Universidade de Brasília

Uma equação de reação-difusão em domínios não-cilíndricos e seu comportamento assintótico

Santiago Miler Quispe Mamani

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Matemática

Brasília, 31 de Julho de 2020

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma equação de reação-difusão em domínios não-cilíndricos e seu comportamento assintótico

por

Santiago Miler Quispe Mamani*

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 31 de julho de 2020.

Comissão Examinadora:

____

Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva - MAT/UnB (Orientador)

____

Profa. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita – MAT/UnB (Membro)

____

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra – UFPB (Membro)

____

Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento – UFSCar (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq e da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Qe

Quispe Mamani, Santiago Miler
Uma equação de reação-difusão em domínios não-cilíndricos e seu comportamento assintótico / Santiago Miler Quispe Mamani; orientador Ricardo Parreira da Silva. -- Brasília, 2020.
148 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. métodos de semigrupos. 2. equação de reação-difusão. 3. mudança de variável, conjugação. 4. derivada material. 5. condição de contorno tipo Neumann. I. Parreira da Silva, Ricardo, orient. II. Título.

Dedico de todo coração este trabalho a Clemilda Corrêa Soares da Cunha, por ser a pessoa mais importante pra mim.

Agradecimentos

A Deus, por darme forças, em todo momento, e porque me fez conhecer pessoas incríveis. E porque não me fez perder a fé de seguir em frente.

A minha mamãe Marcelina, por ter-me apoiado em todo momento, e me incentivar a superar meus limites. E a meu irmão Edwin, por darme alegria com suas ligações, e me dizer voçê consegui sim. A meu irmão David Yonatan , por me dar sempre ánimos para continuar estudando. A minha irmã Kony Maxubel, por ser minha alegria. A meu irmão Junior Brisko, por seu meu orgulho e por darme forças com a suas palavras de ánimo. Voçês são meu porto seguro.

Quero lhe agradecer muitíssimo a meu orientador Ricardo Parreira da Silva, por seu apoio, e sua paciência, que tive comigo. Eu estou imensamente grato com o senhor. Eu nem palavras tenho, pra lhe expressar toda minha gratidão, estou muito emocionado professor. Você é um grande exemplo pra mim, obrigado por além de me orientar, gentilmente me ensinou análise, tudo isto devo ao senhor. Pelo qual estarei sempre grato. E muito contente em dizer que sou seu aluno.

A todos meus amigos e amigas que me fizerom sentir em casa, em especial a Elmer Giovanni Bazán Córdova, por ser meu mentor, apoio, e guia nos momentos mais difícies. A Mariana de Almeida Nery Coutinho, que incanzablemente me animó a seguir em frente. A meu grande amigo Pavel Zenon Sejas Paz, a quien considero como mi propia família que sempre estive para me guiar em todo momento, obrigado mesmo por tudo. A meus amigos muito alegres, Gabriel Ferreira Silva, Thiago Mendonça Ferreira Ramos, Geovane Cardoso que me fizeron sentir como parte da sua família, as jantas foram sempre legais e muito memoráveis. A Heloisa, pela sua amizade maravilhosa. Agradeço também a meu gran amigo Erix Alexander Milán Garcés, e a sua Esposa Yulexi a quienes lhes apreço muitíssimo.

Agradeço novamente a meu amigo e sensei Pavel, por terme convidado a estudar Análise Funcional, e me ajudar com as dúvidas que eu tinha, sem sua ajuda não sei o que teria feito, e também por ter aceitado vir a minhas prévias que fiz para qualificar em Análise e terme ensinado Inkscape para os gráficos da minha tese. Agradeço muito a meu amigo Henrique Rennó Zanata por terme ajudado gentilmente durante o doutorado nas dúvidas que eu tinha nas materias de Semigrupos, EDP2, e Teoria Espectral, e ter aceitado vir a minhas prévias para qualificar em Análise e ter-me apoiado no ensaio para a defesa obrigado mesmo. Agradeço também a meu amigo Cleber Pereira, por ter aceitado estudar juntos pra qualificar em Álgebra. Agradeço novamente a meu sensei Gabriel Ferreira Silva, por ajudarme nas dúdivas que eu tinha no latex, de todo coração muito obrigado sensei Gabriel. E é inevitável agradecer novamente a meu sensei Thiago Mendonça Ferreira Ramos, por me levar a igreja, precisava muito de alimento pra minha alma, e crescimento espiritual. E fico muito grato por sua torcida a meu irmão Alan Chang e a meu irmão Banhirup Sengupta. Agradeço também a Luis Pánfilo Yapu Quispe, por gentilmente ter aceitado apoiarme nos ensaios para defesa, e me fazer valiosas coreções e comentários. Agradesco muitíssimo a Rina Roxana Paucar Rojas e Milagros Anculli, por sua amizade e também por enviarme gentilmente os livros que precisava muito. A meu amigo Danylo Andriushchenko, pela sua amizade. E fico muito grato também em ter conhecido a todos meus amigos do departamento de Matemática em especial a, Hugo Jacho Hancco, Luan Menezes(mc luan), Leonardo Cavalcanti de Melo(Leo), Felipe Sousa Quintino, Irving Ramirez, Guillermo Villanueva, Rómulo Diaz, Jamer Roldan, Hércules de Carvalho Bezerra, Jailson Oliveira Dias, Karla Carolina Vicente de Sousa, Gustavo Silvestre do Amaral Costa, Filipe Kelmer Alves, Alancoc Dos Santos Alencar, Murilo Veloso, German Alejandro Jimenez Franco, Marcus Vinícius Ribeiro Bernardo Silvério, Gabriel Nóbrega Bufolo.

A todos meus profesores do Departamento de Matemáticas da Universidade Federal de Juiz de Fora e da Universidade de Brasília, em especial, a minha professora Flaviana Andréa Ribeiro, Cátia Regina Gonçalves, Liliane de Almeida Maia, Irina Sviridova e a meus professores Willian Versolati França, Lonardo Rabelo, Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos, Olimpio Hiroshi Miyagaki, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, Marcelo F. Furtado, João Marcos Bezerra do Ó, que tornaram possível minha formação, pelos ensinamentos, críticas, conselhos e incentivo.

Agradeço muitíssimo a meu professor Leandro Cioletti, por suas valiosas palavras, e tive a honra que estive na minha banca. À professora Jaqueline Godoy Mesquita, Flank Bezerra, Marcelo Nascimento, por ter aceitado em participar da minha banca e por suas valiosas correções e comentários.

À institução CAPES, e à CNPq, pelo sustento finaciero, obrigado mesmo

,

Resumo

Neste trabalho, no ambiente Banach faremos a mudança de variável no problema de Cauchy abstrato no sentido da derivada material, para reduzir ao caso estudado por Hiroki Tanabe e Pavel E. Sobolevskii em [32], olhando ao novo operador como conjugação do operador original. Finalmente no ambiente Hilbert, concluímos estudando o nosso problema de reação-difusão em domínios não-cilíndricos com condição de contorno tipo Neumann, o desafio é provar as condições dadas em [32] para um novo problema equivalente.

Palavras-chave: métodos de semigrupos; equação de reação-difusão; mudança de variável; conjugação; derivada material; condição de contorno tipo Neumann.

Abstract

In this paper, in the Banach environment, we will change the variable in the abstract Cauchy problem in the sense of the material derivative, to reduce it to the case studied by Hiroki Tanabe and Pavel E. Sobolevskii in [32], looking at the new operator as a conjugacy of the operator original. Finally in the Hilbert environment, we conclude by studying our reaction-diffusion problem in non-cylindrical domains with Neumann boundary condition, the challenge is to prove the conditions given in [32] for a new equivalent problem.

Keywords: semigroup methods; reaction-diffusion equation; changing the variable; conjugacy; material derivative; boundary condition type Neumann.

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

Existem três abordagens principais para equações de evolução parabólicas abstratas lineares, ou seja, os métodos de semigrupo, os métodos variacionais, e os métodos de usar equações operacionais. Os métodos de semigrupo se originaram no nascimento da noção de semigrupo analítico.

O semigrupo analítico foi usado pela primeira vez para estudar equações de evolução parabólicas abstratas autônomas por Mikhail Zakharovich Solomyak [37], e esses resultados abstratos foram aplicados para resolver equações diferencias parabólicas autônomas concretas, ver Einar Hille, Ralph S. Phillips [19], Kôsaku Yosida [46], Selim G. Krein [24].

Depois, Pavel E. Sobolevskii [35] e Hiroki Tanabe [40] independentemente começaram a estudar equações de evolução parabólica não autônoma. Com base em semigrupos analíticos, eles poderiam construir um operador de evolução para o problema de Cauchy da forma

$$\begin{cases} du(t)/dt + A(t)u(t) &= f(t), \quad 0 \leq s < t \leq T, \\ u(0) &= u_0, \qquad u_0 \in \mathfrak{X} \end{cases} \tag{1}$$

onde $\mathfrak{X}$ é um espaço de Banach, $0 < T < \infty$ é um tempo fixo. Aqui $A(t)$ é um operador setorial de $\mathfrak{X}$ com ângulo $\omega_{A(t)} < \pi/2$, isto é, $-A(t)$ gera um semigrupo analítico $e^{-\left[A(t)\right]\tau}$ sobre $\mathfrak{X}$. A função f é uma função de força externa em $(0,T]$. O valor inicial u_0 é tomado em $\mathfrak{X}$. Sobolevskii e Tanabe consideraram primeiro o caso em que os domínios $\mathrm{dom}(A(t))$ dos coeficientes de operadores lineares são independentes da variável t.

Pavel E. Sobolevskii [36] e Tosio Kato [20] consideraram o caso em que os domínios $\mathrm{dom}(A(t))$ são variáveis com t, mas, para algum expoente $0 < \theta < 1$, os domínios $\mathrm{dom}(A(t)^{\theta})$ de suas potências fracionárias $A(t)^{\theta}$ são independentes de t. Hiroki Tanabe [42] então considerou o caso em que os domínios $\mathrm{dom}(A(t))$ variam completamente com t no sentido de que, para qualquer expoente, $\mathrm{dom}(A(t)^{\theta})$ são possivelmente variantes (veja também Tosio Kato - Hiroki Tanabe [21]).

O método de semigrupos é mais construtivo e nos fornece a seguinte solução

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} f(\tau)\, d\tau, \quad 0 \le t \le T \tag{2}$$

do problema de Cauchy para uma equação de evolução linear

$$\begin{cases} du(t)/dt + Au(t) &= f(t), \quad 0 \le s < t \le T, \\ u(0) &= u_0, \qquad u_0 \in \mathfrak{X} \end{cases}$$

onde $\mathfrak{X}$ é um espaço de Banach, $0 < T < +\infty$ é um tempo fixo. Aqui A é um operador setorial de $\mathfrak{X}$ com ângulo $0 \le \omega_A < \pi/2$. Ou seja, existem $\omega \in (\omega_A,\ \pi/2)$ e $M_\omega \ge 1$ tais que

$$\sigma(A) \subset \Sigma_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ |\arg\lambda| < \omega\}, \quad \omega_A < \omega < \pi/2 \tag{3}$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \le M_\omega/|\lambda|, \quad \lambda \notin \Sigma_\omega,\ \omega_A < \omega < \pi/2. \tag{4}$$

Além disso, fornecem muita informação sobre as soluções das equações. Para os detalhes, veja os livros de Friedman [14] e Tanabe [43], [44]. Em particular, pelo Teorema 3.5 e pelo Teorema 3.10 em Atsushi Yagi [45] podemos obter a regularidade máxima com respeito aos valores iniciais e às funções de força externa.

Os métodos variacionais se originaram com Lions [27]. Equações abstratas são consideradas nos espaços de Hilbert. Considerando $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{X}$ espaços de Hilbert e sendo $\mathfrak{Z}^*$ o espaço de extrapolação de $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{X}$, para funções de força externa em $L_2([0,T];\mathfrak{Z}^*)$ com valores em um espaço de Hilbert, soluções únicas H^1 são imediatamente construídas juntamente com a regularidade máxima em $L_2([0,T];\mathfrak{Z}^*)$, Teorema 3.12 em Atsushi Yagi [45]. Para detalhes, consulte Lions-Magenes [28] e Dautray-Lions [11].

Da Prato-Grisvard [33] (ver também [34]) criou um método para resolver equações operacionais da forma $AU + BU = F$ dada pela soma de dois operadores lineares A e B. Acquistapace-Terreni [1] , [2] usou esse método para construir soluções $\mathcal{C}^1$ para equações de evolução parabólicas abstratas em espaços de Banach. Alessandra Lunardi [29] estudou a regularidade máxima de $\mathcal{C}^1$ soluções.

Neste trabalho, no ambiente Banach faremos a mudança de variável no problema de Cauchy abstrato no sentido da derivada material, para reduzir ao caso estudado por Hiroki Tanabe e Pavel E. Sobolevskii em [32], olhando ao novo operador como conjugação do operador original. Finalmente no ambiente Hilbert, concluímos estudando o nosso problema de reação-difusão em domínios não-cilíndricos com condição de contorno tipo Neumann, o desafio é provar as condições dadas em [32] para um novo problema equivalente.

No capítulo 1, apresentamos noções fundamentais de semigrupos seguindo [32], [43], [45], [17], que servirão como ferramenta ao longo do trabalho. Neste capítulo, acrescentei a prova em que a conjugação de um gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo é gerador infinitesimal do conjugado do mesmo C^0-semigrupo. Também a unificação das nocões de operador setorial, na terminologia de Daniel Henry [17] e a noção de operador setorial na terminologia de Atsushi Yagi [45].

No capítulo 2, estudamos o método de semigrupos, resultado dado por Hiroki Tanabe e Pavel E. Sobolevskii em [32] que determina condições na família de geradores infinitesimais que fazem parte de uns dos coeficientes do problema de valor inicial parabólico, permitindo assim garantir a existência, a unicidade e analisar o comportamento assintótico da solução.

No capítulo 3, estabelecemos a mudança de variável para o problema de Cauchy abstrato no sentido da derivada material.

$$\begin{cases} \partial_t^{\bullet} u(t) + A(t)u(t) &= f(t), \qquad t \in J,\ t \neq 0 \\ u(0) &= u_0, \qquad u_0 \in \mathfrak{X}_0 \end{cases}$$

onde $A(t) : \mathrm{dom}(A(t)) \subset \mathfrak{X}_t \to \mathfrak{X}_t$ é um operador linear e $f \in \mathcal{C}(J, \mathscr{X}, \Phi)$, cuja definição da derivada material pode ser encontrada em Amal Alphonse, Charles M. Elliott & Björn Stinner [3]. O que fazemos essencialmente é utilizar as noções de compatibilidade para que o problema esteja bem colocado no sentido de Hadamard, e logo via mudança de variável, levar a um problema padrão estudado no Capítulo 2 deste trabalho.

Finalmente nos dedicamos a provar a existência, unidade e comportamento assintótico de nosso problema de reação-difusão em domínios não-cilíndricos com condição de contorno tipo Neumann

$$\begin{cases} du/dt + \nabla u \cdot V + u \operatorname{div} V - \Delta u + \gamma u &= f, \quad \text{em} \quad \cup_{t>0} \Omega_t \times \{t\}, \\ \partial u / \partial \nu_t &= 0, \quad \text{sobre} \quad \cup_{t>0} \partial\Omega_t \times \{t\}, \end{cases}$$

onde ν_t denota o campo vetorial normal unitário para $\partial\Omega_t$ e $\gamma > 0$. O primeiro passo será fazer uma mudança de variável adequada, e logo seguir a técnica de Hiroki Tanabe e Pavel E. Sobolevskii em [32]. Sendo $B(t)$ o novo operador, o desafio é provar que $B(t)$ é setorial, para este caso seguiremos a técnica de Daniel Henry [17] e para provar a condição de que $B(t)B(\tau)^{-1}$ seja Hölder-contínua em t, utilizaremos como ferramenta principal a técnica por Atsushi Yagi [45] e por último, provamos as condições que vão garantir a convergência a um estado estacionário da solução.

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais

Neste capítulo, apresentamos os principais conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. As demostrações serão omitidas por se tratar de resultados conhecidos, mas citamos referências onde tais resultados, junto com suas demostrações, podem ser encontrados (em Amnon Pazy [32] , Haim Brezis [5], manuscritos de Daniel Henry [18], [17] e em Atsushi Yagi [45]).

1.1 Notações

Nesta seção, apresentaremos algumas notações que serão adotadas ao longo do texto.

1. $\mathfrak{X}$ significará um espaço de Banach real ou complexo.

2. $:=$ vai significar definido, por exemplo $\mathbb{R}^+ := \{l \in \mathbb{R} \, : \, l > 0\}$

3. $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ é o espaço de operadores lineares contínuos de $\mathfrak{X}$ a $\mathfrak{X}$ com a norma usual

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|/\|x\| \;\; : \;\; x \neq 0 \;\; \text{em} \;\; \mathfrak{X}\}.$$

4. $\{S(s)\}_{s\geq 0} := \{S(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) \, : \, 0 \leq s < +\infty\}$

5. $I \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ denotará o operador identidade.

6. Re λ, Im λ, denotará a parte real e a parte imaginária de λ, respectivamente.

7. $\text{dom}(L)$, $\ker(L)$, $\text{im}(L)$, $\text{graf}(T)$, $\rho(L)$, $\sigma(L)$, denotarão respectivamente, o domínio, núcleo, imagem, gráfico, conjunto resolvente e espectro de um operador linear L.

1.2 Semigrupos lineares

As noções desta seção podem ser encontradas em Amnon Pazy [32] e nos manuscritos de Daniel Henry [18].

Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach real ou complexo e seja $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ o espaço de operadores lineares contínuos de $\mathfrak{X}$ a $\mathfrak{X}$ com a norma usual

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|/\|x\| \ : \ x \neq 0 \ \text{ em } \ \mathfrak{X}\}.$$

Definição 1.1. Um *semigrupo* de operadores lineares sobre $\mathfrak{X}$ é uma família $\{S(s) \ : \ s \geq 0\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ tal que

$$S(0) = I \quad , \qquad S(s+t) = S(s)S(t) \quad \text{para todo } \ s,t \geq 0.$$

Se os operadores estiverem definidos para $-\infty < s,t < +\infty$, então $\{S(s) \ : \ s \in \mathbb{R}\}$ é um grupo.

Definição 1.2. Um semigrupo é *uniformemente contínuo* se $\|S(s) - I\| \to 0$ quando $s \to 0^+$, i.e. $S(s)x \to x$ quando $s \to 0^+$ uniformemente para $\|x\| \leq 1$.

Definição 1.3. Um semigrupo é um C^0-*semigrupo* ou *fortemente contínuo*, se $S(s)x \to x$ quando $s \to 0^+$ para cada $x \in \mathfrak{X}$, i.e. é contínuo em $s = 0$ na topologia forte de operadores.

Exemplo 1.1 (Exemplo 1, pág. 2 [18])**.** Seja $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ e defina $e^{As} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n s^n}{n!}$. A série converge absolutamente desde que $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, então

$$\left\|e^{As}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{A^n s^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|s|\|A\|)^n}{n!} = e^{|s|\|A\|}.$$

Também,

$$\frac{d}{ds}\left(e^{As}\right) = Ae^{As} = e^{As}A.$$

Pela multiplicação de séries, ou pela unicidade para o problema de valor inicial $\dot{X}(s) = AX(s)$, $X(0) = e^{At}$ tem solução

$$X(s) = e^{A(s+t)}$$

$$\text{e} \quad X(s) = e^{As}e^{At}$$

. Vemos que

$$e^{A(s+t)} = e^{As}e^{At} \quad \text{para todo } s,t \geq 0.$$

Também $\|e^{As} - I\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|s|\|A\|)^n}{n!} \leq |s|\|A\|e^{|s|\|A\|} \to 0$ quando $s \to 0$, então

$$S(s) = e^{As}, \quad s \geq 0, \text{ é um semigrupo uniformemente contínuo.}$$

Analogamente para

$$S_1(s) = e^{-As}, \quad s \geq 0.$$

Alternativamente, $s \mapsto e^{As}$ é um grupo fortemente contínuo de operadores lineares para s em $\mathbb{R}$ (ou mesmo sobre $\mathbb{C}$, se $\mathfrak{X}$ é um espaço de Banach complexo).

Definição 1.4. Se $\{S(s) \ : \ s \geq 0\}$ é um C^0-semigrupo sobre $\mathfrak{X}$, seu *gerador infinitesimal* é a aplicação $A : \text{dom}(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ definido por

$$Ax = \lim_{s \to 0^+} \frac{S(s)x - x}{s}, \tag{1.1}$$

onde o domínio $\text{dom}(A)$ consiste de todos os $x \in \mathfrak{X}$ para os quais esse limite existe (como um limite na topologia da norma de $\mathfrak{X}$).

Teorema 1.1. Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.

Demonstração. Ver [32], Teorema 1.2, página 2. □

Teorema 1.2. Seja $\{S(s)\}_{s \geq 0}$ um C^0-semigrupo e seja A seu gerador infinitesimal. Então

a) Para cada $x \in \mathfrak{X}$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} S(\sigma)x \ d\sigma = S(s)x. \tag{1.2}$$

b) Para cada $x \in \mathfrak{X}$, $\int_0^s S(\sigma)x \ d\sigma \in \text{dom}(A)$ e

$$A\left(\int_0^s S(\sigma)x \ d\sigma\right) = S(s)x - x. \tag{1.3}$$

c) Para cada $x \in \text{dom}(A)$, $S(s)x \in \text{dom}(A)$ e

$$\frac{d}{ds}S(s)x = AS(s)x = S(s)Ax. \tag{1.4}$$

d) Para cada $x \in \text{dom}(A)$,

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\sigma)Ax \ d\sigma = \int_s^t AS(\sigma)x \ d\sigma. \tag{1.5}$$

Demonstração. Ver [32], Teorema 2.4, página 4. □

Corolário 1.1. Se A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{S(s)\}_{s\geq 0}$, então dom(A), o domínio de A, é denso em $\mathfrak{X}$ e A é um operador linear fechado.

Demonstração. Ver [32], Corolário 2.5, página 5. □

Um C^0-semigrupo é dito ser *semigrupo de contrações* se $\|S(s)\| \leq 1$.

Lembremos que se A é um operador linear não necessariamente limitado em $\mathfrak{X}$, então o *conjunto resolvente* $\rho(A)$ de A é definido por

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (\lambda I - A)^{-1} \text{ é um operador linear limitado em } \mathfrak{X}\}. \tag{1.6}$$

Denote por

$$R(\lambda : A) := (\lambda I - A)^{-1}. \tag{1.7}$$

A família $\{R(\lambda : A)\}_{\lambda \in \rho(A)}$ de operadores lineares limitados é chamada *resolvente* de A.

Teorema 1.3 (Einar Hille & Kôsaku Yosida, 1948)**.** Suponha que $A : \text{dom}(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ é um operador linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes

(i) A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{S(s) \ : \ s \geq 0\}$ tal que

$$\|S(s)\| \leq e^{\omega s} \quad \text{para todo } \ s \geq 0. \tag{1.8}$$

(ii) A é um operador linear fechado, densamente definido cujo conjunto resolvente inclui (ω, ∞) e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1/(\lambda - \omega) \quad \text{para } \ \lambda > \omega. \tag{1.9}$$

Demonstração. Ver [18], Teorema I.5, página 9. □

Teorema 1.4. Seja A um operador linear, densamente definido e fechado em $\mathfrak{X}$ satisfazendo as seguintes condições

(i) Para algum $0 < \delta < \pi/2$, $\rho(A) \supset \Sigma_\delta = \{\lambda : |arg\lambda| < \pi/2+\delta\} \cup \{0\}$.

(ii) Existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \text{para } \lambda \in \Sigma_\lambda, \quad \lambda \neq 0. \tag{1.10}$$

Então, A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{S(s)\}_{s\geq 0}$ satisfazendo $\|S(s)\| \leq c$ para alguma constante c. Além disso,

$$S(s) = \frac{1}{2\pi i} \quad \int_\Gamma e^{\lambda s} R(\lambda : A)\ d\lambda \tag{1.11}$$

onde Γ é uma curva suave por partes em Σ_δ percorrendo de $\infty e^{-i\theta}$ para $\infty e^{i\theta}$ para $\pi/2 < \theta < \pi/2+\delta$. A integral (1.11) converge para $s > 0$ na topologia uniforme de operadores.

Demonstração. Ver [32], Teorema 7.7, página 30. □

Definição 1.5. Seja $\{S(s)\}_{s\geq 0}$ um C^0-semigrupo sobre um espaço de Banach $\mathfrak{X}$. O semigrupo $\{S(s)\}_{s\geq 0}$ é chamado *diferenciável* se, para cada $x \in \mathfrak{X}$, $s \longmapsto S(s)x$ é diferenciável para $s > 0$.

1.2.1 Semigrupo analítico

Definição 1.6. Seja $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ e para $z \in \Delta$, seja $S(z)$ um operador linear limitado.
A família $\{S(z) \ : \ z \in \Delta\}$ é um *semigrupo analítico* em Δ se

(i) $S(0) = I \quad , \ S(z_1+z_2) = S(z_1)S(z_2) \quad \text{para } z_1, z_2 \in \Delta$

(ii) $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Delta}} S(z)x = x \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{X}$

(iii) $z \to S(z)x$ é analítico sobre Δ para cada $x \in \mathfrak{X}$

Um semigrupo $\{S(s)\}_{s\geq 0}$ será chamado *analítico* se é analítico em algum setor Δ contendo o eixo real não negativo.

Teorema 1.5. Seja $\{S(s)\}_{s\geq 0}$ um C^0-semigrupo uniformemente limitado. Seja A o gerador infinitesimal de $\{S(s)\}_{s\geq 0}$ e assuma $0 \in \rho(A)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\{S(s)\}_{s\geq 0}$ pode ser estendido a um semigrupo analítico em um setor $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |argz| < \delta\}$ e $\|S(z)\|$ é uniformemente limitado em todo subsector fechado $\overline{\Delta_{\delta'}}$, $\delta' < \delta$, de Δ_δ.

(b) Existe uma constante c tal que para todo $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{c}{|\tau|}. \tag{1.12}$$

(c) Existe $\delta \in (0, \ \pi/2)$ e $M > 0$ tal que

$$\rho(A) \supset \Sigma := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ |arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\} \tag{1.13}$$

e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma, \ \lambda \neq 0. \tag{1.14}$$

(d) $S(s)$ é diferenciável para $s > 0$ e existe uma constante c tal que

$$\|AS(s)\| \leq \frac{c}{s}, \quad s > 0. \tag{1.15}$$

Demonstração. Ver [32], Teorema 5.2, página 61. □

O seguinte teorema é uma versão do Teorema 1.2, para semigrupos analíticos.

Teorema 1.6 (Versão para Semigrupos Analíticos)**.** Seja uma família a um parâmetro $\{S(s)\}_{s\geq 0}$ um C^0-semigrupo uniformemente limitado. Seja A o gerador infinitesimal de $\{S(s)\}_{s\geq 0}$ e assuma $0 \in \rho(A)$. E ademais, $S(s)$ pode ser estendido para um semigrupo analítico em um setor $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\arg z| < \delta\}$ e $\|S(z)\|$ é uniformemente limitado em todo subsetor fechado $\overline{\Delta_{\delta'}}$, $\delta' < \delta$, de Δ_δ. Então,

(c') Para cada $x \in \mathfrak{X}$, $S(s)x \in \mathrm{dom}(A)$ e

$$\frac{d}{ds}S(s)x = AS(s)x. \tag{1.16}$$

(d') Para cada $x \in \mathfrak{X}$,

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\sigma)x \ d\sigma. \tag{1.17}$$

Demonstração. Ver [32], Teorema 2.4, página 4, e o Teorema 5.2, página 61. □

1.3 Operador monótono maximal

As noções desta seção podem ser encontradas em Haim Brezis [5], páginas 181 e 193. Ao longo desta seção $\mathfrak{H}$ denota um espaço de Hilbert.

