathcal{A}(s)$, então existe $u = (u_1, \ ... \ , u_m) \in L^\infty[0, s]$ tal que $x = e_u(s)$. Seja $\mu \in L^\infty[0, t]$ o controle definido por

$$\mu(v) = \begin{cases} 0, & v \in [0, t-s) \\ u((v-(t-s)), & v \in [t-s, t] \end{cases}$$

então

$$e_\mu(t) = e_\mu(s + (t-s))$$

onde, para todo $v \in [0, t-s], e_\mu(v)$ pertence à trajetória de (Σ_L) partindo de 1 para o controle μ. Denote $g := e_\mu(t-s)$, o final dessa porção da trajetória.
Para todo $v \in [t-s, t]$, denote $r := v - (t-s)$. Essa segunda porção da trajetória de (Σ_L) parte de $e_\mu(t-s) = g$ para $r = 0$, agora com controle $u(v-(t-s)) = u(r)$ para $r \in [0, s]$, pela definição do controle μ. Portanto, $\forall v \in [t-s, t], e_\mu(v) = e_\mu(r + (t-s) = g_u(r), r \in [0, s]$. Assim, para $v = t$, ou seja $r = s$, temos que

$$e_\mu(t) = g_u(s), \text{ onde } g = e_\mu(t-s).$$

Além disso, $\forall\ v \in [0, t-s]$, temos

$$\begin{aligned} \dot{e_\mu}(v) &= \mathcal{X}_{e_\mu(v)} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \mu_j(v) Y^j_{e_\mu(v)}}_{=\ 0} \\ &= \mathcal{X}_{e_\mu(v)} \end{aligned}$$

Por outro lado, $\mathcal{X}_1 = 0 \Rightarrow \forall v \in [0, t-s], e_\mu(v) = 1$. Assim $g = e_\mu(t-s) = 1$, e portanto $e_\mu(t) = e_u(s)$, ou seja $e_\mu(t) = x$. Assim $x \in \mathcal{A}_t$. O que prova $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$.

1) Seja $t \geq 0$. Pelo item 2), $\forall\ s \in \mathbb{R}\ /\ 0 \leq s \leq t$, $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$, isto é,

$$\begin{aligned} \forall\ s \in \mathbb{R}\ /\ 0 \leq s \leq t,\ \mathcal{A}(1, s) \subset \mathcal{A}(1, t) &\Longrightarrow \bigcup_{0 \leq s \leq t} \mathcal{A}(1, s) \subset \mathcal{A}(1, t) \\ &\Longrightarrow \mathcal{A}(1, \leq t) \subset \mathcal{A}_t. \end{aligned}$$

E como $0 \leq t \leq t$, a recíproca é imediata.

3) Para todo $g \in G$ e todo $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(g,t) &= \{g_u(t);\ u \in L^\infty[0,t]\} \\ &= \{e_u(t)\varphi_t(g);\ u \in L^\infty[0,t]\}\end{aligned}$$

onde $\varphi_t(g)$ não depende do controle $u \in L^\infty[0,t]$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(g,t) &= \underbrace{\{e_u(t);\ u \in L^\infty[0,t]\}}_{=\mathcal{A}(1,t)=\mathcal{A}_t}\ \varphi_t(g) \\ &= \mathcal{A}_t\varphi_t(g)\end{aligned}$$

4) Para todos $s, t \geq 0$, como o conjunto dos controles admissíveis é estável por concatenação, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{t+s} &= \mathcal{A}(1, t+s) \\ &= \{e_u(t+s);\ u \in L^\infty[0,t+s]\}\end{aligned}$$

Defina

- $w(\alpha) := u(\alpha), \forall \alpha \in [0,s]$;
- $v(\beta) := u(s+\beta), \forall \beta \in [0,t]$.

Assim, $\forall r \in [0,s], e_w(r) = e_u(r)$ pertence à trajetória de (Σ_L), partindo de 1, para o controle u. Denote $g_w := e_w(s) = e_u(s)$ o final dessa porção, para $r = s$. Para todo $q \in [s, t+s]$, denote $r := q - s$. Essa segunda porção da trajetória de (Σ_L) parte de $e_u(s) = g_w$ para $r = 0$, agora com controle $v(r) = u(s+r)$, para $r \in [0,t]$, pela definição do controle v. Portanto, $\forall r \in [0,t], e_u(r+s) = (g_w)_v(r)$. Em particular, para $r = t$, temos $e_u(t+s) = (g_w)_v(t)$. Além disso $L^\infty[0,t+s]$ é obtido exatamente pelas concatenações dos elementos de $L^\infty[0,s]$ com os de $L^\infty[0,t]$, portanto

$$\mathcal{A}_{t+s} = \{(g_w)_v(t);\ v \in L^\infty[0,t],\ w \in L^\infty[0,s], g_w = e_w(s)\}$$

onde, pela Proposição 4.3.1, $(g_w)_v(t) = e_v(t)\varphi_t(g_w)$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{t+s} &= \{(e_v(t)\varphi_t(e_w(s));\ v \in L^\infty[0,t],\ w \in L^\infty[0,s]\} \\ &= \{(e_v(t);\ v \in L^\infty[0,t]\} \cdot \varphi_t\Big(\{e_w(s);\ w \in L^\infty[0,s]\}\Big) \\ &= \mathcal{A}_t\varphi_t(\mathcal{A}_s)\end{aligned}$$

Além disso, $t + s = s + t \Longrightarrow \mathcal{A}_{t+s} = \mathcal{A}_{s+t}$, e pela mesma demonstração obtemos $\mathcal{A}_{s+t} = \mathcal{A}_s\varphi_s(\mathcal{A}_t)$. Portanto $A_{t+s} = \mathcal{A}_t\varphi_t(\mathcal{A}_s) = \mathcal{A}_s\varphi_s(\mathcal{A}_t)$. ■

4.3.2 Álgebra de Lie do sistema e condição do posto

Com as notações definidas acima, temos as seguintes propriedades.

Proposição 4.3.4. *1) A subálgebra $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ é D-invariante;*

2) Portanto, é igual ao ideal de tempo zero $\mathcal{L}_0$;

3) A álgebra de Lie $\mathcal{L}$ do sistema é igual a

$$\mathbb{R}\mathcal{X} \oplus \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \mathbb{R}\mathcal{X} \oplus \mathcal{L}_0.$$

4) A condição do posto é satisfeita por (Σ) se, e somente se, $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$.

Demonstração:
1) Vamos provar que $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ é D-invariante. De fato:
Todo elemento de $\mathfrak{h}^D$ é combinação linear de elementos de $\{D^kY;\ Y \in \mathfrak{h}, k \in \mathbb{N}\}$, portanto, pela bilinearidade do colchete de Lie, todo elemento de $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ é combinação linear de colchetes da forma $[D^kY, D^lZ]$ para $Y, Z \in \mathfrak{h}$, e $k, l \in \mathbb{N}$.
E já que o colchete de Lie satisfaz a identidade de Leibniz, temos que

$$\begin{aligned} D[D^kY, D^lZ] &= [D(D^kY), D^lZ] + [D^kY, D(D^lZ)] \\ &= \underbrace{[D^{k+1}Y, D^lZ]}_{\in\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)} + \underbrace{[D^kY, D^{l+1}Z]}_{\in\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)} \in \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ é D-invariante.

2) Agora vamos provar a igualdade $\mathcal{L}_0 = \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$.

Inclusão $(\supset)$: Relembramos que o ideal de tempo zero $\mathcal{L}_0$ é definido como o menor ideal de $\mathcal{L}$ que contém $\{Y^1, \ldots, Y^m\}$, e que $\mathfrak{h}$ é definida como a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por $\{Y^1, \ldots, Y^m\}$, isto é, a menor subálgebra que contém $\{Y^1, \ldots, Y^m\}$. Assim, como $\mathcal{L}_0$ é uma álgebra que contém $\{Y^1, \ldots, Y^m\}$, temos que $\mathfrak{h} \subset \mathcal{L}_0$.
Por outro lado, como $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0$ ideal de $\mathcal{L}$, e $\mathfrak{h} \subset \mathcal{L}_0$, temos, para todo $Y \in \mathfrak{h}, [\mathcal{X}, Y] \in \mathcal{L}_0$, isto é $DY \in \mathcal{L}_0$, portanto $[\mathcal{X}, [\mathcal{X}, Y]] \in \mathcal{L}_0$, isto é $D^2Y \in \mathcal{L}_0$. Por indução obtemos que $\forall k \in \mathbb{N}, D^kY \in \mathcal{L}_0$, ou seja, $\{D^kY;\ Y \in \mathfrak{h}, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}_0$. Assim, $\mathfrak{h}^D = \mathrm{Sp}\{D^kY;\ Y \in \mathfrak{h}, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}_0$, e a menor álgebra de Lie contendo $\mathfrak{h}^D$ é contida em $\mathcal{L}_0$ que é uma álgebra de Lie, ou seja $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) \subset \mathcal{L}_0$.

Inclusão $\subset$: Como $\{Y^1, \ldots, Y^m\} \subset \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$, basta provar que $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ é um ideal de $\mathcal{L}$. $\mathcal{L}$ é gerada por $\{\mathcal{X}, Y^1, \ldots, Y^m\}$, portanto basta mostrar que o colchete de um desses campos com um elemento qualquer de $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ pertence a $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$. De fato,

- Como $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ é D-invariante, então, $\forall Z \in D\mathfrak{h}, [\mathcal{X}, Z] = DZ \in \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$.
- $\forall Z \in \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D), \forall j = 1, \ \dots \ , m, [Z, Y^j] \in \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$.

Assim, $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ é um ideal de $\mathcal{L}$, que, além disso, contém $\{Y^1, \ \dots \ , Y^m\}$, portanto $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$.

3) Sabemos que $\mathcal{L} = \mathbb{R}\mathcal{X} + \mathcal{L}_0$, e que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$, portanto $\mathcal{L} = \mathbb{R}\mathcal{X} + \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$. Então, para mostrar que essa soma é direta, basta mostrar que $\mathbb{R}\mathcal{X} \cap \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \{0\}$. De fato, seja $Y \in \mathbb{R}\mathcal{X} \cap \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$. Então, $Y \in \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) \subset \mathfrak{g} = \mathrm{inv}^r$, portanto,

$$\forall x \in G, Y_x = d(R_x)_1 Y_1$$

onde, como $Y \in \mathbb{R}\mathcal{X}$, temos $Y_1 = 0$. Assim, $\forall x \in G, Y_x = 0$, ou seja, $Y = 0$. Portanto, $\mathbb{R}\mathcal{X} \cap \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \{0\}$, e temos

$$\mathcal{L} = \mathbb{R}\mathcal{X} \oplus \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D).$$

4) ($\Longrightarrow$): Suponha a rank-condition satisfeita em todo $x \in G$. Em particular, em 1, já que $\mathcal{X}_1 = 0$, o posto de $\mathcal{L} = \mathbb{R}\mathcal{X} + \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ é máximo se, e somente se, $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \mathfrak{g}$.

($\Longleftarrow$): Suponha que $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \mathfrak{g}$, e tome $x \in G$.
Denote $n := \dim(G) = \dim(\mathfrak{g})$. No ponto 1, temos $\dim(\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)_1) = \dim(\mathfrak{g}_1) = n$, portanto existem $V^1, \ \dots \ , V^n \in \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$, tais que $V_1^1, \ \dots \ , V_1^n$ são linearmente independentes.
Por outro lado, $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) \subset \mathfrak{g} = \mathrm{inv}^r$, assim os campos $V^1, \ \dots \ , V^n$ são invariantes à direita. Dessa maneira, para todos $(a_1, \ \dots \ , a_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i V_x^i = \sum_{i=1}^{n} a_i d(R_x)_1 V_1^i = d(R_x)_1 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i V_1^i \right)$$

e como $d(R_x)_1$ é uma aplicação linear inversível,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i V_x^i = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i V_1^i = 0 \Longleftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

Portanto $V_x^1, \ \dots \ , V_x^n$ são vetores linearmente independentes do espaço T_xG tangente a G em x, e assim, no ponto x, $\dim(\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)_x) = n = \dim(G)$, e portanto

$$\dim(\mathbb{R}\mathcal{X}_x + \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)_x) = \dim(G)$$

isto é, a rank-condition é satisfeita em x.

$\blacksquare$

4.4 Sistemas lineares internos

Nesta seção, a derivação $\mathrm{ad}(\mathcal{X})$ é suposta interna.

