



Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Sólitons de Translação do Fluxo da Curvatura Média Harmônica a partir de Superfícies Máximas

Mateus de Andrade Cruz Dutra

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
qualificação do Mestrado em Matemática

Orientador  
Pedro Roitman

Brasília  
2019



Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Sólitons de Translação do Fluxo da Curvatura Média Harmônica a partir de Superfícies Máximas

Mateus de Andrade Cruz Dutra

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
qualificação do Mestrado em Matemática

Pedro Roitman (Orientador)

UnB

Ronaldo Freire Lima    João Paulo dos Santos

UFRN

UnB

do Programa de Pós-graduação em Matemática

Brasília, 25 de dezembro de 2019

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Solitons de Translação do Fluxo da Curvatura Média Harmônica a partir de Superfícies Máximas

por

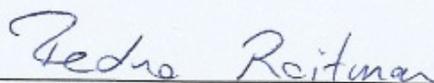
Mateus de Andrade Cruz Dutra

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade  
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

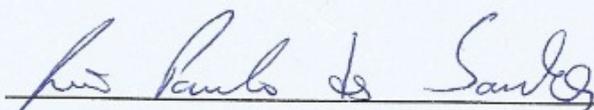
**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 13 de fevereiro de 2020.

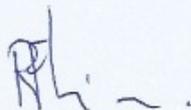
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Pedro Roitman - MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. João Paulo dos Santos – MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Ronaldo Freire de Lima – UFRN (Membro)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

d0978s de Andrade Cruz Dutra, Mateus  
Sólitons de translação do fluxo da curvatura média  
harmônica e superfícies máximas / Mateus de Andrade Cruz  
Dutra; orientador Pedro Roitman. -- Brasília, 2020.  
50 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --  
Universidade de Brasília, 2020.

1. Geometria diferencial. 2. Fluxos geométricos. 3.  
Sólitons de translação. I. Roitman, Pedro, orient. II. Título.

# Agradecimentos

*O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.*

# Resumo

No artigo [1], os autores estudam o problema de construir superfícies no semiespaço superior do  $R^3$  em que as curvaturas de Gauss induzidas pela métrica euclidiana e pela métrica hiperbólica coincidem. Neste trabalho mostraremos que, se  $S$  é uma superfície no semiespaço e  $K$  e  $K_h$  são as curvaturas de Gauss induzidas pela métrica euclidiana e hiperbólica, respectivamente, então a quantidade  $\frac{K}{K_h}$  é invariante por transformações paralelas com relação a métrica hiperbólica. Isso permite interpretar a construção feita em [1] como o estudo de superfícies em que esse invariante é constante positivo. Em [1], os autores também comentam que é possível adaptar a construção para obter superfícies em que esse invariante é constante negativo. Ao longo deste texto, iremos detalhar o processo de construção dessas superfícies a partir de superfícies máximas no espaço de Lorentz. Mostraremos também como usar essa construção para caracterizar localmente todos os sólitons de translação do fluxo da curvatura média harmônica, definido pela seguinte regra

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} F \right)^\perp = \frac{K}{H} N, \\ F(\cdot, 0) = \textit{identidade}, \end{cases}$$

em que a normal ao sólito não é paralela à direção de translação em nenhum ponto. Por último, iremos mostrar um resultado que permite construir exemplos explícitos desses sólitons através da representação Weierstrass para superfícies máximas no espaço de Lorentz e discutiremos a possibilidade de se obter uma caracterização local completa.

# Abstract

In the article [1], the authors study the problem of constructing surfaces in Euclidean half space with the property that the Gaussian curvatures induced by the Euclidean and hyperbolic metrics coincide. In this work, we will show that, if  $S$  is a surface in Euclidean half space and  $K$  and  $K_h$  denote the Gaussian curvatures induced by the Euclidean and hyperbolic metrics, respectively, then the ratio  $\frac{K}{K_h}$  is invariant by parallel transformations with respect to the hyperbolic metric. This allows us to interpret the construction made in [1] as surfaces on which this invariant is a positive constant. In [1], the authors also point out that it is possible to adapt the construction to obtain surfaces where this invariant is a negative constant. Throughout this text, we will detail the process of constructing these surfaces starting from maximal surfaces in Lorentz space. Furthermore, we will show how to use that construction to locally characterize all the translating solitons of the harmonic mean curvature flow, defined by the following rule

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} F)^\perp = \frac{K}{H} N \\ F(\cdot, 0) = \textit{identity} \end{cases}$$

where the normal to the soliton is not parallel to the translation direction at any point. Finally, we will demonstrate a result that allows the construction of explicit examples of these solitons through the Weierstrass representation for maximal surfaces in Lorentz space and we will discuss the possibility of obtaining a complete local characterization.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1	Fluxo da curvatura média harmônica . . . . .	3
2.2	Geometria hiperbólica . . . . .	4
2.2.1	Modelo do semiespaço . . . . .	5
2.2.2	Modelo do hiperbolóide . . . . .	7
2.3	Imersões isométricas e curvatura de superfícies em $H^3$ . . . . .	8
2.3.1	Curvaturas em $H^3$ . . . . .	10
2.4	Representação de Weierstrass para superfícies máximas em $L^3$ . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Um invariante associado a superfícies paralelas em <math>H^3</math></b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Superfícies isocurvadas e anti-isocurvadas</b>	<b>17</b>
4.1	Construção das superfícies isocurvadas . . . . .	17
4.2	Construção das superfícies anti-isocurvadas . . . . .	19
4.3	Adaptação da construção . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Sólitons de translação do HMCF e superfícies máximas</b>	<b>25</b>
5.1	Caracterização dos sólitons do HMCF como gráfico de função . . . . .	25
5.2	Relação entre os sólitons do fluxo HMCF e superfícies anti-isocurvadas . . . . .	26
5.2.1	Exemplo . . . . .	31
5.3	Caracterização como ponto crítico de um funcional . . . . .	34
5.3.1	Interpretação geométrica do funcional $\Omega$ . . . . .	35
5.4	Metodo geométrico de se construir exemplos . . . . .	36
5.4.1	Exemplos explícitos de sólitons de translação do HMCF . . . . .	39
5.5	Discussão sobre uma possível caracterização dos sólitons do HMCF . . . . .	41
	<b>Referências</b>	<b>44</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Ao longo dos últimos anos, os fluxos geométricos têm se tornado cada vez mais importantes no contexto da geometria diferencial e, hoje, representam uma grande parte das publicações nessa área.

A popularidade desse objeto é resultado não apenas da grande quantidade de problemas interessantes envolvendo suas propriedades, mas também da sua utilidade como ferramenta de resolução dos mais variados problemas nas áreas de geometria diferencial, análise e topologia. Nesse sentido, podemos destacar dois exemplos de aplicação do estudo de fluxos geométricos na resolução de problemas: o teorema da esfera diferenciável, conforme feito em [2], e a prova da conjectura de Poincaré.

Nessa dissertação, no entanto, estamos interessados nos fluxos como objetos em si. Inicialmente, faremos uma breve apresentação do fluxo da curvatura média harmônica, definido pela seguinte regra,

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}F\right)^\perp = \frac{K}{H}N, \\ F(\cdot, 0) = \textit{identidade}. \end{cases}$$

Em seguida, mostraremos um método para construção de uma classe especial de superfícies em que a ação do fluxo é a de realizar uma translação. Essa classe recebe o nome de sólitons de translação. Apresentaremos um exemplo que sugere uma possível forma de caracterizar completamente essa classe, ainda que existam sólitons que não podem ser obtidos pelas técnicas desenvolvidas nesse trabalho.

Além disso, o método que exibiremos evidencia algumas relações desses sólitons com dois objetos geométricos: as superfícies máximas do espaço de Lorentz e as superfícies definidas no semiespaço euclidiano em que as curvaturas induzidas pela métrica euclidiana e hiperbólica coincidem a menos de um sinal. Essas últimas serão chamadas de superfícies anti-isocurvadas.

Enquanto o estudo das superfícies máximas do espaço de Lorentz é um tema clássico da geometria, as superfícies anti-isocurvadas foram mencionadas pela primeira vez em [1]. Nesse artigo, os autores estudaram as superfícies onde as duas curvaturas coincidem e comentaram, sem muita profundidade, o caso em que elas diferem apenas por um sinal. No presente trabalho, incluiremos os detalhes omitidos no artigo e apresentaremos um invariante geométrico que permite interpretar essas superfícies de uma forma interessante.

Em síntese, esse trabalho se propõe a explorar as propriedades dos sólitons de translação do fluxo da curvatura média harmônica e desenvolver um método capaz de produzir exemplos explícitos destes.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo iremos definir o fluxo da curvatura média harmônica e os chamados sólitons de translação para este fluxo. Além disso, também apresentaremos os conceitos básicos da geometria hiperbólica que serão usados nos capítulos seguintes para construir exemplos desses sólitons.

### 2.1 Fluxo da curvatura média harmônica

Seja  $S \subset R^3$  uma superfície orientada cuja curvatura média não se anula, e considere uma família a 1-parâmetro de superfícies  $F(\cdot, t)$  definida em  $S \times I$ , onde  $I$  é um intervalo contendo 0. Dizemos que  $F$  é uma evolução de  $S$  pelo fluxo da curvatura média harmônica, abreviado por HMCF se

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} F)^\perp = \frac{K}{H} N, \\ F(\cdot, 0) = \textit{identidade}, \end{cases}$$

onde  $K$  é a curvatura de Gauss,  $H$  a curvatura média e  $N$  uma escolha de campo normal e unitário a  $S$  e  $(\frac{\partial}{\partial t} F)^\perp$  denota a projeção de  $\frac{\partial}{\partial t} F$  no vetor  $N$ . Alguns exemplos de trabalho em que esse fluxo foi estudado são [3] e [4]

$S$  é dito um sóliton de translação se existe uma evolução  $F(\cdot, t)$  de  $S$  pelo fluxo de tal forma que o fluxo seja uma translação, isto é, quando existe  $v \in R^3$  tal que

$$F(p, t) = p + tv.$$

Note que, a menos de realizar uma rotação, podemos supor sem perda de generalidade que  $v = (0, 0, \lambda)$ . Substituindo na definição do fluxo, vemos que isso equivale a

$$\langle N, v \rangle = \frac{K}{H} \Rightarrow |v| \cos \theta = \frac{K}{H}.$$

Observe agora que aplicando uma dilatação de fator  $\frac{1}{\lambda}$ , podemos supor sem perda de generalidade que  $\lambda = 1$ , ou seja, que  $v = (0, 0, 1)$ . Note que no caso em que  $v = (0, 0, 1)$ , a equação do fluxo equivale a

$$\cos \theta = \frac{K}{H}.$$

Esta observação nos permite enunciar o seguinte resultado.

**Proposição 2.1.** *Uma superfície euclidiana  $S$  em que a curvatura média não se anula é um sólito de translação do fluxo da curvatura média harmônica se, e somente se, a menos de uma rotação e uma dilatação,  $S$  satisfaz*

$$\cos(\theta) = \frac{K}{H},$$

onde  $\theta$  é o ângulo que a normal a  $S$  faz com a direção vertical.

Por simplicidade, iremos enunciar o seguinte corolário, que não desempenha nenhum papel teórico neste trabalho e servirá apenas para simplificar as contas nos próximos capítulos.

**Corolário.** *Uma condição necessária e suficiente para que uma superfície  $S$  em que a curvatura média não se anula seja um sólito de translação para o fluxo da curvatura média harmônica é que, a menos de uma rotação e uma dilatação,  $S$  satisfaça*

$$4 \cos(\theta) = \frac{K}{H}.$$

## 2.2 Geometria hiperbólica

O espaço hiperbólico  $n$ -dimensional pode ser caracterizado como a única forma espacial simplesmente conexa de dimensão  $n$  e curvatura seccional  $k = -1$ , a menos de isometria. Existem várias maneiras de se construir o espaço hiperbólico, dentre elas o modelo do semiespaço e o modelo do hiperbolóide, que serão usados neste texto. A primeira será particularmente importante, pois iremos comparar a geometria de superfícies no semi-espaço considerando duas métricas distintas: a hiperbólica e a euclidiana. A segunda maneira será apresentada pela conveniência de se escrever as geodésicas do espaço nesse modelo.

## 2.2.1 Modelo do semiespaço

O semiespaço euclidiano 3-dimensional é a subvariedade

$$R_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 > 0\}$$

do espaço euclidiano.

O modelo do semiespaço para o espaço hiperbólico 3-dimensional, denotado por  $H^3$ , consiste do semiespaço euclidiano com a seguinte métrica

$$g_{(x_1, x_2, x_3)} = \langle \cdot \rangle_{(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{x_3^2} \langle \cdot \rangle,$$

onde  $\langle \cdot \rangle$  denota o produto interno usual de  $R^3$ . Com frequência deixaremos o subíndice  $(x_1, x_2, x_3)$  implícito.

Em geral, as propriedades geométricas de uma superfície podem ser descritas em termos dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, definidas a seguir.

**Definição 2.1.** *Seja  $S \subset H^3$  uma superfície,  $X : U \subset R^2 \rightarrow S$  uma parametrização local de classe  $C^2$  e  $N_h$  a normal hiperbólica da superfície  $S$  no sistema de coordenadas  $X$ . Definimos os coeficientes  $E_h, F_h$  e  $G_h$  da primeira forma fundamental hiperbólica e os coeficientes  $e_h, f_h$  e  $g_h$  da segunda forma fundamental hiperbólica de  $S$  no sistema de coordenadas  $X$  por*

$$\begin{aligned} E_h &= g(X_u, X_u), & e_h &= g(\nabla_{X_u} X_u, N_h), \\ F_h &= g(X_u, X_v), & f_h &= g(\nabla_{X_u} X_v, N_h), \\ G_h &= g(X_v, X_v), & g_h &= g(\nabla_{X_v} X_v, N_h), \end{aligned}$$

onde  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita de  $H^3$ .

Conhecendo os coeficientes definidos acima, é possível calcular as curvaturas hiperbólicas da superfície  $S$ . Dessa forma, como estamos interessados em relacionar a geometria euclidiana e hiperbólica, é útil relacionar os coeficientes da primeira e segunda forma da geometria hiperbólica com os da geometria euclidiana. A proposição a seguir cumpre esse propósito.