Definição 1.7. Um operador linear ilimitado $A : \mathrm{dom}(A) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ é dito ser *monótono* se satisfaz

$$(Av\,,\,v)_{\mathfrak{H}} \geq 0\,, \quad \text{para todo } \; v \in \mathrm{dom}(A). \tag{1.18}$$

É chamado *monótono maximal*, se em adição $\mathrm{im}(I+A) = \mathfrak{H}$, i.e.,

$$\forall f \in \mathfrak{H},\; \exists u \in \mathrm{dom}(A) \;\text{ tal que }\; u + Au = f. \tag{1.19}$$

Proposição 1.1. Seja A um operador monótono maximal. Então

(a) $\mathrm{dom}(A)$ é denso em $\mathfrak{H}$,

(b) Para todo $\lambda > 0$, $(I - \lambda A)$ é bijetora de $\mathrm{dom}(A)$ sobre $\mathfrak{H}$, $(I - \lambda A)^{-1}$ é um operador limitado, e $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{H})} \leq 1$.

Demonstração. Ver [5], Proposição 7.1, página 181. □

Agora considera-se, $A : \mathrm{dom}(A) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ um operador linear ilimitado com $\overline{\mathrm{dom} A} = \mathfrak{H}$. Identificando $\mathfrak{H}'$ com $\mathfrak{H}$, poderiamos ver A^* como um operador linear ilimitado em $\mathfrak{H}$.

Definição 1.8. Diz-se que

- A é *simétrico* se $(Au\,,\,v)_{\mathfrak{H}} = (u\,,\,Av)_{\mathfrak{H}} \quad \forall u, v \in \mathrm{dom}(A)$.
- A é *auto-adjuto* se $\mathrm{dom}(A^*) = \mathrm{dom}(A) \quad \text{e} \quad A^* = A$.

Proposição 1.2. Seja A um operador monótono maximal e simétrico. Então A é auto-adjunto.

Demonstração. Ver [5], Proposição 7.6, página 193. □

1.4 Operador setorial, semigrupo analítico real

Denotemos por $\mathscr{X} = \{(\mathfrak{X}_t, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}_t})\}_{t\in J}$ uma família de espaços de Banach sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), onde $J \subset \mathbb{R}_+$ é um intervalo contendo $0_{\mathbb{R}}$.

Sejam $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathscr{X}$, denotemos por $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ o espaço de todos os operadores lineares limitados $L : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ munido com a norma

$$\|L\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})} := \sup_{\|x\|_{\mathfrak{X}}\leq 1} \|Lx\|_{\mathfrak{Y}} \tag{1.20}$$

e

$$\mathcal{L}_{is}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := \{L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \ : \ L \text{ é bijetivo}\} \tag{1.21}$$

Também, denotemos $\mathcal{L}(\mathfrak{X}) := \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$, e $\mathfrak{X}' := \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathbb{K})$ o espaço topológico dual de $\mathfrak{X}$.

O conjunto de todas as aplicações contínuas não necessariamente lineares $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ é denotado por $\mathcal{C}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Portanto, $\mathcal{L}_{is}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \subset \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \subset \mathcal{C}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Lema 1.1 (Silva, R.P. & Mamani, S.M.Q.)**.** Seja $\{S(s) \ : \ s \geq 0\}$ um C^0-semigrupo sobre $\mathfrak{Y}$, e seja $L \in \mathcal{L}_{is}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Então, $\{L^{-1}S(s)L \ : \ s \geq 0\}$ é um C^0-semigrupo sobre $\mathfrak{X}$.

Demonstração. Defina-se $S^L(s) = L^{-1}S(s)L$, para ajudar com a notação

- $S^L(0) = I_{\mathfrak{X}}$ ($I_{\mathfrak{X}}$ é operador identidade sobre $\mathfrak{X}$).
  De fato,
  $S^L(0) = L^{-1}S(0)L = L^{-1}I_{\mathfrak{Y}}L = I_{\mathfrak{X}}$.

- $S^L(s+t) = S^L(s)S^L(t)$ para todo $s, t \geq 0$.
  De fato,

$$\begin{aligned} S^L(s+t) &= L^{-1}S(s+t)L \\ &= L^{-1}S(s)S(t)L \\ &= L^{-1}S(s)L\,L^{-1}S(t)L \\ &= \left(L^{-1}S(s)L\right)\left(L^{-1}S(t)L\right) \\ &= S^L(s)S^L(t). \end{aligned} \tag{1.22}$$

- $S^L(s)x \to x$ quando $s \to 0^+$ para cada $x \in \mathfrak{X}$, i.e. é contínua em $s = 0$ na topologia forte do operador.
  De fato, dado $x \in \mathfrak{X}$

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^+} \|S^L(s)x - x\| &= \lim_{s\to 0^+} \left\| \Big(L^{-1}S^L(s)L\Big)x - x \right\| \\
&= \lim_{s\to 0^+} \left\| \Big(L^{-1}S(s)L\Big)x - L^{-1}\, Lx \right\| \\
&= \lim_{s\to 0^+} \left\| \left[L^{-1}S(s)\right](Lx) - L^{-1}(Lx) \right\| \\
&= \lim_{s\to 0^+} \left\| L^{-1}\Big[S(s)(Lx) - (Lx)\Big] \right\| \\
&\le \lim_{s\to 0^+} \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})} \|S(s)(Lx) - (Lx)\| \\
&\le \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})} \lim_{s\to 0^+} \|S(s)(Lx) - (Lx)\| \\
&= 0 \quad \text{pois } \{S(s)\ :\ s \ge 0\} \text{ é um } C^0-\text{semigrupo sobre } \mathfrak{Y} \text{ e } Lx \in \mathfrak{Y}.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

  Como $x \in \mathfrak{X}$ foi tomado arbitrariamente, obtém-se

$$\lim_{s\to 0^+} \|S^L(s)x - x\| = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{X}. \tag{1.24}$$

□

Lema 1.2 (Silva, R.P. & Mamani, S.M.Q.)**.** Seja A o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{S(s)\ :\ s \ge 0\}$ sobre $\mathfrak{Y}$, e seja $L \in \mathcal{L}_{is}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Então, $L^{-1} \circ A \circ L\Big|_{L^{-1}(\mathrm{dom}(A))}$ é o gerador infinitesimal do C^0-semigrupo $\{L^{-1}S(s)L\ :\ s \ge 0\}$ sobre $\mathfrak{X}$

Demonstração. A aplicação $A^L : \mathrm{dom}(A^L) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$
definida por

$$A^L x = \lim_{s\to 0^+} \frac{S^L(s)x - x}{s}, \tag{1.25}$$

onde $A^L = L^{-1} \circ A \circ L$ cujo domínio é dado por $L^{-1}\big(\mathrm{dom}(A)\big)$.
Basta provar que

$$\exists \lim_{s\to 0^+} \frac{S^L(s)x - x}{s} \quad \text{para todo } x \in \mathrm{dom}(A^L). \tag{1.26}$$

Tome $x \in \operatorname{dom}(A^L) = L^{-1}\big(\operatorname{dom}(A)\big)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^+} \frac{S^L(s)x - x}{s} &= \lim_{s\to 0^+} \frac{L^{-1}S(s)Lx - x}{s} \\
&= L^{-1}\left[L \lim_{s\to 0^+} \frac{L^{-1}S(s)Lx - x}{s}\right] \\
&= L^{-1}\left[\lim_{s\to 0^+} \frac{S(s)(Lx) - (Lx)}{s}\right]. \qquad (1.27)
\end{aligned}
$$

Como $x \in \operatorname{dom}(A^L)$, então $x \in L^{-1}\big(\operatorname{dom}(A)\big)$. Daqui, $Lx \in \operatorname{dom}(A)$. E como A é o gerador infinitesimal do C^0-semigrupo $\{S(s) \;:\; s \geq 0\}$ e $Lx \in \operatorname{dom}(A)$, então

$$
\exists \lim_{s\to 0^+} \frac{S(s)(Lx) - (Lx)}{s} \qquad (1.28)
$$

Portanto, da equação (1.28) em (1.27), obtém-se que

$$
\exists \lim_{s\to 0^+} \frac{S^L(s)x - x}{s}. \qquad (1.29)
$$

$\square$

1.4.1 Operador setorial

A seguinte definição de operador setorial pode ser encontrado em Daniel Henry [17], definição 1.3.1, página 18.

Definição 1.9. Chamamos um operador linear A em um espaço de Banach $\mathfrak{X}$ um *operador setorial* se é um operador fechado, densamente definido tal que, para algum ω em $(0,\pi/2)$ e algum $M \geq 1$ e real a, o setor

$$
\Sigma_{a,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} \;:\; \omega \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi \;\;,\;\; \lambda \neq a\} \qquad (1.30)
$$

está contido no conjunto resolvente de A e

$$
\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad , \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{a,\omega}. \qquad (1.31)
$$

Seja $\mathscr{A} = \{A(t)\}_{t\in J}$ uma família de operadores lineares $A(t) : \operatorname{dom}(A(t)) \subset \mathfrak{X}_t \to \mathfrak{X}_t$ A família $\mathscr{A}$ é *setorial* em $\mathscr{X}$, se, $A(t)$ é um operador setorial em $\mathfrak{X}_t$ para todo $t \in J$.

Observação 1.1. É importante observar na definição acima que as constantes ω, M e a independem de t.
Um operador setorial é também conhecido como *operador de tipo* (ω, M), na terminolodia de Hiroki Tanabe, Equations of Evolution [43], página 32.

Definição 1.10. Seja $\mathfrak{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador linear $A : \text{dom}(A) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ é chamado *limitado inferiormente* se, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle Au,\, u\rangle_{\mathfrak{H}} \geq c\|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \text{para todo} \quad u \in \text{dom}(A). \tag{1.32}$$

Lema 1.3. Seja $A : \text{dom}(A) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ um operador linear, auto-adjunto em um espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$. Se A é limitado inferiormente, então A é um operador setorial.

Demonstração. Ver Daniel Henry [17], Exemplo 2, página 19. □

A definição de semigrupo analítico segundo Daniel Henry [17], pode ser encontrada na definição 1.3.3, página 20.

Definição 1.11. Um *semigrupo analítico* sobre um espaço de Banach $\mathfrak{X}$ é uma família de operadores lineares continuos sobre $\mathfrak{X}$, $\{S(s)\}_{s\geq 0}$, satisfazendo

(i) $S(0) = I, \quad S(s)S(t) = S(s+t)$, para $s \geq 0,\ t \geq 0$

(ii) $S(s)x \to x$ quando $s \to 0^+$, para cada $x \in \mathfrak{X}$.

(iii) $s \to S(s)x$ é analítico real sobre $0 < s < +\infty$ para cada $x \in \mathfrak{X}$.

O gerador infinitesimal A deste semigrupo é definido por

$$Ax = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{s}(S(s)x - x), \tag{1.33}$$

seu domínio $\text{dom}(A)$ consistindo de todos os $x \in \mathfrak{X}$ para os quais este limite em $\mathfrak{X}$ existe.
Usualmente escrevemos

$$S(s) = e^{As}. \tag{1.34}$$

É bom observar que a noção de semigrupo analítico aqui coincide com a Definição 1.6 apenas restringindo ao eixo real positivo.

Teorema 1.7. Se A é um operador setorial, então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\left\{e^{-As}\right\}_{s\geq 0}$, onde

$$e^{-As} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda s}\, d\lambda, \tag{1.35}$$

onde Γ é um contorno em $\rho(-A)$ com $\arg\lambda \to \pm\theta$ quando $|\lambda| \to \infty$ para algum θ em $(\pi/2, \pi)$.

Além disso, e^{-As} pode continuar analíticamente em um setor $\{s \neq 0 \ : \ |\arg s| < \varepsilon\}$ contendo o eixo real positivo, e se Re $\sigma(A) > a$, i.e. se Re $\lambda > a$ sempre que $\lambda \in \sigma(A)$, então para $s > 0$

$$\left\| e^{-As} \right\| \leq ce^{-as} \quad , \quad \left\| Ae^{-As} \right\| \leq \frac{c}{s} e^{-as} \tag{1.36}$$

para alguma constante c.
Finalmente,

$$\frac{d}{ds} e^{-As} = -Ae^{-As} \quad \text{para } s > 0. \tag{1.37}$$

Demonstração. Ver Daniel Henry [17], Teorema 1.3.4, página 20. □

1.5 Caracterização da Hölder continuidade do operador $A(t)^{-1}$

As noções nesta parte podem ser encontradas em Atsushi Yagi [45], na página 17.

1.5.1 Espaços adjuntos

Sejam $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ e $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$, respetivamente. Uma função de valor complexo $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ definido sobre o espaço produto $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ é chamado uma *forma sesquilinear* sobre $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ se satisfaz

$$\begin{cases} \langle \alpha F + \beta \tilde{F} \, , \, G \rangle = \alpha \langle F, \, G \rangle + \beta \langle \tilde{F}, \, G \rangle, & \alpha, \, \beta \in \mathbb{C}, \ F, \tilde{F} \in \mathfrak{X}, \ G \in \mathfrak{Y}, \\ \langle F \, , \, \alpha G + \beta \tilde{G} \rangle = \bar{\alpha} \langle F, \, G \rangle + \bar{\beta} \langle F, \, \tilde{G} \rangle, & \alpha, \, \beta \in \mathbb{C}, \ F \in \mathfrak{X}, \ G, \tilde{G} \in \mathfrak{Y}. \end{cases}$$

Além disso, a forma sesquilinear sobre $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ é chamado um *produto dual* se satisfaz

$$|\langle F, \, G \rangle| \leq \|F\|_{\mathfrak{X}} . \|G\|_{\mathfrak{Y}}, \quad F \in \mathfrak{X}, \ G \in \mathfrak{Y}, \tag{1.38}$$

$$\|F\|_{\mathfrak{X}} = \sup_{\|G\|_{\mathfrak{Y}} \leq 1} |\langle F, \, G \rangle|, \quad F \in \mathfrak{X}, \tag{1.39}$$

$$\|G\|_{\mathfrak{Y}} = \sup_{\|F\|_{\mathfrak{X}} \leq 1} |\langle F, \, G \rangle|, \quad G \in \mathfrak{Y}. \tag{1.40}$$

Quando existe um tal produto dual para dois espaços de Banach $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$, o espaço $\mathfrak{Y}$ é chamado *um espaço adjunto* de $\mathfrak{X}$ com produto dual $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$. Obviamente, esta relação é simétrica. Isto é, se $\mathfrak{Y}$ é adjunto para $\mathfrak{X}$ com $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}}$, então $\mathfrak{X}$ é adjunto para $\mathfrak{Y}$ com produto dual $\langle G,\, F\rangle_{\mathfrak{Y}\times\mathfrak{X}} = \overline{\langle F,\, G\rangle}_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}}$. Esse fato nos permite considerar adjunção como uma propriedade para pares de espaços de Banach e dizer que $\{\mathfrak{X},\, \mathfrak{Y}\}$ forma *um par adjunto* com produto dual $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$.

Se $\mathfrak{X}$ é um espaço de Hilbert, então $\mathfrak{X}$ é claramente adjunta para se mesmo, como seu produto interno. Neste sentido, $\{\mathfrak{X},\, \mathfrak{X}\}$ é um par adjunto.

Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach, e $\mathfrak{X}'$ seu espaço dual. Introduzimos a função sobre o espaço produto $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}'$ dado por

$$\langle F,\, \Phi\rangle = \Phi(F), \quad F \in \mathfrak{X},\;\; \Phi \in \mathfrak{X}'. \tag{1.41}$$

1.5.2 Extrapolação de espaços de Hilbert

As noções nesta parte podem ser encontradas em Atsushi Yagi [45], na página 22.

Considere dois espaços de Hilbert $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{X}$ com produtos internos $((\cdot\,,\,\cdot))$ e $(\cdot\,,\,\cdot)$ e com normas $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$, respetivamente. Assumamos que $\mathfrak{Z}\subset\mathfrak{X}$ com imersão densa e contínua.

Suponha que existe um espaço de Banach $\mathfrak{Z}^*$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $\mathfrak{Z}\subset\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Z}^*$ com imersões densas e contínuas.

(2) $\{\mathfrak{Z},\, \mathfrak{Z}^*\}$ forma um par adjunto com o produto dual $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$.

(3) o produto dual $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ satisfaz

$$\langle U,\, F\rangle = (U,\, F) \quad \text{para todo} \quad U\in\mathfrak{Z},\;\; F\in\mathfrak{X}. \tag{1.42}$$

Então, o espaço $\mathfrak{Z}^*$ é chamado um *espaço de extrapolação* de $\mathfrak{Z}\subset\mathfrak{X}$, e os três espaços $\mathfrak{Z}\subset\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Z}^*$ são chamados uma *terna de espaços*. Pela definição de produto dual $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ deve satisfazer

$$|\langle U,\, \Phi\rangle| \le \|U\|\cdot\|\Phi\|_*, \quad U\in\mathfrak{Z},\;\; \Phi\in\mathfrak{Z}^*, \tag{1.43}$$

$$\|U\| = \sup_{\|\Phi\|_*\le 1} |\langle U,\, \Phi\rangle|, \quad U\in\mathfrak{Z}, \tag{1.44}$$

$$\|\Phi\|_* = \sup_{\|U\|_*\le 1} |\langle U,\, \Phi\rangle|, \quad \Phi\in\mathfrak{Z}^*, \tag{1.45}$$

onde $\|\cdot\|_*$ denota a norma de $\mathfrak{Z}^*$. Em adição, vemos que, para $U,V \in \mathfrak{Z}$, $\langle U,\, V\rangle_{\mathfrak{Z}^*\times\mathfrak{Z}} = \overline{\langle V,\, U\rangle_{\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z}^*}} = \overline{(V,\, U)} = (U,V) = \langle U,\, V\rangle_{\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z}^*}$, isto é,

$$\langle U,\, V\rangle_{\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z}^*} = (U,\, V) = \langle U,\, V\rangle_{\mathfrak{Z}^*\times\mathfrak{Z}}, \quad U,V \in \mathfrak{Z}. \tag{1.46}$$

Lema 1.4. O espaço de extrapolação sempre pode ser construido numa forma única.

Demonstração. Ver [45], página 23. □

Teorema 1.8. Seja $a(U,V)$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva sobre $\mathfrak{Z}$, i.e.

$$|a(U,V)| \leq M\|U\|\|V\|, \qquad U,V \in \mathfrak{Z} \tag{1.47}$$

$$\text{Re } a(U,U) \geq \delta\|U\|^2, \qquad U \in \mathfrak{Z} \tag{1.48}$$

com alguma constate $\delta > 0$. Então, para quaisquer $\Psi \in \mathfrak{Z}'$, existe um único elemento $V \in \mathfrak{Z}$ tal que $\Psi(U) = a(U,V)$ para $U \in \mathfrak{Z}$

Demonstração. Ver [45], Teorema 1.23, página 26. □

Usando este teorema, podemos mostrar que $\mathcal{A}$ é um isomorfismo de $\mathfrak{Z}$ sobre $\mathfrak{Z}^*$

Teorema 1.9. Seja $a(U,V)$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva sobre $\mathfrak{Z}$. Então, $\mathcal{A}$ é um isomorfismo de Z sobre Z^* com $\delta\|U\| \leq \|\mathcal{A}U\|_* \leq M\|U\|$ e é um operador linear fechado, densamente definido em $\mathfrak{Z}^*$.

Demonstração. Ver [45], Teorema 1.24, página 26. □

As noções desta seção podem ser encontradas em Atsushi Yagi, páginas 55, 134, 149. Antes de iniciar esta seção, lembraremos a Definição 1.9 de operador setorial na terminologia de Daniel Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations [17]

Chamamos um operador linear A em um espaço de Banach $\mathfrak{X}$ um *operador setorial* se é um operador fechado, densamente definido tal que, para algum ω em $(0,\pi/2)$ e algum $M \geq 1$ e real a, o setor

$$\Sigma_{a,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \omega \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi \;\;,\;\; \lambda \neq a\} \tag{1.49}$$

está contido no conjunto resolvente de A e

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \;\;,\quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{a,\omega}. \tag{1.50}$$

OU EQUIVALENTEMENTE:
Na terminologia de Atsushi Yagi, Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications [45], página 55. Chamamos um operador linear A em um espaço de Banach $\mathfrak{X}$ um *operador setorial* se é um operador fechado, densamente definido tal que, para algum ω em $(0,\pi/2) \subset (0,\pi)$ e algum $M \geq 1$ e real a, o setor

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, |\arg(\lambda - a)| < \omega\} \tag{1.51}$$

contém o espectro de A e

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad , \quad \text{para todo } \lambda \notin \Sigma. \tag{1.52}$$

Observação 1.2. Na terminologia de Atsushi Yagi, pede-se a existência de um ângulo $\omega \in (0,\pi)$, entretanto ao pedir a existência em um intervalo mais pequeno não afeta. Também observe que aqui estamos colocando a translação por um número real a. Tudo isto serve pra unificar as duas definições.

Seja $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{X} \subset \mathfrak{Z}^*$ uma terna de espaços. Considere um operador $\mathcal{A}$ associado com a forma sesquilinear contínua e coerciva $a(\cdot,\cdot)$ definido sobre $\mathfrak{Z}$. Seja $A = \mathcal{A}\Big|_{\mathfrak{X}}$ a restrição de $\mathcal{A}$ em $\mathfrak{X}$. A preocupação é com os domínios $\mathrm{dom}(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ e $\mathrm{dom}(A^{\frac{1}{2}})$ da raiz quadrada. Em geral, pode-se mostrar os seguintes resultados.

Teorema 1.10. Seja $\mathcal{A}$ um operador setorial associado com uma forma sesquilinear contínua e coerciva sobre $\mathfrak{Z}$, e seja A a sua restrição em $\mathfrak{X}$. Para quaisquer θ e θ' tal que $0 < \theta < \frac{1}{2} < \theta' < 1$, cumpre-se que $\mathrm{dom}(\mathcal{A}^{\theta'}) \subset \mathfrak{X} \subset \mathrm{dom}(\mathcal{A}^{\theta})$ e $\mathrm{dom}(\mathcal{A}^{\theta'}) \subset \mathfrak{Z} \subset \mathrm{dom}(\mathcal{A}^{\theta})$ com as estimativas

$$c_\theta^{-1}\|\mathcal{A}^\theta \ \cdot\|_* \leq |\ \cdot\ | \leq c_{\theta'}\|\mathcal{A}^{\theta'} \ \cdot\|_*, \tag{1.53}$$

$$c_\theta^{-1}|A^\theta \ \cdot|_* \leq |\ \cdot\ | \leq c_{\theta'}|A^{\theta'} \ \cdot|, \tag{1.54}$$

onde as constantes $c_\theta > 0$ e $c_{\theta'} > 0$ são determinadas apenas por $M,\ \delta$ e $\theta,\ \theta'$.

Demonstração. Ver [45], Teorema 2.32, página 110. □

1.5.3 $A(t)^{-1}$ é Hölder contínua em t

Consideremos o problema de Cauchy para uma equação de evolução abstrata linear

$$\begin{cases} du(t)/dt + A(t)u(t) & = & f(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u(0) & = & u_0. \end{cases}$$

em $\mathfrak{X}$, onde $0 < T < +\infty$ é o tempo fixado. Aqui, $A(t)$ é um operador setorial de $\mathfrak{X}$ com ângulo $\omega_{A(t)} < \pi/2$, isto é, $-A(t)$ gera um semigrupo analítico $e^{-[A(t)]\tau}$ sobre $\mathfrak{X}$. A função f é uma função de força externa em $(0,T]$. O valor inicial u_0 é tomado em $\mathfrak{X}$.

Para lidar como o problema de Cauchy, fazemos as seguintes premissas para uma família de operadores $A(t)$ como premissas estruturais.

Para $0 \leq t \leq T$, o espectro de $A(t)$ está contido em um domínio setorial aberto

$$\sigma(A(t)) \subset \Sigma_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ |\arg \lambda| < \omega\}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.55}$$

com alguma constante fixa $0 < \omega \leq \pi/2$, e a resolvente satisfaz a estimativa

$$\|R(\lambda : A(t))\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \lambda \notin \Sigma_\omega, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.56}$$

com alguma constante $M \geq 1$. O domínio $\text{dom}(A(t))$ é permitido variar com t, mas existe algum expoente fixo $0 < \nu \leq 1$ tal que

$$\text{dom}(A(t)) \subset \text{dom}(A(t)^\nu) \quad \text{para todo} \quad 0 \leq s,t \leq T. \tag{1.57}$$

(Quando $\nu = 1$, esta condição significa que o domínio $\text{dom}(A(t))$ é independente de t).

E finalmente apresentaremos a condição que será o foco desta seção, ou seja, $A(t)^{-1}$ é Hölder contínua em t no sentido em que

$$\|A(t)^\nu \left[A(t)^{-1} - A(s)^{-1}\right] \| \leq L|t-s|^\mu, \quad 0 \leq s,t \leq T, \tag{1.58}$$

com algum expoente fixo $0 < \mu \leq 1$ e alguma constante $L > 0$. Os expoentes μ e ν satisfazem a relação

$$1 < \mu + \nu. \tag{1.59}$$

1.5.4 Caracterização das condições (1.57) e (1.58)

O objetivo desta parte é ver como um pode verificar as condições (1.57) e (1.58) em exemplos concretos. O caso onde $\nu = 1$ é um dos mais favoráveis. Neste caso, como

$$A(t)\left[A(t)^{-1}-A(s)^{-1}\right]=-\left[A(t)-A(s)\right]A(s)^{-1}, \tag{1.60}$$

podemos calcular diretamente a diferença $A(t)-A(s)$ para verificar (1.58). Por outro lado, quando $\nu<1$, não há representação conveniente para o termo $A(t)^{\nu}\left[A(t)^{-1}-A(s)^{-1}\right]$, pois temos que considerar a potência fracionária $A(t)^{\nu}$.

Seja $\mathfrak{Z}\subset\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Z}^*$ uma terna de espaços de Hilbert. Consideremos uma família de formas sesquilineares $a(t;u,v)$, os quais estão definidos sobre $\mathfrak{Z}$ e satisfaz continuidade e coercividade como alguma constante $M>0$ e $\delta>0$, respectivamente. Em adição, assumimos a condição *Hölder contínua*

$$\left|a(t;u,v)-a(s;u,v)\right|\leq c|t-s|^{\mu}\|u\|\|v\|,\quad 0\leq s,t\leq T;\quad u,v\in\mathfrak{Z} \tag{1.61}$$

com algum expoente fixo $0<\mu\leq 1$ e alguma constante $c>0$. Então, $A(t)$ satisfaz (1.57) e (1.58).

De fato, devido as noções de operadores setoriais asssociados com formas sesquilineares em [45], pág. 56, os operadores setoriais $\mathcal{A}(t)$ $0\leq t\leq T$, de $\mathfrak{Z}^*$ e operadores igualmente setoriais $A(t)$, $0\leq t\leq T$ de $\mathfrak{X}$ estão definidos. A princípio consideremos a família $\mathcal{A}(t)$. Pelo Teorema 1.9 o domínio $\mathrm{dom}(\mathcal{A}(t))$ coincide com $\mathfrak{Z}$, ou seja (1.57) é cumprido com $\nu=1$.