4.4.1 Sistema invariante associado

Como a derivação $D = \mathrm{ad}(\mathcal{X})$ é interna, ela é igual a $\mathrm{ad}(X)$ para algum campo X invariante à direita, e como vimos na Proposição 3.3.2, $\mathcal{X}$ pode ser expresso como

$$\mathcal{X} = X + \mathcal{I}_* X$$

portanto, é natural definir em G o seguinte sistema invariante à direita

$$\dot{g} = X_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_g^j \qquad (\Sigma_I),$$

já que os sistemas invariantes foram estudados há mais tempo do que os lineares e que existem mais resultados a eles referentes, que podem ser aproveitados no estudo desses últimos.

Proposição 4.4.1. *Seja $t \mapsto u(t)$ um controle admissível. A curva absolutamente contínua $t \mapsto g_L(t)$ é solução do sistema linear (Σ_L) para esse controle se, se somente se, a curva $t \mapsto g_L(t)\exp(tX)$ é solução do sistema invariante à direita (Σ_I).*

Demonstração:
($\Longrightarrow$):
Se $t \mapsto g_L(t)$ é solução do sistema linear, então para quase todo t temos

$$\frac{d}{dt} g_L(t) = \mathcal{X}_{g_L(t)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g_L(t)}$$

Além disso, como X é invariante à direita, $t \mapsto \exp(tX)$ é trajetória de X (passando pela unidade 1), e assim temos $\dfrac{d}{dt}\exp(tX) = X_{exp(tX)}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Portanto, para quase todo t

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g_L(t)\exp(tX)) &= d\left(L_{g_L(t)}\right)_{\exp(tX)} \frac{d}{dt}\exp(tX) + d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} \frac{d}{dt} g_L(t) \\
&= d\left(L_{g_L(t)}\right)_{\exp(tX)} \; X_{exp(tX)} \\
&\qquad + d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} \left(\mathcal{X}_{g_L(t)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g_L(t)} \right)
\end{aligned}$$

onde, pela igualdade (3.4), $\mathcal{X} = X + \mathcal{I}_* X$, com X invariante à direita, e todos os campos Y^j, $j = 1, ..., m$ invariantes à direita. Assim, aplicando a igualdade (2.1) e a linearidade de $d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g_L(t)\exp(tX)) &= d\left(L_{g_L(t)}\right)_{\exp(tX)} \; X_{exp(tX)} \\
&\qquad + d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} \left(X_{g_L(t)} + (\mathcal{I}_* X)_{g_L(t)}\right) \\
&\qquad + d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} \left(\sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g_L(t)}\right) \\
&= d\left(L_{g_L(t)}\right)_{\exp(tX)} d\left(R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1 \\
&\qquad + d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} X_{g_L(t)} + d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} (\mathcal{I}_* X)_{g_L(t)} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m} u_j \; d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} Y^j_{g_L(t)} \\
&= d\left(L_{g_L(t)}\right)_{\exp(tX)} d\left(R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1 + X_{g_L(t)\exp(tX)} \\
&\qquad + d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} (\mathcal{I}_* X)_{g_L(t)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g_L(t)\exp(tX)}
\end{aligned}$$

Mas nessa soma, os termos $\left(d\left(L_{g_L(t)}\right)_{\exp(tX)} d\left(R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1\right)$, e $\left(d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} (\mathcal{I}_* X)_{g_L(t)}\right)$ se anulam. De fato, como $(\mathcal{I}_* X)$ é invariante à esquerda, e como as translações à direita R_x, e à esquerda L_y, comutam para todos $x, y \in G$, temos

$$\begin{aligned}
d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} (\mathcal{I}_* X)_{g_L(t)} &= d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} d\left(L_{g_L(t)}\right)_1 (\mathcal{I}_* X)_1 \\
&= d\left(R_{\exp(tX)}\right)_{g_L(t)} d\left(L_{g_L(t)}\right)_1 (-X_1) \\
&= -d\left(R_{\exp(tX)} \circ L_{g_L(t)}\right)_1 X_1 \\
&= -d\left(L_{g_L(t)} \circ R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1 \\
&= -d\left(L_{g_L(t)}\right)_{\exp(tX)} d\left(R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\frac{d}{dt}(g_L(t)\exp(tX)) = X_{g_L(t)\exp(tX)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g_L(t)\exp(tX)}.$$

E, portanto, $g_L(t)\exp(tX)$ é solução de (Σ_I).

$(\Longleftarrow)$:

Primeiro vamos estabelecer uma igualdade que será necessária a seguir: Para todos $a, b \in G$, temos

$$\mathcal{I} \circ R_b(a) = \mathcal{I}(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = L_{b^{-1}} \circ \mathcal{I}(a)$$

portanto,

$$\mathcal{I} \circ R_b(a) = L_{b^{-1}} \circ \mathcal{I}(a), \ \forall a, b \in G \tag{4.2}$$

Se $t \mapsto g_L(t)\exp(tX)$ é solução de (Σ_I), então para quase todo t temos

$$\frac{d}{dt}\left(g_L(t)\exp(tX)\right) = X_{g_L(t)\exp(tX)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g_L(t)\exp(tX)}.$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g_L(t) &= \frac{d}{dt}\left(g_L(t)\exp(tX)\exp(-tX)\right)\\ &= d\left(R_{\exp(-tX)}\right)_{g_L(t)\exp(tX)} \frac{d}{dt}(g_L(t)\exp(tX))\\ &\qquad + d\left(L_{g_L(t)\exp(tX)}\right)_{\exp(-tX)} \frac{d}{dt}\exp(-tX)\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\exp(-tX) &= \frac{d}{dt}((\exp(tX))^{-1}) = \frac{d}{dt}(\mathcal{I}(\exp(tX)))\\ &= d\mathcal{I}_{\exp(tX)} \frac{d}{dt}\exp(tX) = d\mathcal{I}_{\exp(tX)}X_{\exp(tX)}\end{aligned}$$

E, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g_L(t) = d\left(R_{\exp(-tX)}\right)_{g_L(t)\exp(tX)} &\left(X_{g_L(t)\exp(tX)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g_L(t)\exp(tX)}\right)\\ &+ d\left(L_{g_L(t)\exp(tX)}\right)_{\exp(-tX)} d\mathcal{I}_{\exp(tX)}X_{\exp(tX)}\end{aligned}$$

Como X e todos os campos $Y^j, j = 1, ..., m$, são invariantes à direita, e pela linearidade de $d\left(R_{\exp(-tX)}\right)_{g_L(t)\exp(tX)}$ com relação à soma, por definição dos campos invariantes à direita obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g_L(t) &= X_{g_L(t)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g_L(t)} + d\left(L_{g_L(t)\exp(tX)}\right)_{\exp(-tX)} d\mathcal{I}_{\exp(tX)}\ d\left(R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1\\ &= \mathcal{X}_{g_L(t)} - (\mathcal{I}_* X)_{g_L(t)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g_L(t)}\\ &\qquad + d\left(L_{g_L(t)\exp(tX)}\right)_{\exp(-tX)} d\mathcal{I}_{\exp(tX)}\ d\left(R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1\\ &= \mathcal{X}_{g_L(t)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g_L(t)}\\ &\qquad + d\left(L_{g_L(t)\exp(tX)}\right)_{\exp(-tX)} d\mathcal{I}_{\exp(tX)}\ d\left(R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1 - (\mathcal{I}_* X)_{g_L(t)}\end{aligned}$$

onde, aplicando a regra da cadeia e a igualdade (4.2), temos

$$\begin{aligned}
& d\left(L_{g_L(t)\exp(tX)}\right)_{\exp(-tX)} d\mathcal{I}_{\exp(tX)}\; d\left(R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1 \\
&= d\left(L_{g_L(t)\exp(tX)} \circ \mathcal{I} \circ R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1 \\
&= d\left(\mathcal{I} \circ R_{\exp(-tX)(g_L(t))^{-1}} \circ R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1 \\
&= d\left(\mathcal{I} \circ R_{(g_L(t))^{-1}}\right)_1 X_1 \\
&= d\left(L_{g_L(t)} \circ \mathcal{I}\right)_1 X_1 \\
&= d\left(L_{g_L(t)}\right)_{\mathcal{I}(1)} \circ d\mathcal{I}_1\; X_1 \\
&= d\left(L_{g_L(t)}\right)_1 (-X_1) \\
&= (\mathcal{I}_* X)_{g_L(t)}
\end{aligned}$$

Isto é,

$$d\left(L_{g_L(t)\exp(tX)}\right)_{\exp(-tX)} d\mathcal{I}_{\exp(tX)}\; d\left(R_{\exp(tX)}\right)_1 X_1 - (\mathcal{I}_* X)_{g_L(t)} = 0$$

E, portanto,

$$\frac{d}{dt} g_L(t) = \mathcal{X}_{g_L(t)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g_L(t)}$$

isto é, $t \mapsto g_L(t)$ é solução de (Σ_L). ■

Vamos usar o símbolo $\mathcal{S}$ ao lugar de $\mathcal{A}$ para denotar os conjuntos de atingibilidade do sistema invariante. Uma consequência da Proposição 4.4.1 é a seguinte proposição.

Proposição 4.4.2. *1) Para todo $t \geq 0$, o conjunto $\mathcal{S}_t$ dos pontos atingíveis a partir da identidade 1 em tempo t satisfaz*

$$\mathcal{S}_t = \mathcal{A}_t \exp(tX). \tag{4.3}$$

2) E para todo $T > 0$,

$$\mathcal{S}_{\leq T} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \mathcal{A}_t \exp(tX) \tag{4.4}$$

3) $\forall g \in G, \forall t \geq 0, \mathcal{S}(g,t) = \mathcal{S}_t g$.

4) $\mathcal{S}$ é um semi-grupo.

Demonstração:

1) Denotando, para um controle u dado, por $s \mapsto (e_I)_u(s)$ (respectivamente $s \mapsto$

$(e_L)_u(s))$ a trajetória de (Σ_I) (respectivamente (Σ_L)) partindo da identidade 1 de G, pela Proposição 4.4.1, temos para todo $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_t = \mathcal{S}(1,t) &= \{(e_I)_u(t);\ u \in L^\infty([0,t])\}\\ &= \{(e_L)_u(t)\exp(tX);\ u \in L^\infty([0,t])\}\end{aligned}$$

onde $\exp(tX)$ é independente de u. Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_t &= \{(e_L)_u(t);\ u \in L^\infty([0,t])\}\exp(tX)\\ &= \mathcal{A}_t \exp(tX).\end{aligned}$$

2) Pelo item 1), temos

$$\mathcal{S}_{\leq T} = \bigcup_{0\leq t\leq T} \mathcal{S}_t = \bigcup_{0\leq t\leq T} \mathcal{A}_t \exp(tX).$$

3) Dado um controle u, denote $\beta_u(t)$ a trajetória de (Σ_I) partindo de 1 para o controle u. Seja $g \in G$. Então temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\beta_u(t)g) &= \frac{d}{dt}(R_g(\beta_u(t)))\\ &= d(R_g)_{\beta_u(t)} \frac{d}{dt}\beta_u(t)\\ &= d(R_g)_{\beta_u(t)}\left(X_{\beta_u(t)} + \sum_{j=1}^m u_j Y^j_{\beta_u(t)}\right)\end{aligned}$$

onde $d(R_g)_{\beta_u(t)}$ é linear, assim

$$\frac{d}{dt}(\beta_u(t)g) = d(R_g)_{\beta_u(t)} X_{\beta_u(t)} + \sum_{j=1}^m u_j d(R_g)_{\beta_u(t)} Y^j_{\beta_u(t)}$$

e como o campo vetorial X e todos os campos vetoriais $Y^j, j = 1, \ \ldots\ , m$, são invariantes à direita, aplicando a igualdade (2.1) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\beta_u(t)g) &= X_{R_g(\beta_u(t))} + \sum_{j=1}^m u_j Y^j_{R_g(\beta_u(t))}\\ &= X_{\beta_u(t)g} + \sum_{j=1}^m u_j Y^j_{\beta_u(t)g}\end{aligned}$$

portanto $\beta_u(t)g$ é uma trajetória de (Σ_I), e além disso, para $t = 0$, temos $\beta_u(0)g = 1 \cdot g = g$. Logo, $\beta_u(t)g$ é a trajetória de (Σ_I) partindo de g para o controle u.