**Proposição 2.2.** *Seja  $S$  uma superfície definida no semiespaço superior e  $X : U \subset R^2 \rightarrow S$  uma parametrização local de classe  $C^2$ . Usando a notação da definição 2.1, valem as*

seguintes fórmulas

$$E_h = \frac{E}{x_3^2}, \quad e_h = \frac{e}{x_3} + \frac{N_3}{x_3^2}E, \quad (2.2a)$$

$$F_h = \frac{F}{x_3^2}, \quad f_h = \frac{f}{x_3} + \frac{N_3}{x_3^2}F, \quad (2.2b)$$

$$G_h = \frac{G}{x_3^2}, \quad g_h = \frac{g}{x_3} + \frac{N_3}{x_3^2}G. \quad (2.2c)$$

**Demonstração.** As fórmulas para  $E_h, F_h$  e  $G_h$  seguem diretamente da definição da métrica hiperbólica. Vamos então mostrar a fórmula para  $e_h$ . As demais seguem de forma análoga.

Defina a função  $Y : U \times R \rightarrow H^3$  por  $Y(u, v, t) = X(u, v) + tN_h(u, v)$ , onde  $N_h$  é a normal hiperbólica da superfície, e fixe  $(u_0, v_0) \in U$  arbitrariamente. Da definição de superfície, segue que  $Y_u(u_0, v_0, 0), Y_v(u_0, v_0, 0)$  e  $Y_t(u_0, v_0, 0)$  são vetores linearmente independentes.

Como  $X$  é de classe  $C^2$ , então  $Y$  é de classe  $C^1$ , e pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança  $V$  de  $(u_0, v_0, 0)$  tal que  $Y|_V$  é um difeomorfismo de  $V$  em  $Y(V)$ . Em particular,  $[Y_u, Y_v], [Y_u, Y_t]$  e  $[Y_v, Y_t]$  são campos que se anulam em  $Y(V)$ , onde  $[ \cdot ]$  denota o colchete de Lie. Além disso, observe que  $g(Y_u, Y_t) = g(Y_v, Y_t) = 0, \quad \forall (u, v, t) \in U \times R$ . Observe agora que  $e_h$  pode ser calculado usando  $Y$  da seguinte forma

$$e_h(u_0, v_0) = g(\nabla_{X_u} X_u, N_h)(u_0, v_0) = g(\nabla_{Y_u} Y_u, Y_t)(u_0, v_0, 0).$$

Agora, omitindo os argumentos das funções, segue da fórmula de Koszul que

$$\begin{aligned} e_h &= g(\nabla_{Y_u} Y_u, Y_t) = \frac{1}{2} \{ Y_u g(Y_u, Y_t) + Y_u g(Y_t, Y_u) - Y_t g(Y_u, Y_u) \\ &\quad - g([Y_u, Y_t], Y_u) - g([Y_u, Y_t], Y_u) - g([Y_u, Y_u], Y_t) \} \Rightarrow \\ e_h &= -\frac{1}{2} Y_t g(Y_u, Y_u) = -\frac{1}{2} N_h \left( \frac{1}{x_3^2} \langle Y_u, Y_u \rangle \right). \end{aligned}$$

Como a métrica hiperbólica é conforme à métrica euclidiana, existe  $\lambda \in R$  tal que  $N_h = \lambda N$ . Além disso, temos que  $1 = g(N_h, N_h) = \frac{\lambda^2}{x_3^2} \langle N, N \rangle = \frac{\lambda^2}{x_3^2}$ . Mantendo a orientação, chegamos a  $\lambda = x_3$  e  $N_h = x_3 N$ . Dessa forma, temos

$$e_h = \langle \nabla_{X_u} X_u, N \rangle (u_0, v_0) = \langle \nabla_{Y_u} Y_u, \frac{N_h}{x_3} \rangle (u_0, v_0, 0) = \frac{1}{x_3} \langle \nabla_{Y_u} Y_u, Y_t \rangle (u_0, v_0, 0).$$

Por outro lado, segue de uma conta rigorosamente análoga à de cima que

$$e = -\frac{1}{2x_3}N_h(\langle Y_u, Y_u \rangle) = -\frac{1}{2}N \langle Y_u, Y_u \rangle .$$

Escrevendo  $N = N_1\frac{\partial}{\partial x_1} + N_2\frac{\partial}{\partial x_2} + N_3\frac{\partial}{\partial x_3}$  e substituindo  $N_h$  por  $x_3N$  na expressão para  $e_h$ , temos

$$e_h = -\frac{1}{2}Y_tg(Y_u, Y_u) = -\frac{1}{2}x_3N\left(\frac{1}{x_3^2}\langle Y_u, Y_u \rangle\right) = -\frac{1}{2}\left\{-2\frac{N_3}{x_3^2}\langle Y_u, Y_u \rangle + \frac{1}{x_3}N \langle Y_u, Y_u \rangle\right\} \Rightarrow$$

$$e_h = -\frac{N_3}{x_3^2}\langle X_u, X_u \rangle - \frac{1}{2x_3}N \langle Y_u, Y_u \rangle = \frac{N_3}{x_3^2}E + \frac{e}{x_3},$$

que é a fórmula para  $e_h$ . As fórmulas para  $f_h$  e  $g_h$  seguem de forma rigorosamente análoga. Isso conclui a demonstração. □

## 2.2.2 Modelo do hiperbolóide

O modelo do hiperbolóide é uma outra maneira de se construir o espaço hiperbólico. Informalmente, essa construção surge de pensar o espaço hiperbólico como uma esfera de raio complexo.

Considere o espaço  $R^4$  dotado do seguinte produto interno

$$\langle x, y \rangle_l = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

Esse produto interno é chamado de métrica de Lorentz em  $R^4$ .

O conjunto  $\{x \in R^4 \mid \langle x, x \rangle_l = -1\}$  é formado por um hiperbolóide de duas folhas. O espaço hiperbólico pode ser caracterizado por uma dessas folhas, por exemplo

$$H^3 = \{x \in R^4 \mid \langle x, x \rangle_l = -1, x_4 > 0\}$$

com a métrica induzida por  $\langle . \rangle_l$ .

As geodésicas nesse modelo são as curvas da forma

$$\gamma(t) = \cosh(t)u + \sinh(t)v \tag{2.3}$$

onde  $u = \gamma(0)$  e  $v = \frac{d\gamma}{dt}(0)$ .

As provas formais de que esse espaço é de fato um modelo para o espaço hiperbólico e de que valem as expressões acima para as geodésicas podem ser encontradas em [5].

## 2.3 Imersões isométricas e curvatura de superfícies em $H^3$

Esta seção tem como objetivos apresentar fórmulas para calcular as curvaturas de uma superfície em  $H^3$  e relacioná-las no modelo do semiespaço com as curvaturas da mesma superfície em  $R^3$  usando a proposição 2.2.

Ao longo de toda essa seção, consideraremos  $S \subset H^3$  uma superfície,  $\chi(U)$  o conjunto de todos os campos locais de vetores tangentes definidos em um aberto  $U \subset H^3$  ou  $U \subset S$ ,  $\chi(U)^\perp$  o conjunto de todos os campos locais de vetores normais a  $S$  definidos em um aberto  $U \subset S$ ,  $D(U)$  o conjunto das funções  $f : U \rightarrow R$  de classe  $C^2$  definidas em um aberto  $U \subset H^3$  ou  $U \subset S$ ,  $\bar{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita de  $H^3$  e  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita de  $S$ .

Dado um ponto  $p \in S$ , o espaço tangente a  $H^3$  no ponto  $p$  pode ser escrito como  $T_p H^3 = T_p S \oplus (T_p S)^\perp$ , onde  $(T_p S)^\perp$  é o espaço gerado pela normal de  $S$  no ponto  $p$ . Um vetor  $v \in T_p H^3$  pode ser escrito de uma única maneira como  $v = v_1 + v_2$ , com  $v_1 \in T_p S$  e  $v_2 \in (T_p S)^\perp$ . Escreveremos então  $v_1 = v^T$  e  $v_2 = v^\perp$ .

Considere agora um campo  $X$  de vetores tangentes a  $S$ . Como a aplicação identidade  $id : S \rightarrow H^3$  é uma imersão, segue da forma local das imersões que existe uma aplicação  $\phi : \bar{U} \rightarrow R^3$ , de uma vizinhança  $\bar{U}$  de  $p$  em  $H^3$ , que leva  $\bar{U} \cap S$  difeomorficamente em um aberto de  $R^2 \sim \{(x, y, 0) \in R^3 | x, y \in R\}$ . Esse difeomorfismo permite olhar a restrição do campo  $X$  ao aberto  $V \cap S \subset S$  como um campo  $Y$  em um aberto  $V$  de  $R^2$ . Usando essa identificação, podemos resumir a questão de estender o campo  $X$  em uma vizinhança de  $p$  em  $H^3$  à simples tarefa de estender o campo  $Y$  em uma vizinhança de  $\phi(p)$  em  $R^3$ , o que é trivialmente possível. Dessa forma, é sempre possível estender localmente um campo em  $S$  a um campo local  $\bar{X}$  definido em uma vizinhança  $\bar{U} \subset H^3$ .

Pelas considerações feitas acima, se  $X, Y \in \chi(U)$  são campos locais de vetores tangentes a  $S$  em uma vizinhança de  $p$  em  $S$ , é possível mostrar por uma simples verificação que a conexão de Levi-Civita  $\nabla$  de  $S$  induzida por  $H^3$  é dada da seguinte forma

$$\nabla_Y X(p) = (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}(p))^T$$

onde  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  são extensões locais dos campos  $X$  e  $Y$  em uma vizinhança de  $p$  em  $H^3$ . Note que a expressão para  $\nabla$  está bem definida, isto é, não depende das extensões escolhidas para  $X$  e  $Y$ . De fato,  $\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}$  só depende do valor de  $\bar{Y}$  no ponto  $p$  e do valor de  $\bar{X}$  ao longo de uma curva  $c : (\epsilon, \epsilon) \rightarrow H^3$  que passa pelo ponto  $p$  com velocidade  $\bar{Y}(p)$ . Como  $\bar{Y}(p) = Y(p) \in T_p S$ , esta curva pode ser tomada em  $S$ , tendo assim  $\bar{X}(c(t)) = X(c(t))$  para  $t$  pequeno. Por esta razão, escreveremos  $\bar{\nabla}_Y X$  para campos locais definidos em  $S$

sem mencionar extensões para  $X$  e  $Y$ .

A função  $\nabla$  traduz todas as propriedades geométricas intrínsecas a  $S$ . Para analisar as propriedades do mergulho de  $S$  em  $H^3$ , é preciso olhar para a componente normal de  $\bar{\nabla}$ . As duas definições a seguir são as que mais nos interessam nessa seção.

**Definição 2.2.** *Seja  $U \subset S$  um aberto e  $X, Y \in \chi(U)$ . Definimos a função  $B : \chi(U) \times \chi(U) \rightarrow \chi(U)^\perp$  por*

$$B(X, Y) = \nabla_{\bar{Y}}\bar{X} - \bar{\nabla}_Y X.$$

A função  $B$  é chamada de segunda forma fundamental de  $S$  em  $H^3$ .

Verifica-se da definição que  $B$  é simétrica e bilinear sobre o anel  $D(U)$ . Em particular, se  $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  é uma carta local definida em uma vizinhança de um ponto  $p \in S$  e  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  são os campos coordenados, então escrevendo  $X = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $Y = \sum y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , temos que

$$B(X, Y) = B\left(\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} x_i y_j B\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Em particular,  $B(X, Y)(p)$  depende apenas de  $X(p)$  e  $Y(p)$ . Isso nos permite escrever  $B(x, y)$  com  $x, y \in T_p S$  sem ambiguidade. A partir dessa observação, seguiremos com a próxima definição fundamental dessa seção.

**Definição 2.3.** *Dado  $p \in S$  e fixando um vetor  $\eta \in (T_p S)^\perp$ , com  $|\eta| = 1$ , definimos a função  $S_\eta : T_p S \rightarrow T_p S$  por*

$$g(S_\eta(x), y) = g(B(x, y), \eta).$$

A função  $S_\eta$  é um análogo para  $H^3$  da derivada da aplicação de Gauss para superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Como  $B$  é simétrica, então  $S_\eta$  possui uma base de autovalores ortonormais  $\{e_1, e_2\}$ , com autovalores  $k_1, k_2$ . Define-se a curvatura extrínseca de  $S$  por  $K_{ext} = k_1 k_2$  e a curvatura média de  $S$  por  $H_h = \frac{k_1 + k_2}{2}$ . A curvatura extrínseca pode ser usada para calcular a curvatura de  $S$  a partir da equação de Gauss, enunciada a seguir.

**Teorema 2.1.** *Sejam  $R$  e  $\bar{R}$  os tensores curvatura de Ricci da superfície  $S$  e  $H^3$ , respectivamente. Então vale a seguinte equação*

$$g(\bar{R}(X, Y)Z, T) - g(R(X, Y)Z, T) = -g(B(Y, T), B(X, Z)) + g(B(X, T), B(Y, Z)).$$

Em particular, seja  $K_h$  a curvatura hiperbólica de  $S$ ,  $\bar{K} = -1$  a curvatura de  $H^3$  e  $x, y \in T_p S$  ortonormais, então:

$$K - \bar{K} = K + 1 = g(B(x, x), B(y, y)) - |B(x, y)|^2.$$

**Corolário.** Escolhendo  $x = e_1$  e  $y = e_2$  na expressão acima, onde  $e_1$  e  $e_2$  são autovalores ortonormais de  $S_\eta$ , então  $B(x, x) = k_1\eta$ ,  $B(y, y) = k_2\eta$  e  $B(x, y) = 0$ . Em particular, vale a seguinte fórmula

$$K_h = K_{ext} - 1. \quad (2.4)$$

Dessa forma, se escrevermos  $K_{ext}$  em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental atingiremos o objetivo dessa seção. A seguinte proposição reduz esse problema a uma simples questão de álgebra linear.