Por outra parte, dado $\Phi\in\mathfrak{Z}^*$ e dado $U\in\mathfrak{Z}$. Então, pela equação (1.60), obtém-se

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{A}(t)\left[\mathcal{A}(t)^{-1}-\mathcal{A}(s)^{-1}\right]\Phi\ ,\ U\right\rangle &= \left\langle -\left[\mathcal{A}(t)-\mathcal{A}(s)\right]\mathcal{A}(t)^{-1}\Phi\ ,\ U\right\rangle\\ &= -\left[\left\langle \mathcal{A}(t)\mathcal{A}(s)^{-1}\Phi\ ,\ U\right\rangle-\left\langle \mathcal{A}(s)\mathcal{A}(s)^{-1}\Phi\ ,\ U\right\rangle\right].\end{aligned} \tag{1.62}$$

Como $\mathcal{A}(t)$ é o operador linear associado com a forma sesquilinear $a(t;U,V)$ i.e.

$$a(t;U,V)=\langle\mathcal{A}(t)U\ ,\ V\rangle\quad \text{para todo } U\in\mathfrak{Z},\ V\in\mathfrak{Z}, \tag{1.63}$$

então

$$a(t;\mathcal{A}(s)^{-1}\Phi,U)=\langle\mathcal{A}(t)\mathcal{A}(s)^{-1}\Phi\ ,\ U\rangle\quad ,\quad a(s;\mathcal{A}(s)^{-1}\Phi,U)=\langle\mathcal{A}(s)\mathcal{A}(s)^{-1}\Phi\ ,\ U\rangle \tag{1.64}$$

Substituindo (1.64) em (1.62) tém-se

$$\left\langle \mathcal{A}(t)\left[\mathcal{A}(t)^{-1}-\mathcal{A}(s)^{-1}\right]\Phi\ ,\ U\right\rangle = -\left[a(t;\mathcal{A}(s)^{-1}\Phi,U)-a(s;\mathcal{A}(s)^{-1}\Phi,U)\right] \tag{1.65}$$

Agora, lembrando a definição (1.45) da norma $\|\cdot\|_*$

$$\|\Phi\|_* = \sup_{\|U\|_* \leq 1} |\langle U,\, \Phi\rangle|, \quad \Phi \in \mathfrak{Z}^*, \tag{1.66}$$

e pela equação (1.65), tem-se

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{A}(t)\left[\mathcal{A}(t)^{-1} - \mathcal{A}(s)^{-1}\right]\Phi \right\|_* &= \sup_{\|U\|\leq 1} \left| \left\langle U \,,\, \mathcal{A}(t)\left[\mathcal{A}(t)^{-1} - \mathcal{A}(s)^{-1}\right]\Phi \right\rangle \right| \\ &= \sup_{\|U\|\leq 1} \left| a\big(t;\mathcal{A}(t)^{-1}\Phi, U\big) \;-\; a\big(t;\mathcal{A}(t)^{-1}\Phi, U\big) \right|. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Como a família de formas sesquilineares $a(t;U,V)$ é Hölder contínua (1.61), então pela equação (1.67) obtém-se

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{A}(t)\left[\mathcal{A}(t)^{-1} - \mathcal{A}(s)^{-1}\right]\Phi \right\|_* &= \sup_{\|U\|\leq 1} N|t-s|^{\mu} \left\|\mathcal{A}(t)^{-1}\Phi\right\| \\ &= N|t-s|^{\mu} \left\|\mathcal{A}(t)^{-1}\Phi\right\|. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Imediatamente devido à associação de operadores setorias com formas sesquilineares, em [45], pág. 57, equação (2.8), i.e. para $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$

$$\left\|(\lambda - \mathcal{A}(t))^{-1}\right\| \leq \delta^{-1}\, \|\Phi\|_* . \tag{1.69}$$

Tome $\lambda = 0$. Assim,

$$\left\| \mathcal{A}(t)\left[\mathcal{A}(t)^{-1} - \mathcal{A}(s)^{-1}\right]\Phi \right\|_* = N|t-s|^{\mu}\delta^{-1}\, \|\Phi\|_* . \tag{1.70}$$

Como $\Phi \in Z^*$ foi tomado arbitrariamente, obtemos

$$\left\| \mathcal{A}(t)\left[\mathcal{A}(t)^{-1} - \mathcal{A}(s)^{-1}\right]\Phi \right\|_* = N|t-s|^{\mu}\delta^{-1}\, \|\Phi\|_* \quad \text{para todo } \Phi \in \mathfrak{Z}^*. \tag{1.71}$$

Portanto, sob a condição (1.61),

$$\mathcal{A}(t) \quad \text{satisfaz } (1.58) \text{ com } \nu = 1.$$

Capítulo 2

Uma Classe de Equações de Evolução

O objetivo desse capítulo é determinar, como em [32], as hipóteses necessárias para provar a existência, unicidade e comportamento assintótico de uma classe de equações de evolução.

2.1 Um sistema de evolução para o problema de valor inicial parabólico

Agora, estuda-se o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} du(t)/dt + A(t)u(t) &= f(t), \quad 0 \leq s < t \leq T, \\ u(s) &= x, \qquad x \in \mathfrak{X} \end{cases}$$

em que $-A(t)$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo uniformemente limitado denotado por $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$ sobre o espaço de Banach $\mathfrak{X}$, para todo $t \in [0,T]$ e a função $f : [s,T] \to \mathfrak{X}$ sendo Hölder contínua.

Para isso, precisamos das seguintes HIPÓTESES:

(P_1) O domínio $\text{dom}(A(t)) = \mathfrak{D}$ de $A(t)$, para todo $0 \leq t \leq T$ é denso em $\mathfrak{X}$ e independente de t.

(P_2) Para cada $t \in [0,T]$, o resolvente $R(\lambda : A(t))$ de $A(t)$ existe para todo λ com Re $\lambda \leq 0$ e existe uma constante M tal que

$$\|R(\lambda : A(t))\| \leq \frac{M}{|\lambda|+1} \quad \text{para Re } \lambda \leq 0, \; t \in [0,T]. \tag{2.1}$$

(P_3) Existem constantes L e $\alpha \in (0,1]$ tais que

$$\left\| \left[A(t) - A(s)\right] A(\tau)^{-1} \right\| \leq L|t-s|^{\alpha} \quad \text{para todo } s,t,\tau \in [0,T]\,. \tag{2.2}$$

Fixa-se $t \in [0,T]$ e imediatamente prova-se as seguintes três afirmações.

AFIRMAÇÃO 1.- Existe uma constante c tal que para todo $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$

$$\|R(\sigma + i\tau : -A(t))\| \leq \frac{c}{|\tau|} \quad \text{para todo } t \in [0,T]\,. \tag{2.3}$$

De fato,

Dado $\sigma > 0$ e dado $\tau \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} \|R(\sigma + i\tau : -A(t))\| &= \|\,[(\sigma + i\tau)I - (-A(t))]^{-1}\,\| \\ &= \|(-1)\,[(-\sigma - i\tau)I - A(t)]^{-1}\,\| \\ &= \|R(-\sigma - i\tau : A(t))\|. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Já que Re $(-\sigma - i\tau) = -\sigma < 0$, então pela hipótese **(P_2)**, existe uma constante M tal que $\|R(-\sigma - i\tau : A(t))\| \leq \dfrac{M}{|-\sigma - i\tau| + 1} \leq \dfrac{M}{|\tau|}$.

Assim, existe uma constante M tal que

$$\|R(\sigma + i\tau : -A(t))\| \leq \frac{M}{|\tau|}. \tag{2.5}$$

AFIRMAÇÃO 2.- Existem $\delta \in (0,\ \pi/2)$ e $M > 0$ tais que

$$\rho(-A(t)) \supseteq \Sigma := \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, |\arg \lambda| < \pi/2 + \delta\} \cup \{0\} \tag{2.6}$$

e

$$\|R(\lambda : -A(t))\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma,\ \lambda \neq 0. \tag{2.7}$$

De fato,

Como $\{S_t(s)\}_{s \geq 0}$ é um C^0-semigrupo uniformemente limitado e $-A(t)$ é o gerador infinitesimal de $\{S_t(s)\}_{s \geq 0}$ e, pela hipótese **(P_2)**, $0 \in \rho(-A(t))$ e ainda pela AFIRMAÇÃO 1, existe uma constante c tal que para todo $\sigma > 0,\ \tau \neq 0$

$$\|R(\sigma + i\tau : -A(t))\| \leq \frac{c}{|\tau|}. \tag{2.8}$$

Então, pelo Teorema 1.5, itens $(b)-(c)$, existem $\delta \in (0,\ \pi/2)$ e $M > 0$ tais que $\rho(-A(t)) \supseteq \Sigma := \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ |\arg\lambda| < \pi/2+\delta\} \cup \{0\}$ e
$\|R(\lambda : -A(t))\| \leq \dfrac{M}{|\lambda|}$, para todo $\lambda \in \Sigma,\ \lambda \neq 0$.

AFIRMAÇÃO 3.- Existem um ângulo $\vartheta \in (0,\ \pi/2)$ e $M > 0$ tal que

$$\rho(A(t)) \supseteq \Sigma_\vartheta := \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ |\arg\lambda| > \vartheta\} \cup \{0\} \tag{2.9}$$

e

$$\|R(\lambda : A(t))\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_\vartheta,\ \lambda \neq 0. \tag{2.10}$$

De fato, escolha-se, $\vartheta = \dfrac{\pi}{2} - \delta$

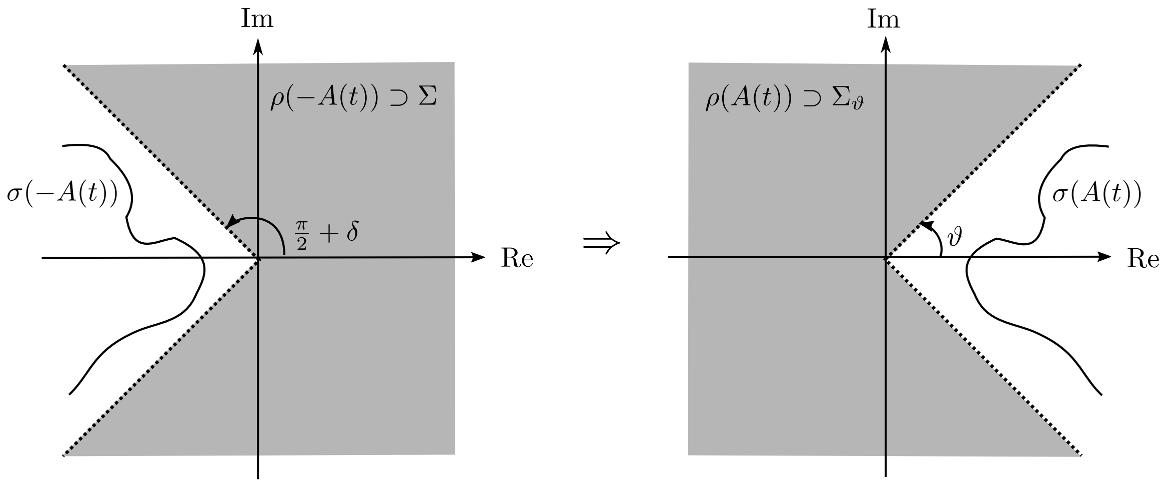

Figura 2.1 Simetria de espectros

Em todos os casos, observemos que $-(\pi/2+\delta) < \arg(-\lambda) < \pi/2+\delta$.
Daqui, $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\arg(-\lambda)| < \pi/2+\delta$.
Imediatamente, pela definição de Σ, obtém-se que $-\lambda \in \Sigma$. Então pela AFIRMAÇÃO 2, $-\lambda \in \rho(-A(t))$. Assim, $\lambda \in \rho(A(t))$. Portanto, existe $\vartheta \in (0,\pi/2)$ tal que

$$\rho(A(t)) \supseteq \Sigma_\vartheta := \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ |\arg\lambda| > \vartheta\} \cup \{0\}. \tag{2.11}$$

Além disso, dado $\lambda \in \Sigma_\vartheta$ com $\lambda \neq 0$, segue que,

$$\begin{aligned} \|R(\lambda : A(t))\| &= \|\,[\lambda I - A(t)]^{-1}\,\| \\ &= \|(-1).\,[-\lambda I - (-A(t))]^{-1}\,\| \\ &= \|R(-\lambda : -A(t))\|. \end{aligned} \tag{2.12}$$

E agora, como $-\lambda \in \Sigma$, $-\lambda \neq 0$, então pela AFIRMAÇÃO 2, existe $M > 0$ tal que

$$\|R(-\lambda : -A(t))\| \leq \frac{M}{|-\lambda|}. \tag{2.13}$$

Portanto, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|R(\lambda : A(t))\| \leq \frac{M}{|\lambda|}. \tag{2.14}$$

Observação 2.1. Pela afirmação 3 e pelo Teorema 1.5 concluímos que $-A(t)$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$ satisfazendo

$$\|S_t(s)\| \leq c \quad \text{para } s \geq 0 \tag{2.15}$$

$$\|A(t)S_t(s)\| \leq \frac{c}{s} \quad \text{para } s > 0 \tag{2.16}$$

Mais algumas consequências das HIPÓTESES $(\boldsymbol{P}_1)$, $(\boldsymbol{P}_2)$, $(\boldsymbol{P}_3)$ são coletadas nos seguintes lemas.

Lema 2.1. Sejam (P_1), (P_2), (P_3) satisfeitas. Então, para cada $s \in (0,T]$, e para cada $t_1, t_2, \tau \in [0,T]$, existe uma constante $c > 0$ tal que $A(t)S_\tau(s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ e

$$\|(A(t_1) - A(t_2))S_\tau(s)\| \leq \frac{c}{s}|t_1 - t_2|^\alpha. \tag{2.17}$$

Demonstração. Dado $\tau \in [0,T]$.
Como a família $\{S_\tau(s)\}_{s\geq 0}$ é um C^0-semigrupo uniformemente limitado e $-A(\tau)$ é o gerador infinitesimal de $\{S_\tau(s)\}_{s\geq 0}$ e pela hipótese $(\boldsymbol{P}_2)$, $0 \in \rho(-A(\tau))$ e ainda pela AFIRMAÇÃO 1, existe uma constante c_1 tal que para todo $\xi > 0$, $\zeta \neq 0$

$$\|R(\xi + i\zeta : A(\tau))\| \leq \frac{c_1}{|\zeta|}. \tag{2.18}$$

Então, pelo Teorema 1.5, itens $(b)-(c)$, $S_t(s)$ é diferenciável para todo $s > 0$ e existe uma constante c_2 tal que

$$\|-A(\tau)S_\tau(s)\| \leq \frac{c_2}{s}, \quad \text{para todo } s > 0. \tag{2.19}$$

Ou seja, a sequência de funções está bem definida

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{S_\tau(s)} \text{dom}(-A(\tau)) \subseteq \mathfrak{X} \xrightarrow{-A(\tau)} \mathfrak{X} \tag{2.20}$$

$$\underbrace{\mathfrak{X} \xrightarrow{S_\tau(s)} \mathrm{dom}(-A(\tau)) \subseteq \mathfrak{X} \xrightarrow{-A(\tau)} \mathfrak{X}}_{-A(\tau).S_\tau(s)}.$$

o que significa que $\mathrm{im}(S_\tau(s)) \subseteq \mathrm{dom}(-A(\tau))$ e $\mathrm{dom}(-A(\tau)S_\tau(s)) = \mathfrak{X}$.
E dado $t \in [0,T]$, então, pela HIPÓTESE $(\boldsymbol{P}_1)$, $\mathrm{im}(S_\tau(s)) \subseteq \mathrm{dom}(-A(\tau)) = \mathrm{dom}(-A(t))$, para todo $s > 0$. Daqui, a composta $-A(t).S_\tau(s) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ está bem definida.
Afirmação.- $-A(t)S_\tau(s)$ é fechado.
De fato, dado $(x,y) \in \overline{\mathrm{graf}(-A(t)S_\tau(s))} \subseteq \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, onde

$$\mathrm{graf}(-A(t)S_\tau(s)) := \{(x,\ -A(\tau).S_\tau(s)x) \ : \ x \in \mathfrak{X}\} \tag{2.21}$$

Então, existe $x_n \in \mathrm{dom}(-A(t).S_\tau(s))$ tal que

$$x_n \longrightarrow x$$

e

$$-A(t)S_\tau(s)x_n \longrightarrow y$$

Por outro lado, como $-A(t)$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$, então pelo Corolário 1.1, $\mathrm{dom}(-A(t))$, o domínio de $-A(t)$, é denso em $\mathfrak{X}$ e $-A(t)$ é um operador linear fechado.

Já que $S_\tau(s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ e $x_n \to x$, então $S_\tau(s)x_n \to S_\tau(s)x$.
E agora como existem $S_\tau(s)x_n \in \mathrm{dom}(-A(\tau))$ tais que

$$\begin{array}{ccc} S_\tau(s)x_n \longrightarrow S_\tau(s)x & & S_\tau(s)x \in \mathrm{dom}(-A(\tau)), \\ & \overset{-A(t) \text{ é fechado}}{\rightarrow} & \\ -A(\tau)S_\tau(s)x_n \longrightarrow y & & y = -A(\tau)S_\tau(s)x \end{array}$$

Então, $(x,y) \in \mathrm{graf}(-A(t)S_\tau(s))$.

Retomando a demonstração, pelo Teorema do Gráfico Fechado, página 37 em [5] $-A(t).S_\tau(s) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ é um operador linear contínuo.
Agora, dado $s \in (0,T]$ e dado $t_1, t_2, \tau \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} \|(A(t_1) - A(t_2)S_\tau(s))\| &= (A(t_1) - A(t_2))\,[A(\tau)]^{-1}.A(\tau)S_\tau(s)\| \\ &\leq \|(A(t_1) - A(t_2))\,[A(\tau)]^{-1}\|.\|A(\tau)S_\tau(s)\| \\ &\leq L.|t_1 - t_2|^\alpha.\frac{c_3}{s} \\ &\leq \frac{c_4}{s}.|t_1 - t_2|^\alpha. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Na segunda desigualdade, utiliza-se a HIPÓTESE $(\boldsymbol{P}_3)$, pois $t_2,\ t_1,\ \tau \in [0,T]$, e também a diferenciabilidade de $S_\tau(s)$, especificamente a equação (2.19), pois $s > 0$. □

Lema 2.2. Sejam (P_1), (P_2), (P_3) satisfeitas. Então, para cada $s_1, s_2 \in (0,T]$, e para cada $t, \tau \in [0,T]$, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|(A(t)(S_\tau(s_2) - S_\tau(s_1))\| \leq \frac{c}{s_1.s_2}|s_2 - s_1|. \tag{2.23}$$

Demonstração. Dado $x \in \mathfrak{X}$, e dado $s_1, s_2 \in (0,T]$ e $t, \tau \in [0,T]$.
Sem perda de generalidade, considere $s_1 < s_2$.
Como $\{S_\tau(s)\}_{s\geq 0}$ pode ser estendido para um semigrupo analítico em um setor $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |argz| < \delta\}$ e $\|S_\tau(s)\|$ é uniformemente limitado em cada subsetor fechado $\overline{\Delta_{\delta'}}$, $\delta' < \delta$, de Δ_δ, então pelo Teorema 1.6 itens $(c') - (d')$, $S_\tau(s)x \in \mathrm{dom}(-A(\tau))$ e

$$\frac{d}{ds}S_\tau(s)x = -A(\tau)S_\tau(s)x \tag{2.24}$$

e

$$S_\tau(s_2)x - S_\tau(s_1)x = \int_{s_1}^{s_2}(-A(\tau))S_\tau(\sigma)x\,d\sigma \tag{2.25}$$

Afirmação.- $\|A(t).\,[A(\tau)]^{-1}\| \leq c$, para todo $t, \tau \in [0,T]$.
De fato, dado $t, \tau \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\left\|A(t).\,[A(\tau)]^{-1}\right\| &= \left\|\Big(A(t) - A(\tau) + A(\tau)\Big).\,[A(\tau)]^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|\Big(A(t) - A(\tau)\Big).\,[A(\tau)]^{-1} + A(\tau).\,[A(\tau)]^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|\Big(A(t) - A(\tau)\Big).\,[A(\tau)]^{-1}\right\| + \left\|A(\tau).\,[A(\tau)]^{-1}\right\| \\
&\leq L.|t-\tau|^\alpha + 1 \\
&\leq c_1(T).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Daqui pela afirmação precedente, tem-se

$$\begin{aligned}
\left\|A(t)\Big(S_\tau(s_2) - S_\tau(s_1)\Big)x\right\| &= \left\|A(t)\,[A(\tau)]^{-1}A(\tau)\Big(S_\tau(s_2) - S_\tau(s_1)\Big)x\right\| \\
&\leq \|A(t)\,[A(\tau)]^{-1}\|.\|A(\tau)\Big(S_\tau(s_2) - S_\tau(s_1)\Big)x\| \\
&\leq c_1(T).\left\|A(\tau)\Big(S_\tau(s_2) - S_\tau(s_1)\Big)x\right\|.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Agora aplicando a ambos os lados o operador liner fechado $A(\tau)$ na equação (2.25), tem-se

$$A(\tau)\Big(S_\tau(s_2) - S_\tau(s_1)\Big)x = A(\tau)\int_{s_1}^{s_2}(-A(\tau))S_\tau(\sigma)x\ d\sigma \tag{2.28}$$

E como $A(\tau)$ é um operador linear fechado, então pelo Teorema de Einar Hille A.1

$$A(\tau)\int_{s_1}^{s_2}(-A(\tau))S_\tau(\sigma)x\ d\sigma \ = \ \int_{s_1}^{s_2}A(\tau)\Big[(-A(\tau))S_\tau(\sigma)x\Big]\ d\sigma \tag{2.29}$$

Substituindo a equação (2.29) em (2.28), obtém-se,

$$A(\tau)\Big(S_\tau(s_2)-S_\tau(s_1)\Big)x \ = \ \int_{s_1}^{s_2}A(\tau)\Big[(-A(\tau))S_\tau(\sigma)x\Big]\ d\sigma \tag{2.30}$$

Retomando a estimativa (2.27). Substituindo a equação (2.30) em (2.27), obtém-se

$$\begin{aligned}
\Big\|A(t)\Big(S_\tau(s_2)-S_\tau(s_1)\Big)x\Big\| &= c_1(T).\Big\|\int_{s_1}^{s_2}A(\tau)\Big[(-A(\tau))S_\tau(\sigma)x\Big]\ d\sigma\Big\| \\
&\le c_1(T).\|\int_{s_1}^{s_2}[A(\tau)]^2S_\tau(\sigma/2+\sigma/2)xd\sigma\| \\
&\le c_1(T).\|\int_{s_1}^{s_2}[A(\tau)S_\tau(\sigma/2)]^2xd\sigma\| \\
&\le c_1(T).\|\int_{s_1}^{s_2}\|A(\tau)S_\tau(\sigma/2)\|^2.\|x\|d\sigma \\
&\le c_1(T).\|x\|.\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{c_3}{\sigma/2}\right)^2 d\sigma \\
&\le c_2(T).\|x\|.\frac{s_2-s_1}{s_1.s_2}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

E agora, como $x\in\mathfrak{X}$ foi tomado arbitrariamente, então

$$\|A(t)(S_\tau(s_2)-S_\tau(s_1))x\|\le c_2.\|x\|.\frac{s_2-s_1}{s_1.s_2}\ , \quad \text{para todo } x\in\mathfrak{X}.$$

Portanto,

$$\|A(t)(S_\tau(s_2)-S_\tau(s_1))\|\le c_2.\frac{s_2-s_1}{s_1.s_2}. \tag{2.32}$$

□

Lema 2.3. Sejam (P_1), (P_2), (P_3) satisfeitas. Então, para cada $s\in(0,T]$, e para cada $t,\tau_1,\tau_2\in[0,T]$, existe uma constante $c>0$ tal que

$$\|(A(t)(S_{\tau_1}(s)-S_{\tau_2}(s))\|\le\frac{c}{s}|\tau_1-\tau_2|^\alpha. \tag{2.33}$$

Além disso, $A(t)S_\tau(s)$ é uniformemente contínua na topologia uniforme de operadores para $s\in[\varepsilon,T],\quad t,\tau\in[0,T]$, para todo $\varepsilon>0$.

Demonstração. Dado $s \in (0,T]$ e dados $t,\tau_1,\tau_2 \in [0,T]$.
Como $-A(t)$ é um operador densamente definido em $\mathfrak{X}$, pela HIPÓTESE $(\boldsymbol{P}_1)$ e sabendo que $-A(t)$ é fechado e, além disso, pela AFIRMAÇÃO 2,
existem $\delta \in (0,\pi/2)$ e $M > 0$ tal que

$$\rho(-A(t)) \supseteq \Sigma := \{\lambda \in \mathbb{C} \, : \, |\arg\lambda| < \pi/2+\delta\} \cup \{0\} \qquad \text{e}$$

$\|R(\lambda : -A(t))\| \leq \dfrac{M}{|\lambda|}$, para todo $\lambda \in \Sigma$, $\lambda \neq 0$, então pelo Teorema 1.4, $-A(t)$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$ satisfazendo $\|S_t(s)\| \leq c$ para alguma constante c. Além disso,

$$S_t(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda s}R(\lambda : -A(t))\,d\lambda$$

onde Γ é uma curva suave por partes em Σ percorrendo de $\infty e^{-i\theta}$ a $\infty e^{i\theta}$ para $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}+\delta$.
Fazendo mudança de variável de λ para $-\lambda$, obtém-se

$$S_t(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma} e^{-\lambda s}R(\lambda : A(t))\,d\lambda \tag{2.34}$$

onde $-\Gamma$ é uma curva suave por partes em Σ percorrendo de $\infty e^{i\varphi}$ a $\infty e^{-i\varphi}$ para $\dfrac{\pi}{2} - \delta < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi := \dfrac{\pi}{2} - \left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \pi - \theta$. A integral na equaçaõ (2.34) converge para $s > 0$ na topologia uniforme de operadores.
E dado $x \in \mathfrak{X}$, segue-se que

$$[S_{\tau_1}(s) - S_{\tau_2}(s)]\,x = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma} e^{-\lambda s}.\,[R(\lambda : A(\tau_1)) - R(\lambda : A(\tau_2))]\,x\,d\lambda$$

Agora, já que $A(t)S_\tau(s) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $s \in (0,T]$ e para todos $\tau, t \in [0,T]$, obtém-se

$$A(t)\,[S_{\tau_1}(s) - S_{\tau_2}(s)]\,x = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma} e^{-\lambda s}.A(t).\,[R(\lambda : A(\tau_1)) - R(\lambda : A(\tau_2))]\,x\,d\lambda \tag{2.35}$$

Imediatamente fazemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
[R(\lambda : A(\tau_1)) - R(\lambda : A(\tau_2))] &= R(\lambda : A(\tau_1))R(\lambda : A(\tau_2))^{-1}R(\lambda : A(\tau_2)) \\
&\quad - R(\lambda : A(\tau_1))R(\lambda : A(\tau_1))^{-1}R(\lambda : A(\tau_2)) \\
&= R(\lambda : A(\tau_1))\left[R(\lambda : A(\tau_2))^{-1} - R(\lambda : A(\tau_1))^{-1}\right]R(\lambda : A(\tau_2)) \\
&= R(\lambda : A(\tau_1))\,[A(\tau_1) - A(\tau_2)]\,R(\lambda : A(\tau_2)).
\end{aligned}$$

Aplicando norma a ambos os lados, obtém-se

$$\begin{aligned}
\|A(t)\,[R(\lambda : A(\tau_1)) - R(\lambda : A(\tau_2))]\,\| &= \|A(t)R(\lambda : A(\tau_1))\,[A(\tau_1) - A(\tau_2)]\,R(\lambda : A(\tau_2))\| \\
&= \|A(t)A(\tau_1)^{-1}A(\tau_1)R(\lambda : A(\tau_1))\,[A(\tau_1) - A(\tau_2)]A(\tau_2)^{-1}A(\tau_2)R(\lambda : A(\tau_2))\| \\
&= \|A(t)A(\tau_1)^{-1}\|.\|A(\tau_1)R(\lambda : A(\tau_1))\|.\|\,[A(\tau_1) - A(\tau_2)]A(\tau_2)^{-1}\|.\|A(\tau_2)R(\lambda : A(\tau_2))\|.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
\|A(t)\,[R(\lambda : A(\tau_1)) - R(\lambda : A(\tau_2))]\,\| \;&=\; \|A(t)A(\tau_1)^{-1}\|.\|A(\tau_1)R(\lambda : A(\tau_1))\|.\|\,[A(\tau_1) - A(\tau_2)]A(\tau_2)^{-1}\| \\
&\quad .\|A(\tau_2)R(\lambda : A(\tau_2))\| \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

Para continuar com a demonstração, precisamos da seguinte afirmação.
Afirmação.- $\|A(t)R(\lambda : A(t))\| \leq c, \quad$ para todo $t \in [0,T]$.
De fato, dado $t \in [0,T]$, segue-se que, $(\lambda I - A(t))R(\lambda : A(t)) = I$. Imediatamente obtém-se que, $A(t)R(\lambda : A(t)) = \lambda.R(\lambda : A(t)) - I$. Daqui,

$$\begin{aligned}
\|A(t)R(\lambda : A(t))\| &= \|\lambda.R(\lambda : A(t)) - I\| \\
&\leq |\lambda|.\|R(\lambda : A(t))\| + 1 \\
&\leq |\lambda|.\frac{M}{|\lambda|} + 1 \\
&\leq M + 1. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Na primeira desigualdade, utilizamos $R(\lambda : A(t)) \in \mathcal{L}(X)$, e na segunda desigualdade utilizamos que $\lambda \in \Sigma$, $\lambda \neq 0$.
Retomando a demonstração, utilizando a Afirmação no Lema 2.2 e a afirmação acima e também a HIPÓTESE $(\boldsymbol{P}_3)$ e, novamente, a afirmação acima, simultaneamente na equação (2.36), obtém-se

$$\|A(t)\,[R(\lambda : A(\tau_1)) - R(\lambda : A(\tau_2))]\,\| \leq c_1(T).c.L.|\tau_1 - \tau_2|^{\alpha}.c$$