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(g,t) &= \{\beta_u(t)g; u \in L^\infty[0,t]\}\\ &= \{\beta_u(t); u \in L^\infty[0,t]\}g\\ &= \mathcal{S}_t g.\end{aligned}$$

4) Sejam $g, h \in \mathcal{S}$. Então exitem $s, t > 0$ tais que $g \in \mathcal{S}_s$ e $h \in \mathcal{S}_t$. Assim, $hg \in \mathcal{S}_t g$ onde, pelo item 3), $\mathcal{S}_t g = \mathcal{S}(g, t)$. Logo, $hg \in \mathcal{S}(g, t) \subset \mathcal{S}(1, s+t) = \mathcal{S}_{s+t} \subset \mathcal{S}$. Portanto $\mathcal{S}$ é fechado pelo produto. Além disso, é claro que o produto é associativo em $\mathcal{S}$. Portanto $\mathcal{S}$ é um semi-grupo.

■

Com respeito aos *ideais de tempo zero* de (Σ_L) e de (Σ_I), temos a seguinte propriedade:

Proposição 4.4.3. *Os dois sistemas (Σ_L) e (Σ_I) têm o mesmo ideal de tempo zero $\mathcal{L}_0$.*

Demonstração: Denotemos a derivação associada a $\mathcal{X}$ (respectivamente a X) por $D_{\mathcal{X}} := \mathrm{ad}(\mathcal{X})$ (respectivamente por $D_X := \mathrm{ad}(X)$), e por $(\mathcal{L}_0)_L$ (respectivamente $(\mathcal{L}_0)_I$) o *ideal de tempo zero* do sistema (Σ_L) (respectivamente, (Σ_I)). Assim temos $D_{\mathcal{X}} = D_X$. Pela Proposição 4.3.4, sabemos que $(\mathcal{L}_0)_L = \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^{D_{\mathcal{X}}})$, e que $(\mathcal{L}_0)_I = \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^{D_X})$.
Por outro lado, temos por definição

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^{D_{\mathcal{X}}} &= \mathrm{Sp}\{(D_{\mathcal{X}})^k Y;\ Y \in \mathfrak{h}, k \in \mathbb{N}\}, \mathrm{e} \\ \mathfrak{h}^{D_X} &= \mathrm{Sp}\{(D_X)^k Y;\ Y \in \mathfrak{h}, k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

onde:
$D_{\mathcal{X}} = D_X \Longrightarrow \mathfrak{h}^{D_{\mathcal{X}}} = \mathfrak{h}^{D_X} \Longrightarrow \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^{D_{\mathcal{X}}}) = \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^{D_X})$, ou seja,

$$(\mathcal{L}_0)_L = (\mathcal{L}_0)_I = \mathcal{L}_0.$$

■

Consequentemente, as álgebras de Lie dos sistemas são

$$\mathcal{L}_L = \mathbb{R}\mathcal{X} \oplus \mathcal{L}_0, \qquad \mathcal{L}_I = \mathbb{R}X + \mathcal{L}_0.$$

Se o sistema linear satisfaz a *rank-condition,* então $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$ e, como $X \in \mathfrak{g} = \mathcal{L}_0$, o sistema invariante satisfaz $\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$.

4.4.2 Controlabilidade em tempo finito

As observações feitas na seção anterior sobre as álgebras de Lie de (Σ_L) e de (Σ_I) têm consequências sobre a controlabilidade em tempo finito.

Proposição 4.4.4. *Seja $T > 0$. As condições seguintes são equivalentes :*

1) (Σ_L) é controlável em tempo menor ou igual a T;

2) (Σ_L) é controlável em tempo T;

3) (Σ_L) é controlável a partir da identidade em tempo T;

4) (Σ_I) é controlável a partir da identidade em tempo T;

5) (Σ_I) é controlável em tempo T.

Além disso, essas condições são equivalentes à seguinte : (Σ_I) é controlável em tempo finito e (Σ_L) satisfaz a condição do posto.

Demonstração:
2) $\Longrightarrow$ 3)
$\forall g \in G, \mathcal{A}(g,T) = G$. Em particular, para $g = 1, \mathcal{A}(1,T) = \mathcal{A}_T = G$. Portanto (Σ_L) é controlável a partir de 1 em tempo T.

3) $\Longrightarrow$ 4)
Temos que $\mathcal{A}_T = G$, e sabemos pela igualdade (4.3) que $\mathcal{S}_T = \mathcal{A}_T \exp(TX)$. Assim, temos $\mathcal{S}_T = G\exp(TX) = G$, ou seja , (Σ_I) é controlável a partir da identidade em tempo T.

4) $\Longrightarrow$ 5)
Por hipótese, $\mathcal{S}_T = G$, e sabemos que $\forall\ g \in G, \forall t \geq 0, \mathcal{S}(g,t) = \mathcal{S}_t g$. Assim temos que para todo $g \in G$, $\mathcal{S}(g,T) = \mathcal{S}_T g = Gg = G$, portanto, (Σ_I) é controlável em tempo T.

5) $\Longrightarrow$ 2)
Por hipótese, $\forall g \in G$, $\mathcal{S}(g,T) = G$. Em particular, $\mathcal{S}_T = \mathcal{S}(1,T) = G$. Por outro lado, pela igualdade (4.3), temos $\mathcal{S}_T = \mathcal{A}_T \exp(TX)$, assim, $\mathcal{A}_T \exp(TX) = G$, e portanto $\mathcal{A}_T = G\exp(-TX) = G$.
Além disso, pela Proposição 4.3.3, item 3), temos que, $\mathcal{A}(g,T) = \mathcal{A}_T\varphi_T(g)$. Assim, para todo $g \in G, \mathcal{A}(g,T) = G\varphi_T(g) = G$. Isto é, (Σ_L) é controlável em tempo T.

Resta provar que 1) $\Longleftrightarrow$ 2). Para isso, vamos mostrar a equivalência desses dois itens com o fato que $\mathcal{A}_T = G$. De fato :

Suponha que o item 1) esteja satisfeito, isto é, (Σ_L) é controlável em tempo menor ou igual a T, ou seja, $\forall g \in G, \mathcal{A}(g, \leq T) = G$. Em particular, se $g = 1$, temos que $\mathcal{A}(1, \leq T) = G$, e sabemos pela Proposição 4.3.3, item 1), que $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}(1, \leq T)$. Portanto, $\mathcal{A}_T = G$. O que mostra: 1) $\Longrightarrow \mathcal{A}_T = G$.

Agora, suponha $\mathcal{A}_T = G$. Sabemos pela Proposição 4.3.3, item 3), que $\forall g \in G, \mathcal{A}(g, T) = \mathcal{A}_T \varphi_T(g)$. Assim, $\mathcal{A}(g, T) = G\varphi_T(g) = G$. Portanto, (Σ_L) é controlável em tempo T. O que mostra: $\mathcal{A}_T = G \Longrightarrow$ 2).

Assim, temos provado : 1) $\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_T = G \quad \Longrightarrow$ 2).

Finalmente, suponha o item 2) satisfeito, isto é : $\forall\ g \in G, \mathcal{A}(g, T) = G$. Então,

$$G = \mathcal{A}(g, T) \subset \underbrace{\bigcup_{0 \leq t \leq T} \mathcal{A}(g, t)}_{= \mathcal{A}(g, \leq T)} \subset G.$$

Portanto, $\forall g \in G, \mathcal{A}(g, \leq T) = G$, ou seja, (Σ_L) é controlável em tempo menor ou igual a T. O que termina de provar: 1) $\Leftrightarrow \quad \mathcal{A}_T = G \quad \Leftrightarrow$ 2).

Finalmente, vamos provar a última afirmação:

($\Longrightarrow$): Suponha que valem as cinco condições equivalentes. Pela afirmação 5), (Σ_I) é controlável em tempo exato, portanto em tempo finito. Além disso, pela afirmação 2), (Σ_L) é controlável em tempo exato, portanto controlável. Logo, pela Proposição 4.2.1, ele satisfaz a rank-condition.

($\Longleftarrow$): Suponha que (Σ_I) é controlável em tempo finito, e que (Σ_L) satisfaz a rank-condition. Aqui vamos aplicar o Teorema 6 em [8] que afirma o seguinte:
Seja (Σ) *um sistema controlável em tempo finito, em uma variedade diferenciável* N. *Então ele é controlável em tempo exato desde que existe um ponto* $x \in N$, *onde rank*$(\mathcal{L}_0)(x) = \dim(N)$.
Aqui, (Σ_L) satisfaz a rank-condition, logo em particular em $x = 1$ temos

$$\begin{aligned} \dim(G) &= \text{rank}(\mathcal{L}_L)(1) \\ &= \text{rank}(\mathbb{R}\mathcal{X} + (\mathcal{L}_0)_L)(1) \\ &= \text{rank}(\mathcal{L}_0)_L(1) \end{aligned}$$

além disso, (Σ_L) e (Σ_I) têm o mesmo ideal de tempo zero, que denotamos $\mathcal{L}_0$. Assim, (Σ_I) é controlável em tempo finito, e $\text{rank}(\mathcal{L}_0)(1) = \dim(G)$. Portanto, pelo Teorem acima, (Σ_I) é controlável em tempo exato, o que é a condição 5). ■

4.4.3 Controle com tempo ótimo do sistema invariante

Nesta subseção, consideramos novamente um campo linear $\mathcal{X}$ tal que a derivação $\mathrm{ad}(\mathcal{X})$ é interna, com campo invariante à direita associado X. O sistema invariante é suposto controlável. Com essa suposição, mostra-se que a controlabilidade do sistema linear é equivalente a um problema de tempo ótimo. Dizemos que *o tempo* $t > 0$ *não é ótimo para* $\exp(tX)$ se a trajetória $\tau \mapsto \exp(\tau X)$ não minimiza o tempo necessário ao sistema invariante para levar o ponto 1 ao ponto $\exp(tX)$, ou seja, existem um controle u, e um tempo s tal que $0 < s < t$, tais que, denotando por $v \mapsto (1_I)_u(v)$ a trajetória de (Σ_I) com condição inicial 1 para o controle u, temos $(1_I)_u(s) = \exp(tX)$ (Ver Figura 4.1).

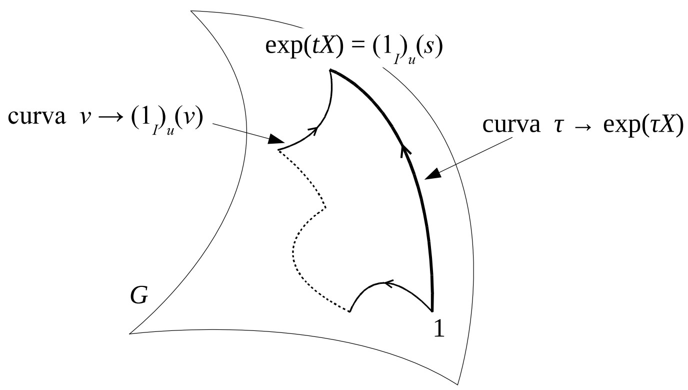

Figura 4.1: Com $0 < s < t$, o tempo t não é ótimo para $\exp(tX)$.

Teorema 4.4.5. *Suponha que a condição do posto* $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$ *é satisfeita e que o sistema invariante à direita é controlável. As afirmações seguintes são equivalentes:*

1) existe um tempo $t > 0$ *que não é ótimo para* $\exp(tX)$*;*

2) $\exp(\mathbb{R}X) \subset \mathcal{A}$*;*

3) o sistema linear é controlável.

Essas condições são satisfeitas, e o sistema linear é controlável, desde que o conjunto $\mathcal{A}_t$ *seja uma vizinhança de* 1 *para algum* $t > 0$*, em particular, cada vez que a condição ad-rank é satisfeita.*

Demonstração:
1. Primeiramente, note que o conjunto

$$B := \{\tau \in \mathbb{R} : \ \exp(\tau X) \in \mathcal{A}\}$$

é um semigrupo. De fato, sejam $\tau_1, \tau_2 \in B$, isto é, $\exists t_1, t_2 \geq 0$ tais que $\exp(\tau_1 X) \in \mathcal{A}_{t_1}, \exp(\tau_2 X) \in \mathcal{A}_{t_2}$. Vamos mostrar que $\exp((\tau_1 + \tau_2)X) \in \mathcal{A}$. Como $\mathrm{ad}(\mathcal{X})$ é uma derivação interna, temos, pela igualdade (3.5),

$$\forall g \in G, \ \varphi_t(g) = \exp(tX) g \exp(-tX)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\varphi_{t_1}(\exp(\tau_2 X)) &= \exp(t_1 X) \exp(\tau_2 X) \exp(-t_1 X) \\
&= \exp((t_1 + \tau_2 - t_1)X) \\
&= \exp(\tau_2 X)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\exp((\tau_1 + \tau_2)X) &= \exp(\tau_1 X) \exp(\tau_2 X) \\
&= \underbrace{\exp(\tau_1 X)}_{\in \mathcal{A}_{t_1}} \varphi_{t_1} \underbrace{(\exp(\tau_2 X))}_{\in \mathcal{A}_{t_2}} \in \mathcal{A}_{t_1} \varphi_{t_1}(\mathcal{A}_{t_2})
\end{aligned}$$

e pela Proposição 4.3.3, item 4), temos que $\mathcal{A}_{t_1} \varphi_{t_1}(\mathcal{A}_{t_2}) = \mathcal{A}_{t_1 + t_2}$. Assim,

$$\exp((\tau_1 + \tau_2)X) \in \mathcal{A}_{t_1 + t_2} \subset \mathcal{A}$$

Portanto, $\tau_1 + \tau_2 \in B$, e assim B é um semigrupo.