**Proposição 2.3.** Seja  $p \in S$ ,  $x \in T_pS$  e  $\eta \in (T_pS)^\perp$ , com  $|\eta| = 1$ , e seja  $N$  a normal de  $S$  definida em uma vizinhança  $U \subset S$  de  $p$  com  $N(p) = \eta$ . Nessas condições, vale a seguinte expressão para  $S_\eta$

$$S_\eta = -(\nabla_x N)^T.$$

**Demonstração.** Seja  $y \in T_pS$  e sejam  $X$  e  $Y$  campos locais de vetores tangentes a  $S$  que estendem  $x$  e  $y$ . Como  $g(N, y) = 0$ , temos  $g(\bar{\nabla}_X Y, N) = -g(Y, \bar{\nabla}_X N)$ . Daí,

$$g(S_\eta(x), y) = g(B(X, Y), N) = g(\bar{\nabla}_X Y, N) = -g(Y, \bar{\nabla}_X N) = g(-\bar{\nabla}_X N, y).$$

Como  $y \in T_pS$  é arbitrário, segue o resultado. □

### 2.3.1 Curvaturas em $H^3$

Para calcularmos  $K_{ext}$  em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental, considere uma carta local  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em uma vizinhança de  $p \in S$ . A matriz de  $S_\eta$  pode ser escrita na base  $\{X_u, X_v\}$  como a matriz  $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , onde

$$S_\eta(X_u) = a_{11}X_u + a_{21}X_v, \quad S_\eta(X_v) = a_{12}X_u + a_{22}X_v.$$

Tomando o produto interno das expressões acima com  $X_u$  e com  $X_v$ , temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -e_h = a_{11}E_h + a_{21}F_h, \\ -f_h = a_{11}F_h + a_{21}G_h, \\ -f_h = a_{12}E_h + a_{22}F_h, \\ -g_h = a_{12}F_h + a_{22}G_h. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, podemos mostrar a seguinte proposição.

**Proposição 2.4.** *Valem as seguintes fórmulas para a curvatura extrínseca  $K_{ext}$ , para a curvatura hiperbólica  $K_h$  e para a curvatura média  $H_h$  de  $S$ :*

$$K_{ext} = \det(\{a_{ij}\}) = \frac{e_h g_h - f_h^2}{E_h G_h - F_h^2}, \quad (2.5a)$$

$$K_h = K_{ext} - 1 = \frac{e_h g_h - f_h^2}{E_h G_h - F_h^2} - 1, \quad (2.5b)$$

$$H_h = \frac{1}{2} \text{tr}(\{a_{ij}\}) = \frac{1}{2} \frac{e_h G_h - 2f_h F_h + g_h E_h}{E_h G_h - F_h^2}. \quad (2.5c)$$

Outra fórmula que será útil mais adiante é a descrita na proposição a seguir.

**Proposição 2.5.** *Seja  $S$  uma superfície definida no semiespaço superior,  $K$  a curvatura euclidiana de  $S$ ,  $H$  curvatura média euclidiana de  $S$ ,  $K_h$  a curvatura hiperbólica de  $S$  e  $H_h$  a curvatura média hiperbólica de  $S$ . Então valem as seguintes fórmulas*

$$K = \frac{1}{x_3^2} (K_h - 2\eta_3 H_h + \eta_3^2 + 1), \quad (2.6a)$$

$$H = \frac{H_h - \eta_3}{x_3}, \quad (2.6b)$$

onde  $\eta_3$  é a terceira componente da normal euclidiana e  $x_3$  é a terceira coordenada de  $S$  na base canônica.

**Demonstração.** As proposições 2.2 e 2.4 permitem escrever a expressão acima em termos de  $x_3$ ,  $\eta_3$  e dos coeficientes da primeira e segunda forma euclidianas. Basta fazer a substituição e ver que a igualdade se verifica. □

Outras fórmulas úteis são as fórmulas para as curvaturas das superfícies paralelas a  $S$  na geometria hiperbólica, que chamaremos de superfícies  $h$  – paralelas.

**Proposição 2.6.** *Sejam  $S \subset H^3$  uma superfície,  $S^t$  uma superfície  $h$ -paralela a  $S$  obtida andando uma distância  $t$  ao longo das geodésicas que cortam  $S$  ortogonalmente. Sejam também  $K_h$  a curvatura hiperbólica de  $S$ ,  $H_h$  a curvatura média de  $S$ ,  $K_h^t$  a curvatura hiperbólica de  $S^t$  e  $H_h^t$  a curvatura média de  $S^t$ . Então*

$$K_h^t = \frac{K_h}{s^2 K_h - 2H_h s c + c^2 + s^2}, \quad (2.7a)$$

$$H_h^t = \frac{(c^2 + s^2)H_h - s c (K_h + 2)}{s^2 K_h - 2H_h s c + c^2 + s^2}, \quad (2.7b)$$

onde  $s = \sinh(t)$  e  $c = \cosh(t)$ .

**Demonstração.** Por 2.3, cada ponto  $p^t \in S^t$  é obtido a partir de um ponto  $p \in S$  pela expressão  $P^t = \cosh(t)P + \sinh(t)N(p)$ , onde  $N$  é a normal de  $S$ . Dada uma carta

$X : U \subset R^2 \rightarrow S$ , considere a carta  $X^t : U \rightarrow S^t$  induzida por  $X$ , isto é,  $X^t(u, v) = \cosh(t)X(u, v) + \sinh(t)N(u, v)$ . Usando a proposição 1.2 para calcular  $K_h^t$  e  $H_h^t$  pela carta  $X^t$ , e  $K_h$  e  $H_h$  pela carta  $X$ , as igualdades acima se verificam.

Em [6] é possível ver as contas feitas com detalhes.

□

**Corolário.** *A proposição acima, juntamente com a proposição 2.5, fornece*

$$\begin{aligned} K^t &= \frac{1}{(x_3^t)^2} (K_h^t + 1 - 2H_h^t \eta_3^t + (\eta_3^t)^2) = \\ &\frac{1}{q(x_3^t)^2} (c^2 + 2\eta_3^t sc + (\eta_3^t)^2 s^2) K_h + \\ &\frac{1}{q(x_3^t)^2} (-2sc - 2\eta_3^t (c^2 + s^2) - 2(\eta_3^t)^2 sc) H_h + \\ &\frac{1}{q(x_3^t)^2} (c^2 + s^2 + 4\eta_3^t sc + (c^2 + s^2)(\eta_3^t)^2), \end{aligned}$$

onde  $q = s^2 K_h - 2H_h sc + c^2 + s^2$ .

## 2.4 Representação de Weierstrass para superfícies máximas em $L^3$

Nos próximos capítulos, iremos mostrar como construir sólitons de translação do fluxo da curvatura média harmônica a partir de superfícies máximas no espaço de Lorentz  $L^3$ . As superfícies máximas de  $L^3$  possuem uma caracterização semelhante às superfícies mínimas de  $R^3$ . Apresentaremos a seguir esta caracterização, chamada representação de Weierstrass para superfícies máximas, e introduziremos o conceito de superfície máxima conjugada, que desempenhará um papel crucial na construção dos sólitons de translação do fluxo da curvatura média harmônica.

**Teorema 2.2.** *Toda superfície máxima do tipo espaço de  $L^3$  é representada localmente por*

$$X(\zeta) = \operatorname{Re} \int \left( \frac{1}{2} f(1 + g^2), \frac{i}{2} f(1 - g^2), -fg \right) d\zeta, \quad \zeta \in D,$$

onde  $D$  é um domínio simplesmente conexo de  $C$ ,  $f$  uma função holomorfa e  $g$  uma função meromorfa tal que  $fg^2$  é holomorfa em  $D$  e  $|g(\zeta)| \neq 1, \forall \zeta \in D$ . Além disso, a parametrização  $X$  é conforme.

**Demonstração.** Ver [7].

□

**Definição 2.4.** *Nas condições do teorema acima, a superfície*

$$X^*(\zeta) = \text{Im} \int \left( \frac{1}{2}f(1+g^2), \frac{i}{2}f(1-g^2), -fg \right) d\zeta, \quad \zeta \in D,$$

*É chamada de superfície máxima conjugada a  $X$ .*

É possível mostrar que  $X^*$  é de fato uma superfície máxima, sendo consistente com o nome dado. De fato,  $X^*$  pode ser tomada a partir da representação de Weierstrass de  $X$  trocando  $f$  por  $if$ .

## Capítulo 3

# Um invariante associado a superfícies paralelas em $H^3$

No artigo [1], os autores mostram que se  $Y$  é uma superfície que satisfaz  $K = K_h$ , então as superfícies h-paralelas a  $Y$  também satisfazem  $K^t = K_h^t$ .

Nessa seção, iremos mostrar um resultado mais geral, isto é, que  $\frac{K}{K_h}$  é constante ao longo das superfícies h-paralelas a  $Y$ .

Esse resultado sugere o estudo da quantidade  $\frac{K}{K_h}$  em vários contextos relacionados a congruências de geodésicas, uma vez que as superfícies ortogonais estão definidas a menos de uma transformação h-paralela e, nesse caso, essa é uma quantidade comum a todas as superfícies ortogonais.

Como  $\frac{K}{K_h}$  é um invariante por h-paralelas, o artigo em [1] pode ser interpretado como uma análise do caso em que esse invariante é constante positivo.

Antes de seguirmos ao teorema principal, faremos uma breve observação. Seja  $S$  uma superfície no modelo do semiespaço. Para escrever  $K^t$  e  $H^t$  em termos das curvaturas hiperbólicas de  $S$ , conforme 2.6, precisamos também calcular  $x_3^t$  e  $\eta_3^t$ . Para isso, considere a seguinte função

$$\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4) = \left( \frac{u_2}{u_1 - u_4}, \frac{u_3}{u_1 - u_4}, \frac{1}{u_1 - u_4} \right)$$

que mapeia o hiperbolóide no semiespaço, e sejam  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$  e  $N = (n_1, n_2, n_3, n_4)$  a posição e o campo normal, respectivamente, da superfície  $S$  identificada por  $\Phi$  no modelo do hiperbolóide. De 2.3,  $P^t = \cosh(t)P + \sinh(t)N$  e  $N^t = \sinh(t)P + \cosh(t)N$ . Daí, segue imediatamente que

$$x_3 = \frac{1}{p}, \quad x_3^t = \frac{1}{cp + sn} \quad (3.1a)$$

$$\eta_3 = -\frac{n}{p}, \quad \eta_3^t = -\frac{sp + cn}{cp + sn} \quad (3.1b)$$

onde  $p = P_1 - P_4$  e  $n = n_1 - n_4$ .

Vamos ao resultado principal desta seção.

**Teorema** Seja  $S$  uma superfície no semiespaço superior de  $R^3$  e seja  $S^t$  a superfície h-paralela a  $S$  de distância  $t$ . Se  $S^t$  é uma superfície regular, então considerando as notações do capítulo 1, temos que

$$K_h K^t - K K_h^t = 0.$$

Em particular, se  $K_h \neq 0 \neq K_h^t$ , então  $\frac{K}{K_h} = \frac{K^t}{K_h^t}$ .

**Demonstração.** Vamos escrever  $K_h K^t - K K_h^t$  em termos de suas quantidades hiperbólicas. Pelas proposições 2.5, 2.6 e pelo corolário 2.3.1, podemos escrever  $K^t, K_h^t$  e  $K$  em termos de  $K_h$  e  $H_h$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{x_3^2} (K_h - 2\eta_3 H_h + \eta_3^2 + 1), \\ K_h^t &= \frac{K_h}{s^2 K_h - 2H_h s c + c^2 + s^2}, \\ K^t &= \frac{1}{q(x_3^t)^2} (c^2 + 2\eta_3^t s c + (\eta_3^t)^2 s^2) K_h + \\ &\frac{1}{q(x_3^t)^2} (-2s c - 2\eta_3^t (c^2 + s^2) - 2(\eta_3^t)^2 s c) H_h + \\ &\frac{1}{q(x_3^t)^2} (c^2 + s^2 + 4\eta_3^t s c + (c^2 + s^2)(\eta_3^t)^2). \end{aligned}$$

Queremos mostrar que  $(K_h K^t - K K_h^t) = 0$ . Multiplicando essa expressão por  $q(x_3^t)^2 (x_3)^2$ , por simplicidade, e usando as expressões acima para  $K, K^t$  e  $K_h^t$ , obtemos

$$\begin{aligned} &q(x_3^t)^2 (x_3)^2 (K_h K^t - K K_h^t) = \\ &[(c^2 + 2\eta_3^t s c + (\eta_3^t)^2 s^2)(x_3)^2 - ((x_3^t)^2)] K_h^2 + \\ &[(-2s c - 2\eta_3^t (c^2 + s^2) - 2(\eta_3^t)^2 s c)(x_3)^2 + 2(\eta_3^t)^2 (x_3^t)^2] K_h H_h + \\ &[(c^2 + s^2 + 4\eta_3^t s c + (c^2 + s^2)(\eta_3^t)^2)(x_3)^2 + (-\eta_3^t)^2 - 1](x_3^t)^2 K_h = \end{aligned}$$

$$A_1 K_h^2 + A_2 K_h H_h + A_3 K_h,$$

onde as definições de  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  ficam subentendidas pela expressão acima. Para provar o teorema, basta então verificar que  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ . Vamos verificar apenas que  $A_1 = 0$ , pois as demais verificações são rigorosamente análogas. Aplicando as expressões 3.1 para  $x_3$ ,  $x_3^t$ ,  $\eta_3$  e  $\eta_3^t$ , temos que

$$\begin{aligned} A_1 &= [(c^2 + 2\eta_3^t sc + (\eta_3^t)^2 s^2)(x_3)^2 - ((x_3^t)^2)] = \\ &= \frac{1}{p^2} \left( c^2 - 2sc \frac{(sp + cn)}{(cp + sn)} + s^2 \frac{(sp + cn)^2}{(cp + sn)^2} - \frac{1}{(cp + sn)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{p^2 (cp + sn)^2} (c^2 (cp + sn)^2 - 2sc(sp + cn)(cp + sn) + s^2 (sp + cn)^2 - p^2) = \\ &= \frac{1}{p^2 (cp + sn)^2} (c^4 p^2 - 2s^2 c^2 p^2 + s^4 p^2 - p^2) = \frac{1}{(cp + sn)^2} ((c^2 - s^2)^2 - 1). \end{aligned}$$

Substituindo  $c^2 - s^2 = 1$  na expressão, chegamos a

$$A_1 = \frac{1}{(cp + sn)^2} (1^2 - 1) = 0.$$

Da mesma forma pode-se mostrar que  $A_2 = A_3 = 0$ , o que conclui a demonstração do teorema. □

# Capítulo 4

## Superfícies isocurvadas e anti-isocurvadas

No artigo [1], os autores estudaram o problema de encontrar superfícies imersas em  $R_+^3$  satisfazendo  $K = K_h$ . Nesse trabalho, mostraremos como encontrar superfícies que satisfazem  $K = -K_h$ , que é apenas citado em [1] sem muitos detalhes formais. Além disso, mostraremos que é possível adaptar essa construção para encontrar superfícies satisfazendo  $K = cK_h$ , com  $c$  uma constante não nula.