E logo,

$$\|A(t)\,[R(\lambda : A(\tau_1)) - R(\lambda : A(\tau_2))]\,\| \leq c_2(T).|\tau_1 - \tau_2|^{\alpha}. \qquad (2.38)$$

Agora, aplicando norma na equação (2.35), e em seguida utilizando a equação (2.38),

$$
\begin{aligned}
\|A(t)\,[S_{\tau_1}(s)-S_{\tau_2}(s)]\,x\| &= \|\frac{1}{2\pi i}.\int_{-\Gamma} e^{-\lambda s}.A(t)\,[R(\lambda:A(\tau_1))-R(\lambda:A(\tau_2))]\,x\,d\lambda\| \\
&\leq \|\frac{1}{2\pi i}.\int_{\infty}^{0} e^{-r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)s}.A(t)\left[R(re^{i\varphi}:A(\tau_1))-R(re^{i\varphi}:A(\tau_2))\right]x.e^{i\varphi}\,dr\| \\
&\quad +\|\frac{1}{2\pi i}.\int_{0}^{\infty} e^{-r(\cos\varphi-i\,\mathrm{sen}\,\varphi)s}.A(t)\left[R(re^{-i\varphi}:A(\tau_1))-R(re^{-i\varphi}:A(\tau_2))\right]x.e^{-i\varphi}\,dr\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}.\left|\int_{\infty}^{0} e^{-sr\cos\varphi}.\left\|A(t)\left[R(re^{i\varphi}:A(\tau_1))-R(re^{i\varphi}:A(\tau_2))\right]\right\|.\|x\|\,dr\right| \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}.\left|\int_{0}^{\infty} e^{-sr\cos\varphi}.\left\|A(t)\left[R(re^{-i\varphi}:A(\tau_1))-R(re^{-i\varphi}:A(\tau_2))\right]\right\|.\|x\|\,dr\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}.\left|\int_{\infty}^{0} e^{-sr\cos\varphi}.c_2(T).|\tau_1-\tau_2|^{\alpha}.\|x\|\,dr\right| + \frac{1}{2\pi}.\left|\int_{0}^{\infty} e^{-sr\cos\varphi}.c_2(T).|\tau_1-\tau_2|^{\alpha}.\|x\|\,dr\right| \\
&\leq \frac{c_2(T)}{2\pi}.|\tau_1-\tau_2|^{\alpha}.\|x\|.\left[\left|\int_{\infty}^{0} e^{-sr\cos\varphi}.dr\right|+\left|\int_{0}^{\infty} e^{-sr\cos\varphi}\,dr\right|\right] \\
&\leq \frac{c_2(T)}{2\pi}.|\tau_1-\tau_2|^{\alpha}.\|x\|.\left[\left|-\frac{1}{s\cos\theta}\right|+\left|\frac{1}{s\cos\theta}\right|\right] \\
&\leq \frac{c_3(T)}{s}.|\tau_1-\tau_2|^{\alpha}.\|x\|.
\end{aligned}
$$

E agora, dado $\varepsilon > 0$, finalmente, para provar que a aplicação

$$
\begin{array}{rccl}
A(-)S_{(-)}(-): & [0,T]\times[0,T]\times[\varepsilon,T] & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathfrak{X}) \\
& (t,\tau,s) & \longmapsto & A(t)S_{\tau}(s)
\end{array}
$$

é uniformemente contínua , basta provar que é contínua, pois toda aplicação contínua definida num compacto é uniformemente contínua. Ou seja, fixando $(t_0,\tau_0,s_0)\in[0,T]\times[0,T]\times[\varepsilon,T]$,

$\forall\,\eta>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que $(t,\tau,s)\in[0,T]\times[0,T]\times[\varepsilon,T]$ e $\max\{|t-t_0|,\ |\tau-\tau_0|,\ |s-s_0|\}<\delta$ impliquem $\|A(t)S_{\tau}(s)-A(t_0)S_{\tau_0}(s_0)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}<\eta$, onde $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|_{\mathfrak{X}}$

De fato, dado $\eta > 0$

$$
\begin{aligned}
\|A(t)S_\tau(s) - A(t_0)S_{\tau_0}(s_0)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} &= \|A(t)S_\tau(s) - A(t_0)S_\tau(s) + A(t_0)S_\tau(s) \\
&\quad - A(t_0)S_\tau(s_0) + A(t_0)S_\tau(s_0) - A(t_0)S_{\tau_0}(s_0)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \\
&\leq \| [A(t) - A(t_0)]\, S_\tau(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} + \|A(t_0)\, [S_\tau(s) - S_\tau(s_0)]\, \|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \\
&\quad + \|A(t_0)\, [S_\tau(s_0) - S_{\tau_0}(s_0)]\, \|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \\
&\leq \frac{c_1}{s}.|t - t_0|^\alpha + \frac{c_2(T)}{s_0.s}.|s - s_0|^\alpha + \frac{c_3(T)}{s_0}|\tau - \tau_0|^\alpha.
\end{aligned}
$$

Na desigualdade imediatamente acima utiliza-se a equação (2.17) do Lema 2.1, a equação (2.23) do Lema 2.2 e por último a equação (2.33) deste Lema 2.3, simultaneamente.
Sendo δ_1 tal que $|s - s_0| < \delta_1$ e $s_0 > \delta_1$

e $\delta_2 < \left[\frac{\eta}{3}.\frac{(s_0 - \delta_1)}{c_1}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$

e $\delta_4 < \frac{\eta}{3}.\frac{(s_0 - \delta_1)s_0}{c_2(T)}$

e $\delta_6 < \left[\frac{\eta}{3}.\frac{s_0}{c_3(T)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$,

e também sendo $\delta_3 = \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$, e $\delta_5 = \min\{\delta_1,\ \delta_4\}$, tome-se
$\delta = \min\{\delta_3,\ \delta_5,\ \delta_6\}$.
Assim, existe $\delta > 0$ tal que $\|A(t)S_\tau(s) - A(t_0).S_{\tau_0}(s_0)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} < \eta$.
Portanto, $A(-)S_{(-)}(-) : [0,T] \times [0,T] \times [\varepsilon, T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ é contínua no ponto $(t_0, \tau_0, s_0) \in [0,T] \times [0,T] \times [\varepsilon, T]$. □

Defina-se, o seguinte operador

$$R_1(t,s) := [A(s) - A(t)]\, S_s(t - s) \tag{2.39}$$

Corolário 2.1. O operador $R_1(t,s) = [A(s) - A(t)]\, S_s(t-s)$ é uniformemente contínuo na topologia uniforme de operadores em $0 \leq s \leq t - \varepsilon < t \leq T$ para todo $\varepsilon > 0$ e

$$\|R_1(t,s)\| \leq c.|t - s|^{\alpha - 1} \quad \text{para todo } \ 0 \leq s < t \leq T. \tag{2.40}$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$
E dado $0 \leq s \leq t - \varepsilon < t \leq T$

Como $t-s \in [\varepsilon, T]$ e $s,t \in [0,T]$, então pelo Lema 2.3, $A(s)S_s(t-s)$, $A(t)S_s(t-s)$ são uniformementes continua na topologia uniforme de operadores. Assim, $A(s)S_s(t-s) - A(t)S_s(t-s)$ é uniformemente continua na topologia uniforme de operadores.

Agora dado $0 \leq s < t \leq T$.
Segue-se que,

$$\begin{aligned}
\|R_1(t,s)\| &= \|[A(s)-A(t)]\,S_s(t-s)\| \\
&= \|[A(s)-A(t)]A(s)^{-1}.A(s)S_s(t-s)\| \\
&\leq \|[A(s)-A(t)]A(s)^{-1}\|.\|A(s)S_s(t-s)\| \\
&\leq L.|s-t|^{\alpha}.\frac{c_1}{t-s} \\
&\leq c_2.(t-s)^{\alpha-1}. \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

Na segunda desigualdade, utilizamos a HIPÓTESE $(\boldsymbol{P}_3)$ e a equação (2.16) respectivamente.

□

2.2 Existência

O sistema de evolução para o problema de valor inicial parabólico homogêneo

$$\begin{cases} du(t)/dt + A(t)u(t) = 0, & 0 \leq s < t \leq T, \\ u(s) = x \end{cases} \qquad (2.42)$$

será construido por um método chamado *parametrix method* devido a Eugenio Elia Levi em [25]. HIPÓTESES:

- Para cada $t \in [0,T]$, $-A(t)$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo uniformemente limitado $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$ no espaço de Banach $\mathfrak{X}$.
- (P_1), (P_2), (P_3).

A princípio suponha-se que existe um único sistema de evolução $U(t,s)$ para o problema de valor inicial parabólico homogêneo. E suponha-se também que $U(t,s)$ tenha a forma

$$U(t,s) = S_s(t-s) + \int_s^t S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)d\tau \qquad (2.43)$$

com o operador auxiliar $R(t,s)$ a construir.

Agora com a ajuda do Teorema Fundamental do Cálculo, para duas variáveis, obtém-se,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) &= \frac{\partial}{\partial t}S_s(t-s)+S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)|_{\tau=t}-\int_s^t \frac{\partial}{\partial t}S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)\,d\tau \\
&= -A(s)S_s(t-s)+R(t,s)+\int_s^t(-A(\tau)).S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)\,d\tau \\
&= -A(s)S_s(t-s)+R(t,s)-\int_s^t A(\tau)S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)\,d\tau \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

E daqui, pelas equações (2.43), (2.44), obtém-se,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)+A(t)U(t,s) &= -A(s)S_s(t-s)+R(t,s)-\int_s^t A(\tau)S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)\,d\tau \\
&\quad +A(t).\left[S_s(t-s)+\int_s^t S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)d\tau\right] \\
&= R(t,s)-A(s)S_s(t-s)+A(t)S_s(t-s)-\int_s^t A(\tau)S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)\,d\tau \\
&\quad +A(t)\int_s^t S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)d\tau \\
&= R(t,s)-[A(s)-A(t)]\,S_s(t-s)-\int_s^t[A(\tau)-A(t)]\,S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)\,d\tau \\
&= R(t,s)-R_1(t,s)-\int_s^t R_1(\tau,s)R(\tau,s)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)+A(t)U(t,s)=R(t,s)-R_1(t,s)-\int_s^t R_1(\tau,s)R(\tau,s)\,d\tau. \qquad (2.45)$$

onde

$$R_1(t,s):=[A(s)-A(t)]\,S_s(t-s) \qquad (2.46)$$

Uma vez que $U(t,s)$ é um sistema de evolução para (2.42) resulta de (2.45) que a equação integral

$$R(t,s)=R_1(t,s)+\int_s^t R_1(t,\tau)R(\tau,s)\,d\tau \qquad (2.47)$$

deve ser satisfeita. Dado $R_1(t,s)$ podemos tentar reverter o argumento, isto é, resolver a equação integral (2.47) para $R(t,s)$ e então define-se $U(t,s)$ por (2.43).
Este será realmente o método de construção de $U(t,s)$ abaixo . Para executar esta construção rigorosamente, precisamos das HIPÓTESES $(\boldsymbol{P}_1)$, $(\boldsymbol{P}_2)$, $(\boldsymbol{P}_3)$.

2.2.1 Construção do sistema de evolução

Começamos resolvendo a equação integral (2.47) para $R(t,s)$. Se $R_1(t,s)$ satisfaz (2.40) então a equação integral (2.47) pode ser resolvido por aproximações sucessivas da seguinte maneira: Para $m \geq 1$ define-se indutivamente

$$R_{m+1}(t,s) := \int_s^t R_1(t,\tau)R_m(\tau,s)\ d\tau \tag{2.48}$$

Afirmação.- $R_m(t,s)$ é contínua na topologia uniforme de operadores para $0 \leq s < t \leq T$ e que

$$\|R_m(t,s)\| \leq \frac{[c.\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(m.\alpha)}.(t-s)^{m.\alpha-1} \tag{2.49}$$

onde $\Gamma(.)$ é a função Gama clássica.
De fato, para este objetivo, primeiro prova-se por indução a equação (2.49).
$m = 1$ é verdade, pois pelo Corolário 2.1, $\|R_1(t,s)\| \leq c.|t-s|^{\alpha-1}$. Daqui, $\|R_1(t,s)\| \leq \dfrac{[c.\Gamma(\alpha)]^1}{\Gamma(1.\alpha)}.(t-s)^{1.\alpha-1}$. Agora para o caso, $m \to m+1$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|R_{m+1}(t,s)\| &= \left\| \int_s^t R_1(t,\tau)R_m(\tau,s)\,d\tau \right\| \\
&= \int_s^t \|R_1(t,\tau)\|.\|R_m(\tau,s)\|\,d\tau \\
&= \int_s^t c.(t-\tau)^{\alpha-1}.\frac{[c.\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(m\alpha)}.(\tau-s)^{m\alpha-1}\,d\tau \\
&= c.\frac{[c.\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(m\alpha)}.\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}.(\tau-s)^{m\alpha-1}\,d\tau \\
&= c.\frac{[c.\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(m\alpha)}.(t-s)^{\alpha+m\alpha-1}.\frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(m\alpha)}{\Gamma(\alpha+m\alpha)} \\
&= \frac{[c.\Gamma(\alpha)]^{m+1}}{\Gamma((m+1)\alpha)}.(t-s)^{(m+1)\alpha-1}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

A primeira igualdade é justificada, pela equação (2.48). E na segunda desigualdade utiliza-se a equação (2.40) do Corolário 2.1 e a hipótese de indução. E finalmente na quarta desigualdade utiliza-se o Lema A.2. Imediatamente, da equação (2.49), existe $c_T > 0$ tais que $\|R_m(t,s)\| \leq c_T$, onde $c_T = \dfrac{[c.\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(m\alpha)}.T^{m\alpha-1}$. Assim, $R_m(t,s)$ é contínua na topologia uniforme de operadores para $0 \leq s < t \leq T$ e que

$$\|R_m(t,s)\| \leq \frac{[c.\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(m\alpha)}.(t-s)^{m\alpha-1} \tag{2.51}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama clássica
Notemos que a integral definida por $R_{m+1}(t,s)$ é uma integral cuja existência é uma consequência de (2.49). A continuidade de $R_{m+1}(t,s)$ também segue da continuidade de $R_m(t,s)$, $R_1(t,s)$ e (2.49). Também, observa-se que a estimativa (2.49) implica que a série

$$R(t,s) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t,s) \tag{2.52}$$

converge uniformemente na topologia uniforme de operadores para todo $0 \leq s \leq t-\varepsilon \leq T$ e para todo $\varepsilon > 0$.

Da equação (2.49), e da Observação A.1, segue-se que

$$\begin{aligned}
\|R(t,s)\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|R_m(t,s)\| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[c\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(m\alpha)}(t-s)^{m\alpha-1} \\
&\leq \frac{1}{t-s}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[c\Gamma(\alpha).(t-s)^{\alpha}]^m}{\Gamma(m\alpha)} \\
&\leq (t-s)^{-1}.c(\alpha).c.\Gamma(\alpha)(t-s)^{\alpha}.e^{2.[c\Gamma(\alpha)(t-s)^{\alpha}]^{1/\alpha}} \\
&\leq c_1(\alpha,T)(t-s)^{\alpha-1}.e^{c_2(\alpha)(t-s)} \\
&\leq c_1(\alpha,T)(t-s)^{\alpha-1}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Como uma consequência $R(t,s)$ é uniformemente contínua em $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$, para todo $0 \leq s < t-\varepsilon \leq T$ e todo $\varepsilon > 0$. Da equação (2.48), segue-se que

$$\begin{aligned}
R(t,s) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t,s) &= R_1(t,s) + \sum_{m=1}^{\infty} R_{m+1}(t,s) \\
&= R_1(t,s) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_s^t R_1(t,\tau)R_m(\tau,s)\ d\tau.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

A continuidade de $R_m(t,s)$, $m \geq 1$, (2.40) e (2.49) implicam que um pode trocar ordem da somatória e da integral em (2.54), i.e.

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(t,s) = R_1(t,s) + \int_s^t R_1(t,\tau)\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\tau,s)\ d\tau. \tag{2.55}$$

Portanto, vemos que $R(t,s)$ é solução da equação integral (2.47). Finalmente, enunciamos o Teorema principal desta seção

Teorema 2.1. Seja $-A(t)$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo uniformemente limitado $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$ sobre o espaço de Banach $\mathfrak{X}$, para todo $t \in [0,T]$. Sob as hipóteses (P_1), (P_2) e (P_3) existe um único sistema de evolução $U(t,s)$ em $0 \leq s \leq t \leq T$, satisfazendo:

$(E_1)'$ $\|U(t,s)\| \leq C$ para $0 \leq s \leq t \leq T$.

$(E_2)^+$ Para $0 \leq s < t \leq T$, $U(t,s) : \mathfrak{X} \to D$ e $t \to U(t,s)$ é fortemente diferenciável em $\mathfrak{X}$. A derivada $(\partial/\partial t)U(t,s) \in B(\mathfrak{X})$ e ele é fortemente contínuo em $0 \leq s < t \leq T$. Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) + A(t)U(t,s) = 0 \quad \text{para } 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{2.56}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)\right\| = \|A(t)U(t,s)\| \leq \frac{c}{t-s} \tag{2.57}$$

e

$$\left\|A(t)U(t,s)A(s)^{-1}\right\| \leq c \quad \text{para } 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{2.58}$$

$(E_3)^+$ Para cada $v \in D$ e $t \in (0,T]$, $U(t,s)v$ é diferenciável com respeito a s em $0 \leq s \leq t \leq T$ e

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)v = U(t,s)A(s)v. \tag{2.59}$$

Para reproduzir a demonstração do Teorema, precisaremos estudar alguns lemas da diferenciabilidade do sistema de evolução $U(t,s)$ que ajudará neste objetivo.

2.2.2 Diferenciabilidade de $U(t,s)$.

Lema 2.4. Para cada β, $0 < \beta \leq \alpha$, existe uma constante C_β tal que

$$\|R_1(t,s) - R_1(\tau,s)\| \leq C_\beta (t-\tau)^\beta (\tau-s)^{\alpha-\beta-1} \quad \text{para } 0 \leq s < \tau < t \leq T. \tag{2.60}$$

Demonstração. Temos, pela equação (2.39),

$$\begin{aligned}
R_1(t,s) - R_1(\tau,s) &= (A(s)-A(t))S_s(t-s) - (A(s)-A(\tau))S_s(\tau-s) \\
&= (A(\tau)-A(t)+A(s)-A(\tau))S_s(t-s) - (A(s)-A(\tau))S_s(\tau-s) \\
&= (A(\tau)-A(t))S_s(t-s) + (A(s)-A(\tau))S_s(t-s) - (A(s)-A(\tau))S_s(\tau-s) \\
&= (A(\tau)-A(t))S_s(t-s) + (A(s)-A(\tau))\left[S_s(t-s) - S_s(\tau-s)\right]. \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

Estimaremos, o primeiro somando da equação anterior, utilizando a equação (2.17), do Lema 2.1,

$$\begin{aligned}\|(A(\tau)-A(t))S_s(t-s)\| &\leq \frac{c_1}{t-s}|\tau-t|^{\alpha}\\ &\leq c_1|t-\tau|^{\alpha}(t-s)^{-1}\\ &\leq c_1(t-\tau)^{\alpha}(\tau-s)^{-1}. \qquad (2.62)\end{aligned}$$

Agora utilizaremos a propriedade $(\boldsymbol{P}_3)$, junto com a equação (2.23), do Lema 2.2, pois $s,t\in[0,T]$, e $0<\tau-s, t-s\in(0,T]$, $s\in[0,T]$ respectivamente,

$$\begin{aligned}\|(A(s)-A(\tau))\,[S_s(t-s)-S_s(\tau-s)]\,\| &= \left\|(A(s)-A(\tau))A(s)^{-1}A(s)\,[S_s(t-s)-S_s(\tau-s)]\right\|\\ &\leq \left\|(A(s)-A(\tau))A(s)^{-1}\right\|\,\|A(s)\,[S_s(t-s)-S_s(\tau-s)]\,\|\\ &\leq L|s-\tau|^{\alpha}\frac{c_2}{(\tau-s)(t-s)}|(t-s)-(\tau-s)|\\ &= c_3\frac{|\tau-s|^{\alpha}}{(\tau-s)}|t-s-\tau+s|\frac{1}{(t-s)}\\ &= c_3\frac{(\tau-s)^{\alpha}(t-\tau)}{(\tau-s)}\frac{1}{(\tau-s)}\\ &= c_3(\tau-s)^{\alpha-2}(t-\tau) \qquad (2.63)\end{aligned}$$

Novamente utilizaremos a propriedade $(\boldsymbol{P}_3)$, junto com a equação (2.16), pois $s,t\in[0,T]$, e $t-s>0,\ \tau-s>0$ respectivamente,

$$\begin{aligned}\|(A(s)-A(\tau))\,[S_s(t-s)-S_s(\tau-s)]\,\| &= \left\|(A(s)-A(\tau))A(s)^{-1}A(s)\,[S_s(t-s)-S_s(\tau-s)]\right\|\\ &\leq \left\|(A(s)-A(\tau))A(s)^{-1}\right\|\,\|A(s)\,[S_s(t-s)-S_s(\tau-s)]\,\|\\ &\leq L|s-\tau|^{\alpha}(\|A(s)S_s(t-s)\|+\|A(s)S_s(\tau-s)\|)\\ &\leq L|s-\tau|^{\alpha}\left(\frac{c_4}{t-s}+\frac{c_5}{\tau-s}\right)\\ &= c_6(\tau-s)^{\alpha-1}. \qquad (2.64)\end{aligned}$$

Daqui, interpolando (2.63), (2.64) para $0 < \alpha \leq 1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|(A(s)-A(\tau))\,[S_s(t-s)-S_s(\tau-s)]\,\| &= \|(A(s)-A(\tau))\,[S_s(t-s)-S_s(\tau-s)]\,\|^{\alpha} \\
&\quad .\|(A(s)-A(\tau))\,[S_s(t-s)-S_s(\tau-s)]\,\|^{1-\alpha} \\
&\leq \{c_3(\tau-s)^{\alpha-2}.(t-\tau)\}^{\alpha}.\{c_6(\tau-s)^{\alpha-1}\}^{1-\alpha} \\
&\leq c_7(\tau-s)^{(\alpha-2)\alpha}.(t-\tau)^{\alpha}.(\tau-s)^{(\alpha-1)(1-\alpha)} \\
&= c_7(t-\tau)^{\alpha}.(\tau-s)^{\alpha^2-2\alpha+\alpha-\alpha^2-1+\alpha} \\
&= c_7(t-\tau)^{\alpha}.(\tau-s)^{-1}. \qquad (2.65)
\end{aligned}
$$

E assim, utilizando (2.62) e (2.65), obtém -se,

$$
\begin{aligned}
\|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\| &= \|(A(\tau)-A(t))S_s(t-s)+(A(s)-A(\tau))\,[S_s(t-s)-S_s(\tau-s)]\,\| \\
&\leq \|(A(\tau)-A(t))S_s(t-s)\|+\|(A(s)-A(\tau))\,[S_s(t-s)-S_s(\tau-s)]\,\| \\
&\leq c_1(t-\tau)^{\alpha}.(\tau-s)^{-1}+c_7(t-\tau)^{\alpha}.(\tau-s)^{-1} \\
&= c_8(t-\tau)^{\alpha}.(\tau-s)^{-1}. \qquad (2.66)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, pela equação (2.40) do Corolário 2.1, pois $0 \leq s < t \leq T,\ 0 \leq s < \tau \leq T$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\| &= \|R_1(t,s)\|+\|R_1(\tau,s)\| \\
&\leq c_9|t-s|^{\alpha-1}+c_9|\tau-s|^{\alpha-1} \\
&= c_{10}(\tau-s)^{\alpha-1}. \qquad (2.67)
\end{aligned}
$$

Interpolando (2.66), (2.67) para $0 < \dfrac{\beta}{\alpha} \leq 1$, obtém-se,

$$
\begin{aligned}
\|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\| &= \|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\|^{\frac{\beta}{\alpha}}.\|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\|^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \\
&\leq \{c_8(t-\tau)^{\alpha}(\tau-s)^{-1}\}^{\frac{\beta}{\alpha}}.\{c_{10}(\tau-s)^{\alpha-1}\}^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \\
&\leq c_{11}(t-\tau)^{\beta}(\tau-s)^{\frac{-\beta}{\alpha}}.(\tau-s)^{(\alpha-1)(1-\frac{\beta}{\alpha})} \\
&= c_{11}(t-\tau)^{\beta}(\tau-s)^{\frac{-\beta}{\alpha}+\alpha-\beta-1+\frac{\beta}{\alpha}} \\
&= c_{11}(t-\tau)^{\beta}.(\tau-s)^{\alpha-\beta-1} \qquad (2.68)
\end{aligned}
$$

onde $c_{11} = c_{11}(T)$. □

Corolário 2.2. Para cada β, $0 < \beta \leq \alpha$, existe uma constante C_β tal que

$$\|R(t,s) - R(\tau,s)\| \leq c_\beta (t-\tau)^\beta (\tau - s)^{\alpha-\beta-1} \quad \text{para } 0 \leq s < \tau < t \leq T. \tag{2.69}$$

Demonstração. Da equação (2.47), obtém-se,

$$\begin{aligned}
\|R(t,s) - R(\tau,s)\| &= R_1(t,s) + \int_s^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma - \left(R_1(\tau,s) + \int_s^\tau R_1(\tau,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma\right)\\
&= R_1(t,s) - R_1(\tau,s) + \int_s^\tau R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma + \int_\tau^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma - \int_s^\tau R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma\\
&= R_1(t,s) - R_1(\tau,s) + \int_\tau^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma + \int_s^\tau (R_1(t,\sigma) - R_1(\tau,\sigma))R(\sigma,s)d\sigma.
\end{aligned}$$

A seguir a primeira integral será estimada, utilizando a equação (2.40) do Corolário 2.1, pois $0 \leq \sigma < t \leq T$, e também a equação (2.53),

$$\begin{aligned}
\left\|\int_\tau^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma\right\| &\leq \int_\tau^t \|R_1(t,\sigma)\|.\|R(\sigma,s)\| \; d\sigma\\
&\leq \int_\tau^t c_1|t-\sigma|^{\alpha-1}.c_2(\sigma-s)^{\alpha-1} \; d\sigma\\
&\leq c_3\int_\tau^t |t-\sigma|^{\alpha-1}.(\sigma-s)^{\alpha-1} \; d\sigma\\
&\leq c_3(\tau-s)^{\alpha-1}\int_\tau^t (t-\sigma)^{\alpha-1} \; d\sigma\\
&\leq c_3(\tau-s)^{\alpha-1}.\frac{1}{\alpha}(t-\tau)^\alpha\\
&\leq c_4(\tau-s)^{\alpha-1}.(t-\tau)^\alpha.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Agora faremos a estimativa da outra integral, esta vez utilizaremos a equação (2.60), do Lema 2.4, pois $0 \leq \sigma < \tau < t \leq T$ e de novo utilizaremos a equação (2.53). A quarta linha abaixo é justificada pela Lema A.2

$$\begin{aligned}
\left\|\int_s^\tau (R_1(t,\sigma) - R_1(\tau,\sigma))R(\sigma,s)d\sigma\right\| &\leq \int_s^\tau \|R_1(t,\sigma) - R_1(\tau,\sigma)\|.\|R(\sigma,s)\| \; d\sigma\\
&\leq \int_s^\tau c_\beta.(t-\tau)^\beta.(\tau-\sigma)^{\alpha-\beta-1}.c_6.(\sigma-s)^{\alpha-1} \; d\sigma\\
&\leq c_7.(t-\tau)^\beta\int_s^\tau (\tau-\sigma)^{\alpha-\beta-1}.(\sigma-s)^{\alpha-1} \; d\sigma\\
&\leq c_7.(t-\tau)^\beta.(\tau-s)^{(\alpha-\beta)+(\alpha)-1}.\frac{\Gamma(\alpha-\beta).\Gamma(\alpha)}{\Gamma((\alpha-\beta)+(\alpha))}\\
&\leq c_8.(t-\tau)^\beta.(\tau-s)^{2\alpha-\beta-1}.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

E por último, da equação (2.60) do Lema 2.4, e da equação (2.70), (2.71), obtemos,

$$
\begin{aligned}
\|R(t,s)-R(\tau,s)\| \leq \|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\| &+ \left\| \int_\tau^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)\ d\sigma \right\| \\
&+ \left\| \int_s^\tau (R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma))R(\sigma,s)\ d\sigma \right\| \\
&\leq c_\beta (t-\tau)^\beta (\tau-s)^{\alpha-\beta-1} + c_5(\tau-s)^{\alpha-\beta-1}(t-\tau)^\beta + c_9(t-\tau)^\beta(\tau-s)^{\alpha-\beta-1} \\
&\leq c_{10}.(t-\tau)^\beta.(\tau-s)^{\alpha-\beta-1}
\end{aligned}
$$

onde $c_{10} = c_{10}(T)$ □

Lema 2.5. Para cada $x \in \mathfrak{X}$, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} S_t(\varepsilon)x = x \quad \text{uniformemente em} \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.72}$$

Demonstração. Dado $t \in [0,T]$
E dado $x \in \mathrm{dom}(-A(t)) = \mathfrak{D}$. Como $-A(t)$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$ e $x \in \mathfrak{D}(-A(t))$, então pelo Teorema 1.2, item (d)

$$S_t(\varepsilon)x - S_t(0)x = \int_0^\varepsilon S_t(\sigma).(-A(t))x d\sigma = \int_0^\varepsilon (-A(t))S_t(\sigma)x d\sigma \tag{2.73}$$

Logo,

$$S_t(\varepsilon)x - x = -\int_0^\varepsilon S_t(\sigma).A(t)x d\sigma = -\int_0^\varepsilon A(t)S_t(\sigma)x d\sigma \tag{2.74}$$

Segue-se que,

$$
\begin{aligned}
\|S_t(\varepsilon)x - x\| &= \|-\int_0^\varepsilon S_t(\sigma).A(t)x d\sigma\| \\
&\leq \int_0^\varepsilon \|S_t(\sigma).A(t).[A(0)]^{-1}.A(0)x\| d\sigma \\
&\leq \int_0^\varepsilon \|S_t(\sigma)\|.\|A(t).[A(0)]^{-1}\|.\|A(0)x\| d\sigma \\
&\leq c.c_T.\|A(0)x\|\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

Daqui, $\lim_{\varepsilon\to 0} \|S_t(\varepsilon)x - x\| = 0 \quad$ para todo $x \in \mathfrak{D}$

Agora, dado $x \in \mathfrak{X}$. Então, existe $x_n \in \operatorname{dom}(-A(t)) = \mathfrak{D}$ tal que $x_n \to x$ em $\mathfrak{X}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|S_t(\varepsilon)x - x\| &= \|S_t(\varepsilon)x - S_t(\varepsilon)x_n + S_t(\varepsilon)x_n - x_n + x_n - x\| \\ &\leq \|S_t(\varepsilon)\|.\|x - x_n\| + \|S_t(\varepsilon)x_n - x_n\| + \|x_n - x\|. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Já que, $|S_t(\varepsilon)\| \leq c$, onde c não depende de t, obtém-se o objetivo, fazendo tender $n \to \infty$. $\square$

Apenas para seguir a sequência, enunciaremos novamente o Teorema 2.1

Teorema 2.2. Seja $-A(t)$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo uniformemente limitado $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$ sobre o espaço de Banach $\mathfrak{X}$, para todo $t \in [0,T]$. Sob as hipóteses (P_1), (P_2) e (P_3) existe um único sistema de evolução $U(t,s)$ em $0 \leq s \leq t \leq T$, satisfazendo:

$(E_1)'$ $\|U(t,s)\| \leq C$ para $0 \leq s \leq t \leq T$.