Por outro lado, (Σ_I) é controlável, e $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$, portanto, pelo Lema 2) em [5], existe $t > 0$ tal que $\mathcal{S}_t$ é uma vizinhança da unidade 1. Além disso, pela Proposição 4.4.2, temos $\mathcal{S}_t = \mathcal{A}_t \exp(tX)$, e portanto $\mathcal{A}_t = \mathcal{S}_t \exp(-tX)$ é uma vizinhança de $\exp(-tX)$. Assim,

$$\mathcal{S}_t \exp(-tX) \cap \exp(\mathbb{R}X),$$

que é contido em $\mathcal{A}_t$, contém uma vizinhança, no conjunto $\exp(\mathbb{R}X)$, de $\exp(-tX)$. Junto com a propriedade de semigrupo de B, isso implica

$$\exp(\mathbb{R}X) \subset \mathcal{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \tau > 0 \text{ tal que } \exp(\tau X) \in \mathcal{A}. \tag{4.5}$$

De fato:
O sentido direto dessa equivalência é óbvio.
Reciprocamente, suponha que existe $\tau > 0$, tal que $\exp(\tau X) \in \mathcal{A}$, e tome $x \in \mathbb{R}$.

Como $\mathcal{A}_t$ contém uma vizinhança, em $\exp(\mathbb{R}X)$, de $\exp(-tX)$, então pela continuidade da exponencial, existe uma vizinhança V de $-t$ em $\mathbb{R}$, tal que $\exp(VX) \subset \mathcal{A}_t$. Portanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp((-t-\epsilon, -t+\epsilon)X) \subset \mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}$. Além disso, como o conjunto $\{a \in \mathbb{R}; \exp(aX) \in \mathcal{A}\}$ é um semi-grupo, então temos que

$$\forall k \geq 1, \exp((-kt - k\epsilon, -kt + k\epsilon)X) \subset \mathcal{A},$$

onde $(-kt - k\epsilon, -kt + k\epsilon)$ é um intervalo de comprimento $2k\epsilon$.
Por outro lado, como $t > 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $k_x \in \mathbb{N}$ tal que $-k_x t < x$. Além disso, como $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2k_0\epsilon > \tau$.
Denote $k_1 := \max\{k_x, k_0\}$. Então temos que $-k_1 t < x$, e que $2k_1\epsilon > \tau$.
Assim, por translações sucessivas por $(+\tau)$ do intervalo $(-k_1 t - k_1\epsilon, -k_1 t + k_1\epsilon)$, cada translatado do intervalo tem recobrimento com o anterior. Portanto, temos que

$$x \in (-k_1 t, +\infty) \subset \bigcup_{l \geq 0} \big((-k_1 t - k_1\epsilon, -k_1 t + k_1\epsilon) + l\tau\big).$$

Assim, existe $M_x \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \big((-k_1 t - k_1\epsilon, -k_1 t + k_1\epsilon) + M_x\tau\big)$, onde, pela propriedade do semi-grupo provada acima, temos

$$x \in \big((-k_1 t - k_1\epsilon, -k_1 t + k_1\epsilon) + M_x\tau\big) \subset \{a \in \mathbb{R}; \exp(aX) \in \mathcal{A}\}.$$

Portanto, $\exp(xX) \in \mathcal{A}, \forall x \in \mathbb{R}$, isto é, $\exp(\mathbb{R}X) \subset \mathcal{A}$, o que termina a prova da equivalência.

2. 1) $\Longrightarrow$ 2):
Hipótese : Existe $t > 0$ que não é ótimo para $\exp(tX)$. Portanto, existe τ, tal que $0 < \tau < t$ e $\exp(tX) \in \mathcal{S}_\tau = \mathcal{A}_\tau \exp(\tau X)$. Assim, $\exp(\underbrace{(t-\tau)}_{>0} X) \in \mathcal{A}_\tau \subset \mathcal{A}$, e pela equivalência (4.5), temos que $\exp(\mathbb{R}X) \subset \mathcal{A}$.

2) $\Longrightarrow$ 1):
Hipótese : $\exp(\mathbb{R}X) \subset \mathcal{A}$. Seja $\tau > 0$ arbitrário. Então, $\exp(\tau X) \in \mathcal{A}$, portanto, existe $t > 0$ tal que $\exp(\tau X) \in \mathcal{A}_t = \mathcal{S}_t \exp(-tX)$, e assim, $\exp((t+\tau)X) \in \mathcal{S}_t$, onde $t + \tau > t > 0$. Portanto $t + \tau$ não é ótimo para $\exp((t+\tau)X)$.

3. 2) $\Longrightarrow$ 3):
Hipótese : $\exp(\mathbb{R}X) \subset \mathcal{A}$. Primeiramente, vamos mostrar que o sistema linear (Σ_L) é controlável a partir da unidade 1. Seja $g \in G$.
(Σ_I) é controlável $\Longrightarrow S = G \Longrightarrow \exists t > 0$ tal que $g \in \mathcal{S}_t = \mathcal{A}_t \exp(tX) \Longrightarrow g\exp(-tX) \in \mathcal{A}_t$.

Pela hipótese, $\exp(\mathbb{R}X) \subset \mathcal{A}$, portanto, existe $s > 0$ tal que $\exp(tX) \in \mathcal{A}_s$. Além disso, pela igualdade (3.5), temos que

$$\begin{aligned}\varphi_t(\exp(tX)) &= \exp(tX)\exp(tX)\exp(-tX)\\ &= \exp(tX)\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}g &= g\exp(-tX)\exp(tX)\\ &= \underbrace{g\exp(-tX)}_{\in\mathcal{A}_t}\varphi_t(\underbrace{\exp(tX)}_{\in\mathcal{A}_s}) \in \mathcal{A}_t\varphi_t(\mathcal{A}_s) = \mathcal{A}_{t+s} \subset \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Assim, $\forall g \in G,\ g \in \mathcal{A}$, portanto $\mathcal{A} = G$, ou seja, (Σ_L) é controlável a partir da unidade.

Agora, vamos provar que (Σ_L) é controlável para a identidade 1, isto é, que $\forall\ g \in G, 1 \in \mathcal{A}(g)$.
Como (Σ_I) é controlável, existe $t > 0$ tal que $g^{-1} \in \mathcal{S}_t$, onde $\mathcal{S}_t = \mathcal{A}_t\exp(tX)$. Assim, $g^{-1}\exp(-tX) \in \mathcal{A}_t$.
Além disso, temos

$$\begin{aligned}\exp(-tX) &= \underbrace{g^{-1}\exp(-tX)}_{\in\mathcal{A}_t}\underbrace{\exp(tX)g\exp(-tX)}_{=\varphi_t(g)}\\ &\in \mathcal{A}_t\varphi_t(g) = \mathcal{A}(g,t)\end{aligned}$$

Como vimos acima, (Σ_L) é controlável a partir de 1, portanto, existe $s > 0$ tal que $\exp(tX) \in \mathcal{A}_s$. Além disso, usando de novo a igualdade (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}\varphi_s(\exp(-tX)) &= \exp(sX)\exp(-tX)\exp(-sX)\\ &= \exp((s-t-s)X)\\ &= \exp(-tX)\end{aligned}$$

Portanto, aplicando dos dois lados da igualdade a multiplicação à esquerda por $\exp(tX)$ obtemos

$$1 = \underbrace{\exp(tX)}_{\in\mathcal{A}_s}\varphi_s(\exp(-tX)) \in \mathcal{A}_s\varphi_s(\exp(-tX))$$

onde, pela Proposição 4.3.3, item 3), temos $\mathcal{A}_s\varphi_s(\exp(-tX)) = \mathcal{A}(\exp(-tX), s)$. Assim, temos: $1 \in \mathcal{A}(\exp(-tX), s)$.

Juntando os resultados obtidos, temos que

$$\exp(-tX) \in \mathcal{A}(g,t), \quad \text{e} \quad 1 \in \mathcal{A}(\exp(-tX), s).$$

Portanto, por concatenação da trajetória de g a $\exp(-tX)$, e da trajetória de $\exp(-tX)$ a 1, temos que $1 \in \mathcal{A}(g)$, isto é, que o sistema (Σ_L) é controlável para a identidade 1. Assim, para quaisquer dois pontos $g, h \in G$, o sistema (Σ_L) pode levar g para 1, e levar 1 para h, ou seja, pode levar g para h (Ver Figura 4.2). O que termina de provar que (Σ_L) é controlável.

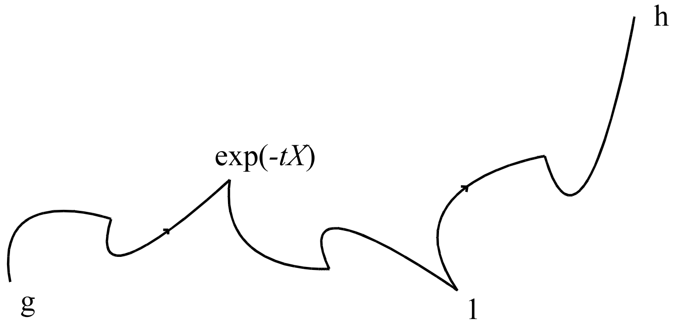

Figura 4.2: Por concatenação de trajetórias, quaisquer dois pontos podem ser ligados por trajetórias do sistema linear.

4. 3) $\Longrightarrow$ 2):
Como o sistema linear é controlável, ele é controlável a partir da identidade, isto é $\mathcal{A} = G$, portanto, $\exp(\mathbb{R}X) \subset \mathcal{A}$.

Agora vamos provar a última afirmação deste teorema. De fato, se $\mathcal{A}_t$ é uma vizinhança de 1 para algum $t > 0$, então pela continuidade de $\tau \mapsto \exp(\tau X)$ existe um $s > 0$ tal que $\exp(sX) \in \mathcal{A}_t$. Então $\exp(sX) \in \mathcal{A}$, portanto, pela equivalência (4.5), obtemos que $\exp(\mathbb{R}X) \subset \mathcal{A}$, isto é, o item 2) do teorema.

Além disso, suponha a condição ad-rank satisfeita. Para um sistema linear a Proposição 6 em [7] diz:
Se a condição ad-rank é satisfeita, então para todo $t > 0$, $\mathcal{A}_t$ é uma vizinhança da unidade 1.
Assim, com mais razão, existe um $t > 0$ tal que $\mathcal{A}_t$ é uma vizinhança de 1, e pelo

argumento acima, obtemos o item 2) do teorema. ■

4.5 Aplicação a algumas classes de Grupos de Lie

4.5.1 Grupos de Lie semi-simples

Nesta seção, depois de definir grupos semi-simples, vamos estabelecer relações entre tipos diferentes de controlabilidade do sistema linear e do sistema invariante em tais grupos.

Definição 4.5.1. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é denominada simples quando seus únicos ideais são os triviais,* e $\dim \mathfrak{g} \neq 1$.

Definição 4.5.2. *Um grupo de Lie é denominado semi-simples quando sua álgebra de Lie pode ser escrita como soma direta de ideais simples.*

Definição 4.5.3. *Um conjunto gerador de um grupo G é um subconjunto de G que não está contido em nenhum subgrupo próprio de G.*

Dadas essas definições, podemos enunciar e provar o teorema seguinte.

Teorema 4.5.4. *Seja G um grupo de Lie semi-simples, conexo, com centro finito. Então o sistema invariante é controlável desde que o sistema linear seja controlável a partir da identidade, ou para a identidade.*

Demonstração: Seja S um subsemigrupo gerador de um grupo G. Ele é dito reversível à esquerda (respectivamente, reversível à direita) se $SS^{-1} = G$ (respectivamente, $S^{-1}S = G$). O resultado seguinte se encontra em [16], Teorema 6.7, p. 84:

Seja G um grupo de Lie conexo e semi-simples com centro finito. O único subsemigrupo de G com interior não vazio que é reversível à esquerda ou à direita é G.