Além disso, apresentaremos uma relação entre os sólitons de translação do fluxo da curvatura média harmônica com as superfícies que satisfazem  $K = -4K_h$ . Por último, usaremos essa relação para construir exemplos desses sólitons. De agora em diante usaremos a definição a seguir.

**Definição.** As superfícies que satisfazem  $K = cK_h$ , com  $c > 0$ , são chamadas isocurvadas e as superfícies satisfazendo  $K = -cK_h$ , com  $c > 0$ , são chamadas anti-isocurvadas.

### 4.1 Construção das superfícies isocurvadas

O processo introduzido no artigo [1] para produzir superfícies com essa propriedade é feito considerando-se uma superfície  $S \subset R^3$  mínima com relação a métrica euclidiana e orientada, e associando a essa superfície uma família de geodésicas hiperbólicas de tal forma que as superfícies ortogonais a essa família tenham tal propriedade. As geodésicas hiperbólicas são semi-círculos ortogonais ao plano  $x_3 = 0$  ou retas verticais. Esse semi-círculo fica determinado se definirmos seu centro  $\sigma$ , seu raio  $R$  e um vetor  $e_1$  que, juntamente com o vetor  $e_3 = (0, 0, 1)$ , determinam um plano que o contém. Para isso, seja  $P_{hor} : R^3 \rightarrow R^2$  a projeção ortogonal no plano  $x_3 = 0$ ,  $J : R^2 \rightarrow R^2$  a rotação de ângulo  $\frac{\pi}{2}$  no sentido anti-horário no plano  $x_3 = 0$  e seja  $N : S \rightarrow S^2$  um campo normal unitário a  $S$ . Suponha também que  $N$  é não vertical em todo ponto. Para cada ponto

$p \in S$ , definimos então o centro  $\sigma$ , a direção  $e_1$  e o raio  $R$  da seguinte maneira:

$$\sigma(p) = P_{hor}(S(p)), \quad (4.1a)$$

$$e_1(p) = \frac{J(P_{hor}(N(p)))}{|P_{hor}(N(p))|}, \quad (4.1b)$$

$$R(p) = \frac{1}{|P_{hor}(N(p))|}. \quad (4.1c)$$

A questão então se concentra em achar uma função diferenciável  $\theta : S \rightarrow (0, \pi)$ , de forma que a função  $Y : S \rightarrow R_+^3$ , definida por

$$Y = \sigma + R(\cos(\theta)e_1 + \sen(\theta)e_3), \quad (4.2)$$

seja tal que, em cada ponto  $p$  onde  $Y$  é uma imersão, o plano tangente a  $Y$  em  $Y(p)$  é normal à geodésica associada ao ponto  $p \in S$ . Em outras palavras, dada uma parametrização  $X : U \subset R^2 \rightarrow S$  definida em um domínio  $U$  e escrevendo  $Y$  nesse mesmo sistema de coordenadas,  $\theta$  deve ser tal que o sistema de equações diferenciais abaixo se verifique

$$\langle Y_u, -\sen(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_3 \rangle = 0,$$

$$\langle Y_v, -\sen(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_3 \rangle = 0.$$

Por uma conta simples, é fácil ver que esse sistema equivale ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\theta_u = \frac{\sen\theta}{R} \langle \sigma_u, e_1 \rangle,$$

$$\theta_v = \frac{\sen\theta}{R} \langle \sigma_v, e_1 \rangle.$$

Aplicando a mudança de variáveis  $\beta = \log(\tan \frac{\theta}{2})$ , temos  $\beta_u = \frac{\theta_u}{\sen\theta}$  e  $\beta_v = \frac{\theta_v}{\sen\theta}$ . Fazendo essa substituição no sistema acima, obtemos o problema de achar uma função  $\beta : U \rightarrow R$  que satisfaça

$$\beta_u = \frac{1}{R} \langle \sigma_u, e_1 \rangle, \quad (4.3a)$$

$$\beta_v = \frac{1}{R} \langle \sigma_v, e_1 \rangle. \quad (4.3b)$$

Note que  $\theta = 2\arctan(e^\beta)$ . Daí,

$$\sen(\theta) = \sen(2\arctan(e^\beta)) = 2\sen(\arctan(e^\beta))\cos(\arctan(e^\beta)) =$$

$$2 \frac{e^\beta}{\sqrt{1+e^{2\beta}}} \frac{1}{\sqrt{1+e^{2\beta}}} = \frac{2}{e^{-\beta} + e^\beta} = \frac{1}{\cosh(\beta)}.$$

E por uma conta análoga, temos

$$\cos(\theta) = \tanh(\beta).$$

Desse modo, temos o seguinte problema equivalente.

**Problema.** Definir a função  $Y : U \rightarrow R_+^3$  por

$$Y = \sigma + R \left( \frac{1}{\cosh(\beta)} e_1 + \tanh(\beta) e_3 \right).$$

onde  $\beta$  satisfaz o sistema 4.3

A condição de Frobenius para que o sistema 4.3 tenha solução é

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{R} \langle \sigma_u, e_1 \rangle \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{R} \langle \sigma_v, e_1 \rangle \right) \quad (4.4)$$

Usando 4.1, é possível verificar, conforme feito em [1], que vale o seguinte resultado.

**Proposição 4.1.** *O sistema 4.3 possui solução se, e somente se,  $X(U) \subset S$  é uma superfície mínima ou um cilindro sobre uma curva plana em  $\partial R_+^3$ . Além disso, nos pontos onde  $Y$  é uma imersão, vale  $K = K_h$ .*

O artigo [1] também mostra que, considerando  $S$  uma superfície do tipo tempo de curvatura média zero na geometria de Lorentz, e considerando a construção 4.1 feita com a normal *Lorentziana*, então o sistema 4.3 possui solução. Além disso, nos pontos onde  $Y$  é uma imersão, também vale  $K = K_h$ .

## 4.2 Construção das superfícies anti-isocurvadas

Vamos mostrar nesta seção que é possível fazer uma construção análoga a da seção anterior para construirmos superfícies anti-isocurvadas.

Seja  $S \subset L^3$  uma superfície orientada, onde  $L^3$  é o espaço de Lorentz, e denote por  $N_l$  a normal de  $S$ . Suponha também que  $N_l$  é não vertical, isto é,  $N_l \notin \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ . Definimos uma família de geodésicas da mesma forma que em 4.1, porém considerando  $N_l$  ao invés de  $N$ , ou seja

$$\sigma(p) = P_{hor}(S(p)), \quad (4.5a)$$

$$e_1(p) = \frac{J(P_{hor}(N_l(p)))}{|P_{hor}(N_l(p))|}, \quad (4.5b)$$

$$R(p) = \frac{1}{|P_{hor}(N_l(p))|}. \quad (4.5c)$$

Considere o problema de achar uma superfície definida em  $U$  que seja ortogonal a família de geodésicas definidas por 4.5. Novamente, queremos resolver o problema de achar uma função  $\theta : S \rightarrow (0, \pi)$  tal que a função  $Y : S \rightarrow R_+^3$  dada por

$$Y = \sigma + R(\cos(\theta)e_1 + \sen(\theta)e_3), \quad (4.6)$$

seja tal que, em cada ponto  $p$  onde  $Y$  é uma imersão, o plano tangente a  $Y$  em  $Y(p)$  é normal a geodésica associada ao ponto  $p \in S$ .

Da mesma forma que na seção anterior, em um sistema de coordenadas  $X : U \subset R^2 \rightarrow S$ , isso equivale a resolver o sistema

$$\beta_u = \frac{1}{R} \langle \sigma_u, e_1 \rangle, \quad (4.7a)$$

$$\beta_v = \frac{1}{R} \langle \sigma_v, e_1 \rangle. \quad (4.7b)$$

Feita essa observação, temos um resultado parecido com o da seção anterior.

**Teorema 4.1.** *Seja  $S$  uma superfície simplesmente conexa do tipo espaço de  $L^3$ . Então existe  $\theta : S \rightarrow (0, \pi)$  satisfazendo a condição de ortogonalidade para a função  $Y$  definida em 4.6 se, e somente se,  $S$  é uma superfície máxima de  $L^3$ .*

**Demonstração.** Como  $S$  é do tipo espaço, podemos supor que  $S$  é o gráfico de uma função  $\psi : U \subset R^2 \rightarrow R$  definida em um domínio  $U$ . Queremos verificar a condição para que o sistema 4.7 possua solução. Isto é, pela condição de Frobenius, queremos verificar que

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{R} \langle \sigma_u, e_1 \rangle \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{R} \langle \sigma_v, e_1 \rangle \right).$$

Nesse caso, como  $S$  é do tipo espaço, temos  $|\nabla\psi| < 1$ , e também

$$N_l(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla\psi|^2}} (-\psi_u, -\psi_v, -1).$$

Daí, é possível calcular  $\sigma$ ,  $e_1$  e  $R$  conforme abaixo.

$$\sigma(u, v) = (u, v, 0), \quad (4.8a)$$

$$e_1(u, v) = \frac{1}{|\nabla\psi|}(-\psi_v, \psi_u, 0), \quad (4.8b)$$

$$R(u, v) = \frac{\sqrt{1 - |\nabla\psi|^2}}{|\nabla\psi|}. \quad (4.8c)$$

Substituindo as expressões acima, segue por uma conta direta que

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{R} \langle \sigma_u, e_1 \rangle \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{R} \langle \sigma_v, e_1 \rangle \right) = \frac{\psi_{vv}\psi_u^2 - 2\psi_{uv}\psi_u\psi_v + \psi_{uu}\psi_v^2 - \psi_{vv} - \psi_{uu}}{(1 - |\nabla\psi|^2)^{3/2}}.$$

Isto é, a condição de integrabilidade é satisfeita se, e somente se,

$$\psi_{vv}\psi_u^2 - 2\psi_{uv}\psi_u\psi_v + \psi_{uu}\psi_v^2 - \psi_{vv} - \psi_{uu} = 0.$$

Que é exatamente a equação das máximas para uma superfície tipo espaço. Isso conclui a demonstração do teorema. □

Antes de irmos para o teorema principal desta seção, vamos fazer uma breve observação. O vetor normal  $N_l = \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla\psi|^2}}(-\psi_u, -\psi_v, -1)$  pode ser escrito em termos de  $R$ ,  $e_1$  e  $e_3$  conforme a expressão

$$N_l = -\frac{1}{R}Je_1 - \frac{\sqrt{R^2 + 1}}{R}e_3, \quad (4.9)$$

onde  $Je_1 = \frac{1}{|\nabla\psi|}(\psi_u, \psi_v, 0)$  é uma rotação de ângulo  $\frac{\pi}{2}$  no sentido anti-horário, considerando o plano  $z = 0$  orientado pelo vetor  $e_3$ . A justificativa desse fato se baseia em uma mera substituição em 4.9 das expressões 4.8.

Vamos mostrar agora que as superfícies construídas a partir de 4.5 são de fato superfícies anti-isocurvadas, conforme o teorema a seguir:

**Teorema 4.2.** *Seja  $S$  uma superfície máxima do tipo espaço com normal  $N_l$  não vertical em todo ponto. Se  $\Sigma$  é uma superfície ortogonal a congruência de geodésicas definida por 4.5, então  $\Sigma$  é uma superfície anti-isocurvada.*

**Demonstração.** Seja  $p \in \Sigma$ . Queremos mostrar que  $K(p) = -K_h(p)$ . Pela proposição 3, basta provar que  $\Sigma^t$  é anti-isocurvada para alguma superfície  $\Sigma^t$  h-paralela a  $\Sigma$ . Portanto, trocando  $\Sigma$  por  $\Sigma^t$  para um parâmetro  $t$  pequeno, caso necessário, podemos supor sem perda de generalidade que a normal euclidiana  $N$  a  $\Sigma$  é não horizontal. Dessa forma,  $\Sigma$

pode ser parametrizado em uma vizinhança de  $p$  como o gráfico de uma função  $\phi$  definida em um domínio  $U$ , onde a normal euclidiana de  $\Sigma$  é não horizontal nessa vizinhança coordenada.