$(E_2)^+$ Para $0 \leq s < t \leq T$, $U(t,s) : \mathfrak{X} \to D$ e $t \to U(t,s)$ é fortemente diferenciável em $\mathfrak{X}$. A derivada $(\partial/\partial t)U(t,s) \in B(\mathfrak{X})$ e ele é fortemente contínua em $0 \leq s < t \leq T$. Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) + A(t)U(t,s) = 0 \quad \text{para } 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{2.77}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)\right\| = \|A(t)U(t,s)\| \leq \frac{c}{t-s} \tag{2.78}$$

e

$$\left\|A(t)U(t,s)A(s)^{-1}\right\| \leq c \quad \text{para } 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{2.79}$$

$(E_3)^+$ Para cada $v \in D$ e $t \in (0,T]$, $U(t,s)v$ é diferenciável com respeito a s em $0 \leq s \leq t \leq T$ e

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)v = U(t,s)A(s)v \tag{2.80}$$

Retornaremos agora a provar que $U(t,s)$, construido acima, tem a propriedade em $(E_2)^+$. Para isto necessitamos de alguns preliminares.

Lema 2.6. Seja $\varphi \geq 0$ contínua em $0 \leq s < t \leq T$. Se existem constantes positivas A, B, α tais que

$$\varphi(t,s) \leq A + B\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}.\varphi(\sigma,s)\ d\sigma \quad \text{para todos } 0 \leq s < t \leq T. \tag{2.81}$$

então existe uma constante c tal que $\varphi(t,s) \leq c$, para todos $0 \leq s < t \leq T$.

Demonstração. **Afirmação.-** Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(t,s) \leq A.\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{BT^{\alpha}}{\alpha}\right)^{j} + \frac{(B\Gamma(\alpha))^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha)}.\int_s^t (t-\sigma)^{(n+1)\alpha-1}.\varphi(\sigma,s)\ d\sigma. \tag{2.82}$$

De fato, $n=2$

$$\begin{aligned}
\varphi(t,s) &\leq A + B.\left\{\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}.\left[A + B\int_s^{\sigma}(\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)d\xi\right]\ d\sigma\right\}\\
&\leq A + BA.\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\ d\sigma + B^2.\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}.\left[\int_s^{\sigma}(\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)d\xi\right]\ d\sigma\\
&\leq A + BA.\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha} + B^2.\int_{a=s}^{b=t}\left(\int_{\varphi(\sigma)=s}^{\psi(\sigma)=\sigma}(t-\sigma)^{\alpha-1}.(\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)d\xi\right)\ d\sigma\\
&\leq A + BA.\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha} + B^2.\int_{c=s}^{d=t}\left(\int_{\tilde{\varphi}(\xi)=\xi}^{\tilde{\psi}(\xi)=t}(t-\sigma)^{\alpha-1}.(\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\ d\sigma\right)\ d\xi\\
&\leq A + BA.\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha} + B^2.\int_s^t\left(\int_{\xi}^{t}(t-\sigma)^{\alpha-1}.(\sigma-\xi)^{\alpha-1}\ d\sigma\right)\varphi(\xi,s)\ d\xi\\
&\leq A + BA.\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha} + B^2.\int_s^t (t-\xi)^{\alpha+\alpha-1}.\frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\alpha)}\varphi(\xi,s)\ d\xi\\
&\leq A\left[\left(\frac{B(t-s)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{0} + \left(\frac{B(t-s)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{1}\right] + \frac{[B.\Gamma(\alpha)]^2}{\Gamma(2\alpha)}.\int_s^t (t-\xi)^{2\alpha-1}.\varphi(\xi,s)\ d\xi.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

$n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\varphi(t,s) &\leq A + B.\left\{\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}.\varphi(\sigma,s)\ d\sigma\right\}\\
&\leq A + B.\left\{\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}.\left[A\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{B(\sigma-s)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{j} + \frac{(B.\Gamma(\alpha))^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha)}.\int_s^{\sigma}(\sigma-\xi)^{(n+1)\alpha-1}\varphi(\xi,s)\ d\xi\right]\ d\sigma\right\}\\
&\leq A + B.A\sum_{j=0}^{n}.\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}.\left(\frac{B(\sigma-s)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{j}\ d\sigma + B.\frac{(B.\Gamma(\alpha))^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha)}.\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}.\left[\int_s^{\sigma}(\sigma-\xi)^{(n+1)\alpha-1}\varphi(\xi,s)\ d\xi\right]\ d\sigma\\
&\leq A + B.A\sum_{j=0}^{n}.\frac{B^j}{\alpha^j}.T^{\alpha j}.\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\ d\sigma + B.\frac{(B.\Gamma(\alpha))^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha)}.\int_{a=s}^{b=t}\left(\int_{\varphi(\sigma)=s}^{\psi(\sigma)=\sigma}(t-\sigma)^{\alpha-1}.(\sigma-\xi)^{(n+1)\alpha-1}.\varphi(\xi,s)\ d\xi\right)\ d\sigma\\
&\leq A + B.A\sum_{j=0}^{n}.\frac{B^j}{\alpha^j}.T^{\alpha j}.\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha} + B.\frac{(B.\Gamma(\alpha))^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha)}.\int_{c=s}^{d=t}\left(\int_{\widetilde{\varphi}(\xi)=\xi}^{\widetilde{\psi}(\xi)=t}(t-\sigma)^{\alpha-1}.(\sigma-\xi)^{(n+1)\alpha-1}.\varphi(\xi,s)\ d\sigma\right)\ d\xi\\
&\leq A + B.A\sum_{j=0}^{n}.\frac{B^j}{\alpha^{j+1}}.T^{\alpha(j+1)} + B.\frac{(B.\Gamma(\alpha))^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha)}.\int_s^t\left(\int_{\xi}^{t}(t-\sigma)^{\alpha-1}.(\sigma-\xi)^{(n+1)\alpha-1}\ d\sigma\right).\varphi(\xi,s)\ d\xi\\
&\leq A.\left[\left(\frac{BT^{\alpha}}{\alpha}\right)^{0} + \sum_{j=0}^{n}.\frac{B^j}{\alpha^{j+1}}.T^{\alpha(j+1)}\right] + B.A + B.\frac{(B.\Gamma(\alpha))^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha)}.\int_s^t .(t-\xi)^{\alpha+(n+1)\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha).\Gamma((n+1)\alpha)}{\Gamma(\alpha+(n+1)\alpha)}\varphi(\xi,s)\ d\xi\\
&\leq A.\left[\sum_{j=0}^{n}.\left(\frac{B.T^{\alpha}}{\alpha}\right)^{j}\right] + \frac{(B.\Gamma(\alpha))^{n+2}}{\Gamma((n+2)\alpha)}.\int_s^t .(t-\xi)^{(n+2)\alpha-1}\varphi(\xi,s)\ d\xi
\end{aligned}$$

Para $n-1$,

$$\varphi(t,s) \leq A.\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{BT^{\alpha}}{\alpha}\right)^{j} + \frac{(B\Gamma(\alpha))^{n}}{\Gamma(n\alpha)}.\int_{s}^{t}(t-\sigma)^{n\alpha-1}.\varphi(\sigma,s)\,d\sigma. \tag{2.84}$$

Como $\alpha,\ 1 \in \mathbb{R}^{+}$, pela propriedade Arquimediana do corpo $\mathbb{R}$, Lages, pág 59 , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N.\alpha > 1$. E estimando $(t-\sigma)^{n.\alpha-1}$, por $T^{n.\alpha-1}$ conseguimos

$$\varphi(t,s) \leq c_1(T) + c_2(T).\int_{s}^{t}\varphi(\sigma,s)\ \ d\sigma. \tag{2.85}$$

Já que, $t \mapsto u(t) = c_2(T)$, $t \mapsto \varphi(t,s)$ são funções contínuas, não-negativas sobre $[0,T]$, $c_1 \geq 0$ uma constante e

$$\varphi(t,s) \leq c_1(T) + \int_{s}^{t}\varphi(\sigma,s).c_2(T)\,d\sigma. \tag{2.86}$$

então pela Desigualdade de Gronwall A.5,

$$\begin{aligned}\varphi(t,s) &\leq c_1(T).e^{\int_s^t c_2(T)\,d\sigma}\\ &\leq c_1(T).e^{c_2(T)(t-s)} \leq c_1(T).e^{c_2(T).T} \leq c_3(T).\end{aligned} \tag{2.87}$$

Como $c_1(T)$ e $c_2(T)$ não dependem de s, esta estimativa vale para $0 \leq s < t \leq T$. □

2.3 Equação não homogênea

Seja $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ uma família de operadores no espaço de Banach $\mathfrak{X}$ satisfazendo as HIPÓTESES (P_1), (P_2), (P_3) da seção 2.1 e considere o problema de valor inicial não homogêneo

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), & 0 \leq s < t \leq T,\\ u(s) = x, & x \in \mathfrak{X}\end{cases} \tag{2.88}$$

no espaço de Banach $\mathfrak{X}$.

Do Teorema 2.1 segue-se que existe um único sistema de evolução $U(t,s),\ \ 0 \leq s \leq t \leq T$, associado com a família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$.

Nesta seção estamos interessados em *solução clássica* de (2.88), isto é, funções $u : [s,T] \to \mathfrak{X}$ os quais são contínuas para $s \leq t \leq T$, continuamente diferenciáveis para $s < t \leq T$, $\quad u(t) \in \mathfrak{D}$ para $s < t \leq T$, $u(s) = x$ e $u'(t) + A(t)u(t) = f(t)$ se cumpre para todo $s < t \leq T$. Chamaremos uma função u de *solução* de um problema de valor inicial (2.88) se aquela é solução clássica deste problema. Para obter soluções clássicas de (2.88) teremos de impor condições adicionais à função f.

Teorema 2.3. [Hiroki Tanabe [39], 1960] Seja $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ que satisfaçam as hipóteses (P_1), (P_2), (P_3) da seção 2.1 e seja $U(t,s)$ o sistema de evolução fornecido pelo Teorema 2.2 . Se f é Hölder contínua sobre $[s,T]$ então o problema de valor inicial (2.88) tem, para cada $x \in \mathfrak{X}$, uma única solução dada por:

$$u(t) = U(t,s)x + \int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)\,d\sigma. \tag{2.89}$$

Demonstração. Ver [32], Teorema 7.1, pág.168. □

2.4 Comportamento assintótico de soluções

Seja $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ uma família de operadores no espaço de Banach $\mathfrak{X}$ satisfazendo para todo $T > 0$ as HIPÓTESES (P_1), (P_2), (P_3) da seção 2.1. Se $f : [0,\infty) \to \mathfrak{X}$ é Hölder contínua sobre $[0,\infty)$ então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) &= f(t), \quad 0 \leq s < t \leq T, \\ u(s) &= x, \qquad x \in \mathfrak{X}. \end{cases} \tag{2.90}$$

tem uma única solução u sobre $[0,\infty)$. O comportamento assintótico desta solução, quando $t \to \infty$, é o assunto desta presente seção. Com o objetivo de estudar este comportamento assintótico assumiremos que as HIPÓTESES (P_1), (P_2), (P_3) valem uniformemente sobre $[0,\infty)$ isto é, que se espera para todo $T > 0$ com constantes M, L e α os quais são independentes de T.Vamos supor ainda:

(P_4) Os operadores $A(t)A(s)^{-1}$ são uniformemente limitados para $0 \leq s,t < +\infty$ e existe um operador fechado $A(\infty)$ com domínio $\mathfrak{D}$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| (A(t) - A(\infty))A(0)^{-1} \right\| = 0. \tag{2.91}$$

Teorema 2.4. Suponha que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaça as hipóteses (P_1), (P_2), (P_3) uniformemente em $[0,+\infty)$. Se $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz também (P_4) e $U(t,s)$ é um sistema de evolução para $\{A(t)\}_{t\geq 0}$(ver o Teorema 2.2), então existem constantes $c \geq 0$ e $\vartheta > 0$ tais que

$$\|U(t,s)\| \leq ce^{-\vartheta(t-s)}, \quad \text{para } 0 \leq s \leq t. \tag{2.92}$$

Demonstração. Notemos primeiro que dos resultados da Seção 1.2.1, também ver as equações (6.5), (6.6) da Seção 2.6, página 70 em [32] a densidade de $\mathfrak{D}$ e o fato que HIPÓTESE $(\boldsymbol{P_2})$ se cumpre para todo $t \geq 0$, segue-se que $-A(t)$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$, para todo $t \geq 0$ e que existem constantes $c_1 \geq 0$ e $\delta > 0$ (independente de t) tal que:

$$\|S_t(s)\| \leq c_1 e^{-\delta s}, \quad \text{para } s \geq 0. \tag{2.93}$$

$$\|A(t)S_t(s)\| \leq \frac{c_1}{s} e^{-\delta s}, \quad \text{para } s > 0. \tag{2.94}$$

Definamos

$$\rho(\mu) := \sup\{\|(A(t)-A(s))A(r)^{-1}\| : 0 \leq \mu \leq t,s < +\infty, \quad 0 \leq r < +\infty\} \tag{2.95}$$

Das HIPÓTESES $(\boldsymbol{P_3})$ e $(\boldsymbol{P_4})$ segue-se que $\rho(\mu)$ é finito para $\mu \geq 0$ e $\rho(\mu) \to 0$ quando $\mu \to +\infty$.
Dados $\mu \leq s,t < +\infty$ e dado $r \in [0,+\infty)$, então

$$\begin{aligned} \|(A(t)-A(s))A^{-1}(r)\| \;\leq\; \|(A(t)-A(s))A^{-1}(r)\|^{1/2}\|(A(t)-A(s))A^{-1}(r)\|^{1/2} &\leq (\rho(\mu))^{1/2}(L|t-s|^{\alpha})^{1/2} \\ &\leq c_2.\sqrt{\rho(\mu)}|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Na segunda desigualdade utiliza-se a equação (2.95) e a HIPÓTESE $(\boldsymbol{P_3})$, pois $\mu \leq s,t < +\infty$, $0 \leq r < +\infty$ e pois $(\boldsymbol{P_3})$ satisfaz uniformemente em $[0,+\infty)$ respetivamente.
Como $\mu \leq s,t < +\infty$ e $r \in [0,+\infty)$ foram tomados arbitrários, obtém-se

$$\|(A(t)-A(s))A^{-1}(r)\| \leq c_2.\sqrt{\rho(\mu)}|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{para todo } \mu \leq s,t < +\infty \text{ , } r \in [0,+\infty) \tag{2.97}$$

Agora dados $\mu \leq s < t < +\infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \|R_1(t,s)\| = \|(A(s)-A(t))S_s(t-s)\| &= \|(A(s)-A(t))A(s)^{-1}A(s)S_s(t-s)\| \\ &\leq \|(A(s)-A(t))A(s)^{-1}\|.\|A(s)S_s(t-s)\| \\ &\leq c_2\sqrt{\rho(\mu)}|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}.\frac{c_1}{t-s}e^{-\delta(t-s)} \\ &\leq c_3.\left[\Gamma(\frac{\alpha}{2})\right]^{-1}\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta(t-s)}. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Acima na primeira igualdade se utilizou a equação (2.39), e na penútima linha é justificado pela equação (2.97), pois $\mu \leq s, t < +\infty$, $s \in [0, +\infty)$, e pela equação (2.94), pois $t > s$, simutáneamente. Daqui,

$$\|R_1(t,s)\| = c_3.\left[\Gamma(\frac{\alpha}{2})\right]^{-1}\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta(t-s)}, \quad \text{para todo } \mu \leq s < t < +\infty. \tag{2.99}$$

Afirmação.-

$$\|R_m(t,s)\| \leq \frac{e^{-\delta(t-s)}}{t-s}.\frac{\left[c_3\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^m}{\Gamma(m.\frac{\alpha}{2})}, \text{para todo } m \in \{1,2,3,...\} \tag{2.100}$$

De fato,
$m = 1$ já foi provado acima
$m \to m+1$, Continuando como acima $\mu \leq s < t < +\infty$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|R_{m+1}(t,s)\| &= \|\int_s^t R_1(t,\tau).R_m(\tau,s)d\tau\| \\
&\leq \int_s^t \|R_1(t,\tau)\|.\|R_m(\tau,s)\|d\tau \\
&\leq \int_s^t c_3.\Gamma^{-1}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta(t-\tau)}.\frac{e^{-\delta(\tau-s)}}{\tau-s}\frac{\left[c_3\sqrt{\rho(\mu)}(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^m}{\Gamma(m.\frac{\alpha}{2})}d\tau \\
&\leq c_3^{m+1}.\Gamma^{-1}(\frac{\alpha}{2}).\Gamma^{-1}(m\frac{\alpha}{2}).\sqrt{\rho(\mu)}^{m+1}\int_s^t (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}.(\tau-s)^{m\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta t+\delta\tau-\delta\tau+\delta s}d\tau \\
&\leq c_3^{m+1}.\Gamma^{-1}(\frac{\alpha}{2}).\Gamma^{-1}(\frac{m\alpha}{2})\sqrt{\rho(\mu)}^{m+1}.e^{-\delta(t-s)}\int_s^t (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}.(\tau-s)^{m\frac{\alpha}{2}-1}d\tau \\
&\leq c_3^{m+1}.\Gamma^{-1}(\frac{\alpha}{2}).\Gamma^{-1}(\frac{m\alpha}{2}).\sqrt{\rho(\mu)}^{m+1}.e^{-\delta(t-s)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}+m\frac{\alpha}{2}-1}.\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}).\Gamma(\frac{m\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+\frac{m\alpha}{2})} \\
&\leq \frac{e^{-\delta(t-s)}}{t-s}.\frac{\left[c_3\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^{m+1}}{\Gamma((m+1).\frac{\alpha}{2})}.
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Acima a primeira linha é justificada pela equação (2.48). A terceira linha segue pela equação (2.99), pois $\mu \leq \tau < t < +\infty$, e a hipótese de indução. A penúltima linha é justificado pelo Lema A.2.

Continuando com a demonstração do Teorema 2.4, sejam $\mu \leq s < t$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\|R(t,s)\| = \|\sum_{m=1}^{+\infty} R_m(t,s)\| &\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \|R_m(t,s)\| \\
&\leq \frac{e^{-\delta(t-s)}}{t-s}.\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\left[c_3\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^m}{\Gamma((m).\frac{\alpha}{2})} \\
&\leq \frac{e^{-\delta(t-s)}}{t-s}.c_{\frac{\alpha}{2}}.\left[c_3\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}\right].e^{2\left[c_3\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha/2}}} \\
&\leq c_4.\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta(t-s)+2c_3^{2/\alpha}.(\rho(\mu))^{1/\alpha}.(t-s)} \\
&\leq c_4.\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\left[\delta-c_5(\rho(\mu))^{1/\alpha}\right](t-s)}. \qquad (2.102)
\end{aligned}$$

Na segunda desigualdade, utiliza-se a equação (2.100). E na terceira desigualdade, utiliza-se a observação A.1.
E já que, $\lim_{\mu\to+\infty} c_5\,[\rho(\mu)]^{\frac{1}{\alpha}} = 0$, então $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\mu_\varepsilon > 0$ tal que se, $\mu > \mu_\varepsilon \to |c_5\,[\rho(\mu)]^{\frac{1}{\alpha}} - 0| < \varepsilon$.
Dado $\vartheta' > 0$, tome $\varepsilon = \vartheta'$,
Então, $\exists\mu_0 > 0$ tal que se, $\mu > \mu_0 \to c_5\,[\rho(\mu)]^{\frac{1}{\alpha}} < \vartheta'$. Escolhamos δ tais que
$\delta > \vartheta' + c_5\,[\rho(\mu)]^{\frac{1}{\alpha}}$
$\Rightarrow \quad \delta - c_5(\rho(\mu))^{\frac{1}{\alpha}} > \vartheta' \quad \Rightarrow \quad -(\delta - c_5\,[\rho(\mu)]^{\frac{1}{\alpha}}).(t-s) < -\vartheta'(t-s)$
$\Rightarrow e^{-(\delta-c_5[\rho(\mu)]^{\frac{1}{\alpha}}).(t-s)} \leq e^{-\vartheta'(t-s)}$
Como ϑ' foi tomado arbitrário, obtém-se que:
Para todo $\delta > \vartheta' + c_5\,[\rho(\mu)]^{\frac{1}{\alpha}} > \vartheta' > 0$, existe $\mu_0 > 0$ tal que se, $t > s \geq \mu > \mu_0$

$$\|R(t,s)\| \leq c_4\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta'(t-s)}. \qquad (2.103)$$

A seguir, estamos preocupados em estimar o sistema de evolução $U(t,s)$, e como primeiro passo, lembremos a sua definição que pode ser encontrada na equação (2.43)

$$\begin{aligned}
\|U(t,s)\| &= \left\| S_s(t-s) + \int_s^t S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)\ d\tau \right\| \\
&\leq \|S_s(t-s)\| + \int_s^t \|S_\tau(t-\tau)\|.\|R(\tau,s)\|\ d\tau \\
&\leq c_6.e^{-\delta(t-s)} + \int_s^t c_6.e^{-\delta(t-\tau)}.c_4\sqrt{\rho(\mu)}(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta'(\tau-s)}\ d\tau \\
&\leq c_6.e^{-\delta(t-s)} + c_7\sqrt{\rho(\mu)}.\int_s^t (\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta'(t-\tau)}.e^{-\vartheta'(\tau-s)}\ d\tau \\
&\leq c_6.e^{-\delta(t-s)} + c_7\sqrt{\rho(\mu)}.\int_s^t (\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta' t+\vartheta'\tau-\vartheta'\tau+\vartheta' s}\ d\tau \\
&\leq c_6.e^{-\delta(t-s)} + c_7\sqrt{\rho(\mu)}.e^{-\vartheta'(t-s)}.\int_s^t (\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}\ d\tau \\
&\leq c_6.e^{-\delta(t-s)} + c_8\sqrt{\rho(\mu)}.e^{-\vartheta'(t-s)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Na terceira equação utiliza-se a equação (2.93) e a equação (2.103). Finalmente, fixamos ϑ tal que $\vartheta < \vartheta' < \delta$, encontramos

$$\|U(t,s)\| \leq c_6.e^{-\delta(t-s)} + c_8\sqrt{\rho(\mu)}.e^{-\vartheta(t-s)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}, \text{ se } \mu_0 < \mu \leq s < t. \tag{2.105}$$

□

Nós voltamos agora para o problema de valor inicial não homogêneo (2.90), e fazemos a seguinte suposição adicional:

(*F*) A função $f : [0,+\infty) \to \mathfrak{X}$ satisfaz uma condição Hölder uniforme em $[0,+\infty)$, isto é, existem constantes $c \geq 0$ e $0 < \gamma \leq 1$ tal que

$$\|f(t) - f(s)\| \leq c|t-s|^\gamma \quad \text{para} \quad 0 \leq s,t < +\infty \tag{2.106}$$

e existe um elemento $f(\infty) \in \mathfrak{X}$ para o qual

$$\lim_{t\to\infty} \|f(t) - f(\infty)\| = 0. \tag{2.107}$$

Finalmente, enunciamos o teorema principal desta seção

Teorema 2.5. [Hiroki Tanabe [41], 1961] Suponha que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaça as hipóteses (P_1), (P_2), (P_3) uniformemente em $[0,+\infty)$. Assuma ainda que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz (P_4) e que f satisfaz (F). Se u é a solução do problema de valor inicial (2.90) então existe um elemento $u(+\infty)\in\mathfrak{X}$, independente de $x\in\mathfrak{X}$, tal que

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = u(\infty). \tag{2.108}$$

$$u(\infty)\in\mathfrak{D}, \quad A(\infty)u(\infty) = f(\infty) \tag{2.109}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \left\|u'(t)\right\| = 0. \tag{2.110}$$

Para reproduzir a demonstração do teorema, precisaremos de alguns lemas que ajudará neste objetivo.