É simples verificar que G é de fato um subsemigrupo de G, com interior não vazio, e que é reversível à esquerda e à direita.
O conjunto $\mathcal{S}$ dos pontos atingíveis a partir da unidade de (Σ_I) é um semigrupo pela Proposição 4.4.2 item 4), e como a *rank-condition* é satisfeita, seu interior é não vazio. Portanto, se conseguirmos provar que $\mathcal{S}$ é reversível à esqueda ou à direita teremos que $\mathcal{S}$ é um semigrupo de G, com interior não vazio, e reversível à esquerda ou à direita. E pelo teorema acima, teremos que $\mathcal{S} = G$, isto é que (Σ_I) é

controlável a partir de 1.

Vamos provar que a afirmação (Σ_L) *é controlável a partir da identidade* 1 implica a afirmação S *é reversível à esquerda.* De fato: Seja $g \in G$.
(Σ_L) controlável a partir de 1 $\Longrightarrow$ existe $t \geq 0$ tal que $g \in \mathcal{A}_t = \mathcal{S}_t \exp(-tX)$. Assim, $\forall g \in G, \exists t \geq 0$ tal que $g \in \mathcal{S}_t \exp(-tX)$. Portanto

$$\begin{aligned} G &\subset \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{S}_t \exp(-tX) \subset \left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{S}_t\right) \cdot \{\exp(-tX);\ t \geq 0\} \\ &\subset \mathcal{S} \exp(-\mathbb{R}_+ X) \subset G \end{aligned}$$

E obtemos

$$G = \mathcal{S} \exp(-\mathbb{R}_+ X) \tag{4.6}$$

Além disso, $X \in \mathfrak{g} = \mathrm{inv}^r$, portanto a equação $\dot{x} = X_x$ corresponde ao sistema (Σ_I) para o controle $u = 0$, e ela tem como solução partindo de 1 a trajetória $x(t) = X_t(1) = \exp(tX)$. Portanto, $\forall t \geq 0, \exp(tX) \in \mathcal{S}$, ou seja $\exp(\mathbb{R}_+ X) \subset \mathcal{S}$. Por outro lado, $\exp(-\mathbb{R}_+ X) = (\exp(\mathbb{R}_+ X))^{-1}$, e $(\exp(\mathbb{R}_+ X))^{-1} \subset \mathcal{S}^{-1}$, assim, $\exp(-\mathbb{R}_+ X) \subset \mathcal{S}^{-1}$. Isso, juntamente com a igualdade (4.6), implica $G \subset \mathcal{S}\mathcal{S}^{-1} \subset G$. Portanto $G = \mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}$, isto é, $\mathcal{S}$ é reversível à esquerda.

Vamos provar que a afirmação (Σ_L) *é controlável para a identidade* 1 implica a afirmação S *é reversível à direita.* De fato: Seja $g \in G$.
Então $g^{-1} \in G$, e como (Σ_L) é controlável para a identidade, então $\exists t \geq 0$ tal que $1 \in \mathcal{A}(g^{-1}, t)$. Além disso, pela Proposição 4.3.3, temos $\mathcal{A}(g^{-1}, t) = \mathcal{A}_t \varphi_t(g^{-1})$, onde $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ continua designando o fluxo de $\mathcal{X}$. Dessa forma, existe $x \in \mathcal{A}_t$ tal que $1 = x\varphi_t(g^{-1})$.
Por outro lado, aplicando a igualdade (3.5), temos que $\varphi_t(g^{-1}) = \exp(tX)g^{-1}\exp(-tX)$, portanto, $1 = x\exp(tX)g^{-1}\exp(-tX)$, isto é,

$$g = \underbrace{\exp(-tX)}_{\in(\mathcal{S}_t)^{-1}} \underbrace{x\exp(tX)}_{\in\mathcal{A}_t \exp(tX)}$$

onde $\mathcal{A}_t \exp(tX) = \mathcal{S}_t \subset \mathcal{S}$. Portanto $g \in \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$. Dessa forma, temos $G \subset \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} \subset G$. Portanto $G = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$, isto é, $\mathcal{S}$ é reversível à direita.

Então, pelo teorema acima, temos que $\mathcal{S} = G$, e portanto, (Σ_I) é controlável partir de 1.

Agora vamos mostrar que (Σ_I) é controlável. De fato, seja $g \in G$. Temos $\mathcal{S}(g,t) = \mathcal{S}_t g$, portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(g) &= \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{S}(g,t) = \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{S}_t g \\ &= \left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{S}_t\right) g = \mathcal{S} g \\ &= G \end{aligned}$$

Portanto, (Σ_I) é controlável. ■

O corolário seguinte é uma consequência direta dos Teoremas 4.4.5 e 4.5.4.

Corolário 4.5.5. *Suponha que o grupo G é semi-simples, conexo, com centro finito. Se o sistema linear (Σ_L) é controlável a partir da identidade 1, então ele é controlável.*

Demonstração: Suponha (Σ_L) controlável a partir da unidade 1. Então, pelo Teorema 4.5.4, temos que (Σ_I) é controlável. Além disso, como o sistema (Σ_L) é controlável a partir de 1, pela Proposição 4.2.1 ele satisfaz a condição do posto em G todo. Assim $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$. Como temos $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$ e (Σ_I) controlável, podemos aplicar o Teorema 4.4.5. Como (Σ_L) é controlável a partir da unidade 1, temos que $\mathcal{A} = G$, portanto $\exp(\mathbb{R}X) \subset \mathcal{A}$, portanto pelo teorema, (Σ_L) é controlável. ■

Teorema 4.5.6. *Seja G um grupo de Lie semi-simples, conexo, com centro finito. Suponha a condição ad-rank satisfeita. Então o sistema linear (Σ_L) é controlável se, e somente se, o sistema invariante (Σ_I) é controlável.*

Demonstração:
$(\Longrightarrow)$: Suponha (Σ_L) controlável. Então é controlável a partir da identidade, portanto, pelo Teorema 4.5.4, o sistema (Σ_I) é controlável.

$(\Longleftarrow)$: Suponha (Σ_I) controlável. Como a condição ad-rank é satisfeita, isto é $\mathfrak{h}^D = \mathfrak{g}$, e como $\mathfrak{h}^D \subset \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) \subset \mathfrak{g}$, temos que $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \mathfrak{g}$. Pela Proposição 4.3.4, item 2), temos que $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \mathcal{L}_0$, portanto $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$.
Resumindo, temos que a condição do posto $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$ é satisfeita, e que o sistema invariante à direita é controlável. Portanto podemos aplicar o Teorema 4.4.5. Como a condição ad-rank é satisfeita, esse teorema implica que o sistema linear é controlável.
■

4.5.2 Grupos de Lie nilpotentes

Primeiro vamos definir um grupo nilpotente, uma álgebra de Lie nilpotente, e mencionar uma propriedade que relaciona grupos de Lie nilpotentes com álgebras de Lie nilpotentes. Essas definições e a proposição se encontram em [13], seção 10.2.

Para um grupo G, sua *série central descendente*

$$G = G^1 \supset G^2 \supset \ \dots\ \supset G^k \supset \dots$$

é definida indutivamente por $G^1 = G, G^2 = [G, G]$, e o termo geral $G^{k+1} = [G, G^k]$ é o subgrupo gerado pelos comutadores $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}, x \in G, y \in G^k$. Para todo $k \geq 0$, G^k é um subgrupo de G.
De maneira análoga, a *série central descendente*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \ \dots\ \supset \mathfrak{g}^k \supset \dots$$

da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é definida por $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, e $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]$, que é o subespaço gerado pelos colchetes $[X, Y], X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^k$.

Definição 4.5.7. *Um grupo G é denominado nilpotente se sua série central descendente termina no grupo trivial, isto é, se $G^k = \{1\}$ para algum $k \geq 0$.*

Observação 4.5.8. *Nesse caso, $G^i = \{1\}$ para todo $i \geq k$.*

Definição 4.5.9. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é denominada nilpotente se $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ para algum $k \geq 0$.*

Observação 4.5.10. *Nesse caso, $\mathfrak{g}^i = \{0\}$ para todo $i \geq k$.*

Proposição 4.5.11. *Um grupo de Lie conexo G é nilpotente se, e só se, sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é nilpotente.*

Demonstração: Ver Proposição 10.7 em [13]. ■

Consideramos agora um grupo de Lie G, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e um sistema de controle linear (Σ_L) em G. A subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada pelos campos $Y^j, j = 1, \dots, m$, é, novamente, denotada por $\mathfrak{h}$.

Teorema 4.5.12. *Suponha que o grupo G é nilpotente, e que a derivação associada a $\mathcal{X}$ é interna. Então o sistema (Σ_L) é controlável se, e somente se, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Nesse caso ele é controlável em tempo exato T, para todo $T > 0$.*

Observamos que é mais simples examinar se $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ do que examinar se o sistema linear satisfaz a condição do posto $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$, onde $\mathcal{L}_0 = \mathcal{LA}(\mathfrak{h}^{D_X})$.

Demonstração:
$(\Longleftarrow)$
A demonstração da suficiência e da controlabilidade em tempo exato que segue, que é considerada óbvia em [7] (com base em noções de teoria de Lie mais avançadas), foge do escopo deste trabalho.

$(\Longrightarrow)$:
Hipótese: (Σ_L) é controlável. Denote $(\mathfrak{g}^i)_{i\geq 1}$ a *série central descendente* de $\mathfrak{g}$, isto é $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$ (Veja [2]).

Observamos que $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1$. Seja $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$, e suponha que $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}^{i-1}$. Então, $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}] = \mathfrak{g}^i$. Assim provamos por indução que

$$\forall i \geq 1, \mathfrak{g}^{i+1} \subset \mathfrak{g}^i, \text{e portanto, } \mathfrak{g}^i \text{ é um ideal de } \mathfrak{g}.$$

Seja X um campo de vetores invariante à direita, tal que $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(\mathcal{X})$, e seja k o maior índice tal que $X \in \mathfrak{g}^k$. Então $X \in \mathfrak{g}^k \Longrightarrow [X, \mathfrak{g}] \in [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = \mathfrak{g}^{k+1}$. Portanto vale a inclusão

$$\mathrm{ad}(X)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{k+1}. \tag{4.7}$$

Por outro lado, como (Σ_L) é controlável, então pela Proposição 4.2.1 a condição do posto é satisfeita. Portanto a menor subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ que contém $\mathfrak{h}$ e é $\mathrm{ad}(X)$-invariante é igual a $\mathfrak{g}$. De fato (ver definições e propriedades na subseção 4.3.2): Uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ que contém $\mathfrak{h}$ e é $\mathrm{ad}(X)$-invariante contém necessariamente o subespaço $\mathfrak{h}^D$, portanto ela contém $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \mathcal{L}_0$. Além disso, $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ que contém $\mathfrak{h}$, e é $\mathrm{ad}(X)$-invariante pela Proposição 4.3.4, item 1), portanto é a menor delas. E como a rank-condition é satisfeita, pela mesma proposição, item 4), temos $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \mathfrak{g}$.

Agora, como $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+1}$ é a soma de uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ et de um ideal de $\mathfrak{g}$, pela Proposição 2.2.5 é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. E essa subálgebra é $\mathrm{ad}(X)$-invariante. De fato,

$$\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+1}) = \mathrm{ad}(X)\mathfrak{h} + \mathrm{ad}(X)(\mathfrak{g}^{k+1})$$

onde

- $\mathrm{ad}(X)\mathfrak{h} \subset \mathrm{ad}(X)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$, já que $X \in \mathfrak{g}^k$.

- $\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{g}^{k+1}) \subset \mathfrak{g}^{k+2} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$.

assim, $\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+1}) \subset \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+1}$, ou seja, $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+1}$ é $\mathrm{ad}(X)$-invariante.