Seja então  $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$  uma parametrização local em torno de  $p$ , da forma

$$Y(u, v) = (u, v, \phi(u, v)),$$

definida em um domínio  $U$  em que a normal  $N$  de  $\Sigma$  é não vertical em  $Y(U)$ . Como basta fazer os cálculos localmente, vamos supor sem perda de generalidade que  $\Sigma = X(U)$ . Vamos descrever  $\sigma$ ,  $e_1$  e  $R$  em termos de  $\phi$ . Temos que  $e_1$  é o vetor unitário na direção da projeção de  $N$  no plano  $z = 0$ , isto é,

$$e_1 = \frac{1}{|\nabla\phi|}(-\phi_u, -\phi_v, 0). \quad (4.10)$$

Observe também que o campo  $\eta$  definido por

$$(-\phi_u, -\phi_v, 1) = |\nabla\phi|e_1 + e_3$$

é normal a  $\Sigma$ . Ao ponto  $Y(u, v)$ , está associada uma geodésica contida no plano  $F$ , onde  $F$  é a translação por  $\sigma$  do plano gerado por  $e_1$  e  $e_3$ . O vetor  $\eta$  é tangente a esta geodésica. Isso significa que o centro  $\sigma$  de  $C$  está na interseção do plano  $z = 0$  com a reta contida em  $F$  e ortogonal a  $\eta$ . Dito isso, definindo a reta  $r$  por

$$r(t) = (u, v, \phi(u, v)) + t(-e_1 + |\nabla\phi|e_3),$$

e calculando a interseção de  $r$  com o plano  $z = 0$ , obtemos  $\sigma$  conforme a seguir

$$\sigma = \left(u - \frac{\phi\phi_u}{|\nabla\phi|^2}, v - \frac{\phi\phi_v}{|\nabla\phi|^2}, 0\right). \quad (4.11)$$

Por último, temos que  $R = |Y(u, v) - \sigma(u, v)|$ . Fazendo os cálculos, obtemos

$$R = \frac{\phi\sqrt{1 + |\nabla\phi|^2}}{|\nabla\phi|}. \quad (4.12)$$

Agora, note que, como  $N_l$  é do tipo espaço, então  $S$  é localmente descrito como gráfico de função, e daí podemos escrever  $S$  em coordenadas  $(u, v)$  por

$$X = \sigma + \psi_3.$$

Pela observação 4.9, temos que

$$N_l = -\frac{1}{R}Je_1 - \frac{\sqrt{R^2+1}}{R}e_3.$$

As condições de ortogonalidade são

$$\langle X_u, N \rangle = 0, \quad \langle X_v, N \rangle = 0,$$

o que nos fornece

$$\psi_u = -\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} \langle \sigma_u, Je_1 \rangle, \quad (4.13a)$$

$$\psi_v = -\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} \langle \sigma_v, Je_1 \rangle. \quad (4.13b)$$

Usando que  $\psi_{uv} = \psi_{vu}$ , temos que

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} \langle \sigma_u, Je_1 \rangle \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} \langle \sigma_v, Je_1 \rangle \right) = 0. \quad (4.14)$$

Utilizando as expressões 4.10, 4.11 e 4.12, obtemos

$$-\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} \langle \sigma_u, Je_1 \rangle = \frac{\phi\phi_v\phi_{uu} - \phi\phi_u\phi_{uv} - \phi_u^2\phi_v - \phi_v^3}{|\nabla\phi|^2\sqrt{\phi^2(|\nabla\phi|^2+1)} + |\nabla\phi|^2},$$

$$-\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} \langle \sigma_v, Je_1 \rangle = \frac{\phi\phi_v\phi_{uv} - \phi\phi_u\phi_{vv} + \phi_u\phi_v^2 + \phi_u^3}{|\nabla\phi|^2\sqrt{\phi^2(|\nabla\phi|^2+1)} + |\nabla\phi|^2}.$$

Substituindo em 4.14, obtemos a equação  $\psi_{uv} = \psi_{vu}$  em termos de  $\phi$ . Por outro lado, usando 2.4 e 2.2, vemos por uma conta direta que essa equação é equivalente a equação  $K = -K_h$

□

### 4.3 Adaptação da construção

Mais adiante mostraremos que os sólitons de translação do fluxo da curvatura média harmônica estão relacionados com superfícies anti-isocurvadas. De modo preciso, tais sólitons estão relacionados com superfícies que satisfazem  $K = -4K_h$  e com a família de geodésicas ortogonais a estas superfícies. Apresentaremos a seguir uma maneira de construir superfícies com essa propriedade a partir de superfícies que satisfazem  $K = -K_h$ , conforme construídas em [1].

Segue facilmente que, se uma superfície satisfaz  $K = -K_h$ , então dilatando tal superfície por um fator  $\lambda = \frac{1}{2}$ , obtemos uma superfície que satisfaz  $K = -4K_h$ . Vamos mostrar agora como adaptar a construção feita em 4.1 para que as superfícies ortogonais satisfaçam  $K = -4K_h$ .

Seja  $Y$  definida conforme 4.2, com as funções  $\sigma, e_1$  e  $R$  definidas conforme 4.1, e seja também  $\bar{Y}$  a superfície definida na seção anterior como a dilatação de  $Y$  com fator de dilatação  $\lambda > 0$ . Temos, em cada ponto  $p = \bar{Y}(u, v) = \lambda Y(u, v)$ , uma geodésica associada a esse ponto com a propriedade de que essa geodésica passa pelo ponto  $p$  com velocidade  $\bar{N}(p)$ , onde  $\bar{N}$  é a normal a  $\bar{Y}$ . A essa geodésica estão associadas as funções  $\bar{\sigma}, \bar{e}_1$  e  $\bar{R}$ , conforme definidas em 4.1. Vamos verificar a seguinte proposição

**Proposição 4.2.** *De acordo com a notação do parágrafo anterior, valem as seguintes fórmulas*

$$\bar{\sigma} = \lambda\sigma, \quad \bar{R} = \lambda R, \quad \bar{e}_1 = e_1. \quad (4.15)$$

**Demonstração.** De fato, como  $\bar{Y}_u = \lambda Y_u$  e  $\bar{Y}_v = \lambda Y_v$ , temos que

$$\bar{N} = \frac{\bar{Y}_u \times \bar{Y}_v}{|\bar{Y}_u \times \bar{Y}_v|} = \frac{\lambda\lambda^2 Y_u \times Y_v}{d^2 |Y_u \times Y_v|} = N.$$

Em particular,  $\bar{e}_1(u, v) = e_1(u, v)$ .

Além disso, se  $\bar{N}(u, v) = N(u, v) \neq (0, 0, 1)$ , então a geodésica associada ao ponto  $p$  é um arco de círculo centrado em um ponto do plano  $z = 0$ . Se  $v = (v_1, v_2, v_3)$  é um vetor normal a  $\bar{N}(u, v)$ , com  $v$  pertencente ao plano gerado por  $\bar{N}(u, v)$  e  $(0, 0, 1)$ , então o ponto  $\bar{\sigma}(u, v)$  é a interseção da reta  $r(t) = \bar{Y}(u, v) + tv$  com o plano  $z = 0$ . Da mesma forma, como  $\bar{N} = N$ , então  $\sigma$  é a interseção da reta  $s(t) = Y(u, v) + tv$  com o plano  $z = 0$ . Escrevendo  $Y(u, v) = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\bar{Y}(u, v) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ , temos que a reta  $r(t) = (\lambda x_1 + tv_1, \lambda x_2 + tv_2, \lambda x_3 + tv_3)$  intersecta o plano  $z = 0$  quando  $t$  é tal que  $\lambda x_3 + tv_3 = 0$ , isto é, quando  $t = \frac{-\lambda x_3}{v_3}$ , e portanto  $\bar{\sigma}(u, v) = r\left(\frac{-\lambda x_3}{v_3}\right) = \lambda\left(x_1 - \frac{v_1}{v_3}x_3, x_2 - \frac{v_2}{v_3}x_3, 0\right)$ . De maneira semelhante, é possível mostrar que  $\sigma(u, v) = \left(x_1 - \frac{v_1}{v_3}x_3, x_2 - \frac{v_2}{v_3}x_3, 0\right)$ , ou seja,  $\bar{\sigma}(u, v) = \lambda\sigma(u, v)$ .

No caso em que  $\bar{N}(u, v) = N(u, v) = (0, 0, 1)$ , temos  $\bar{\sigma}(u, v) = P_{hor}(\bar{Y}(u, v)) = P_{hor}(\lambda Y(u, v)) = \lambda P_{hor}(Y(u, v)) = \lambda\sigma(u, v)$ .

Por último,  $\bar{R}(u, v) = |\bar{\sigma}(u, v) - \bar{Y}(u, v)| = |\lambda\sigma(u, v) - \lambda Y(u, v)| = \lambda R$ , o que conclui a verificação de 4.15. □

# Capítulo 5

## Sólitons de translação do HMCF e superfícies máximas

Nesse capítulo, iremos relacionar as superfícies anti-isocurvadas com os sólitons de translação do fluxo da curvatura média harmônica. Mostraremos também como usar essa relação para produzir exemplos desses sólitons.

### 5.1 Caracterização dos sólitons do HMCF como gráfico de função

Nessa seção vamos escrever a equação  $K = 4H\cos(\theta)$  para um gráfico. Seja  $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função diferenciável e defina a superfície

$$X(u, v) = (u, v, \phi(u, v)).$$

Uma conta simples mostra que

$$K = \frac{\phi_{uu}\phi_{vv} - \phi_{uv}^2}{(1 + \phi_u^2 + \phi_v^2)^2}, \quad (5.1a)$$

$$H = \frac{(1 + \phi_u^2)\phi_{vv} - 2\phi_u\phi_v\phi_{uv} + (1 + \phi_v^2)\phi_{uu}}{2(1 + \phi_u^2 + \phi_v^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.1b)$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi_u^2 + \phi_v^2}}. \quad (5.1c)$$

**Proposição 5.1.** *Seja  $S$  o gráfico de uma função  $\phi$ . A superfície  $S$  satisfaz  $K = 4H\cos(\theta)$  se, e somente se,  $\phi$  satisfaz*

$$\phi_{uu}\phi_{vv} - \phi_{uv}^2 - 2\phi_{uu} - 2\phi_{vv} - 2\phi_u^2\phi_{vv} - 2\phi_v^2\phi_{uu} + 4\phi_{uv}\phi_u\phi_v = 0. \quad (5.2)$$

**Demonstração.** Usando as expressões 4.2, 4.3 e 4.4, temos:

$$K = 4H\cos(\theta) \Leftrightarrow \frac{\phi_{uu}\phi_{vv} - \phi_{uv}^2}{(1 + \phi_u^2 + \phi_v^2)^2} = \frac{4}{\sqrt{1 + \phi_u^2 + \phi_v^2}} \frac{(1 + \phi_u^2)\phi_{vv} - 2\phi_u\phi_v\phi_{uv} + (1 + \phi_v^2)\phi_{uu}}{2(1 + \phi_u^2 + \phi_v^2)^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow$$

$$\phi_{uu}\phi_{vv} - \phi_{uv}^2 - 2\phi_{uu} - 2\phi_{vv} - 2\phi_u^2\phi_{vv} - 2\phi_v^2\phi_{uu} + 4\phi_{uv}\phi_u\phi_v = 0$$

□

**Corolário.** *Todo sóliton de translação do fluxo da curvatura média harmônica pode ser obtido por uma rotação e uma dilatação a partir do gráfico de uma função  $\phi$ , definida em um domínio  $U$ , em que  $\phi$  satisfaz*

$$\phi_{uu}\phi_{vv} - \phi_{uv}^2 - 2\phi_{uu} - 2\phi_{vv} - 2\phi_u^2\phi_{vv} - 2\phi_v^2\phi_{uu} + 4\phi_{uv}\phi_u\phi_v = 0.$$

**Demonstração.** Segue imediatamente do corolário 2.1

□

## 5.2 Relação entre os sólitons do fluxo HMCF e superfícies anti-isocurvadas

Em 4.1, nós apresentamos uma forma de descrever localmente uma família de geodésicas hiperbólicas. Identificando a fronteira de  $H^3$  com  $R^2$ , uma segunda forma de se fazer essa descrição é a partir de uma função diferenciável  $f : U \subset R^2 \rightarrow R^2$ , definida em um domínio simplesmente conexo  $U$ , sem pontos fixos. Para cada ponto  $x \in U$ ,  $f$  determina uma única geodésica que passa pelos pontos  $x$  e  $f(x)$ . Isto é,  $f$  determina uma geodésica com centro  $\sigma$ , ratio  $R$  e contida em um plano gerado por  $e_1$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$  com

$$\sigma(x) = \frac{f(x) + x}{2}, \tag{5.3}$$

$$R(x) = \frac{|f(x) - x|}{2}, \tag{5.4}$$

$$e_1 = \frac{f(x) - x}{|f(x) - x|}. \tag{5.5}$$

$$\tag{5.6}$$

A condição para que exista uma superfície ortogonal a família de geodésicas definidas por  $f$  é, conforme feito em, [8], que exista uma função  $\phi$  definida no domínio  $U$ , de tal forma que

$$f(x) = x + \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2}.$$

O principal objetivo desse capítulo é mostrar que, uma vez que as superfícies ortogonais à família de geodésicas definida por  $f$  satisfaçam  $K = -4K_h$ , o gráfico da função  $\phi$  satisfaz a relação  $K = 4H\cos(\theta)$ . Antes de provar esse fato, vamos apresentar alguns resultados que serão importantes.

O artigo [8] descreve os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental hiperbólica das superfícies integráveis em termos de  $\phi$ . O resultado que iremos utilizar segue descrito abaixo.

Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow H^3$  uma parametrização local de uma superfície ortogonal a nossa congruência de geodésicas dada conforme 5.2, onde

$$\sigma(x) = \frac{f(x) + x}{2}, \quad R(x) = \frac{|f(x) - x|}{2}, \quad e_1 = \frac{f(x) - x}{|f(x) - x|}, \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Note que as definições de  $\sigma$ ,  $R$  e  $e_1$  desempenham o mesmo papel que em 4.1.

Queremos descrever a equação  $K = cK_h$ , com  $c < 0$ , em termos da função  $\phi$ . O artigo [8] enuncia o seguinte resultado.

**Proposição 5.2.** *Considerando as construções acima, a matriz da primeira e da segunda forma hiperbólica de  $X$  em termos da função  $\phi$  são dados da seguinte forma*

$$g = (g_{i,j}) = \frac{1}{\lambda\delta}(\delta B + \lambda I)^2, \quad (5.7a)$$

$$h = (h_{i,j}) = \frac{1}{\lambda\delta}(\lambda^2 I - \delta^2 B^2). \quad (5.7b)$$

*E também se verificam as seguintes fórmulas para  $\cos\theta$  e  $\sen\theta$*

$$\cos\theta = \frac{C|\nabla\phi|^2 e^{-4\phi} - 1}{C|\nabla\phi|^2 e^{-4\phi} + 1}, \quad (5.8a)$$

$$\sen\theta = \frac{2\sqrt{C}|\nabla\phi|e^{-2\phi}}{C|\nabla\phi|^2 e^{-4\phi} + 1}, \quad (5.8b)$$

onde  $B = \text{Hess}(\phi) - 2M + \lambda I$ ,  $M = (\phi_{x_i}\phi_{x_j})$ ,  $\lambda = |\nabla\phi|^2$ ,  $\delta = C|\nabla\phi|^2 e^{-4\phi}$ ,  $C > 0$  é uma constante que depende de qual superfície paralela estamos fazendo os cálculos e a

orientação considerada é  $N = (\text{sen}\theta e_1 - \text{cos}\theta e_3)$ .