Lema 2.7. Suponha que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaça as hipóteses (P_1), (P_2), (P_3) uniformemente em $[0,+\infty)$. Assuma ainda que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz (P_4) e que f satisfaz (F).
Então, para cada $\mu\leq s<\tau\leq t$, obtém-se

$$\|A(t)S_t(t-s)-A(s)S_s(t-s)\| \leq c\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta(t-s)} \tag{2.111}$$

onde $0<\vartheta<\delta,\ 0<\beta<\dfrac{\alpha}{2}$ e como antes

$$\rho(\mu) := \sup\{\|(A(t)-A(s))\,[A(r)]^{-1}\| \ :\ \mu\leq s,t<\infty,\ 0\leq r<\infty\}. \tag{2.112}$$

Demonstração. Dado $\mu\leq s<\tau\leq t$, como $-A(t)$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico $S_t(t-s)$, tome $\xi=t-s$, ou seja $-A(t)$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico $S_t(\xi)$. E dado $x\in\mathfrak{X}$, daqui, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}S_t(\xi)x &= \frac{d}{d\xi}S_t(\xi)x.\frac{d\xi}{ds}\\ &= -A(t)S_t(\xi)x.(-1)\\ &= A(t)S_t(t-s)x. \end{aligned}\tag{2.113}$$

A segunda igualdade acima justifica-se pelo Teorema 1.6 item (c'). E imediatamente, como $-A(s)$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico $S_s(t-s)$, tome $\zeta=t-s$, ou seja $-A(s)$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico $S_s(\zeta)$. E dado $x\in\mathfrak{X}$, daqui pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S_s(\zeta)x &= \frac{d}{d\zeta}S_s(\zeta)x.\frac{d\zeta}{dt}\\ &= -A(s)S_s(\zeta)x.(1)\\ &= -A(s)S_s(t-s)x. \end{aligned} \tag{2.114}$$

A segunda igualdade acima justifica-se também pelo Teorema 1.6 item (c').
Agora como $-A(t)$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $S_t(t-s)$, e $-A(s)$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $S_s(t-s)$, então pelo Teorema 1.4,

$$S_t(t-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} e^{z(t-s)}R(z:-A(t))\,dz \quad ;S_s(t-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} e^{z(t-s)}R(z:-A(s))\,dz \tag{2.115}$$

onde $\Gamma_\delta := \{z \in \mathbb{C} \ : \ z-\delta \in \Gamma\}$, $\Gamma := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\arg z| = \vartheta\}$. Fazendo mudança de variável de z, por $-z$, obtém-se

$$S_t(t-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_\delta} e^{-z(t-s)}R(z:A(t))\,dz \tag{2.116}$$

$$S_s(t-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_\delta} e^{-z(t-s)}R(z:A(s))\,dz \tag{2.117}$$

Então,

$$\begin{aligned}A(t)S_t(t-s)x - A(s)S_s(t-s)x &= \frac{d}{ds}S_t(t-s)x - \left[-\frac{d}{dt}S_s(t-s)x\right]\\ &= \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_\delta} e^{-z(t-s)}R(z:A(t))x\,dz\right] - \left(-\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_\delta} e^{-z(t-s)}R(z:A(s))x\,dz\right]\right)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_\delta} ze^{-z(t-s)}R(z:A(t))x\,dz - \left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_\delta}(-z)e^{-z(t-s)}R(z:A(s))x\,dz\right)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_\delta} ze^{-z(t-s)}R(z:A(t))x\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_\delta} ze^{-z(t-s)}R(z:A(s))x\,dz\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_\delta} ze^{-z(t-s)}\left[R(z:A(t)) - R(z:A(s))\right]x\,dz.\end{aligned}$$

Resumindo a análise acima, obtém-se

$$A(t)S_t(t-s)x - A(s)S_s(t-s)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_\delta} ze^{-z(t-s)}\left[R(z:A(t)) - R(z:A(s))\right]x\,dz. \tag{2.118}$$

Fazendo a traslação de $-\Gamma_\delta$ para $-\Gamma$. Tome $\lambda = z - \delta$, ou seja $\lambda = \delta = z$ e além disso $d\lambda = dz$. Continuando com a equação (2.118), obtém-se

$$\begin{aligned} A(t)S_t(t-s)x - A(s)S_s(t-s)x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma}(\lambda+\delta)e^{-(\lambda+\delta)(t-s)} \\ &\qquad .\left[R((\lambda+\delta):A(t)) - R((\lambda+\delta):A(s))\right]x\,d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}e^{-\delta(t-s)}\int_{-\Gamma}(\lambda+\delta).e^{-\lambda(t-s)} \\ &\qquad .\left[R((\lambda+\delta):A(t)) - R((\lambda+\delta):A(s))\right]x\,d\lambda. \end{aligned} \tag{2.119}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} R(\lambda+\delta:A(t)) - R(\lambda+\delta:A(s)) &= R(\lambda+\delta:A(t))R(\lambda+\delta:A(s))^{-1}R(\lambda+\delta:A(s)) \\ &\quad -R(\lambda+\delta:A(t))R(\lambda+\delta:A(t))^{-1}R(\lambda+\delta:A(s)) \\ &= R(\lambda+\delta:A(t))\left[R(\lambda+\delta:A(s))^{-1} - R(\lambda+\delta:A(t))^{-1}\right]R(\lambda+\delta:A(s)) \\ &= R(\lambda+\delta:A(t))\left[(\lambda+\delta-A(s)) - (\lambda+\delta-A(t))\right] \\ &\quad A(s)^{-1}A(s)R(\lambda+\delta:A(s)) \\ &= R(\lambda+\delta:A(t))\left[A(t)-A(s)\right]A(s)^{-1}A(s)R(\lambda+\delta:A(s)). \end{aligned}$$

Resumindo a análise acima, obtém-se

$$R(\lambda+\delta:A(t)) - R(\lambda+\delta:A(s)) = R(\lambda+\delta:A(t)).\left[A(t)-A(s)\right]A(s)^{-1}A(s)R(\lambda+\delta:A(s)). \tag{2.120}$$

Estimando a equação (2.120) obtém-se

$$\begin{aligned} \|R(\lambda+\delta:A(t)) - R(\lambda+\delta:A(s))\| &\le \|R(\lambda+\delta:A(t))\|.\|\left[A(t)-A(s)\right]A(s)^{-1}\| \\ &\quad .\|A(s)R(\lambda+\delta:A(s))\|. \end{aligned} \tag{2.121}$$

Seguidamente estimaremos separadamente o terceiro termo do lado direito da equação (2.121)
Como $(\lambda+\delta-A(s)).R(\lambda+\delta:A(s)) = I$, então $(\lambda+\delta)R(\lambda+\delta:A(s)) - A(s)R(\lambda+\delta:A(s)) = I$. Ou seja, $A(s)R(\lambda+\delta:A(s)) = (\lambda+\delta).R(\lambda+\delta:A(s)) - I$. Imediatamente pela

HIPÓTESE $(\boldsymbol{P}_2)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\|A(s)R(\lambda+\delta:A(s))\| &\leq |\lambda+\delta|.\|R(\lambda+\delta:A(s))\|+1 \\
&\leq |\lambda+\delta|.\frac{M}{|\lambda+\delta|}+1 \\
&\leq M+1. \qquad (2.122)
\end{aligned}$$

Continuando com a estimativa na equação (2.121), tem-se

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda+\delta:A(t))-R(\lambda+\delta:A(s))\| &\leq \frac{M}{|\lambda+\delta|}.\|(A(t)-A(s))A(s)^{-1}\|.(M+1) \\
&\leq \frac{M(M+1)}{|\lambda+\delta|}.\|(A(t)-A(s)).A(s)^{-1}\|^{\frac{1}{2}}.\|(A(t)-A(s))A(s)^{-1}\|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{c_1}{|\lambda+\delta|}.[\rho(\mu)]^{\frac{1}{2}}.[L.|t-s|^{\alpha}]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_2.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}.\frac{1}{|\lambda+\delta|} \qquad (2.123)
\end{aligned}$$

Na primeira desigualdade, utiliza-se a HIPÓTESE $(\boldsymbol{P}_2)$ e a equação (2.122). Na terceira desigualdade, utiliza-se a definição de $\rho(\mu)$ e a HIPÓTESE $(\boldsymbol{P}_3)$.
Finalmente, aplicando a norma na equação (2.119), e em seguida substituindo na equação (2.123), obtém-se

$$\begin{aligned}
\|A(t)S_t(t-s)x-A(s)S_s(t-s)x\| &= \|\frac{1}{2\pi i}e^{-\delta(t-s)}\int_{-\Gamma}(\lambda+\delta)e^{-\lambda(t-s)}.[R(\lambda+\delta:A(t))-R(\lambda+\delta:A(s))]x\,d\lambda\| \\
&\leq \|\frac{1}{2\pi i}e^{-\delta(t-s)}.\int_{\infty}^{0}(re^{i\vartheta}+\delta)e^{-r(\cos\vartheta+i\operatorname{sen}\vartheta)(t-s)}.\left[R(re^{i\vartheta}+\delta:A(t))-R(re^{i\vartheta}+\delta:A(s))\right]xe^{i\vartheta}\,dr\| \\
&\quad +\|\frac{1}{2\pi i}e^{-\delta(t-s)}.\int_{0}^{\infty}(re^{-i\vartheta}+\delta)e^{-r(\cos\vartheta-i\operatorname{sen}\vartheta)(t-s)}.\left[R(re^{-i\vartheta}+\delta:A(t))-R(re^{-i\vartheta}+\delta:A(s))\right]xe^{-i\vartheta}\,dr\| \\
&\leq |\frac{1}{2\pi}.e^{-\delta(t-s)}.\int_{\infty}^{0}|re^{i\vartheta}+\delta|.e^{-r(t-s)\cos\vartheta}.\|R(re^{i\vartheta}+\delta:A(t))-R(re^{i\vartheta}+\delta:A(s))\|.\|x\|\,dr| \\
&\quad +|\frac{1}{2\pi}.e^{-\delta(t-s)}.\int_{0}^{\infty}|re^{-i\vartheta}+\delta|.e^{-r(t-s)\cos\vartheta}.\|R(re^{-i\vartheta}+\delta:A(t))-R(re^{-i\vartheta}+\delta:A(s))\|.\|x\|\,dr| \\
&\leq |\frac{1}{2\pi}.e^{-\delta(t-s)}.\|x\|.\int_{\infty}^{0}|re^{i\vartheta}+\delta|.e^{-r(t-s)\cos\vartheta}.c_2\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}.\frac{1}{|re^{i\vartheta}+\delta|}\,dr| \\
&\quad +|\frac{1}{2\pi}.e^{-\delta(t-s)}.\|x\|.\int_{0}^{\infty}|re^{-i\vartheta}+\delta|.e^{-r(t-s)\cos\vartheta}.c_2\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}.\frac{1}{|re^{-i\vartheta}+\delta|}\,dr| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}.e^{-\delta(t-s)}.c_2\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}.\|x\|.\left[|\int_{\infty}^{0}e^{-r(t-s)\cos\vartheta}\,dr|+|\int_{0}^{\infty}e^{-r(t-s)\cos\vartheta}\,dr|\right] \\
&\leq c_3\sqrt{\rho(\mu)}.e^{-\delta(t-s)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}.\|x\|.\left[|-\frac{1}{(t-s)\cos\vartheta}|+|\frac{1}{(t-s)\cos\vartheta}|\right] \\
&\leq c_4\sqrt{\rho(\mu)}.e^{-\delta(t-s)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}}.\|x\|.
\end{aligned}$$

A terceira desigualdade acima é justificada pela equação (2.123). E como $x \in \mathfrak{X}$ foi tomado arbitrariamente conclui-se a prova do Lema 2.7. $\square$

Lema 2.8. Suponha que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaça as hipóteses (P_1), (P_2), (P_3) uniformemente em $[0,+\infty)$. Assuma ainda que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz (P_4) e que f satisfaz (F).
Então, para cada $\mu \leq s < \tau \leq t$, obtém-se

$$\|R_1(t,s) - R_1(\tau,s)\| \leq c\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\tau)^{\beta}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-\beta-1}.e^{-\delta(\tau-s)} \tag{2.124}$$

onde $0 < \vartheta < \delta,\ \ 0 < \beta < \dfrac{\alpha}{2}$ e como antes

$$\rho(\mu) := \sup\{\|(A(t)-A(s)).[A(r)]^{-1}\| \ :\ \mu \leq s,t < \infty,\ \ 0 \leq r < \infty\}. \tag{2.125}$$

Demonstração. Ver [32], equação (8.22), pág.176 e o Lema 6.4, pág.155. $\square$

Lema 2.9. Suponha que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaça as hipóteses (P_1), (P_2), (P_3) uniformemente em $[0,+\infty)$. Assumir ainda que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz (P_4) e que f satisfaz (F).
Então, para cada $\mu \leq s < \tau \leq t$, obtém-se

$$\|R(t,s) - R(\tau,s)\| \leq c.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\tau)^{\beta}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-\beta-1}.e^{-\vartheta(\tau-s)} \tag{2.126}$$

onde $0 < \vartheta < \delta,\ \ 0 < \beta < \dfrac{\alpha}{2}$ e como antes

$$\rho(\mu) := \sup\{\|(A(t)-A(s)).[A(r)]^{-1}\| \ :\ \mu \leq s,t < \infty,\ \ 0 \leq r < \infty\}. \tag{2.127}$$

Demonstração. Sejam $\mu \leq s < \tau \leq t$

$$\begin{aligned} \|R_1(t,s)\| &\leq c_1.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta(t-s)} \\ &\leq c_1.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)} \\ &\leq c_1.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\beta-1}.e^{-\vartheta(t-s)}. \end{aligned} \tag{2.128}$$

Na primeira desigualdade, utilizamos a equação (2.99), pois $\mu \leq s < t$

$$\begin{aligned} \|R(t,s)\| &\leq c_2.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta'(t-s)} \\ &\leq c_2.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)}. \end{aligned} \tag{2.129}$$

Na primeira desigualdade utiliza-se a equação (2.103), e na segunda desigualdade fixamos ϑ, tal que $\vartheta < \vartheta' < \delta$.

Agora, olhando a demonstração do Corolário 2.2, precisamos estimar a seguinte integral

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\tau^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)\,d\sigma \right\| &\leq \int_\tau^t \|R_1(t,\sigma)\|.\|R(\sigma,s)\|\,d\sigma \\
&\leq \int_\tau^t c_1.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\sigma)^{\beta-1}.e^{-\vartheta(t-\sigma)}.c_2.\sqrt{\rho(\mu)}.(\sigma-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(\sigma-s)}\,d\sigma \\
&\leq c_1.c_2.\sqrt{\rho(\mu)}^2.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.\int_\tau^t (t-\sigma)^{\beta-1}.e^{-\vartheta t+\vartheta\sigma-\vartheta\sigma+\vartheta s}\,d\sigma \\
&\leq c_3.\sqrt{\rho(\mu)}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)}.\int_\tau^t (t-\sigma)^{\beta-1}\,d\sigma \\
&\leq c_3.\sqrt{\rho(\mu)}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)}.\frac{1}{\beta}.(t-\tau)^{\beta} \\
&\leq c_4.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\tau)^{\beta}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)}. \qquad (2.130)
\end{aligned}$$

Acima a segunda linha é justificada pela equação (2.128) e pela equação (2.129). Agora seguindo o roteiro da demonstração do Corolário 2.2, precisamos estimar também a seguinte integral

$$\begin{aligned}
\left\| \int_s^\tau [R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma)]R(\sigma,s)\;d\sigma \right\| &\leq \int_s^\tau \|R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma)\|.\|R(\sigma,s)\|\;d\sigma \\
&\leq \int_s^\tau c_5.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\tau)^{\beta}.(\tau-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}-\beta-1}.e^{-\delta(\tau-\sigma)}.c_6.\sqrt{\rho(\mu)}.(\sigma-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(\sigma-s)}\;d\sigma \\
&\leq c_5.c_6.\sqrt{\rho(\mu)}^2.(t-\tau)^{\beta}.\int_s^\tau .(\tau-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}-\beta-1}.(\sigma-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta\tau+\vartheta\sigma-\vartheta\sigma+\vartheta s}\;d\sigma \\
&\leq c_7.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\tau)^{\beta}.e^{-\vartheta(\tau-s)}.\int_s^\tau .(\tau-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}-\beta-1}.(\sigma-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}\;d\sigma \\
&\leq c_7.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\tau)^{\beta}.e^{-\vartheta(\tau-s)}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-\beta+\frac{\alpha}{2}-1}.\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}-\beta).\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}-\beta+\frac{\alpha}{2})} \\
&\leq c_8.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\tau)^{\beta}.(\tau-s)^{\alpha-\beta-1}.e^{-\vartheta(\tau-s)}.
\end{aligned}$$

Acima na segunda desigualdade se utilizou o Lema 2.8 e a equação (2.129). E na penútima linha é justificado pelo Lema A.2. Apenas reescrevendo, tem-se

$$\left\| \int_s^\tau [R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma)]R(\sigma,s)\;d\sigma \right\| \leq c_8.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\tau)^{\beta}.(\tau-s)^{\alpha-\beta-1}.e^{-\vartheta(\tau-s)} \qquad (2.131)$$

Retomando

$$\begin{aligned}
R(t,s)-R(\tau,s) &= R_1(t,s)+\int_s^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)\ d\sigma-\left(R_1(\tau,s)+\int_s^\tau R_1(\tau,\sigma)R(\sigma,s)\ d\sigma\right)\\
&= R_1(t,s)-R_1(\tau,s)+\int_s^\tau R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)\ d\sigma+\int_\tau^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)\ d\sigma\\
&\qquad -\int_s^\tau R_1(\tau,\sigma)R(\sigma,s)\ d\sigma\\
&= R_1(t,s)-R_1(\tau,s)+\int_\tau^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)\ d\sigma\\
&\qquad +\int_s^\tau [R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma)]R(\sigma,s)\ d\sigma. \qquad (2.132)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|R(t,s)-R(\tau,s)\| \le \|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\|+\left\|\int_\tau^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)\ d\sigma\right\|\\
+\left\|\int_s^\tau [R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma)]R(\sigma,s)\ d\sigma\right\|
\end{aligned}$$

Do Lema 2.8 e das estimativas (2.130), (2.131), obtém-se o resultado desejado. □

Apenas para seguir a sequência, enunciaremos novamente o Teorema 2.5 decomposto em dois teoremas. Sendo o primeiro encarregado das provas dos items (2.108) e (2.109).

Teorema 2.6. Suponha que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaça as hipóteses (P_1), (P_2), (P_3) uniformemente em $[0,+\infty)$. Assuma ainda que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz (P_4) e que f satisfaz (F). Se u é a solução do problema de valor inicial (2.90) então existe um elemento $u(\infty)\in\mathfrak{X}$, independente de $x\in\mathfrak{X}$, tal que

$$\lim_{t\to+\infty} u(t)=u(\infty). \qquad (2.133)$$

$$u(\infty)\in\mathfrak{D}, \quad A(\infty)u(\infty)=f(\infty). \qquad (2.134)$$

Demonstração. O roteiro para provar este Teorema será seguido de afirmações.

Afirmação 1 Se $f(\infty)=0$, então $u(t)\to 0$ quando $t\to+\infty$
De fato,
Como $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz as HIPÓTESES $(\boldsymbol{P}_1)$, $(\boldsymbol{P}_2)$, $(\boldsymbol{P}_3)$ uniformemente em $[0,\infty)$, então pelo Teorema 2.1, existe um único sistema de evolução $U(t,s)$ em $0\le s\le t\le T$ satisfazendo: $(E_1)'$, $(E_2)^+$, $(E_3)^+$.

E como f é Hölder contínua em $[s,T]$, então pelo Teorema 2.3, o problema de valor inicial (2.88) tem, para todo $x \in X$, uma única solução dado por:

$$u(t) = U(t,s) + \int_s^t U(t,\sigma).f(\sigma)\ d\sigma. \tag{2.135}$$

Tome-se $s = 0$

$$u(t) = U(t,0) + \int_0^t U(t,\sigma).f(\sigma)\ d\sigma. \tag{2.136}$$

Agora pelo Teorema 2.4, existem constantes $c \geq 0$ e $\theta > 0$ tais que

$$\|U(t,s)\| \leq c.e^{-\theta(t-s)} \text{ para } 0 \leq s \leq t \tag{2.137}$$

Dados $x \in X$ e $s = 0$, daqui, $\|U(t,0)x\| \leq \|U(t,0)\|.\|x\|$.
Então, $\|U(t,0)x\| \leq \|U(t,0)\|.\|x\|$. Isto é, existem constantes $c \geq 0$ e $\theta > 0$ tais que $\|U(t,0)x\| \leq c.e^{-\theta.t}.\|x\|$.
Agora definamos, $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t\geq 0} \|f(t)\|$.
Já que, $f(\infty) = 0$, então pela hipótese $(\boldsymbol{F})$ $\lim\limits_{\sigma\to+\infty} f(t) = 0$, isto é, $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\exists T_{\varepsilon_1} > 0$ tal que se $\sigma > T_{\varepsilon_1} \ \rightarrow \ \|f(\sigma) - 0\| < \dfrac{\varepsilon}{2}.\dfrac{\theta}{c}$.
Tome $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}.\dfrac{\theta}{c}$,
$\exists T > 0$ tal que se $\sigma > T$, então

$$\|f(\sigma)\| < \frac{\varepsilon}{2}.\frac{\theta}{c}. \tag{2.138}$$

E já que, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\theta(t-T)} = 0$, então, $\forall_2 > 0$, $\exists T_{\varepsilon_2} > 0$, tal que se $\sigma > T_{\varepsilon_2} \ \rightarrow \ |e^{-\theta(t-T)} - 0| < \varepsilon_2$
Tome $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}.\dfrac{\theta}{c}.(\|f\|_\infty + 1)^{-1}$,
$\exists T_{\varepsilon_2} > 0$ tal que se $\sigma > T_{\varepsilon_2} \ \rightarrow \ e^{-\theta(t-T)} < \dfrac{\varepsilon}{2}.\dfrac{\theta}{c}.(\|f\|_\infty + 1)^{-1}$
Agora tomemos $T_1 = \max\{T, T_{\varepsilon_2}\} + 1$, daqui, se $t > T_1 > T$, obtém-se

$$e^{-\theta(t-T)} < \frac{\varepsilon}{2}.\frac{\theta}{c}.(\|f\|_\infty + 1)^{-1}. \tag{2.139}$$

Dado $t > T_1 > T > 0$, então

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t U(t,\sigma)f(\sigma)\ d\sigma \right\| &= \left\| \int_0^T U(t,\sigma)f(\sigma)\ d\sigma + \int_T^t U(t,\sigma)f(\sigma)\ d\sigma \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^T U(t,\sigma)f(\sigma)\ d\sigma \right\| + \left\| \int_T^t U(t,\sigma)f(\sigma)\ d\sigma \right\| \end{aligned} \tag{2.140}$$

Imediatamente, estimaremos cada somando da equação (2.140)

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T U(t,\sigma)f(\sigma)\ d\sigma \right\| &\leq \int_0^T \|U(t,\sigma)\|.\|f(\sigma)\| d\sigma \\ &\leq \|f\|_\infty . \int_0^T \|U(t,\sigma)\| d\sigma \\ &\leq \|f\|_\infty . \int_0^T c.e^{-\theta(t-\sigma)} d\sigma \\ &\leq \|f\|_\infty .c. \int_0^T e^{-\theta(t-T)} d\sigma \\ &\leq \|f\|_\infty .c. \frac{\varepsilon}{2}.\frac{\theta}{c}.(\|f\|_\infty + 1)^{-1}. \int_0^T d\sigma \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}.\theta.T. \end{aligned} \tag{2.141}$$

Acima na terceira desigualdade se utilizou a equação (2.92) do Teorema 2.4. E a quarta linha é justificada porque $\sigma \leq T$. Imediatamente passamos a estimar o segundo termmo do lado direito da equação (2.140)

$$\begin{aligned} \left\| \int_T^t U(t,\sigma)f(\sigma) d\sigma \right\| &\leq \int_T^t \|U(t,\sigma)\|.\|f(\sigma)\| d\sigma \\ &\leq \int_T^t \|U(t,\sigma)\|.\frac{\varepsilon}{2}.\frac{\theta}{c} d\sigma \\ &= \frac{\varepsilon}{2}.\frac{\theta}{c}. \int_T^t \|U(t,\sigma)\| d\sigma \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}.\frac{\theta}{c}. \int_T^t c.e^{-\theta(t-\sigma)} d\sigma \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}.\frac{\theta}{c}.c.\frac{1}{\theta}.\left(e^0 - e^{-\theta(t-T)}\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}.\left(1 - e^{-\theta(t-T)}\right). \end{aligned} \tag{2.142}$$

Acima na segunda desigualdade se utilizou o a equação (2.138) , pois $\sigma > T$. De (2.141) e (2.141) em (2.140), temos

$$\left\|\int_0^t U(t,\sigma)f(\sigma)\ d\sigma\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.\theta.T + \frac{\varepsilon}{2}.\left(1-e^{-\theta(t-T)}\right)$$

Imediatamente, $\int_0^t U(t,\sigma)f(\sigma)\,d\sigma \to 0$ quando $t \to +\infty$. Portanto, $u(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Em seguida mostra-se que as hipótese $(\boldsymbol{P}_1)$, $(\boldsymbol{P}_2)$, $(\boldsymbol{P}_3)$, $(\boldsymbol{P}_4)$ implicam que $A(\infty)$ é invertível.
Dado $t \in [0,+\infty)$

$$\begin{aligned}
\|I - A(\infty)\,[A(t)]^{-1}\| &= \|A(t)\,[A(t)]^{-1} - A(\infty)\,[A(t)]^{-1}\| \\
&\leq \left\|A(t)\,[A(0)]^{-1}A(0)\,[A(t)]^{-1} - A(\infty)\,[A(0)]^{-1}A(0)\,[A(t)]^{-1}\right\| \\
&= \left\|A(t)\,[A(0)]^{-1} - A(\infty)\,[A(0)]^{-1}\right\|.\|A(0)\,[A(t)]^{-1}\| \\
&= \left\|\left[A(t) - A(\infty)\right][A(0)]^{-1}\right\|.\|A(0)\,[A(t)]^{-1}\| \\
&\to 0, \quad \text{quando } t \to +\infty
\end{aligned} \tag{2.143}$$

Já que, $\lim\limits_{t\to+\infty} \|I - A(\infty)\,[A(t)]^{-1}\| = 0$, então

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists T_\varepsilon > 0 \text{ tal que se } t > T_\varepsilon \to \|I - A(\infty)\,[A(t)]^{-1}\| < \varepsilon$$

Tome $\varepsilon = 1$
$\exists T_1 > 0$ tal que se, $t > T_1$, então $\|I - A(\infty)\,[A(t)]^{-1}\| < 1$
Então, $I - (I - A(\infty)\,[A(t)]^{-1})$, tem inversa contínua se, $t > T_1$. Segue-se que $A(\infty)\,[A(t)]^{-1}$ tem inversa continua se, $t > T_1$. Definamos, $C(t) := \left(A(\infty)\,[A(t)]^{-1}\right)^{-1}$
Então, $A(\infty)\,[A(t)]^{-1}C(t) = A(\infty)\,[A(t)]^{-1}\left(A(\infty)\,[A(t)]^{-1}\right)^{-1}$ se, $T > T_1$.
Seguidamente, $A(\infty)\left[[A(t)]^{-1}C(t)\right] = I$, se $T > T_1$ aqui se utilizou que $[A(t)]^{-1}$ seja invertível,

$$A(\infty) = \left[[A(t)]^{-1}C(t)\right]^{-1} \tag{2.144}$$

Aqui acima utilizei que se, $[A(t)]^{-1}$ é invertível e $C(t)$ é invertível, então $[A(t)]^{-1}C(t)$ é invertível.
Portanto, $[A(t)]^{-1}C(t)$ é a inversa de $A(\infty)$, se $t > T_1$.