Finalemente, juntando os resulatdos provados acima,temos que $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+1}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, que contém $\mathfrak{h}$, e que é $\mathrm{ad}(X)$-invariante. Portanto, pelo que vimos acima, temos

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+1} = \mathfrak{g}. \tag{4.8}$$

Agora, suponha que existe um inteiro $r > 0$ tal que $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+r} = \mathfrak{g}$. Então o campo X pode ser escrito como soma $X = X_h + X_r$, onde $X_h \in \mathfrak{h}$, e $X_r \in \mathfrak{g}^{k+r}$. Assim, pela bilinearidade do colchete de Lie temos

$$\mathrm{ad}(X)\mathfrak{h} = \mathrm{ad}(X_h)\mathfrak{h} + \mathrm{ad}(X_r)\mathfrak{h}$$

onde

- $\mathrm{ad}(X_h)\mathfrak{h} = [X_h, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, já que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie.
- $\mathrm{ad}(X_r)\mathfrak{h} = [X_r, \mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{g}^{k+r}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^{k+r+1}$.

Portanto

$$\mathrm{ad}(X)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+r+1} \tag{4.9}$$

Por outro lado, $\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{g}^{k+r+1}) = [X, \mathfrak{g}^{k+r+1}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+r+1}] = \mathfrak{g}^{k+r+2}$, e como $\mathfrak{g}^{k+r+2} \subset \mathfrak{g}^{k+r+1}$, temos que

$$\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{g}^{k+r+1}) \subset \mathfrak{g}^{k+r+1} \tag{4.10}$$

As duas inclusões (4.9) e(4.10) implicam que

$$\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+r+1}) \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+r+1}$$

Assim, $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+r+1}$ é uma subálgebra de Lie, $\mathrm{ad}(X)$-invariante, e que contém $\mathfrak{h}$. Portanto, temos que $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+r+1} = \mathfrak{g}$. E por indução, obtemos

$$\forall r > 0,\ \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{k+r} = \mathfrak{g}.$$

Como G é nilpotente, então pela Proposição 4.5.11 sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é nilpotente, o que implica que $\exists q \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^q = \{0\}$. Portanto, para r suficientemente grande, $\mathfrak{g}^{k+r} = 0$. O que implica $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. ■

Contra-exemplo: O Teorema 4.5.12 não vale mais, caso a derivação não seja interna, como no exemplo (L_2) no grupo de Heisenberg (ver Cap 5). Esse sistema é controlável, apesar de que $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$.

4.6 Sistemas de controle afins

Nesta seção, o drift do sistema é um campo de vetores afim $\mathcal{F}$, que é a soma de um campo de vetores linear $\mathcal{X}$ com um campo invariante à esquerda Z. O sistema considerado é

$$\dot{g} = \mathcal{F}_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_g^j. \qquad (\Sigma_A)$$

Devido à decomposição $\mathcal{F} = \mathcal{X} + Z$, as trajetórias de (Σ_A) podem ser comparadas com as trajetórias de

$$\dot{g} = \mathcal{X}_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_g^j. \qquad (\Sigma_L)$$

Proposição 4.6.1. *Seja um controle u dado. A solução de (Σ_A) para a condição inicial $g \in G$ é igual a $g(t)z(t)$, onde*

1) $t \mapsto g(t)$ é a solução de (Σ_L) satisfazendo $g(0) = g$;

2) $t \mapsto z(t)$ é a solução de $\dot{g} = \mathcal{X}_g + Z_g$ satisfazendo $z(0) = 1$.

Demonstração: seja $\gamma(t) = g(t)z(t)$. Então, para quase todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\gamma(t) &= \frac{d}{dt}(g(t)z(t)) \\
&= d\left(L_{g(t)}\right)_{z(t)} \frac{d}{dt} z(t) + d\left(R_{z(t)}\right)_{g(t)} \frac{d}{dt} g(t) \\
&= d\left(L_{g(t)}\right)_{z(t)} \left(\mathcal{X}_{z(t)} + Z_{z(t)}\right) + d\left(R_{z(t)}\right)_{g(t)} \left(\mathcal{X}_{g(t)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_{g(t)}^j\right) \\
&= d\left(L_{g(t)}\right)_{z(t)} \mathcal{X}_{z(t)} + d\left(R_{z(t)}\right)_{g(t)} \mathcal{X}_{g(t)} \\
&\qquad + d\left(L_{g(t)}\right)_{z(t)} Z_{z(t)} + \sum_{j=1}^{m} u_j d\left(R_{z(t)}\right)_{g(t)} Y_{g(t)}^j
\end{aligned}$$

onde

- pela igualdade (3.1) do Cap. 3, $d\left(L_{g(t)}\right)_{z(t)} \mathcal{X}_{z(t)} + d\left(R_{z(t)}\right)_{g(t)} \mathcal{X}_{g(t)} = \mathcal{X}_{g(t)z(t)}$
- como Z é invariante à esquerda, $d\left(L_{g(t)}\right)_{z(t)} Z_{z(t)} = Z_{g(t)z(t)}$
- como os $Y^j, j = 1, \ \dots\ , m$ são invariantes à direita,

$$\sum_{j=1}^{m} u_j d\left(R_{z(t)}\right)_{g(t)} Y_{g(t)}^j = \sum_{j=1}^{m} u_j Y_{g(t)z(t)}^j$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma(t) &= \mathcal{X}_{g(t)z(t)} + Z_{g(t)z(t)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{g(t)z(t)} \\ &= F_{\gamma(t)} + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

Portanto, $t \mapsto \gamma(t)$ é solução de (Σ_A). Além disso, $\gamma(0) = g(0)z(0) = g \cdot 1 = g$. O que termina a prova. ■

Agora suponha que a rank-condition é satisfeita. Temos que distinguir três casos e a Proposição 4.6.1 vai ter um interesse somente no terceiro caso. Esse estudo é feito em [7], e aqui vamos notar somente suas conclusões.

Caso 1. *Existe g_0 tal que $F(g_0) = 0$.* Então a rank-condition exige $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$, e o sistema é equivalente ao sistema linear

$$\dot{g} = \mathcal{X}_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j_g.$$

onde $\mathcal{X} = \left(R_{g_0^{-1}}\right)_* F$.

Caso 2. $\forall g \in G, F(g) \neq 0$, mas $\mathcal{L}_0 \neq \mathfrak{g}$. Então o sistema é equivalente a um sistema invariante à direita. Ele não pode ser controlável se G é simplesmente conexo.

Caso 3. $\forall g \in G, F(g) \neq 0$, e $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$. Aplicando a Proposição 4.6.1, o sistema (Σ_F) é controlável desde que (Σ_L) é controlável em tempo finito.

Agora vamos ver uma proposição que será útil no caso dos grupos de Lie compactos que vamos ver na subseção seguinte, e em cuja demonstração, que se encontra na Proposição 11 em [7], é usada a Proposição 4.6.1.

Proposição 4.6.2. *Com as notações acima, suponha que o campo F não se anula, e que o ideal de tempo zero $\mathcal{L}_0$ é igual a $\mathfrak{g}$. Então (Σ_A) é controlável em tempo finito se, e somente se, (Σ_L) é controlável em tempo finito.*

4.6.1 Grupos de Lie Compactos

Graças aos resultados das seções anteriores, um resultado geral de controlabilidade pode ser estabelecido.

Teorema 4.6.3. *Suponha que o grupo de Lie G é compacto. Então, o sistema (Σ_A) é controlável, portanto controlável em tempo finito, se e somente se ele satisfaz a rank-condition. Além disso, é controlável em tempo exato se e somente se $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$. Essa condição é sempre satisfeita no caso onde o campo de vetores $\mathcal{F}$ é linear.*

Demonstração:

1. Primeiro, vamos provar a controlabilidade no caso em que F é igual a um campo linear $\mathcal{X}$.
As afirmações seguintes vêm de [7] e serão admitidas sem mais discussão: Se o grupo G é compacto, então sua álgebra de Lie se separa na soma $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + \mathfrak{s}$, onde $\mathfrak{z}$ é o centro de G e $\mathfrak{s}$ é um ideal compacto semisimples. A derivação associada a $\mathcal{X}$ é igual a $\mathrm{ad}(X)$, onde X pode ser escolhido em $\mathfrak{s}$ (ver [8, 15]).
Agora, se a rank-condition é satisfeita pelo sistema linear, então ela é também satisfeita pelo sistema invariante associado, como vimos na Seção 4.4. Nessas condições, vamos poder aplicar os Teoremas 7.1 e 7.2 de [10], que citamos aqui.

Com as nossas notações, o Teorema 7.1 diz: *Seja um sistema invariante à direita em G. Uma condição necessária para o sistema ser controlável é que G seja conexo e que $\mathcal{L} = \mathfrak{g}$. Se G é compacto, essa condição é também suficiente.*

E o Teorema 7.2 diz: *Suponha que G é compacto, e que o sistema invariante à direita (Σ_I) é controlável. Então, existe $T > 0$ tal que, para todos $g, g' \in G$, existe um controle que leva g para g' em menos que T unidades de tempo. Se G é semisimples, então existe $T > 0$ tal que, para todos $g, g' \in G$, existe um controle que leva g para g' em exatamente T unidades de tempo.*

Voltamos à nossa demonstração no caso $F = \mathcal{X}$ linear, e denotamos por $\mathcal{L}_I$ a álgebra de Lie do sistema invariante (Σ_I) associado a $(\Sigma_L) = (\Sigma_A)$. Temos que G é compacto, conexo, e que $\mathcal{L}_I = \mathfrak{g}$. Portanto, pelo Teorema 7.1 em [10], (Σ_I) é controlável. Agora, aplicando o Teorema 7.2, obtemos que (Σ_I) é controlável em tempo finito. Além disso, como $(\Sigma_L) = (\Sigma_A)$ satisfaz a rank-condition, pela Proposição 4.4.4, (Σ_L) é controlável em tempo exato (portanto, também em tempo finito).

2. Agora vamos considerar drifts gerais e distinguir os três casos.

Caso 1: (Σ_F) é equivalente a um sistema linear que, pelo item 1) desta prova, é controlável em tempo finito.

Caso 2: Esse caso, que foge do escopo deste trabalho, é tratado em [7], com base nos resulados de [10].

Caso 3: Como $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$, aplicando ao sistema linear (Σ_L) a Proposição 4.3.4, item 4), temos que (Σ_L) satisfaz a rank-condition. Portanto, pelo item 1) desta prova, (Σ_L) é controlável em tempo finito, e, aplicando a Proposição 4.6.2, (Σ_A) é controlável em tempo finito.

3. Para provar a última afirmação "Além disso, o sistema (Σ_A) é controlável em tempo exato se, e somente se, $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$", vamos aplicar o Teorema 6 em [5], que vale no contexto mais geral de variedades diferenciáveis, não necessariamente compactas, e não somente em grupos de Lie.

Antes de enunciar o teorema, enunciamos a definição de um sistema Lie-determinado, que se encontra em [9]: *Uma família de campos de vetores suaves $\mathcal{H}$ é Lie-determinada se o espaço tangente em cada ponto x em uma órbita de $\mathcal{H}$ coincide com a avaliação em x da álgebra de Lie gerada por $\mathcal{H}$.*

Esse teorema diz:

Seja (Σ) um sistema controlável em tempo finito, em uma variedade diferenciável N. Ele é controlável em tempo exato desde que existe um ponto $x \in N$ onde $\operatorname{rank}(\mathcal{L}_0)(x) = \dim N$.
Se o sistema é Lie-determinado, então essa condição é também necessária.

Denote por $(\mathcal{L}_A)$ (respectivamente $(\mathcal{L}_L)$) a algebra de Lie do sistema (Σ_A), (respectivamente (Σ_L)). Denote por $(\mathcal{L}_A)_0$ (respectivamente $(\mathcal{L}_L)_0$) o ideal de tempo zero de (Σ_A) (respectivamente (Σ_L)). Antes de provar a equivalência, observamos que por uma demonstração semelhante àquela da igualdade $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \mathcal{L}_0$ no caso do sistema linear na Proposição 4.3.4, temos que, no caso do sistema (Σ_A), $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^{D_A}) = (\mathcal{L}_0)_A$, onde $D_A = D_{\mathcal{X}}$, portanto $(\mathcal{L}_0)_A = (\mathcal{L}_0)_L$, e denotamos os dois ideais de tempo zero por

$$(\mathcal{L}_0)_A = (\mathcal{L}_0)_L = \mathcal{L}_0.$$

Agora vamos provar a equivalência.
$(\Longrightarrow)$: Suponha que o sistema é controlável em tempo exato. Então ele é controlável em tempo finito, de modo que podemos aplicar o Teorema 6 de [5]. Aqui não vamos provar, e vamos admitir, que o sistema (Σ_A) é Lie-determinado. Como o sistema

é Lie-determinado e controlável em tempo exato, então, pelo teorema, existe um ponto $x \in G$ onde $\operatorname{rank}(\mathcal{L}_0)(x) = \dim G$. Por outro lado, como $\mathcal{L}_0 \subset \mathfrak{g} = \mathrm{inv}^r$, a existência desse ponto x implica que $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$. De fato, denote $n = \dim G$, e tome $V^1, \ldots, V^n \in \mathcal{L}_0$ tais que $V^1_x, \ldots, V^n_x \in \mathcal{L}_0(x)$ são vetores linearmente independentes. Tome $y \in G$, e suponha que existem $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $\sum_{i=1}^n a_i V^i_y = 0$. Então, aplicando a diferencial $d(R_{y^{-1}x})_y$, que é linear, a essa igualdade, obtemos $\sum_{i=1}^n a_i d(R_{y^{-1}x})_y V^i_y = 0$, ou seja $\sum_{i=1}^n a_i V^i_x = 0$. Portanto, $a_1 = \ldots = a_n = 0$, e $V^1_y, \ldots, V^n_y$ são n vetores linearmente independentes em $\mathcal{L}_0(y)$, e assim $\dim \mathcal{L}_0 = \dim G$, ou seja, $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$.