Dessa forma, podemos calcular

$$K_h = \frac{e_h g_h - f_h^2}{E_h G_h - F_h^2} - 1 = \frac{\det(g)}{\det(h)} - 1 = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} - 1,$$

e também

$$H_h = \frac{1}{2} \frac{E_h g_h - 2F_h f_h + G_h e_h}{E_h G_h - F_h^2} = \frac{1}{2} \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Para calcular a curvatura euclidiana  $K$  de  $X$ , vamos usar a relação 2.5 que nos dá  $K$  em termos das quantidades hiperbólicas de  $X$ . Temos então

$$K = \frac{1}{x_3} (K_h - 2(H_h - \eta_3)\eta_3 - \eta_3^2 + 1).$$

Precisamos também escrever  $x_3$  e  $\eta_3$  em termos da função  $\phi$ . Fazendo isso, obtemos imediatamente

$$\eta_3 = -\text{cos}\theta = -\frac{C|\nabla\phi|^2 e^{-4\phi} - 1}{C|\nabla\phi|^2 e^{-4\phi} + 1} = -\frac{C(\phi_u^2 + \phi_v^2)e^{-4\phi} - 1}{C(\phi_u^2 + \phi_v^2)e^{-4\phi} + 1}.$$

Agora, para calcular  $x_3$ , sabemos que  $x_3 = R\text{sen}\theta$ . Como  $R = \frac{|f(x) - x|}{2} = \frac{1}{2|\nabla\phi|}$ , temos

$$x_3 = \frac{1}{2|\nabla\phi|} \frac{2\sqrt{C}|\nabla\phi|e^{-2\phi}}{C|\nabla\phi|^2 e^{-4\phi} + 1} = \frac{\sqrt{C}e^{-2\phi}}{C|\nabla\phi|^2 e^{-4\phi} + 1} = \frac{\sqrt{C}e^{-2\phi}}{C(\phi_u^2 + \phi_v^2)e^{-4\phi} + 1}.$$

Para calcular a matriz  $g = (g_{ij})$ , fazemos

$$g = \frac{1}{\lambda\delta} (\delta B + \lambda I)^2 = \frac{\delta}{\lambda} B^2 + 2B + \frac{\lambda}{\delta} I.$$

Como  $\lambda = |\nabla\phi|^2$  e  $\delta = C|\nabla\phi|^2 e^{-4\phi}$ , temos  $\frac{\delta}{\lambda} = C e^{-4\phi}$  e  $\frac{\lambda}{\delta} = \frac{1}{C} e^{4\phi}$ . Além disso,

$$B = \begin{pmatrix} \phi_{uu} & \phi_{uv} \\ \phi_{uv} & \phi_{vv} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \phi_u^2 & \phi_u \phi_v \\ \phi_u \phi_v & \phi_v^2 \end{pmatrix} + (\phi_u^2 + \phi_v^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{uu} - \phi_u^2 + \phi_v^2 & \phi_{uv} - 2\phi_u \phi_v \\ \phi_{uv} - 2\phi_u \phi_v & \phi_{vv} + \phi_u^2 - \phi_v^2 \end{pmatrix}.$$

Calculando  $\frac{\delta}{\lambda}B^2$ , segue que

$$\frac{\delta}{\lambda}B^2 = Ce^{-4\phi} \begin{pmatrix} (-\phi_u^2 + \phi_v^2 + \phi_{uu})^2 + (-2\phi_u\phi_v + \phi_{uv})^2 & -(2\phi_u\phi_v - \phi_{u,v})(\phi_{uu} + \phi_{vv}) \\ -(2\phi_u\phi_v - \phi_{u,v})(\phi_{uu} + \phi_{vv}) & (-2\phi_u\phi_v - \phi_{uv})^2 + (\phi_u^2 - \phi_v^2 + \phi_{vv})^2 \end{pmatrix}.$$

E portanto, as entradas de  $g = \frac{\delta}{\lambda}B^2 + 2B + \frac{\lambda}{\delta}I$  são conforme descritos abaixo

$$g_{11} = E_h = Ce^{-4\phi}(-\phi_u^2 + \phi_v^2 + \phi_{uu})^2 + Ce^{-4\phi}(-2\phi_u\phi_v + \phi_{uv})^2 + 2(\phi_{uu} - \phi_u^2 + \phi_v^2) + \frac{1}{C}e^{4\phi},$$

$$g_{12} = F_h = -Ce^{-4\phi}(2\phi_u\phi_v - \phi_{u,v})(\phi_{uu} + \phi_{vv}) + 2(\phi_{uv} - 2\phi_u\phi_v),$$

$$g_{22} = G_h = Ce^{-4\phi}(-2\phi_u\phi_v - \phi_{uv})^2 + Ce^{-4\phi}(\phi_u^2 - \phi_v^2 + \phi_{vv})^2 + 2(\phi_{vv} + \phi_u^2 - \phi_v^2) + \frac{1}{C}e^{4\phi}.$$

Analogamente, de 5.7b, a matriz da segunda forma é dada por

$$h = \frac{\lambda}{\delta}I - \frac{\delta}{\lambda}B^2.$$

Usando a expressão calculada para  $\frac{\delta}{\lambda}B^2$ , segue que as entradas de  $h = \frac{\lambda}{\delta}I - \frac{\delta}{\lambda}B^2$  são da seguinte forma

$$h_{11} = e_h = \frac{1}{C}e^{4\phi} - Ce^{-4\phi}(-\phi_u^2 + \phi_v^2 + \phi_{uu})^2 - Ce^{-4\phi}(-2\phi_u\phi_v + \phi_{uv})^2,$$

$$h_{12} = f_h = Ce^{-4\phi}(2\phi_u\phi_v - \phi_{u,v})(\phi_{uu} + \phi_{vv}),$$

$$h_{22} = g_h = \frac{1}{C}e^{4\phi} - Ce^{-4\phi}(-2\phi_u\phi_v - \phi_{uv})^2 - Ce^{-4\phi}(\phi_u^2 - \phi_v^2 + \phi_{vv})^2.$$

Com isso, estamos prontos para escrever a equação  $K = -4K_h$  em termos de  $\phi$ . Isto fornece o resultado a seguir.

**Teorema 5.1.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um domínio e  $S$  o gráfico de uma função  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  cujo  $\nabla\phi$  não se anula. Então  $S$  satisfaz*

$$4\cos(\theta) = \frac{K}{H}$$

*se, e somente se, as superfícies ortogonais a família de geodésicas induzidas pela função*

$$f(x) = x + \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

*satisfaz  $K = -4K_h$*

**Demonstração.** Usando a proposição 2.5, a equação  $K = -4K_h$  equivale

$$\frac{1}{x_3^2}(K_{ext} - 2H_h\eta_3 + \eta_3^2) = -4K_h.$$

Usando agora a proposição 2.4, obtemos

$$-4 \left( \frac{e_h g_h - e_h^2}{E_h G_h - F_h^2} - 1 \right) = \frac{1}{x_3^2} \left( \frac{e_h g_h - e_h^2}{E_h G_h - F_h^2} + \eta_3 \frac{e_h G_h - 2e_h F_h + g_h E_h}{E_h G_h - F_h^2} + \eta_3^2 \right).$$

Que por sua vez, multiplicando ambos os lados por  $C(E_h G_h - F_h^2)$ , é equivalente a

$$\begin{aligned} & -4C(e_h g_h - e_h^2 - E_h G_h + F_h^2) = \\ & \frac{C}{x_3^2}(e_h g_h - e_h^2 + \eta_3(e_h G_h - 2e_h F_h + g_h E_h) + (E_h G_h - F_h^2)\eta_3^2). \end{aligned}$$

É possível ver, a partir de um extenso cálculo, que a equação acima é equivalente a 5.2. Porém, uma conta direta seria extremamente longa. Vamos apresentar uma análise que nos permite concluir que a equação acima é de fato equivalente a 5.2 sem calculos muito extensos. Fixe um ponto  $(u, v)$  arbitrário. Pela proposição 3, a relação acima é satisfeita para todo  $C$  variando em um intervalo  $I$ . Observe agora que a expressão

$$-4C(e_h g_h - e_h^2 - E_h G_h + F_h^2)$$

é um polinomio  $P_1(C)$  de grau 2 em  $C$ . Uma análise simples nas fórmulas encontradas para  $E_h, F_h, G_h, e_h, f_h$  e  $g_h$ , nos mostra o termo independente deste polinomio é igual a

$$a_0 = -e_h^{4\phi} 4(-2(\phi_{uu} - \phi_u^2 + \phi_v^2) + -2(\phi_{vv} + \phi_u^2 - \phi_v^2)) = 8e_h^{4\phi}(\phi_{uu} + \phi_{vv}).$$

Uma análise análoga no lado direito, nos fornece que

$$\frac{C}{x_3^2}(e_h g_h - e_h^2 - 2\eta_3(e_h F_h - 2f F_h + g_h E_h) + (E_h F_h - F_h^2)\eta_3^2)$$

é um polinomio  $P_2(C)$  de grau 2 em  $C$  com termo indepente

$$b_0 = -4e_h^{4\phi}(2\phi_u^2\phi_{vv} - 4\phi_u\phi_v\phi_{uv} + 2\phi_v^2\phi_{uu} + \phi_{uv}^2 - \phi_{uu}\phi_{vv}).$$

Como ambos os polinomios são iguais em um intervalo  $I$ , devemos ter  $a_0 = b_0$ , o que equivale a equação

$$\phi_{uu}\phi_{vv} - \phi_{uv}^2 - 2\phi_{uu} - 2\phi_{vv} - 2\phi_u^2\phi_{vv} - 2\phi_v^2\phi_{uu} + 4\phi_{uv}\phi_u\phi_v = 0.$$

Em particular, se as superfícies ortogonais a família de geodésicas satisfazem  $K = -4K_h$ , então  $\phi$  satisfaz a equação 5.2. Para mostrar a recíproca, basta notar que a equação  $K = -4K_h$  é equivalente a  $P_1(C) = P_2(C)$ , para todo  $C$  variando em um intervalo  $I$ . Escrevendo  $P_1(C) = a_2C^2 + a_1C + a_0$  e  $P_2(C) = b_2C^2 + b_1C + b_0$ , uma análise análoga a anterior mostra que todas as igualdades  $a_i = b_i, i = 0, 1, 2$  são equivalentes a equação 5.2. Isso conclui a prova do teorema. □

**Corolário.** *Todos os sólitons de translação  $S$  do fluxo da curvatura média harmônica, em que a normal a  $S$  nunca é paralela a direção da translação do fluxo, pode ser obtido localmente por uma rotação e uma dilatação a partir do gráfico de uma função  $\phi$ , definida em um domínio  $U$ , em que as superfícies ortogonais as geodésicas geradas pela função*

$$f(x) = x + \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2}$$

satisfazem  $K = -4K_h$

**Demonstração.** Segue do teorema 5.1 e do corolário 2.1 □

### 5.2.1 Exemplo

A relação obtida entre os sólitons de translação do fluxo da curvatura média harmônica e a construção de superfícies anti-isocurvadas nos fornece um método para produzir exemplos de tais superfícies. Vamos apresentar nesta seção um exemplo e descrever o problema de encontrar tais superfícies em termos de uma equação diferencial.

Considere a superfície  $X : U \subset R^2 \rightarrow R^3$ , dada por

$$X(u, v) = (\sinh(v)\cos(u), \sinh(v)\sin(u), u),$$

definida no conjunto dos pontos  $(u, v) \in R^2$  tais que  $\cosh(v)^2 > 2$ . Uma conta simples mostra que  $X$  é do tipo espaço e que a normal Lorentziana  $N$  de  $X$  é

$$N = \left( \frac{-\sin(u)}{\sqrt{\cosh(v)^2 - 2}}, \frac{\cos(u)}{\sqrt{\cosh(v)^2 - 2}}, \frac{\sinh(v)}{\sqrt{\cosh(v)^2 - 2}} \right).$$

Sendo  $E_l, F_l, G_l, e_l, f_l, g_l$  os coeficientes da primeira e da segunda forma Lorentziana, é fácil verificar que  $F_l = e_l = g_l = 0$ . Em particular, a curvatura média Lorentziana  $H_l$  satisfaz

$$H_l = \frac{1}{2} \frac{e_l G_l - 2f_l F_l + E_l g_l}{E_l G_l - F_l^2} = 0,$$

isto é,  $X$  é uma superfície máxima.

Considere a congruência de geodésicas relacionadas a  $X$  conforme descrito em 4.15 com  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Vamos achar a função  $\phi$  associada a essa congruência de geodésicas.