Afirmação 2 $\exists u(\infty) \in X$ independente de $x \in X$, tal que

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = u(\infty) \tag{2.145}$$

$$u(\infty) \in \mathfrak{D}, \quad A(\infty)u(\infty) = f(\infty). \tag{2.146}$$

De fato, seja $u(t)$ a solução do problema de valor inicial (2.90) e definamos
$u(\infty) := [A(\infty)]^{-1} f(\infty)$
E definamos também

$$v(t) := u(t) - u(\infty). \tag{2.147}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt}(t) + A(t)v(t) = \frac{du}{dt}(t) + A(t)v(t) &= f(t) - A(t)u(t) + A(t)v(t) \\ &= f(t) - A(t)(v(t) + u(\infty)) + A(t)v(t) \\ &= f(t) - A(t)v(t) - A(t)u(\infty) + A(t)v(t) \\ &= f(t) - A(t)u(\infty) \end{aligned} \tag{2.148}$$

Utilizando a equação (2.147) e a condição inicial da equação (2.90) simultaneamente, obtém-se

$$v(0) = u(0) - u(\infty) = x - u(\infty) \tag{2.149}$$

E imediatamete definamos,

$$g(t) := f(t) - A(t)u(\infty) \tag{2.150}$$

Então, juntando as equações (2.148), (2.149) e (2.150) ,obtém-se,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) + A(t)v(t) &= g(t) \\ v(0) &= x - u(\infty) \end{aligned} \right. \tag{2.151}$$

Observa-se que $g(t)$ é Hölder contínua em $[0, +\infty)$ e também,

$$\begin{aligned}
\|g(t)\| &= \|f(t) - A(t)u(\infty)\| \\
&= \|f(t) - f(\infty) + f(\infty) - A(t)u(\infty)\| \\
&= \|f(t) - f(\infty) + A(\infty).A(\infty)^{-1}f(\infty) - A(t).A(\infty)^{-1}.f(\infty)\| \\
&\leq \|f(t) - f(\infty)\| + \|[A(\infty) - A(t)]A(\infty)^{-1}f(\infty)\| \\
&\leq \|f(t) - f(\infty)\| + \|[A(\infty) - A(t)].A(0)^{-1}.A(0).A(\infty)^{-1}f(\infty)\| \\
&\leq \|f(t) - f(\infty)\| + \|[A(t) - A(\infty)].A(0)^{-1}\|.\|A(0).A(\infty)^{-1}f(\infty)\| \\
&\to 0 \text{ quando } t \to +\infty \qquad (2.152)
\end{aligned}$$

Na última equação é justificada pela equação (2.107) na HIPÓTESE $(\boldsymbol{F})$, e a HIPÓTESE $(\boldsymbol{P_4})$. Portanto, pela primeira parte da prova $\|v(t)\| \to 0$ quando $t \to \infty$, e daqui $u(t) \to u(\infty)$ quando $t \to \infty$ e a prova de (2.133) e (2.134) está completa.

$\square$

Finalmente nos dedicaremos a provar (2.110) do Teorema 2.5.

Teorema 2.7. Suponha que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaça as condições (P_1), (P_2), (P_3) uniformemente em $[0,+\infty)$. Assuma ainda que $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz (P_4) e que f satisfaz (F). Se u é a solução do problema de valor inicial (2.90) então existe um elemento $u(\infty) \in \mathfrak{X}$, independente de $x \in \mathfrak{X}$, tal que

$$\lim_{t\to+\infty} \|u'(t)\| = 0. \qquad (2.153)$$

Demonstração. De fato, para cada $t \geq s > 0$ a solução u do problema de valor inicial (2.90) pode ser escrito como

$$u(t) = U(t,s)u(s) + \int_s^t U(t,s)f(\sigma)\, d\sigma. \qquad (2.154)$$

Pela equação (2.78), tem-se,

$$\left\| \frac{\partial U(t,s)}{\partial t} u(s) \right\| \leq \|A(t)U(t,s)\|.\|u(s)\| \leq \frac{c}{t-s} \qquad (2.155)$$

É suficiente provar que a norma de

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)\ d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int_s^t S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)\ d\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\int_s^t W(t,\sigma)f(\sigma)\ d\sigma \qquad (2.156)$$

pode ser feito tão pequeno quanto desejamos, escolhendo s e $t > s$ grandes o suficiente. Para provar esta afirmação, iremos estimar cada termo no lado direito da equação (2.156) separadamente. A fim de estimar o primeiro termo, denotemos

$$\delta(\mu) := \sup\{\|f(t) - f(s)\| \ : \ \mu \leq s, \ t < \infty\}. \tag{2.157}$$

Da HIPÓTESE $(\boldsymbol{F})$, segue-se que $\delta(\mu) \to 0$ quando $\mu \to \infty$ e

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \sqrt{\delta(\mu)}.|t-s|^{\frac{\gamma}{2}} \quad \text{quando} \quad \mu < s, t < \infty \tag{2.158}$$

Agora encontraremos uma expressão para o primeiro termo da equação (2.156)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma &= S_t(t-t)f(t) + \int_s^t \frac{\partial S_\sigma(t-\sigma)}{\partial t} f(\sigma)\,d\sigma \\
&= S_t(0)f(t) + \int_s^t (-A(\sigma))S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma \\
&= f(t) - \int_s^t A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma \\
&= f(t) - S_t(t-s)f(t) - \int_s^t A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma + S_t(t-s)f(t).
\end{aligned} \tag{2.159}$$

A primeira linha é justificada pelo Teorema Fundamental do Cálculo para duas variáveis. Por outro lado, fazendo mudança de variável na integral do meio do lado direito da equação (2.159). Ou seja, $\xi = t - \sigma$, tem-se, $d\xi = -d\sigma$. E também, se $\sigma = s \to \xi = t - s$; se $\sigma = t \to \xi = 0$

$$\begin{aligned}
\int_s^t A(t)S_t(t-\sigma)f(t)\ d\sigma &= \int_{t-s}^0 A(t)S_t(\xi)f(t)(-d\xi) \\
&= \int_{t-s}^0 (-A(t))S_t(\xi)f(t)\ d\xi \\
&= \int_{t-s}^0 \frac{\partial}{\partial \xi}S_t(\xi)f(t)\ d\xi \\
&= S_t(0)f(t) - S_t(t-s)f(t) \\
&= g(t) - S_t(t-s)f(t)
\end{aligned} \tag{2.160}$$

A quarta linha é justificada pelo Teorema 1.2, item (d). Agora substituindo a equação (2.160) em (2.159), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma &= \int_s^t A(t)S_t(t-\sigma)f(t)\,d\sigma - \int_s^t A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma + S_t(t-s)f(t)\\
&= \int_s^t [-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)+A(t)S_t(t-\sigma)f(t)]\,d\sigma + S_t(t-s)f(t)\\
&= \int_s^t [A(t)S_t(t-\sigma)f(\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)-A(t)S_t(t-\sigma)f(\sigma)+A(t)S_t(t-\sigma)f(t)]\,d\sigma\\
&\qquad + S_t(t-s)f(t)\\
&= \int_s^t [A(t)S_t(t-\sigma)f(\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)]\,d\sigma\\
&\qquad - \int_s^t [A(t)S_t(t-\sigma)f(\sigma)-A(t)S_t(t-\sigma)f(t)]\,d\sigma + S_t(t-s)f(t)\\
&= \int_s^t [A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)]\,f(\sigma)\,d\sigma\\
&\qquad - \int_s^t A(t)S_t(t-\sigma)\,[f(\sigma)-f(t)]\,d\sigma + S_t(t-s)f(t).
\end{aligned}$$

Reescrevendo a análise acima, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma &= \int_s^t [A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)]\,f(\sigma)\,d\sigma\\
&\qquad - \int_s^t A(t)S_t(t-\sigma)\,[f(\sigma)-f(t)]\,d\sigma + S_t(t-s)f(t).
\end{aligned} \tag{2.161}$$

Agora estimaremos cada um dos três termos do lado direito da equação (2.161) separadamente, usando a equação (2.111) do Lema 2.7, equação (2.158) e a equação (2.93), conseguimos

$$\begin{aligned}
\|\int_s^t [A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)]\,f(\sigma)\,d\sigma\| &\le \int_s^t \|A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)\|.\|f(\sigma)\|\,d\sigma\\
&\le \|f\|_\infty.\int_s^t \|A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)\|\,d\sigma\\
&\le \|f\|_\infty.\int_s^t c_1\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta(t-\sigma)}\,d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.162}$$

Na terceira desigualdade, utiliza-se a equação (2.111) do Lema 2.7. Antes de continuar, utilizaremos duas vezes mudança de variável para calcular a integral em (2.162) e utilizaremos também a definição da função Gamma.

Afirmação 1.- $\displaystyle\int_s^t (t-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta(t-\sigma)}\,d\sigma = \frac{1}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}.\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right).$

De fato, fazendo $x = t-\sigma$ tem-se $-dx = d\sigma$. E se, $\sigma = s \to x = t-s$; e se, $\sigma = t \to x = 0$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_s^t (t-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta(t-\sigma)}\,d\sigma &= \int_{t-s}^0 x^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta x}(-dx)\\
&= -\int_{t-s}^0 x^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta x}\,dx\\
&= \int_0^{t-s} x^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta x}\,dx
\end{aligned} \tag{2.163}$$

E agora fazendo outra mudança $y = \delta x$ tem-se $\frac{1}{\delta}dy = dx$. E se, $x = 0 \to y = 0$; e se, $x = t-s \to y = \delta(t-s)$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_0^{t-s} x^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta x}\,dx &= \int_0^{\delta(t-s)} \left(\frac{1}{\delta}y\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-y}.\left(\frac{1}{\delta}dy\right)\\
&= \frac{1}{\delta^{\frac{\alpha}{2}-1}}.\frac{1}{\delta}.\int_0^{\delta(t-s)} y^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-y}\,dy\\
&\leq \frac{1}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}.\int_0^{+\infty} y^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-y}\,dy\\
&= \frac{1}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}.\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \text{pois} \quad \frac{\alpha}{2} > 0
\end{aligned} \tag{2.164}$$

Imediatamente, substituindo (2.164) em (2.162) obtém-se

$$\left\| \int_s^t \left[A(t)S_t(t-\sigma) - A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)\right] f(\sigma)\ d\sigma \right\| \leq c_2.\|f\|_\infty\sqrt{\rho(\mu)}. \tag{2.165}$$

Agora estima-se o segundo termo do lado direito da equação (2.161), isto é,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_s^t A(t)S_t(t-\sigma)\left[g(\sigma)-g(t)\right]\ d\sigma \right\| &\leq \int_s^t \|A(t)S_t(t-\sigma)\|.\|g(\sigma)-g(t)\|\ d\sigma\\
&\leq \int_s^t \frac{c_3}{t-\sigma}.e^{-\delta(t-\sigma)}.\sqrt{\delta(\mu)}.|\sigma-t|^{\frac{\gamma}{2}}\ d\sigma\\
&\leq c_3.\sqrt{\delta(\mu)}.\int_s^t (t-\sigma)^{\frac{\gamma}{2}-1}.e^{-\delta(t-\sigma)}\ d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.166}$$

Na segunda linha, justifica-se pela equação (2.94), pois $t-\sigma>0$, e também pela equação (2.158), pois $\mu \leq \sigma, t<\infty,\ 0<t-\sigma$.

Da mesma forma como estimamos o valor da integral em (2.164), obtém-se

$$\int_s^t (t-\sigma)^{\frac{\gamma}{2}-1}.e^{-\delta(t-\sigma)}\,d\sigma \leq \frac{1}{\delta^{\frac{\gamma}{2}}}.\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right). \tag{2.167}$$

Substituindo a equação (2.167) em (2.166), temos

$$\left\|\int_s^t A(t)S_t(t-\sigma)\left[f(\sigma)-f(t)\right]\ d\sigma\right\| \leq c_4.\sqrt{\delta(\mu)} \tag{2.168}$$

E por último, estima-se o tercer termo do lado direito da equação (2.161). Ou seja,

$$\begin{aligned}\|S_t(t-s)f(t)\| &\leq \|S_t(t-s)\|.\|f(t)\| \\ &\leq c_5.e^{-\delta(t-s)}.\|f\|_\infty.\end{aligned} \tag{2.169}$$

A segunda desigualdade acima é justificada pela equação (2.93), pois, $t-s>0$. Finalmente, estima-se a equação (2.161), com ajuda das estimativas (2.165), (2.168), (2.169), respectivamente

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)\ d\sigma\right\| \leq c_2.\|f\|_\infty.\sqrt{\rho(\mu)}+c_4\sqrt{\delta(\mu)}+c_5.\|f\|_\infty.e^{-\delta(t-s)} \tag{2.170}$$

Agora é o momento de estimar o segundo termo do lado direito da equação (2.156). Note-se que pela prova do Teorema 2.3 tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t W(t,\sigma)f(\sigma)\,d\sigma = \int_s^t \frac{\partial W(t,\sigma)}{\partial t}f(\sigma)\,d\sigma \tag{2.171}$$

e da equação (6.35), página 158, em [32]

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(t,s)}{\partial t} &= \int_s^t [A(t)S_t(t-\tau)-A(\tau)S_\tau(t-\tau)]\,R(\tau,s)\,d\tau \\ &\quad + \int_s^t A(t)S_t(t-\tau)\left[R(t,s)-R(\tau,s)\right]\,d\tau+S_t(t-s)R(t-s).\end{aligned} \tag{2.172}$$

Estima-se cada um dos termos do lado direito da equação (2.172), isto é,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_s^t [A(t)S_t(t-\tau) - A(\tau)S_\tau(t-\tau)]R(\tau,s)\ d\tau \right\| &\leq \int_s^t \|A(t)S_t(t-\tau) - A(\tau)S_\tau(t-\tau)\|.\|R(\tau,s)\|\ d\tau \\
&\leq \int_s^t c_6\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\delta(t-\tau)}.c_7\sqrt{\rho(\mu)}(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\theta(\tau-s)}\ d\tau \\
&\leq c_6\sqrt{\rho(\mu)}.c_7\sqrt{\rho(\mu)}.\int_s^t .(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-\tau)}.e^{-\vartheta(\tau-s)}\ d\tau \\
&\leq c_8\sqrt{\rho(\mu)}.\int_s^t .(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta t+\vartheta\tau-\vartheta\tau+\vartheta s}\ d\tau \\
&\leq c_8\sqrt{\rho(\mu)}.e^{-\vartheta(t-s)}.\int_s^t .(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}\ d\tau \\
&\leq c_8\sqrt{\rho(\mu)}.e^{-\vartheta(t-s)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}-1}.\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right).\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} \\
&\leq c_9\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\alpha-1}.e^{-\vartheta(t-s)}.
\end{aligned}$$

Na segunda linha acima, utiliza-se a equação (2.111) do Lema 2.7 e também a equação (2.103). E a penúltima linha é justificada pelo Lema A.2. Resumindo o análise acima, obtém-se

$$\left\| \int_s^t [A(t)S_t(t-\tau) - A(\tau)S_\tau(t-\tau)]R(\tau,s)\ d\tau \right\| \leq c_9\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\alpha-1}.e^{-\vartheta(t-s)}. \quad (2.173)$$

Agora procedemos a estimar o segundo termo do lado direito da equação (2.172), isto é

$$\begin{aligned}
\left\| \int_s^t A(t)S_t(t-\tau)\,[R(t,s) - R(\tau,s)]\ d\tau \right\| &\leq \int_s^t \|A(t)S_t(t-\tau)\|.\|R(t,s) - R(\tau,s)\|\ d\tau \\
&\leq \int_s^t \frac{c_{10}}{t-\tau}.e^{-\delta(t-\tau)}.c-11\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\tau)^{\beta}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-\beta-1}.e^{-\vartheta(\tau-s)}\ d\tau \\
&\leq c_{12}\sqrt{\rho(\mu)}.\int_s^t (t-\tau)^{\beta-1}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-\beta-1}.e^{-\vartheta(t-s)+\vartheta\tau-\vartheta\tau+\vartheta s}\ d\tau \\
&\leq c_{12}\sqrt{\rho(\mu)}.e^{-\vartheta(t-s)}.\int_s^t (t-\tau)^{\beta-1}.(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}-\beta-1}\ d\tau \\
&\leq c_{12}\sqrt{\rho(\mu)}.e^{-\vartheta(t-s)}.(t-s)^{\beta+\frac{\alpha}{2}-\beta-1}\frac{\Gamma(\beta).\Gamma(\frac{\alpha}{2}-\beta)}{\Gamma(\beta+\frac{\alpha}{2}-\beta)} \\
&\leq c_{13}\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)}.
\end{aligned}$$

Na segunda linha acima, utiliza-se a equação (2.94) e também a equação (2.126). A penúltima linha é justificada pelo Lema A.2, pois $0 < \beta < \dfrac{\alpha}{2}$. Resumindo a análise acima, obtém-se

$$\left\| \int_s^t A(t)S_t(t-\tau)\,[R(t,s) - R(\tau,s)]\ d\tau \right\| \leq c_{13}\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)}. \quad (2.174)$$

Seguidamente, procedemos a estimar o terceiro termo do lado direito da equação (2.172), isto é,

$$
\begin{aligned}
\|S_t(t-s)R(t,s)\| &\leq \|S_t(t-s)\|.\|R(t,s)\| \\
&\leq c_{14}.e^{-\delta(t-s)}.c_{15}.\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)} \\
&\leq c_{16}\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)}. \qquad (2.175)
\end{aligned}
$$

Na segunda linha acima, justifica-se com a equação (2.93), pois $t-s \geq 0$, e pela equação (2.103)

Faltando pouco para terminar a prova, estima-se a equação (2.172), com ajuda das estimativas (2.173), (2.174), (2.175), isto é,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial W(t,s)}{\partial t}\right\| &\leq c_9\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\alpha-1}.e^{-\vartheta(t-s)} + c_{13}\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)} \\
&\qquad + c_{16}\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)} \\
&\leq c_9\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\alpha-1}.e^{-\vartheta(t-s)} + c_{17}\sqrt{\rho(\mu)}.(t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-s)}
\end{aligned}
\qquad (2.176)
$$

Portanto, estimamos a equação (2.171), isto é,

$$
\begin{aligned}
\left\|\int_s^t \frac{\partial W(t,\sigma)}{\partial t} g(\sigma)\ d\sigma\right\| &\leq \int_s^t \left\|\frac{\partial W(t,\sigma)}{\partial t}\right\|.\|g(\sigma)\|\ d\sigma \\
&\leq \|g\|_\infty.\int_s^t \left(c_9\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\sigma)^{\alpha-1}.e^{-\vartheta(t-\sigma)} + c_{17}\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-\sigma)}\right) d\sigma \\
&\leq c_{18}.\|g\|_\infty.\sqrt{\rho(\mu)}.\left[\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}.e^{-\vartheta(t-\sigma)}\,d\sigma + \int_s^t c_{17}\sqrt{\rho(\mu)}.(t-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}-1}.e^{-\vartheta(t-\sigma)}\,d\sigma\right] \\
&\leq c_{18}.\|g\|_\infty.\sqrt{\rho(\mu)}.\left[\frac{1}{\vartheta^\alpha}.\Gamma(\alpha) + \frac{1}{\vartheta^{\frac{\alpha}{2}}}.\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \\
&\leq c_{19}.\|g\|_\infty.\sqrt{\rho(\mu)}.
\end{aligned}
$$

Na segunda desigualdade acima justifica-se pela equação (2.176). E na penúltima equação justifica-se utilizando a equação (2.164) da afirmação 1. Enfim resumindo a equação acima, tem-se

$$
\left\|\int_s^t \frac{\partial W(t,\sigma)}{\partial t} g(\sigma)\ d\sigma\right\| \leq c_{19}.\|g\|_\infty.\sqrt{\rho(\mu)}. \qquad (2.177)
$$

Finalmente, combinando as equações (2.170) e (2.177) e notando que $\rho(\mu) \to 0$ e $\delta(\mu) \to 0$ quando $\mu \to \infty$ produz que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um μ tal que se $t > s \geq \mu$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \int_s^t U(t,\sigma) f(\sigma) \ d\sigma \right\| < \varepsilon + c.\|f\|_\infty e^{-\delta(t-s)} \tag{2.178}$$

o que conclui a prova do Teorema 2.7. □

Capítulo 3

Equação de Reação-Difusão em Domínios não Cilíndricos

O objetivo deste capítulo é determinar, como em [32] as condições necessárias para garantir a existência, a unicidade e analisar o comportamento assintótico da solução de uma classe de equações lineares de reação-difusão em domínios dependendo do tempo, que envolve condição de contorno tipo Neumann. Mais precisamente, vamos a estudar o seguinte problema

$$\begin{cases} du/dt + \nabla u \cdot V + u \operatorname{div} V - \Delta u + \gamma u &= f, \quad \text{em} \qquad \cup_{t>0} \Omega_t \times \{t\}, \\ \partial u / \partial \nu_t &= 0, \quad \text{sobre} \quad \cup_{t>0} \partial\Omega_t \times \{t\}, \end{cases}$$

onde $\gamma > 0$ e ν_t denota o campo vetorial normal unitário para $\partial\Omega_t$.

Antes de iniciar o estudo de nosso problema, vamos extrapolar a técnica utilizada por Hiroki Tanabe e Pavel E. Sobolevskii em [32].

3.1 Existência, unicidade e comportamento da solução quando $t \to \infty$ no sentido da derivada material

Esta seção será dedicada a estudar a existência, a unicidade e comportamento assintótico de problemas abstratos de Cauchy sobre espaços de evolução da forma

$$\begin{cases} \partial_t^{\bullet} u(t) + A(t)u(t) &= f(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0 \in \mathfrak{X}_0. \end{cases}$$

onde $\partial_t^\bullet$ denota a derivada material de u.

Introdução

Assuma que o processo físico ocorra em algum domínio espacial Ω_t do espaço físico, o qual se move com o tempo na velocidade $\boldsymbol{v}(x,t)$. Se, $u(x,t)$ é uma quantidade escalar relevante associado ao processo, e W_t é um subdomínio arbitrário de Ω_t, então pelo Teorema de Transporte de Reynolds, ver Alexandre J. Chorin and J.E. Marsden [9] e a leis físicas do balanço

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{W_t} u(x,t)\ dx &= \int_{W_t}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\operatorname{div}_x\left[u(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)\right]\right\}\ dx \\
&= \int_{W_t} f(x,t)\ dx - \int_{\partial W_t} \boldsymbol{j}(x,t)\ dx, \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

onde f representa a taxa de produção/consumo de u por unidade de volume em W_t, e $\boldsymbol{j}$ é o campo vetorial do fluido de u através da fronteira ∂W_t. Assumindo o fluido de u um *fluido difusivo*, isto é asumindo $\boldsymbol{j}(x,t) = -k\nabla u(x,t)$, o Teorema da Divergência leva a

$$\int_{W_t}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\operatorname{div}_x\left[u(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)\right]-k\Delta_x u(x,t)\right\}\ dx = \int_{W_t} f(x,t)\ dx. \qquad (3.2)$$

Desde que $W_t \subset \Omega_t$ é arbitrário, u satisfaz a equação de balanço (3.1) em Ω_t, se, e somente se a seguinte equação é satisfeita:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\operatorname{div}_x\left[u(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)\right]-k\Delta_x u(x,t) = f(x,t), \quad x\in\Omega_t, \quad t>0. \qquad (3.3)$$

Assumindo alguma regularidade espacial sobre u, (3.3) é equivalente a

$$\partial_t^\bullet u(x,t)+u(x,t)\operatorname{div}_x \boldsymbol{v}(x,t)-k\Delta_x u(x,t) = f(x,t), \quad x\in\Omega_t, \quad t>0, \qquad (3.4)$$

onde $\partial_t^\bullet u(x,t) := \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\operatorname{div}_x u(x,t)\cdot\boldsymbol{v}(x,t)$ denota a derivada material de u, ver Paolo Cermelli and Eliot Fried and Morton E. Gurtin [7]. Observe que esta derivada tempo toma em conta o movimento de domínios espaciais e introduz o termo adveção $\operatorname{div}_x u(x,t)\cdot\boldsymbol{v}(x,t)$ correspondente ao movimento elementar do volume com o fluido $\boldsymbol{v}(x,t)$, o qual coincide com a derivada do tempo regular no caso de domíno fixado-tempo isto é, no caso $\boldsymbol{v}\equiv 0$.

Em adição para (3.4), o comportamento de u sobre a fronteira de Ω_t tem sido especificado bem como sua distribuição inicial $u(\cdot,0)$ sobre Ω_0.

Isso nos leva naturalmente ao estudo de problemas abstratos de Cauchy sobre espaços de evolução da forma

$$\begin{cases} \partial_t^\bullet u(t) + A(t)u(t) &= f(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0 \in \mathfrak{X}_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Muitos fenômenos do mundo real têm seu domínio físico mudando com o tempo [23]. Formação de padrões sobre superfícies em evolução, interfaces de transporte de fluidos ou separação de fases sobre superfícies de disolução (problemas de contorno livre) são exemplos muito representativos. Em algum desses problemas o movimento de partículas ou subdomínios ocorre de acordo com um campo de velocidade desconhecido, sendo na verdade uma das principais incógnitas do problema.

No entanto, neste trabalho, assumimos alguma situação intermediária na qual o movimento é prescrito por um determinado campo vetorial. Como a distribuição inicial u_0 mora em um espaço de estado inicial $\mathfrak{X}_0$ e, posteriormente, os estados $u(t)$ moram em diferentes espaços de estados $\mathfrak{X}_t$, uma estrutura especial deve ser considerada para dar algum significado à equação (3.5).

Introduzimos um cenário funcional abstrato derivado de [4],[3], baseado em uma formulação Lagrangiana, onde os espaços em evolução $\mathfrak{X}_t$ são parametrizados sobre o espaço inicial $\mathfrak{X}_0$ (ver Definição 3.1). Com essa ferramenta, consideramos a boa-colocação global de classes específicas de (3.5) de uma maneira muito intrínseca e unificada, incluindo equações de evolução padrão que pode ser vista (com espaços não evolutivos) como um caso particular. Para grandes escalas de tempo, assumindo que $\mathfrak{X}_t \to \mathfrak{X}_\infty$ quando $t \to \infty$ (em um sentido a ser especificado), também consideramos a convergência de $u(t)$ para a solução de um problema estacionário adequado.

3.1.1 Cenário geral da derivada material

Denotemos por $\mathscr{X} = \{(\mathfrak{X}_t, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}_t})\}_{t\in J}$ uma família de espaços de Banach sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), onde $J \subset \mathbb{R}^+$ é um intervalo contendo $0_{\mathbb{R}}$. E lembrando noções da subseção 1.4 do capítulo 1. Ou seja, para $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathscr{X}$

$$\mathcal{L}_{is}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := \{L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \ : \ L \text{ é bijetivo}\}$$

Definição 3.1. Dada uma família $\Phi = \{\phi_t\}_{t\in J} \subset \bigcup_{s\in J} \mathcal{L}_{is}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_s)$, dizemos que o par $(\mathscr{X}, \Phi)$ é *compatível* se,

i) $\phi_t \in \mathcal{L}_{is}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_t)$, para todo $t \in J$;

ii) $\phi_0 = I_{\mathfrak{X}_0}$, o operador identidade sobre $\mathfrak{X}_0$;

iii) existe uma constante positiva c satisfazendo

$$\sup_{t\in J}\left\{\|\phi_t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_t)},\ \|\phi_{-t}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_t,\mathfrak{X}_0)}\right\}\leq c, \tag{3.6}$$

onde ϕ_{-t} representa o inverso de ϕ_t.

Chamamos $\mathfrak{X}_0$ como o *espaço referência.*

Lema 3.1. Se o par $(\mathscr{X},\Phi)$ é compatível, temos a equivalência de normas

$$\frac{1}{c}\|u\|_{\mathfrak{X}_0}\leq\|\phi_t u\|_{\mathfrak{X}_t}\leq c\|u\|_{\mathfrak{X}_0},\quad \text{para todo } t\in J. \tag{3.7}$$

Demonstração. De fato, dado $u\in\mathfrak{X}_0$ e dado $t\in J$. Como $(\mathscr{X},\Phi)$ é compatível, então

- $\phi_t\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_t)$,
- $\phi_0=I$, operador identidade em $\mathfrak{X}_0$,
- existe $c>0$ tal que $\sup_{t\in J}\{\|\phi_t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_t)},\ \|\phi_{-t}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_t,\mathfrak{X}_0)}\}\leq c$

Daqui, $\|u\|_{\mathfrak{X}_0}=\|\phi_{-t}\circ\phi_t u\|_{\mathfrak{X}_0}\leq\|\phi_{-t}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_t,\mathfrak{X}_0)}\|\phi_t u\|_{\mathfrak{X}_t}\leq c\|\phi_t u\|_{\mathfrak{X}_t}\leq\|\phi_t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_t)}\|u\|_{\mathfrak{X}_0}\leq c^2\|u\|_{\mathfrak{X}_0}$
Portanto, existe uma constante positiva c satisfazendo

$$\frac{1}{c}\|u\|_{\mathfrak{X}_0}\leq\|\phi_t u\|_{\mathfrak{X}_t}\leq c\|u\|_{\mathfrak{X}_0},\quad \text{para todo, } t\in J.$$

□

Exemplo 3.1. Seja $(\mathfrak{X},\ \|\cdot\|_{\mathfrak{X}})$ um espaço de Banach e $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in J}$ uma família de normas em $\mathfrak{X}$ satisfazendo $c_1\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}\leq\|\cdot\|_t\leq c_2\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$, para algumas constantes positivas c_1, c_2 independente de t. Para $t\in J$ define $\mathfrak{X}_t:=\mathfrak{X}$ munido com a norma $\|\cdot\|_t$ e $\phi_t:=I$ o operador identidade sobre $\mathfrak{X}$. É claro que o par$(\mathscr{X},\Phi)$ é compatível.