($\Longleftarrow$): Se $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$, então o sistema (Σ_A) satisfaz a rank-condition, portanto pela primeira afirmação do Teorema 4.6.3, ele é controlável em tempo finito. Além disso, $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$ implica $\operatorname{rank}(\mathcal{L}_0)(1) = \dim G$, e portanto pelo Teorema 6 em [5], obtemos que (Σ_A) é controlável em tempo exato. $\blacksquare$

Capítulo 5

Exemplos

5.1 Exemplos no grupo de Heisenberg

O grupo de Heisenberg é o grupo de matrizes

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

munido do produto de matrizes usual, denotado "·". É um grupo de Lie conexo e nilpotente.

Primeiramente, observe que existe entre G e $\mathbb{R}^3$ a bijeção

$$\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x,y,z),$$

e que para quaisquer matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \in G$$

temos

$$\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b+y & c+ay+z \\ 0 & 1 & a+x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto considerando em $\mathbb{R}^3$ o produto

$$(x,y,z) * (a,b,c) := (a+x, b+y, c+ay+z)$$

podemos identificar o grupo $(G,\cdot)$ com o grupo $(\mathbb{R}^3,*)$.

Exemplo 1 : Determinação da ágebra de Lie de G, e cálculos dos colchetes.

Vamos considerar a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ desse grupo de Lie como sendo o conjunto inv^r dos campos de vetores invariantes à direita, e determinar essa álgebra de Lie.

Seja V um campo de vetores no grupo G. Para todo $h \in G$ podemos escrever

$$V(h) = f_1(h)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(h)\frac{\partial}{\partial y} + f_3(h)\frac{\partial}{\partial z},$$

onde $\forall i = 1,2,3, f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Pela definição de campo de vetores invariante à direita, temos

$$V \in \mathrm{inv}^r \Longleftrightarrow d\left(R_g\right)_h\left(V_h\right) = V\left(R_g(h)\right) = V(hg), \forall g,h \in G.$$

Sejam $g = (a,b,c)$, e $h = (x,y,z) \in G$. Então

$$R_g(h) = h\cdot g = (x,y,z)*(a,b,c) = (a+x, b+y, c+ay+z)$$

Expessando a diferencial $d\left(R_g\right)_h$ pela matriz jacobiana de R_g no ponto h, obtemos

$$d\left(R_g\right)_h = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(a+x)}{\partial x} & \dfrac{\partial(a+x)}{\partial y} & \dfrac{\partial(a+x)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(b+y)}{\partial x} & \dfrac{\partial(b+y)}{\partial y} & \dfrac{\partial(b+y)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(c+ay+z)}{\partial x} & \dfrac{\partial(c+ay+z)}{\partial y} & \dfrac{\partial(c+ay+z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$d\left(R_g\right)_h\left(V_h\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(h) \\ f_2(h) \\ f_3(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(h) \\ f_2(h) \\ af_2(h)+f_3(h) \end{pmatrix} = V(hg) = \begin{pmatrix} f_1(hg) \\ f_2(hg) \\ f_3(hg) \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\forall g,h \in G, \begin{cases} f_1(hg) = f_1(h) \\ f_2(hg) = f_2(h) \\ f_3(hg) = af_2(h)+f_3(h) \end{cases}$$

Logo, fixando $h = 1$,

$$\forall g \in G, \begin{cases} f_1(g) = f_1(1) := \alpha \in \mathbb{R}; \\ f_2(g) = f_2(1) := \beta \in \mathbb{R}; \\ f_3(g) = af_2(1) + f_3(1) := a\beta + \gamma; \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, o campo V é da forma

$$\begin{aligned} V(g) &= \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + (a\beta + \gamma)\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\frac{\partial}{\partial z}\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

e, portanto, substituindo a notação (a, b, c) por (x, y, z):

$$\mathfrak{g} = \mathrm{inv}^r = \left\{V \in V^\omega(G) : V(x, y, z) = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial z}; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ou seja, fazendo a seguinte identificação entre coordenadas naturais e matrizes:

$$\frac{\partial}{\partial x} = X := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} = Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial}{\partial z} = Z := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{g}$ é gerada pelos campos de vetores invariantes à direita X, Y, Z.

Além disso, para toda função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= (XY - YX)(f) \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right)\right) - \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](f), \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} - x\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\right)(f), \end{aligned}$$

e aplicando o Teorema de Schwarz à derivadas de ordem 2, que então se anulam dois por dois, obtemos

$$\forall f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, [X, Y](f) = \frac{\partial f}{\partial z} = Z(f),$$

isto é

$$[X, Y] = Z$$

Da mesma maneira,

$$\begin{aligned} [X, Z] &= XZ - ZX \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
[Z,Y] &= ZY - YZ \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}, \\
&= \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} + x\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + x\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2: Associamos com a derivação D de $\mathfrak{g}$ definida por

$$DX = Y, DY = X, DZ = 0,$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \\
D\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
D\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) &= 0,
\end{aligned}
$$

o campo de vetores $\mathcal{X}$ definido por

$$\mathcal{X} = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Vamos mostrar que $-\mathrm{ad}(\mathcal{X}) = D$. Para isso, vamos verificar a igualdade para os três campos geradores de $\mathfrak{g}$:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{ad}(\mathcal{X})X &= -[\mathcal{X}, X] = X\mathcal{X} - \mathcal{X}X \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&\qquad - \left(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} \\
&= y\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\left(2x\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\
&\qquad - \left(y\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\right)
\end{aligned}
$$

e aplicando o teorema de Schwarz às derivadas de ordem 2, que então se anulam, obtemos

$$-\mathrm{ad}(\mathcal{X})X = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} = Y.$$

Da mesma maneira,

$$\begin{aligned}
-\mathrm{ad}(\mathcal{X})Z &= -[\mathcal{X}, Z] = Z\mathcal{X} - \mathcal{X}Z \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&\qquad - \left(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z} \\
&= y\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + x\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&\qquad - \left(y\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + x\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}$$

e aplicando o teorema de Schwarz às derivadas de ordem 2, que então se anulam, obtemos

$$-\mathrm{ad}(\mathcal{X})Z = 0.$$

Da mesma maneira, mostramos que $-\mathrm{ad}(Y) = X$.

Resumindo, temos

$$\begin{aligned}
-\mathrm{ad}(\mathcal{X})X &= Y = DX, \\
-\mathrm{ad}(\mathcal{X})Y &= X = DY, \\
-\mathrm{ad}(\mathcal{X})Z &= 0 = DZ.
\end{aligned}$$

portanto $-\mathrm{ad}(\mathcal{X}) = D$.

Por outro lado, $\mathrm{ad}(\mathcal{X})(\{X, Y, Z\}) \subset \mathfrak{g}$, portanto $\mathcal{X} \in \mathrm{norm}_{V^\omega}(\mathfrak{g})$.

Além disso, a matriz unidade $1 \in G$ corresponde a $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, assim

$$\mathcal{X}(1) = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(0^2 + 0^2)\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Portanto, $\mathcal{X}$ é linear.

O sistema $\dot{g} = \mathcal{X}(g) + uX(g)$ em $\mathbb{R}^3$, isto é

$$\dot{g} = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial z} + u\frac{\partial}{\partial x}$$

pode ser esrcrito da forma

$$\begin{cases}
\dot{x} = y + u \\
\dot{y} = x \\
\dot{z} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)
\end{cases} \qquad (L_1)$$

Vamos examinar se esse sistema satisfaz a condição ad-rank. Com as mesmas notações que no capítulo 4, temos que

$$\mathfrak{h} = \mathcal{LA}(\{X\}),$$

e que

$$\mathfrak{h}^D = \text{ger}\{D^k X; k \in \mathbb{N}\}$$

onde $DX = Y$, e $D^2X = DY = X$. Assim, $\mathfrak{h}^D = \text{ger}\{X, Y\} \neq \mathfrak{g}$, portanto o sistema (L_1) não satisfaz a condição ad-rank.

Com respeito à condição do posto, como $\mathfrak{h}^D = \text{ger}\{X, Y\}$, temos que $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \mathcal{LA}(\{X, Y\})$, que contém X, Y, e $[X, Y] = Z$, ou seja $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D)$ contém os campos de vetores que geram $\mathfrak{g}$, portanto $\mathcal{LA}(\mathfrak{h}^D) = \mathfrak{g}$, o que implica, pela Proposição 4.3.4, que (L_1) satisfaz a condição do posto.

Porém, no sistema (L_1), temos que $\dot{z} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Assim, $\forall t > 0, z(t) \geq z(0)$, portanto (L_1) não é controlável.

Exemplo 3: Com o mesmo campo vetorial linear $\mathcal{X}$ que no exemplo anterior, considere o sistema seguinte:

$$\dot{g} = \mathcal{X}(g) + uX(g) + vZ(g) \qquad (L_2)$$

isto é

$$\dot{g} = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial z} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial z}$$

ou seja, em coordenadas naturais,

$$\begin{cases} \dot{x} = y + u \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + v. \end{cases} \qquad (L_2)$$

Vamos mostrar que esse sistema é controlável. De fato :
Podemos considerar separadamente a equação

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + v.$$

Ela contém um controle v independente, portanto a coordenada z é controlável.

Agora consideramos o sistema linear (L_2') em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = y + u \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Em termos matriciais ele se escreve

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (L_2')$$

ou seja,

$$\dot{\mu}(t) = A\mu(t) + Bu(t)$$

onde $\mu(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Vamos aplicar o Teorema de Kalman. Ele diz:

Seja o sistema de controle linear no grupo de Lie $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

onde $x \in \mathbb{R}^n, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, *continua por partes,* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. *Ele é controlável se, e somente se,* $\text{rank}[B\ AB \cdots A^{n-1}B] = n$. *(A matriz* $[B\ AB \cdots A^{n-1}B]$ *é denominada matriz de controlabilidade de Kalman, e tem dimensão* $n \times nm$.*)*

Aqui $n = 2$, logo por esse teorema, o sistema é controlável se, e somente se, $\text{rank}[B\ AB] = 2$. Vamos calcular $\text{rank}[B\ AB]$. Temos

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{, portanto } [B\ AB] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ e } \text{rank}[B\ AB] = 2.$$

Portanto o sistema (L_2') é controlável, e consequentemente o sistema (L_2) é controlável.

Além disso, o sistema (L_2) satisfaz a condição ad-rank. De fato: Denotando, como acima, por $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie gerada pelos campos invariantes do sistema de controle, temos que $\mathfrak{h}^D$ contém X e Z, e também $Y = DX$.
Por outro lado, como $\mathfrak{g}$ é gerada por X, Y, e Z, e além disso, $[X, Y] = Z, [X, Z] = 0$, e $[Y, Z] = 0$, então temos que $\mathfrak{g} = \text{ger}\{X, Y, Z\} = \mathfrak{h}^D$, ou seja, a condição ad-rank é satisfeita.

Porém, a álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de (L_2) é

$$\mathfrak{h} = \text{ger}\{X, Z, [X, Z]\} = \text{ger}\{X, Z\} \neq \mathfrak{g}.$$

Assim, esse exemplo mostra que o Teorema 4.5.12 não vale mais, caso a derivação não seja interna.

Apêndice A

Campos de vetores e colchetes de Lie em variedades diferenciáveis

A.1 Campos de vetores

Um campo de vetores em uma variedade diferencial M é uma aplicação $X : M \to TM$ que satisfaz $X(x) \in T_xM, \forall x \in M$.