A estratégia aqui será descrever a função  $\phi(x)$  em coordenadas  $(u, v)$ , e a superfície procurada será  $Y(u, v) = (x(u, v), y(u, v), \phi(x(u, v), y(u, v)))$ . Ou seja, vamos fazer a seguinte mudança de coordenadas

$$(x, y) = \sigma(u, v) + R(u, v)e_1(u, v),$$

onde  $\sigma = \frac{1}{2}(\sinh(v)\cos(u), \sinh(v)\sin(u))$ ,  $e_1 = (-\cos(u), -\sin(u))$ ,  $R = \frac{1}{2}\sqrt{\cosh(v)^2 - 2}$ . Daí,

$$x(u, v) = \frac{-1}{2}\cos(u)(-\sinh(v) + \sqrt{\cosh(v)^2 - 2}), \quad (5.9a)$$

$$y(u, v) = \frac{-1}{2}\sin(u)(-\sinh(v) + \sqrt{\cosh(v)^2 - 2}). \quad (5.9b)$$

Agora, note que, como  $\nabla\phi$  é paralelo a  $e_1$  e  $|\nabla\phi| = \frac{1}{2R}$ , então

$$\nabla\phi = \frac{-1}{2R}e_1,$$

e portanto,

$$\phi_x = \frac{\cos(u)}{\sqrt{\cosh(v)^2 - 2}}, \quad (5.10a)$$

$$\phi_y = \frac{\sin(u)}{\sqrt{\cosh(v)^2 - 2}}. \quad (5.10b)$$

Definindo  $\psi(u, v) = \phi(x(u, v), y(u, v))$ , temos que  $\psi$  satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\psi_u = \phi_x \frac{\partial x}{\partial u} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial u}, \quad (5.11a)$$

$$\psi_v = \phi_x \frac{\partial x}{\partial v} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (5.11b)$$

Por outro lado, substituindo 5.9 e 5.10 em 5.11, obtemos que  $\psi$  satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\psi_u = 0, \quad (5.12a)$$

$$\psi_v = \frac{1}{2} \frac{\cosh(v)(\sinh(v) - \sqrt{\cosh(v)^2 - 2})}{\cosh(v)^2 - 2}. \quad (5.12b)$$

Vamos integrar o sistema acima. Como  $\psi_u = 0$  e  $U$  é conexo, então podemos escrever  $\psi(u, v) = f(v)$ . Daí, segue de 5.12b que

$$f(v) = \int \frac{1}{2} \frac{\cosh(v)(\sinh(v) - \sqrt{\cosh(v)^2 - 2})}{\cosh(v)^2 - 2} dv.$$

Com ajuda de técnicas computacionais, temos o seguinte candidato para  $f(v)$ :

$$f(v) = \frac{-1}{4} \log(\cosh(v)^2 - 2) + \frac{1}{4} \log(2\sinh(v)\sqrt{\cosh(v)^2 - 2} + 2\cosh(v)^2 - 3). \quad (5.13)$$

Para verificar formalmente que a função acima satisfaz a afirmação, basta fazer uma conta simples para mostrar que

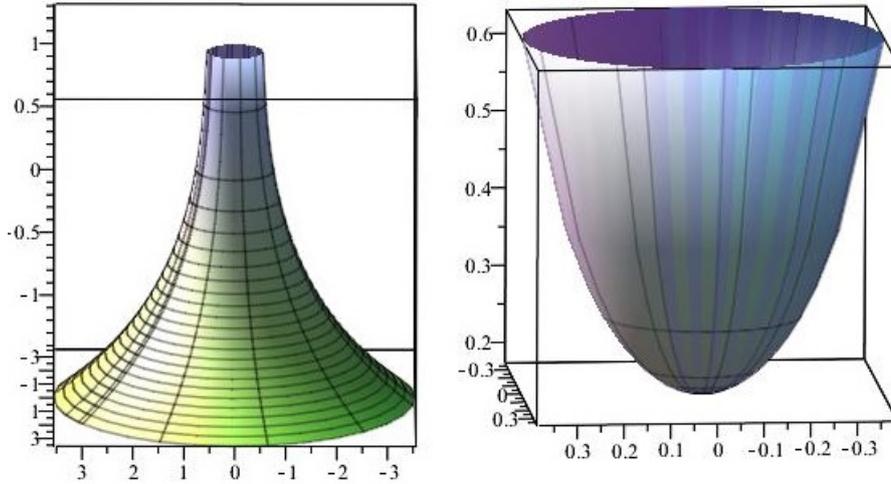
$$\frac{df}{dv}(v) = \frac{1}{2} \frac{\cosh(v)(\sinh(v) - \sqrt{\cosh(v)^2 - 2})}{\cosh(v)^2 - 2},$$

e que  $\psi(u, v) = f(v)$  satisfaz o sistema 5.12.

Assim, temos que a superfície  $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$Y(u, v) = (x(u, v), y(u, v), \psi(u, v)),$$

onde  $x(u, v)$  e  $y(u, v)$  são definidos conforme 5.9 e  $\psi(u, v) = f(v)$ , com  $f(v)$  definido conforme 5.13, satisfaz a propriedade desejada nos pontos em que é uma imersão. Os dois desenhos abaixo mostram a superfície que contruímos para  $v$  na região onde  $\cosh(v) < \sqrt{2}$  e  $\cosh(v) > \sqrt{2}$ , respectivamente.



### 5.3 Caracterização como ponto crítico de um funcional

Nesta seção vamos caracterizar as superfícies satisfazendo  $K = 4H\cos(\theta)$  em que a normal é não vertical em termos de um problema variacional, e apresentaremos uma interpretação geométrica dessa caracterização.

Defina o funcional  $\Omega$  fazendo, para cada função  $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  em que  $\nabla\phi$  não se anula

$$\Omega(\phi) = \int \left( \frac{\phi_u^2 \phi_{uu} + 2\phi_u \phi_v \phi_{uv} + \phi_v^2 \phi_{vv}}{(\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2} + 1)(\phi_u^2 + \phi_v^2)} - \sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1} \right) dudv. \quad (5.14)$$

Temos então o seguinte resultado

**Teorema 5.2.** *O gráfico  $X(u, v) = (u, v, \phi(u, v))$  de uma função em que  $\nabla\phi$  não se anula satisfaz  $K = 4H\cos(\theta)$  se, e somente se,  $\phi$  é ponto crítico do funcional  $\Omega$  definido por 5.14.*

**Demonstração.** Defina  $F(p, q, r, s, t) = \frac{p^2 r + 2pqs + q^2 t}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}(p^2 + q^2)} - \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$  Então

$$\Omega(\phi) = \int F(\phi_u, \phi_v, \phi_{uu}, \phi_{u,v}, \phi_{vv}) dudv.$$

Definindo  $\lambda(u, v) = (\phi_u, \phi_v, \phi_{uu}, \phi_{u,v}, \phi_{vv})$ , os pontos críticos de  $\Omega$  são caracterizados pelas soluções da equação de Euler-Lagrange, dada por

$$-\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial F}{\partial p}(\lambda(u, v)) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial F}{\partial q}(\lambda(u, v)) \right) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \frac{\partial F}{\partial r}(\lambda(u, v)) \right) + \frac{\partial^2}{\partial uv} \left( \frac{\partial F}{\partial s}(\lambda(u, v)) \right) + \frac{\partial^2}{\partial vv} \left( \frac{\partial F}{\partial t}(\lambda(u, v)) \right) =$$

$$-\frac{\phi_{uu}\phi_{vv} - \phi_{uv}^2 - 2\phi_{uu} - 2\phi_{vv} - 2\phi_u^2\phi_{vv} - 2\phi_v^2\phi_{uu} + 4\phi_{uv}\phi_u\phi_v}{(\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Que equivale a equação 5.2, que caracteriza um gráfico com a propriedade de satisfazer  $K = 4H\cos(\theta)$ . Isto conclui a demonstração do teorema. □

### 5.3.1 Interpretação geométrica do funcional $\Omega$

Apresentaremos aqui uma descrição mais geométrica para o funcional  $\Omega$ . Iremos supor que  $S$  é o gráfico de uma função  $\phi$ , e que a normal a  $S$  é não vertical. Note que podemos escrever

$$\begin{aligned} \Omega &= \int \left( \frac{\phi_u^2\phi_{uu} + 2\phi_u\phi_v\phi_{uv} + \phi_v^2\phi_{vv}}{(\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1})(\phi_u^2 + \phi_v^2)} \right) dudv - \int \left( \sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1} \right) dudv = \\ & \int \left( \frac{\phi_u^2\phi_{uu} + 2\phi_u\phi_v\phi_{uv} + \phi_v^2\phi_{vv}}{(\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1})(\phi_u^2 + \phi_v^2)} \right) dudv - \int dA. \end{aligned}$$

Vamos interpretar agora o termo que aparece na primeira integral. Verificaremos que ele está relacionado às curvaturas normais nas direções ortogonais às curvas de nível de  $S$ . Seja, para isso,  $\alpha(t) = (u(t), v(t), \phi(u(t), v(t)))$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em  $S$ . A condição de  $\alpha$  ser ortogonal às curvas de nível de  $S$  significa que a projeção de  $\alpha'$  no plano  $z = 0$  é paralela a  $\nabla\phi$ . Seja então  $\lambda$  uma função diferenciável que cumpre a condição

$$(u', v') = (\lambda\phi_u, \lambda\phi_v). \quad (5.15)$$

Substituindo as expressões para  $u'$  e  $v'$  em  $\alpha' = (u', v', u'\phi_u + v'\phi_v)$ , obtemos

$$\alpha' = \lambda(\phi_u, \phi_v, \phi_u^2 + \phi_v^2). \quad (5.16)$$

Como supomos  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$\alpha' = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 + \phi_u^2 + \phi_v^2)(\phi_u^2 + \phi_v^2)}}.$$

Calculando agora  $\alpha''$ , temos

$$\alpha'' = \lambda'(\phi_u, \phi_v, \phi_u^2 + \phi_v^2) + \lambda(u'\phi_{uu} + v'\phi_{uv}, u'\phi_{uv} + v'\phi_{vv}, 2\phi_u(u'\phi_{uu} + v'\phi_{uv}) + 2\phi_v(u'\phi_{uv} + v'\phi_{vv})).$$

Substituindo novamente as expressões 5.15 para  $u'$  e  $v'$  e escrevendo  $(\phi_u, \phi_v, \phi_u^2 + \phi_v^2) = \frac{\alpha'}{\lambda}$ , conforme 5.16, obtemos

$$\alpha'' = \frac{\lambda'}{\lambda} \alpha' + \lambda^2 (\phi_u \phi_{uu} + \phi_v \phi_{uv}, \phi_u \phi_{uv} + \phi_v \phi_{vv}, 2\phi_u (\phi_u \phi_{uu} + \phi_v \phi_{uv}) + 2\phi_v (\phi_u \phi_{uv} + \phi_v \phi_{vv})).$$

A curvatura normal  $K_n$  é calculada projetando o vetor  $\alpha''$  no vetor normal

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+\phi_u^2+\phi_v^2}}(-\phi_u, -\phi_v, 1) \text{ a } S, \text{ isto é}$$

$$K_n = \langle \alpha'', N \rangle = \frac{\phi_u^2 \phi_{uu} + 2\phi_u \phi_v \phi_{uv} + \phi_v^2 \phi_{vv}}{(\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1)^{\frac{3}{2}} (\phi_u^2 + \phi_v^2)}.$$

O teorema abaixo segue diretamente do teorema 5.2 e da expressão acima para  $K_n$ .

**Teorema 5.3.** *Seja  $S \subset R^2$  uma superfície descrita como o gráfico de uma função  $\phi : U \subset R^2 \rightarrow S$ , e suponha que a normal a  $S$  é não vertical em todo ponto. Então  $S$  satisfaz  $K = 4H \cos(\theta)$  se, e somente se,  $\phi$  é ponto crítico do funcional*

$$\Omega(\phi) = \int \frac{K_n}{\cos(\theta)} dA - \int dA$$

Onde  $K_n(u, v)$  é a curvatura normal a  $S$  no ponto  $(u, v, \phi(u, v))$  na direção ortogonal as curva de nível  $z = \phi(u, v)$ ,  $\theta(u, v)$  é o ângulo entre a normal a  $S$  no ponto  $(u, v, \phi(u, v))$  e  $dA$  é o elemento de área de  $S$

## 5.4 Metodo geométrico de se construir exemplos

Nesta seção vamos apresentar um método de se produzir exemplos de superfícies que satisfazem  $K = 4H \cos(\theta)$ . Na seção 4.2.1, nós construímos um exemplo integrando um sistema de equações diferenciais. Na prática, dada uma superfície máxima, em geral é complicado resolver o sistema para encontrar a função  $\psi$ , conforme descrito na seção 4.2.1. Vamos apresentar agora uma forma geral de se integrar o sistema de equações diferenciais correspondente ao nosso problema, e vamos verificar que a solução possui uma boa interpretação geométrica.

Podemos repetir a construção feita na seção 4.2.1 no caso genérico em que  $S \subset L^3$  é uma superfície máxima do tipo espaço, e  $X : U \subset R^2 \rightarrow S$  uma parametrização local por gráfico de função definida em um domínio  $U$ , digamos

$$X(u, v) = (u, v, \phi(u, v)).$$

Neste caso, teríamos as seguintes expressões para o sistema de equações diferenciais e para a mudança de coordenadas

$$\psi_u = -\frac{1}{2} \frac{\phi_v}{\sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}} + \frac{1}{2} \frac{\phi_u \phi_{uu} + \phi_v \phi_{uv}}{(\phi_u^2 + \phi_v^2 - 1)(\phi_u^2 + \phi_v^2)}, \quad (5.17a)$$

$$\psi_v = \frac{1}{2} \frac{\phi_u}{\sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}} + \frac{1}{2} \frac{\phi_v \phi_{vv} + \phi_u \phi_{uv}}{(\phi_u^2 + \phi_v^2 - 1)(\phi_u^2 + \phi_v^2)}, \quad (5.17b)$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{\phi_u^2 u + \phi_v^2 v + \sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2} \phi_v}{\phi_u^2 + \phi_v^2}, \quad (5.17c)$$

$$y = -\frac{1}{2} \frac{-\phi_u^2 v - \phi_v^2 v + \sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2} \phi_u}{\phi_u^2 + \phi_v^2}. \quad (5.17d)$$

Mais adiante mostraremos um método para produzir exemplos de superfícies satisfazendo  $K = 4H \cos(\theta)$  a partir de uma análise do sistema de equações diferenciais para  $\psi$  descrito acima.

Primeiramente, se  $X(u, v) = (u, v, \phi(u, v))$  é uma parametrização como gráfico de função de uma superfície máxima do tipo espaço em que a normal é não vertical em todo ponto, então, da expressão para a normal  $N_l = \frac{1}{\sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}}(-\phi_u, -\phi_v, -1)$ , temos que

$$R = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}}{\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2}} \Rightarrow \log(R) = -\log(2) - \frac{1}{2} \log(\phi_u^2 + \phi_v^2) + \frac{1}{2} \log(1 - \phi_u^2 - \phi_v^2).$$

Daí

$$\frac{\partial}{\partial u} \log(R) = \frac{\phi_u \phi_{uu} + \phi_v \phi_{uv}}{(\phi_u^2 + \phi_v^2 - 1)(\phi_u^2 + \phi_v^2)}, \quad (5.18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \log(R) = \frac{\phi_v \phi_{vv} + \phi_u \phi_{uv}}{(\phi_u^2 + \phi_v^2 - 1)(\phi_u^2 + \phi_v^2)}. \quad (5.18b)$$

Comparando com as expressões de 5.17, temos que

$$\psi_u = -\frac{1}{2} \frac{\phi_v}{\sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \log(R),$$

$$\psi_v = \frac{1}{2} \frac{\phi_u}{\sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \log(R).$$

Em particular, basta resolvermos o sistema

$$\beta_u = -\frac{1}{2} \frac{\phi_v}{\sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}}, \quad (5.19a)$$

$$\beta_v = \frac{1}{2} \frac{\phi_u}{\sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}}, \quad (5.19b)$$

e definir  $\psi = \beta + \frac{1}{2} \log(R)$

Mostraremos que a solução do sistema acima possui uma caracterização geométrica, conforme descrito no seguinte teorema.