O campo X induz a equação diferencial ordinária en M definida por

$$\frac{dx}{dt} = X(x). \tag{A.1}$$

Se X é de classe $\mathcal{C}^1$ então, para todo $x_0 \in M$, existe uma única solução maximal com condição inicial $x(0) = x_0$. Essa solução é denotada por $t \mapsto X_t(x_0)$. O seu intervalo de definição é um intervalo $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}$ que contém 0.

Fixando $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $X_t : x \mapsto X_t(x)$ é um difeomorfismo local de M no sentido em que o domínio $\text{dom}X_t$ de X_t é um aberto de M, e $X_t : \text{dom}X_t \to X_t(\text{dom}X_t)$ é um difeomorfismo. O campo X é denominado **completo** se $\text{dom}X_t = M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (isto é, se todas as soluções maximais estão definidas em $(-\infty, +\infty)$).

O conjunto de difeomorfismos locais $\{X_t; t \in \mathbb{R}\}$, é denominado de **fluxo** do campo de vetores. A menos de restrição de domínios, o fluxo satisfaz a propriedade de homomorfismo: $X_{t+s} = X_t \circ X_s$, isto é, se $X_s(x)$ e $X_t(X_s(x))$ estão definidos então $X_{t+s}(x)$ está definido e vale a igualdade $X_{t+s}(X) = X_t(X_s(x))$. Em particular, os elementos do fluxo comutam entre si: $X_t \circ X_s = X_s \circ X_t$, e $X_{-t} = (X_t)^{-1}$.

Em suma, X_t satisfaz as seguintes propriedades que o caracterizam:

1) $X_0 = \mathrm{id}$;

2) $\dfrac{d}{dt} X_t(x) = X(X_t(x))$;

3) $X_{t+s} = X_t \circ X_s = X_s \circ X_t$.

O campo X é obtido de seu fluxo pela segunda das igualdades acima. X é denominado de **gerador infinitesimal** de seu fluxo.

Definição A.1.1. *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis, e $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Dois campos de vetores X em M e Y em N são denominados ϕ-relacionados se $d\phi$ aplica X em Y, isto é se $d\phi_x(X(x)) = Y(\phi(x))$, para todo $x \in G$.*

Proposição A.1.2. *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis, $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável, e dois campos de vetores X em M e Y em N ϕ-relacionados. Então a imagem por ϕ de uma trajetória de X é uma trajetória de Y. Mais especificamente, se X e Y são campos ϕ-relacionados, então*

$$\forall g \in M, \phi\left(X_t\left(g\right)\right) = Y_t\left(\phi\left(g\right)\right).$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ onde fizer sentido.
Ou seja, em termos de fluxos

$$\phi \circ X_t = Y_t \circ \phi.$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ onde fizer sentido.

Demonstração: Seja $g \in M$, e seja $X_t(g)$ a trajetória de X com condição inicial $X_0(g) = g$. Como X e Y são ϕ-relacionados, temos para todo t onde fizer sentido,

$$d\phi_{X_t(g)}(X(X_t(g))) = Y(\phi(X_t(g))) \tag{A.2}$$

$$d\phi_{X_t(g)}\left(\frac{d}{dt}(X_t(g))\right) = Y(\phi(X_t(g))) \tag{A.3}$$

onde, pela regra da cadeia, $d\phi_{X_t(g)}\left(\dfrac{d}{dt}(X_t(g))\right) = \dfrac{d}{dt}(\phi(X_t(g)))$. Assim obtemos

$$\frac{d}{dt}(\phi(X_t(g))) = Y(\phi(X_t(g)))$$

ou seja, $\phi(X_t(g))$ é uma trajetória do campo de vetores Y.

Portanto, $\exists\ h \in M$ tal que $\phi(X_t(g)) = Y_t(h)$. Tomando $t = 0$, temos $\phi(g) = \phi(X_0(g)) = Y_0(h) = h$, isto é $h = \phi(g)$. Portanto $\phi(X_t(g)) = Y_t(\phi(g))$. ■

Dado um campo X em M, nem sempre existe um campo em N que é ϕ-relacionado com X. Por exemplo, se ϕ não é injetora e $\phi(x) = \phi(y)$ com $\mathrm{d}\phi_x(X(x)) \neq \mathrm{d}\phi_y(X(y))$ então não pode existir um campo ϕ-relacionado com X.
De fato, suponha que existe um tal campo Y em N, ϕ-relacionado com X. Então teriamos $d\phi_x\left(X\left(x\right)\right) = Y\left(\phi\left(x\right)\right)$ pela definição de campos ϕ-relacionados, $Y(\phi(x)) = Y(\phi(y))$ por hipótese, e $Y(\phi(y)) = d\phi_y\left(Y\left(y\right)\right)$ pela definição de campos ϕ-relacionados. Portanto $\mathrm{d}\phi_x(X(x)) = \mathrm{d}\phi_y(X(y))$. Um absurdo.

No entanto, se $\phi : M \to N$ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^\infty$, então existe um tal campo em N.

Proposição A.1.3. *Se $\phi : M \to N$ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^\infty$, e X é um campo em M então existe um único campo em N, denotado por $\phi_* X$, que é ϕ-relacionado com X. Esse campo é definido por*

$$\forall y \in N, (\phi_* X)(y) = d\phi_{\phi^{-1}(y)}(X(\phi^{-1}(y))). \tag{A.4}$$

Demonstração: Suponha que existe um tal campo Y. Seja $y \in N$. Como ϕ é um difeomorfismo, $\exists!\ x \in M$ tal que $y = \phi(x)$, o que equivale a $x = \phi^{-1}(y)$. Então pela hipótese temos $d\phi_x(X(x)) = Y(\phi(x))$. Assim Y satisfaz: $\forall y \in M, Y(y) = d\phi_{\phi^{-1}(y)}(X(\phi^{-1}(y)))$. Esse campo tem a mesma classe de diferenciabilidade que X já que ϕ é difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^\infty$. É o único candidato a campo ϕ-relacionado com X, e substituindo na sua expressão y por $\phi(x)$, e $\phi^{-1}(y)$ por x, obtemos: $\forall x \in M, Y(\phi(x)) = d\phi_x(X(x))$, o que mostra que Y é ϕ-relacionado com X.
■

A.2 Colchete de Lie

A noção de colchete de Lie, muito importante no contexto de grupos de Lie, é definida no contexto mais amplo de variedades diferenciáveis. Seguem sua definição e propriedades úteis no nosso estudo de teoria do controle em grupos de Lie.

Definição A.2.1. *Sejam X e Y dois campos de vetores. O colchete de Lie entre eles é definido por*

$$[X, Y](x) = \frac{d}{dt}\Big(d(X_{-t})_{X_t(x)}(Y(X_t(x)))\Big)_{|t=0} \tag{A.5}$$

Proposição A.2.2. *Sejam $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável e X_1, X_2 campos em M. Suponha que os campos Y_1 e Y_2 sejam ϕ-relacionados com X_1 e X_2, respectivamente.Então, os campos $[X_1, X_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ também são ϕ-relacionados.*

Demonstração: É a Proposição A.2 em [13]. Abrindo a demonstração sugerida no livro, ou seja, partindo da definição do colchete de Lie, e aplicando a regra da cadeia juntamente com a igualdade $\phi \circ X_t = Y_t \circ \phi$, temos para todo $x \in M$:

$$\begin{aligned}
d\phi_x\left([X_1, X_2](x)\right) &= d\phi_x\left(\frac{d}{dt}\left(d\left((X_1)_{-t}\right)_{(X_1)_t(x)}\left(X_2\left((X_1)_t(x)\right)\right)\right)\right)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(d\phi_x\left(d((X_1)_{-t})_{(X_1)_t(x)}\left(X_2\left((X_1)_t(x)\right)\right)\right)\right)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(d\left(\phi \circ (X_1)_{-t}\right)_{(X_1)_t(x)}\left(X_2\left((X_1)_t(x)\right)\right)\right)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(d\left((Y_1)_{-t} \circ \phi\right)_{(X_1)_t(x)}\left(X_2\left((X_1)_t(x)\right)\right)\right)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(d\left((Y_1)_{-t}\right)_{\phi\circ(X_1)_t(x)}\left(d\phi_{(X_1)_t(x)}\left(X_2\left((X_1)_t(x)\right)\right)\right)\right)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(d\left((Y_1)_{-t}\right)_{(Y_1)_t\circ\phi(x)}\left(Y_2 \circ \phi\left((X_1)_t(x)\right)\right)\right)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(d\left((Y_1)_{-t}\right)_{(Y_1)_t(\phi(x))}\left(Y_2\left((Y_1)_t(\phi(x))\right)\right)\right)_{|t=0} \\
&= [Y_1, Y_2](\phi(x))
\end{aligned}$$

Assim, temos $d\phi_x\left([X_1, X_2](x)\right) = [Y_1, Y_2](\phi(x))$, ou seja, $[X_1, X_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ são ϕ-relacionados.

■

Em particular, se ϕ é um difeomorfismo então

$$\phi_*[X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]. \tag{A.6}$$

De fato, como $\phi_* X$ é ϕ-relacionado com X, e $\phi_* Y$ é ϕ-relacionado com Y, então pela Proposição A.2.2, temos que $[X, Y]$ é ϕ-relacionado com $[\phi_* X, \phi_* Y]$. Mas pela Proposição A.1.3, existe um único campo ϕ-relacionado com $[X, Y]$, e é igual a $\phi_*[X, Y]$. Portanto, $\phi_*[X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$.

Finalmente vamos ver uma proposição que combina colchete de Lie, fluxos de campos vetoriais e campos relacionados por um difeomorfismo.

Proposição A.2.3. *Sejam X e Y campos de vetores em M. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

1) X *e* Y *comutam, isto é,* $[X, Y] = 0$*;*

2) $(X_t)_* Y = Y$ *para todo* t*;*

3) $(Y_t)_* X = X$ *para todo* t*;*

4) $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$ *para todo* s, t*.*

Demonstração: Ver Proposição A.7 em [13]. ■

Referências Bibliográficas

[1] V. Ayala and J. Tirao: *Linear Control Systems on Lie Groups and Controllability.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. 64, AMS (1999) 47-64.

[2] N. Bourbaki: Groupes et algèbres de Lie. Chap. 1. CCLS, 1972.

[3] N. Bourbaki: Groupes et algèbres de Lie. Chaps. 2, 3. CCLS, 1972.

[4] F. Cardetti and D. Mittenhuber: *Local controllability for linear control systems on Lie groups.* J. Dynam. Control Systems 11 (2005), No. 3, 353–373.

[5] P. Jouan: *Finite Time and Exact time Controllability on Compact Manifolds.* arXiv:1004.5224 [math.OC] (2010)

[6] P. Jouan: *Equivalence of Control Systems with Linear Systems On Lie Groups and Homogeneous Spaces.* ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 16 (2010), 956–973.

[7] P. Jouan: *Controllability of Linear Systems on Lie Groups.* J. Dynam. Control Systems, Vol. 17, No. 4, (2011), 591-616.

[8] P. Jouan: *Invariant measures and controllability of finite systems on compact manifolds.* ESAIM: COCV Volume 18, Number 3, July-September 2012, 643-655.

[9] V. Jurdjevic: Geometric Control Theory. Cambridge University Press, 1997.

[10] V. Jurdjevic and H. J. Sussmann: *Control systems on Lie groups.* J. Differ. Eq. 12 (1972), 313-329.

[11] L. Markus: *Controllability of multitrajectories on Lie groups.* Dynamical systems and turbulence, Warwick (1980), Lect. Notes Math. 898, Springer, Berlin-New York (1981) 250–265.

[12] B. O'Neil: Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Academic Press, 1983.

[13] L. San Martin: Grupos de Lie. Editora Unicamp, 2017.

[14] L. San Martin: Álgebras de Lie. Editora Unicamp, 2010.

[15] L. San Martin and V. Ayala: *Controllability properties of a class of control systems on Lie groups*. Nonlinear control in 2000, **1** (Paris), pp.83-92; Lect. Notes Control Inform. Sci. **258**, Springer-Verlag, London (2001).

[16] L. San Martin and P. Tonelli: *Semigroup actions on homogeneous spaces*. Semigroup Forum 50 (1995), 59–88. 19. E. D. Sontag. Mathematical control theory. Springer-Verlag, New-York

[17] J. Stillwell: Naive Lie Theory. Springer, 2008.

[18] H. J. Sussman: *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*. Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973), 171-188.