**Teorema 5.4.** *Seja  $S$  uma superfície máxima do tipo espaço simplesmente conexa com altura  $\phi$ , e seja  $S^*$  a superfície máxima do tipo espaço conjugada a  $S$ . Se  $\psi$  é a altura de  $S^*$ , então  $-\frac{1}{2}\psi$  é solução do sistema 5.19.*

**Demonstração.** Sendo  $\nabla\phi$  o gradiente de  $\phi$  e  $\nabla\phi^*$  o gradiente de  $\phi^*$  na superfície  $S$ , queremos verificar que  $\phi^*$  é o conjugado harmônico de  $\phi$ . Isto equivale a verificar que  $\nabla\phi^*$  é uma rotação de ângulo  $\frac{\pi}{2}$  de  $\nabla\phi$ . Para uma função  $f : S \rightarrow R$ , é fácil verificar que vale a seguinte expressão para o gradiente de  $f$  em um sistema de coordenadas  $X(u, v)$

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} X_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} X_v.$$

Usando a expressão acima, obtemos por uma conta simples que

$$\nabla\phi = \left( \frac{\phi_u}{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}, \frac{\phi_v}{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}, \frac{\phi_u^2 + \phi_v^2}{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2} \right),$$

$$\nabla\phi^* = \left( \frac{(\phi_v^2 - 1)\phi_u^* - \phi_u\phi_v\phi_v^*}{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}, \frac{(\phi_u^2 - 1)\phi_v^* - \phi_u\phi_v\phi_u^*}{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}, \frac{\phi_u\phi_u^* + \phi_v\phi_v^*}{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2} \right).$$

Sendo  $J\nabla\phi$  uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  em relação a orientação dada pela normal

$$N = \left( \frac{-\phi_u}{\sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}}, \frac{-\phi_v}{\sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}} \right),$$

podemos calcular  $J\nabla\phi$  fazendo o produto vetorial de  $\nabla\phi$  por  $N$ . Obtemos dessa forma

$$J\nabla\phi = \left( \frac{-\phi_v}{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}, \frac{\phi_u}{1 - \phi_u^2 - \phi_v^2}, 0 \right).$$

Igualando as duas primeiras coordenadas de  $\nabla\phi^*$  e  $J\nabla\phi$ , temos um sistema linear em  $\phi_u^*$  e  $\phi_v^*$ . Fazendo o cálculo verifica-se que  $\phi^*$  é de fato solução do sistema 5.19. □

**Corolário.** Dada uma superfície máxima simplesmente conexa escrita em um sistema de coordenadas  $X(u, v)$  A solução do sistema 5.17 é dada por

$$\psi = -\frac{1}{2}X_3^* + \frac{1}{2}\log(R).$$

Em particular, a superfície

$$Y = (x, y, -\frac{1}{2}X_3^* + \frac{1}{2}\log(R)).$$

Onde  $X_3^*$  é a altura da máxima conjugada a  $S$ ,  $R$  é conforme definido em 4.5 e  $(x, y)$  é dada por 5.17, satisfaz  $K = 4H\cos(\theta)$ .

### 5.4.1 Exemplos explícitos de sólitons de translação do HMCF

O corolário acima nos fornece um método eficiente de se produzir exemplos de sólitons de translação do fluxo da curvatura média harmônica. Mostraremos agora alguns exemplos de aplicação do corolário acima.

O procedimento que iremos apresentar se baseia em usar a representação de Weierstrass, conforme descrito em 2.4, para construir uma superfície máxima  $S$ , e calcularmos  $R$  e  $X_3^*$ , conforme a notação usada no corolário anterior, para construir o exemplo.

**Exemplo1.** Tomando  $f(z) = g(z) = z, |z| < 1$ , a superfície máxima correspondente é

$$X(z) = \operatorname{Re} \int \left( \frac{1}{2}z(1+z^2), \frac{i}{2}z(1-z^2), -z^2 \right) dz.$$

Escrevendo  $z = (u, v)$ , e fazendo os cálculos, temos

$$X(u, v) = \left( \frac{1}{8}u^4 - \frac{3}{4}u^2v^2 + \frac{1}{8}v^4 + \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}v^2, \frac{1}{2}u^3v - \frac{1}{2}uv^3 - \frac{1}{2}uv, \frac{-1}{3}u^3 + uv^2 \right).$$

Calculando  $R$  e  $X_3^*$ , obtemos

$$R = \frac{1}{4} \frac{u^2 + v^2 - 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad X_3^* = -u^2v + \frac{1}{3}v^3.$$

Por último, calculando  $(x, y)$  chegamos a

$$x = \frac{1}{16} \frac{(u^6 - 5u^4v^2 - 5u^2v^4 + v^6 + 2u^4 - 2v^4 - 4u^2v - 4v^3 + 4v)}{u^2 + v^2},$$

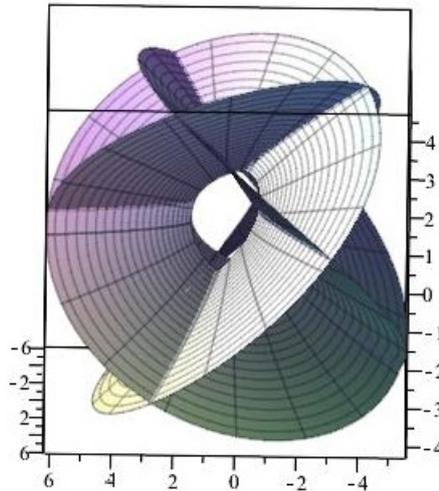
$$y = \frac{1}{4} \frac{u(u^4v - v^5 - u^2v - v^3 + u^2 + v^2 - 1)}{u^2 + v^2}.$$

Disso, temos nossa superfície

$$Y(u, v) = (x, y, -\frac{1}{2}X_3^* + \frac{1}{2}\log(R))$$

dada explicitamente.

Abaixo segue um desenho da superfície em coordenadas polares.



**Exemplo2.** Seguindo os mesmo processo do exemplo anterior com  $f(z) = e^z$  e  $g(z) = z$ , obtemos o sóliton de translação em coordenadas  $Y(u, v) = (x, y, \frac{1}{2}X_3^* - \frac{1}{2}\log(R))$ , onde

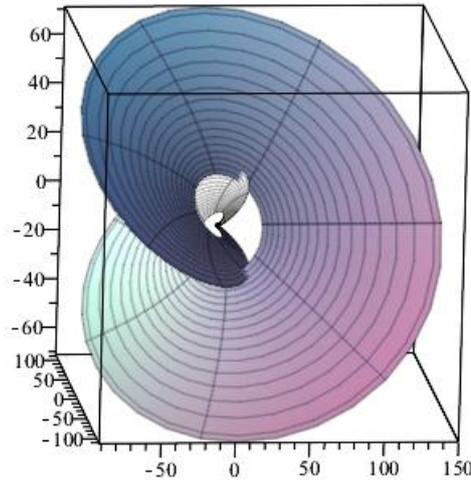
$$x = \frac{1}{4} \frac{1}{u^2 + v^2} (e^u \cos(v) u^4 - e^u \cos(v) v^4 - 2 e^u \sin(v) u^3 v - 2 e^u \sin(v) u v^3 - 2 e^u \cos(v) u^3 - 2 e^u \cos(v) u v^2 + 2 e^u \sin(v) u^2 v + 2 e^u \sin(v) v^3 + 3 e^u \cos(v) u^2 + 3 e^u \cos(v) v^2 - u^2 v - v^3 + v),$$

$$y = \left( \frac{1}{4} \frac{1}{u^2 + v^2} 2e^u \cos(v) u^3 v + 2e^u \cos(v) uv^3 + e^u \sin(v) u^4 - \right. \\ \left. e^u \sin(v) v^4 - 2e^u \cos(v) u^2 v - 2e^u \cos(v) v^3 - 2e^u \sin(v) u^3 - \right. \\ \left. 2e^u \sin(v) uv^2 + e^u \sin(v) u^2 + e^u \sin(v) v^2 + u^3 + uv^2 - u \right),$$

e por último

$$\frac{1}{2} X_3^* - \frac{1}{2} \log(R) = \frac{1}{2} v e^u \cos(v) + \frac{1}{2} e^u \sin(v) u - \ln(2) - \\ \frac{1}{2} e^u \sin(v) + \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2 - 1) - \frac{1}{4} \ln(u^2 + v^2).$$

Abaixo segue um desenho da superfície em coordenadas polares



## 5.5 Discussão sobre uma possível caracterização dos sólitons do HMCF

Os resultados provados ao longo desse trabalho demonstram uma relação entre alguns sólitons de translação do fluxo da curvatura média harmônica e superfícies máximas do tipo espaço de  $L^3$ . Como as superfícies máximas de  $L^3$  possuem uma representação em termos de funções holomorfas, uma pergunta natural é se os sólitons de translação do fluxo da curvatura média harmônica herdam uma representação semelhante. O corolário 5.2 diz que todo sóliton em que a normal é não paralela a direção da translação do fluxo

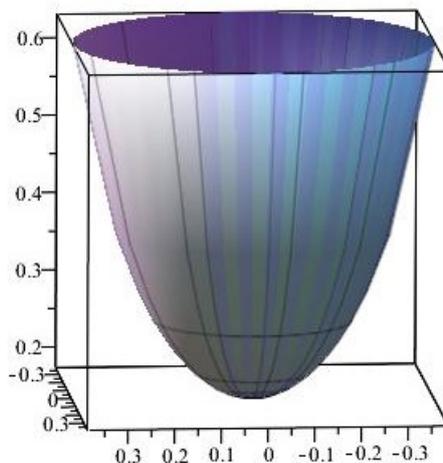
está relacionado com uma superfície anti-isocurvada em que a normal é não vertical. Uma pergunta que surge é se existem exemplos em que a normal é paralela à direção de translação em algum ponto. Por outro lado, o teorema 4.2 discute a relação entre superfícies anti-isocurvadas em que a normal é não vertical e superfícies máximas de  $L^3$ . Analisando a demonstração do teorema 4.2, uma condição que garante que a superfície anti-isocurvada seja construída a partir de uma superfície máxima é que, mantendo a notação do teorema, as relações

$$\bar{u} = u - \frac{\phi\phi_u}{|\nabla\phi|^2},$$

$$\bar{v} = u - \frac{\phi\phi_v}{|\nabla\phi|^2},$$

determinem uma mudança de coordenadas.

Por essas razões, alguns sólitons de translação escapam da nossa construção. Não iremos resolver esse problema nesse trabalho, porém faremos uma observação que pode ser sugestiva. Na seção 5.2.1, construímos um exemplo de sóliton de translação do fluxo da curvatura média harmônica. Restringindo o parâmetro  $v$  na região em que  $\cosh(v) > \sqrt{2}$ , a superfície possui o desenho abaixo.



Apesar da figura acima sugerir que a superfície acima possui um ponto onde a normal é vertical, esse ponto não pertence à superfície que construímos. Por outro lado, acrescentando um ponto à superfície, temos um exemplo de sóliton de translação em que a normal é paralela à direção da translação, respondendo uma das perguntas feitas anteriormente. O fenômeno que aqui se observa é que é possível andar no helicóide em direções em que a normal tende a se tornar vertical, e a construção que apresentamos tende ao ponto onde a normal ao sóliton é vertical, sendo esse ponto uma espécie de passagem ao limite da nossa construção. Essa observação motiva a questão a seguir.

**Questão.** Todo sóliton de translação do fluxo da curvatura média harmônica pode ser construído de forma semelhante ao exemplo acima ?

# Referências

- [1] Barroso, Nilton e Pedro Roitman: *Surfaces in  $R_+^3$  with the same Gaussian curvature induced by the Euclidean and hyperbolic metrics*. Pacific Journal of Mathematics, 275(1):19–37, abril 2015, ISSN 0030-8730, 0030-8730. iv, v, 2, 14, 17, 19, 23
- [2] Brendle, Simon e Richard Schoen: *Manifolds with  $\frac{1}{4}$ -pinched curvature are space forms*. Journal of the American Mathematical Society, 22(1):287–307, julho 2008, ISSN 0894-0347. 1
- [3] Daskalopoulos, Panagiota e Natasa Sesum: *The harmonic mean curvature flow of nonconvex surfaces in  $R^3$* . Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 37(1-2):187–215, janeiro 2010, ISSN 0944-2669, 1432-0835. 3
- [4] Daskalopoulos, Panagiota e Richard Hamilton: *Harmonic mean curvature flow on surfaces of negative gaussian curvature*. Communications in Analysis and Geometry, 14, dezembro 2006. 3
- [5] Ratcliffe, John G.: *Foundations of hyperbolic manifolds*. Número 149 em *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York, 2nd ed edição, 2006, ISBN 9780387331973. OCLC: ocm71779960. 7
- [6] Tenenblat, Ketí: *Transformations of manifolds and applications to differential equations*. Número 93 em *Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics*. Longman, Harlow, 1998, ISBN 9780582316195. OCLC: 246503636. 12
- [7] Kobayashi, Osamu: *Maximal Surfaces in the 3-Dimensional Minkowski Space  $L^3$* . Tokyo Journal of Mathematics, 06(2):297–309, dezembro 1983, ISSN 0387-3870. 12
- [8] Ferreira, Walterson e Pedro Roitman: *Hypersurfaces in hyperbolic space associated with the conformal scalar curvature equation  $\Delta u + ku^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$* . Differential Geometry and Its Applications - DIFFERENTIAL GEOM APPL, 27:279–295, abril 2009. 27