Exemplo 3.2. Seja $\{\Omega_t\}_{t\in J}\subset 2^{\mathbb{R}^n}$ uma familia de domínios limitados de $\mathbb{R}^n$. Suponha que os domínios Ω_t evoluam de Ω_0 prescritos pelo movimento da sua fronteira sobre o intervalo de tempo J, i.e. um ponto arbitrário $x\in\Omega_0$ evolui ao longo da curva $J\ni t\mapsto\zeta(t;x)\in\Omega_t$ solução de um sistema autônomo de EDO

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{d}{dt}\zeta(t;x) & = & \boldsymbol{v}(\zeta(t;x)),\quad t\in J,\ t\neq 0\\ \zeta(0;x) & = & x,\end{array}\right. \tag{3.8}$$

para algum campo de velocidade suave dado $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Além disso, para cada $x \in \Omega_0$ asuma a existência da única solução $\zeta(\cdot; x) : J \to \mathbb{R}^n$ para (3.8)
Para $t \in J$, temos a aplicação deformação

$$\psi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \psi_t(x) := \zeta(t; x),$$

o qual é um $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfismo que satisfaz a propriedade de grupo $\psi_0 = I$ e $\psi_{t+s} = \psi_t \circ \psi_s$ para todo $t, s \in J$. Em particular $\psi_{-t} = \psi_t^{-1}$, a inversa de ψ_t. A referência domínio Ω_0 é deformado nos domínios

$$\Omega_t := \psi_t(\Omega_0), \quad t \in J,$$

e as fronteiras também satisfaz em $\partial\Omega_t = \psi_t(\partial\Omega_0)$.

Se $D\psi_t$ denota a matriz Jacobiana de ψ_t, seja $J_t(\_) := |\det D\psi_t(\_)|$. Para $p \in [1, \infty)$, $t \in J$ define $\mathfrak{X}_t := L^p(\Omega_t)$ o espaço de Lebesgue clássico munido com a norma equivalente

$$\|u\|_{\mathfrak{X}_t} := \left[\int_{\Omega_t} \left(J_t^{-1}(\_) \cdot |u|^p\right)(y)\ dy\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{\Omega_t} \left(J_{-t}(\_) \cdot |u|^p\right)(y)\ dy\right]^{\frac{1}{p}},$$

e $\phi_t : \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{X}_t$ por $\phi_t u := u \circ \psi_{-t}$.
Segue imediatamente do Teorema da Mudança de Variável que o par $(\mathscr{X}, \Phi)$ é compatível e ϕ_t é uma isometria linear de $\mathfrak{X}_0$ para $\mathfrak{X}_t$, para todo $t \in J$.

Afirmação 1.- ϕ_t é uma isometria de $\mathfrak{X}_0$ a $\mathfrak{X}_t$, para todo $t \in J$
De fato, dado $u \in \mathfrak{X}_0$,

$$\begin{aligned}
\|\phi_t u\|_{\mathfrak{X}_t}^p = \int_{\Omega_t} \left(J_{-t}(_) \cdot \left|\phi_t u\right|^p\right)(y)\ dy &= \int_{\Omega_t} \left(J_{-t}(_) \cdot \left|u \circ \psi_{-t}\right|^p\right)(y)\ dy \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\left(J_{-t}(_) \cdot \left|u \circ \psi_{-t}\right|^p\right) \circ \psi_t\right](x) \cdot \operatorname{Jac}(\psi_t(x))\ dx \\
&= \int_{\Omega_0} \left[J_{-t}(x) \cdot |u(x)|^p\right](x) \cdot \left|\det D\psi_t(x)\right|\ dx \\
&= \int_{\Omega_0} \left|\det D\psi_{-t}(x)\right| \cdot |u(x)|^p \cdot \left|\det D\psi_t(x)\right|\ dx \\
&= \int_{\Omega_0} \left|\det [D\psi_t(x)]^{-1}\right| \cdot |u(x)|^p \cdot \left|\det D\psi_t(x)\right|\ dx \\
&= \int_{\Omega_0} \left|\det [D\psi_t(x)]^{-1} \cdot \det D\psi_t(x)\right| \cdot |u(x)|^p\ dx \\
&= \int_{\Omega_0} |u(x)|^p\ dx = \|u\|_{\mathfrak{X}_0}^p.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Na primeira igualdade, utiliza-se a definição da norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}_t}$. Na segunda igualdade, usa-se a definição de ϕ_t. E na terceira igualdade, utiliza-se o Teorema da Mudança de Variável. E na sexta igualdade utiliza-se o Teorema da Função Inversa. Portanto, ϕ_t é uma isometria de $\mathfrak{X}_0$ a $\mathfrak{X}_t$, para todo $t \in J$.

Afirmação 2.- $(\mathscr{X}, \Phi)$ é compatível

- $\phi_t \in \mathcal{L}_{is}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_t)$, para todo $t \in J$
  De fato, dado $t \in J$, pela afirmação 1, $\phi_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_t)$. E devido ao fato do o operador ϕ_{-t} ser o inverso do operador ϕ_t, definido por $\phi_{-t}u := u \circ \psi_t$,então $\phi_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_t)$ e além disso, ϕ_t é bijetora.

- $\phi_0 = I$, o operador identidade sobre $\mathfrak{X}_0$.
  De fato, dado $u \in \mathfrak{X}_0$
  $\phi_0(u) = u \circ \psi_{-0} = u \circ \psi_0 = u \circ I = u$

- existe uma constante positiva c satisfazendo

$$\sup_{t\in J}\left\{\|\phi_t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_t)}, \|\phi_{-t}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_t,\mathfrak{X}_0)}\right\} \leq c. \tag{3.10}$$

  De fato, pela afirmação 1, $\|\phi_t u\|_{\mathfrak{X}_t} = \|u\|_{\mathfrak{X}_0}$. Ou seja, $\|\phi_t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_t,\mathfrak{X}_0)} = 1$, para todo $t \in J$.

Portanto, $(\mathscr{X}, \Phi)$ é compatível.

Exemplo 3.3. Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach. Para $t \in J$ seja $\mathfrak{X}_t := \mathfrak{X}$ e $\phi_t := I$ o operador identidade sobre $\mathfrak{X}$. Então, $(\mathscr{X}, \Phi)$ é compatível. Neste caso dizemos que o par $(\mathscr{X}, \Phi)$ é *trivialmente compatível.*

Apesar de sua simplicidade, o Exemplo 3.3 nos permite incorporar um espaço fixo de Banach nessa abordagem Lagrangiana e recuperar todas as estruturas bem estabelecidas para um espaço de Banach "estacionário"desse cenário "evolutivo".

Nesse espírito, agora definimos espaços funcionais apropriados, adequados para lidar com funções dependentes do tempo nos espaços em evolução, bem como uma noção adequada da derivada.

Definição 3.2. Seja $(\mathscr{X}, \Phi)$ um par compatível. Defina-se os espaçõs vetoriais

$$\mathcal{C}(J;\mathscr{X},\Phi) := \{u : J \to \cup_{s\in J}\mathfrak{X}_s \ : \ u(t) \in \mathfrak{X}_t, \ \forall t \in J \quad \text{e} \quad \phi_{-(\cdot)}u(\cdot) \in \mathcal{C}(J;\mathfrak{X}_0)\}$$

$$\mathcal{C}^1(J;\mathscr{X},\Phi) := \{u : J \to \cup_{s\in J}\mathfrak{X}_s \ : \ u(t) \in \mathfrak{X}_t, \ \forall t \in J \quad \text{e} \quad \phi_{-(\cdot)}u(\cdot) \in \mathcal{C}^1(J;\mathfrak{X}_0)\}$$

onde

$$\begin{array}{rccl} \phi_{-(\cdot)}u(\cdot) : & J & \longrightarrow & \mathfrak{X}_0 \\ & t & \longmapsto & \left[\phi_{-(\cdot)}u(\cdot)\right](t) := \phi_{-t}u(t). \end{array}$$

Definição 3.3 (A. Alphonse, C.M. Elliott & B. Stinner [4], 2015)**.** Seja $u \in \mathcal{C}^1(J;\mathscr{X},\Phi)$. A *derivada material* de u é definido como

$$\partial_t^\bullet u(t) := \phi_t\left(\frac{d}{ds}\Big(\phi_{-s}u(s)\Big)\bigg|_{s=t}\right). \tag{3.11}$$

Observação 3.1. Para $u \in \mathcal{C}^1(J;\mathscr{X},\Phi)$,

$$\partial_t^\bullet u(t) = 0 \iff u(t) = \phi_t x \quad \text{para algum } x \in \mathfrak{X}_0.$$

Observação 3.2. Se $(\mathscr{X}, \Phi)$ é trivialmente compatível, então

$$\mathcal{C}^1(J;\mathscr{X},\Phi) = \mathcal{C}^1(J;X) \quad \text{e} \quad \partial_t^\bullet u(t) = \frac{du}{dt}(t).$$

Exemplo 3.4. Suponha que $\{\psi_t\}_{t\in J}$ e $\{\phi_t\}_{t\in J}$ são as famílias dadas no Exemplo 3.2, e suponha que $u : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave.

Dado $(t,x) \in J \times \Omega_t$ escrevemos $[u(t)](X) := u(t,X)$ e $[\phi_t u(t)](x) := u(t,\psi_{-t}x)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\left[\phi_t\Big(\frac{d}{dt}\phi_{-t}u(t)\Big)\right](x) &= \left[\Big(\frac{d}{dt}\phi_{-t}u(t)\Big)\circ\psi_{-t}\right](x) \\
&= \left[\frac{d}{dt}\Big(u(t)\circ\psi_t\Big)\circ\psi_{-t}\right](x) = \left[\frac{d}{dt}\Big(u(t)(\cdot)\circ\psi_t\Big)\circ\psi_{-t}\right](x) = \left[\frac{d}{dt}\Big(u(t,\cdot)\circ\psi_t\Big)\circ\psi_{-t}\right](x) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\psi_t^i(x) = \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \nabla_x u(t,x)\cdot\frac{d}{dt}\psi_t(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \nabla_x u(t,x)\cdot\frac{d}{dt}\zeta(t;x) = \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \nabla_x u(t,x)\cdot\boldsymbol{v}\big(\zeta(t;x)\big).
\end{aligned}$$

Na primeira linha, utilizamos a definição de ϕ_t. E na segunda linha utilizamos a definição de ϕ_{-t} e, além disso, a notação $u(t)(x) := u(t,x)$. E na terceira linha utilizamos a regra da cadeia.

E na última linha, utilizamos a definição de ψ_t e, além disso, a EDO (3.8) respectivamente, o qual coincide com a derivada material usual de u da mecânica contínua

Processo de evolução sobre o espaço dependente do tempo

Definição 3.4. Denote por $\Delta := \{(t,s) \in J \times J \ : \ t \geq s\}$. Um *processo* sobre $\mathscr{X}$ é uma familia a dos parámetros $\{S(t,s) \ : \ (t,s) \in \Delta\} \subset \bigcup\limits_{t,s \in J} \mathcal{C}(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{X}_t)$ satisfazendo:

i) $S(t,s) \in \mathcal{C}(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{X}_t)$, para todo $(t,s) \in \Delta$

ii) $S(t,t) = I$, o operador identidade sobre $\mathfrak{X}_t$, para todo $t \in J$

iii) $S(t,s) = S(t,\tau) \circ S(\tau,s)$, para todo $t \geq \tau \geq s \in J$

Além disso, dizemos que $\{S(t,s) \ : \ (t,s) \in \Delta\}$ é *contínua*, se a aplicação

$$\Delta \times \mathfrak{X}_0 \ni ((t,s),x) \mapsto \phi_{-t} S(t,s) \phi_s x \in \mathfrak{X}_0 \tag{3.12}$$

é uma aplicação contínua.

No caso particular, $S(t,s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{X}_t)$, para todo $(t,s) \in \Delta$ nos referimos a $\{S(t,s) \ : \ (t,s) \in \Delta\}$ como um *processo linear* sobre $\mathscr{X}$.

Um tratamento geral para processos em espaços dependentes do tempo pode ser desenvolvido, mesmo que os espaços em evolução não sejam relacionados [10]

Neste caso $(\mathscr{X}, \Phi)$ é trivialmente compatível, Definição 3.4 é a noção padrão de um processo [6]

Exemplo 3.5. Sendo $S(t,s) : \mathfrak{X}_s \to \mathfrak{X}_t$ por $S(t,s) := \phi_t \circ \phi_{-s}$ para cada $t,s \in J$ pode-se ver diretamente de

$$S(t,\tau) \circ S(\tau,s) = \phi_t \circ \phi_{-\tau} \circ \phi_\tau \circ \phi_{-s} = S(t,s) \tag{3.13}$$

que a família $\{S(t,s) \ : \ (t,s) \in \Delta\}$ é um processo linear sobre $\mathscr{X}$.

Exemplo 3.6. Assuma que $\mathscr{X}$ é uma família ordenada (crescendo) no sentido: $s < t \Rightarrow \mathfrak{X}_s \subset \mathfrak{X}_t$ [22] e [30]. Dizemos que um processo $\{S(t,s) \ : \ (t,s) \in \Delta\}$ sobre $\mathscr{X}$ é um *processo autônomo* se a restrição $S(t,s)|_{\mathfrak{X}_0} = S(t-s,0)$ para todo $(t,s) \in \Delta$, isto é, a evolução depende apenas do tempo decorrido. A família de operadores $\{T(t) \ : \ t \in \mathbb{R}_+\}$ dado por $T(t) := S(t,0), \ \ t \geq 0$, satisfaz:

i) $T(t) \in \mathcal{C}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_t)$, para todo $t \in J$

ii) $T(0) = I$, é o operador identidade sobre $\mathfrak{X}_0$

iii) $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$, para todo $t, s \in J$

Além disso, asumimos que $\{S(t,s) \ : \ (t,s) \in \Delta\}$ é contínua,
então a aplicação $J \times \mathfrak{X}_0 \ni (t,x) \mapsto \phi_{-t} T(t)x \in \mathfrak{X}_0$ é também contínua.

Rigorosamente falando, o operador $S(t,s)$ toma cada estado x_s no espaço de estado inicial $\mathfrak{X}_s$ e evolui ao estado $S(t,s)x_s$ no espaço de estado final $\mathfrak{X}_t$. Esta é a relação entre processos e equações de evolução em $\mathscr{X}$.

3.1.2 Existência, unicidade e comportamento da solução quando $t \to \infty$

Considere o problema de Cauchy abstrato sobre $\mathscr{X}$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t^\bullet u(t) + A(t)u(t) & = & f(t), & t \in J, \ t \neq 0 \\ u(0) & = & u_0, & u_0 \in \mathfrak{X}_0 \end{array} \right. \tag{3.14}$$

onde $A(t) : \mathrm{dom}(A(t)) \subset \mathfrak{X}_t \to \mathfrak{X}_t$ é um operador linear e $f \in \mathcal{C}(J, \mathscr{X}, \Phi)$.

Definição 3.5 (Solução Clássica)**.** Dado $u_0 \in \mathfrak{X}_0$. Uma *solução clássica* do problema de Cauchy (3.14) é uma função $u \in \mathcal{C}(J, \mathscr{X}, \Phi) \cap \mathcal{C}^1(J \setminus \{0\}; \mathscr{X}, \Phi)$, satisfazendo que $u(0) = u_0$, $u(t) \in \mathrm{dom}(A(t))$, para todo $t \in J, \ \ t \neq 0$, e a equação (3.14) se cumpre em $\mathfrak{X}_t$ para cada $t \in J, \ \ t \neq 0$.

Observação 3.3. Se $(\mathscr{X}, \Phi)$ é um par trivialmente compatível, Definição 3.5 é a definição padrão da solução clássica por Jan W. Cholewa & Tomasz Dlotko, [8] para o problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) & = & f(t), & t \in J, \ t \neq 0 \\ u(0) & = & u_0, & u_0 \in \mathfrak{X} \end{array} \right. \tag{3.15}$$

A seguinte proposição da nossa correspondência entre equação de evolução sobre espaço dependente do tempo e equações de evolução sobre um espaço fixo.

Proposição 3.1 (Silva, R.P. & Mamani, S.M.Q.)**.** Se $u \in \mathcal{C}(J; \mathscr{X}, \Phi) \cap \mathcal{C}^1(J \setminus \{0\}; \mathscr{X}, \Phi)$ é uma solução clássica de (3.14), então $v(\cdot) := \phi_{-(\cdot)} u(\cdot) \in \mathcal{C}(J; \mathfrak{X}_0) \cap \mathcal{C}^1(J \setminus \{0\}; \mathfrak{X}_0)$ é uma solução clássica do problema de Cauchy padrão

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{dv(t)}{dt} + B(t)v(t) & = & g(t), & t \in J, \ t \neq 0 \\ v(0) & = & u_0, & u_0 \in \mathfrak{X}_0 \end{array} \right. \tag{3.16}$$

onde $B(t) := \phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t \Big|_{\phi_{-t}\left(\operatorname{dom}(A(t))\right)}$ e $g(t) := \phi_{-t}(f(t))$.

Reciprocamente, se $v \in \mathcal{C}(J;\mathfrak{X}_0) \cap \mathcal{C}^1(J \setminus \{0\};\mathfrak{X}_0)$ é uma solução clássica do problema de Cauchy (3.16), então $u(\cdot) := \phi_{(\cdot)}v(\cdot) \in \mathcal{C}(J;\mathscr{X},\Phi) \cap \mathcal{C}^1(J \setminus \{0\};\mathscr{X},\Phi)$ é uma solução clássica de (3.14) com $A(t) := \phi_t \circ B(t) \circ \phi_{-t}\Big|_{\operatorname{dom}(A(t))}$ e $f(t) := \phi_t(g(t))$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como $u \in \mathcal{C}(J;\mathscr{X},\Phi) \cap \mathcal{C}^1(J \setminus \{0\};\mathscr{X},\Phi)$ então, pela definição de $\mathcal{C}(J;\mathscr{X},\Phi)$ e $\mathcal{C}^1(J \setminus \{0\};\mathscr{X},\Phi)$, obtém-se imediatamente que
$\phi_{-(\cdot)}u(\cdot) \in \mathcal{C}(J;\mathfrak{X}_0) \cap \mathcal{C}^1(J \setminus \{0\};\mathfrak{X}_0)$.

- $v(t) \in \operatorname{dom}(B(t))$.
  De fato, pela definição de $v(\cdot)$, tem-se $v(t) := \phi_{-t}\big(u(t)\big)$. Ou seja, $\phi_t\big(v(t)\big) = u(t)$. E sabemos pela hipótese que $u(t) \in \operatorname{dom}(A(t))$. Então, $\phi_t\big(v(t)\big) \in \operatorname{dom}(A(t))$. Assim, $v(t) \in \phi_t^{-1}\big(\operatorname{dom}(A(t))\big)$.

- $v(0) = u_0$.
  De fato, pela definição de $v(\cdot)$, tem-se que $v(t) := \phi_t^{-1}\big(u(t)\big)$.
  Daqui, $v(0) = \phi_0^{-1}\big(u(0)\big) = I^{-1}\big(u(0)\big) = u(0)$.

- v satisfaz a equação (3.16).
  De fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{dv(t)}{dt} + B(t)v(t) &= \frac{d}{dt}\Big(\phi_{-t}(u(t))\Big) + \Big(\phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t\Big)\Big(\phi_{-t}(u(t))\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\phi_{-t}(u(t))\Big) + \Big(\phi_{-t} \circ A(t)\Big)\Big(u(t)\Big) \\
&= \phi_{-t}\phi_t\left(\frac{d}{ds}\Big(\phi_{-s}u(s)\Big)\Big|_{s=t}\right) + \phi_{-t}\Big(A(t)u(t)\Big) \\
&= \phi_{-t}\left[\phi_t\left(\frac{d}{ds}\Big(\phi_{-s}u(s)\Big)\Big|_{s=t}\right) + A(t)u(t)\right] \\
&= \phi_{-t}\Big[\partial_t^{\bullet}u(t) + A(t)u(t)\Big] \\
&= \phi_{-t}\Big[f(t)\Big] \\
&= g(t).
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Na primeira igualdade acima, justifica-se pela definição de $v(\cdot)$ e também da definição do operador $B(t)$. E a quinta igualdade apenas estamos utilizando a definição da derivada material. E na sexta igualdade é justificado, devido a que u satisfaz (3.14). E a última igualdade justifica-se imediatamente pela definição de $g(t)$.

($\Leftarrow$) Como $v \in \mathcal{C}(J;\mathfrak{X}_0) \cap \mathcal{C}^1(J \setminus \{0\};\mathfrak{X}_0)$. Ou seja, $\phi_{-(\cdot)}\phi_{(\cdot)}v(\cdot) \in \mathcal{C}(J;\mathfrak{X}_0) \cap \mathcal{C}^1(J \setminus \{0\};\mathfrak{X}_0)$, então pela definição de $\mathcal{C}(J;\mathscr{X},\Phi)$ e $\mathcal{C}^1(J \setminus \{0\};\mathscr{X},\Phi)$, obtém-se imediatamente que $\phi_{(\cdot)}v(\cdot) \in \mathcal{C}(J;\mathscr{X},\Phi) \cap \mathcal{C}^1(J \setminus \{0\};\mathscr{X},\Phi)$.

- $u(t) \in \operatorname{dom}(A(t))$
  De fato, pela definição de $u(\cdot)$, tem-se $u(t) := \phi_t\big(v(t)\big)$. Ou seja, $\phi_t^{-1}\big(u(t)\big) = v(t)$. E sabemos pela hipótese que $v(t) \in \operatorname{dom}(B(t))$. Então, $\phi_t^{-1}\big(u(t)\big) \in \operatorname{dom}(B(t))$. Assim, $u(t) \in \phi_t\big(\operatorname{dom}(B(t))\big)$.

- $u(0) = u_0$
  De fato, pela definição de $u(\cdot)$, tem-se que $u(t) = \phi_t\big(v(t)\big)$.
  Daqui, $u(0) = \phi_0\big(v(0)\big) = I\big(v(0)\big) = v(0) = u_0$.

- u satisfaz a equação (3.14)
  De fato,

$$
\begin{aligned}
\partial_t^{\bullet}u(t) + A(t)u(t) &= \phi_t\left(\frac{d}{ds}\Big(\phi_{-s}u(s)\Big)\bigg|_{s=t}\right) + \Big(\phi_t \circ B(t) \circ \phi_{-t}\Big)u(t) \\
&= \phi_t\left(\frac{d}{ds}\Big(\phi_{-s}\phi_s v(s)\Big)\bigg|_{s=t}\right) + \Big(\phi_t \circ B(t) \circ \phi_{-t}\Big)\Big(\phi_t v(t)\Big) \\
&= \phi_t\left(\frac{d}{ds}\Big(v(s)\Big)\bigg|_{s=t}\right) + \phi_t\Big(B(t)v(t)\Big) \\
&= \phi_t\Big[\frac{dv(t)}{dt} + B(t)v(t)\Big] \\
&= \phi_t\Big[g(t)\Big] \\
&= f(t).
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Na primeira igualdade acima, justifica-se pela definição da derivada material e também devido à definição do operador $A(t)$. Na segunda igualdade apenas estamos utilizando a definição de $u(t)$. E a quinta igualdade é justificada devido a que v satisfaz (3.16). A última igualdade justifica-se imediatamente pela definição de $g(t)$.

$\square$

Lema 3.2 (Silva, R.P. & Mamani, S.M.Q.). Seja $(\mathscr{X},\Phi)$ compátivel e $\mathscr{A}=\{A(t)\}_{t\in J}$ uma família setorial em $\mathscr{X}$, então $\phi_{-t}\circ A(t)\circ\phi_t\Big|_{\phi_{-t}\big(\mathrm{dom}(A(t))\big)}$ é um operador setorial em $\mathfrak{X}_0$ para todo $t\in J$.

Demonstração. HIPÓTESE: A família $\mathscr{A}=\{A(t)\}_{t\in J}$ é setorial em $\mathscr{X}$, i.e. $A(t)$ é um operador setorial em $\mathfrak{X}_t$ para todo $t\in J$.
Mais precisamente, para cada $t\in J$, $A(t)$ é um operador linear fechado, densamente definido tal que, para algum ω em $(0,\pi/2)$ e algum $M\geq 1$ e real a, o setor

$$\Sigma_{a,\omega}=\{\lambda\in\mathbb{C}\ :\ \omega\leq|\arg(\lambda-a)|\leq\pi,\ \lambda\neq a\}$$

está contido no conjunto resolvente de $A(t)$ e

$$\left\|(\lambda-A(t))^{-1}\right\|\leq\frac{M}{|\lambda-a|}\ ,\quad \text{para todo }\ \lambda\in\Sigma_{a,\omega}.$$

TESE: $\phi_{-t}\circ A(t)\circ\phi_t\Big|_{\phi_{-t}(\mathrm{dom}(A(t)))}$ é um operador setorial em $\mathfrak{X}_0$ para todo $t\in J$.

Primeiro começaremos provando a seguinte afirmação:

Afirmação.- O domínio do operador linear $\phi_{-t}\circ A(t)\circ\phi_t$ é denso em $\mathfrak{X}_0$, i.e.

$$\overline{\phi_{-t}\Big(\mathrm{dom}(A(t))\Big)}^{\mathfrak{X}_0}=\mathfrak{X}_0.$$

De fato,
Como o domínio do operador linear $A(t)$ é denso em $\mathfrak{X}_t$ e além disso, $\phi_{-t}\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}_t,\mathfrak{X}_0)$ então

$$\phi_{-t}\left(\overline{\mathrm{dom}(A(t))}^{\mathfrak{X}_t}\right)=\phi_{-t}(\mathfrak{X}_t) \tag{3.19}$$

E já que, ϕ_{-t} é um homeomorfismo e $\mathrm{dom}(A(t))\subset\mathfrak{X}_t$, então pelo Teorema 7.1, James R. Munkres [31], pág. 103

$$\phi_{-t}\left(\overline{\mathrm{dom}(A(t))}^{\mathfrak{X}_t}\right)=\overline{\phi_{-t}\left(\mathrm{dom}(A(t))\right)}^{\mathfrak{X}_0} \tag{3.20}$$

Portanto, da equação (3.20) em (3.19) obtém-se

$$\overline{\phi_{-t}\left(\mathrm{dom}(A(t))\right)}^{\mathfrak{X}_0}=\mathfrak{X}_0$$

Agora provaremos que a conjugação de um operador setorial é um operador setorial.
De fato, dado $t \in J$.
Trabalhemos com o mesmo setor. Ou seja, bastaria provar que:

$$\Sigma_{a,\omega} \subset \rho\Big(\phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t\Big)$$

e

$$\left\|\Big(\lambda - \phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t\Big)^{-1}\right\| \leq M/|\lambda - a| \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{a,\omega}.$$

Tome $\lambda \in \Sigma_{a,\omega}$

$$\begin{aligned}
\left\|\Big(\lambda \;-\; \phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t\Big)^{-1}\right\| &= \left\|\Big(\lambda I_{\mathfrak{X}_0} \;-\; \phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t\Big)^{-1}\right\| \\
&= \left\|\Big(\phi_{-t} \circ \lambda I_{\mathfrak{X}_t} \circ \phi_t \;-\; \phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t\Big)^{-1}\right\| \\
&= \left\|\Big(\phi_{-t} \circ \big[\lambda I_{\mathfrak{X}_t} \;-\; A(t)\big] \circ \phi_t\Big)^{-1}\right\| \\
&= \left\|\phi_{-t} \circ (\lambda I_{\mathfrak{X}_t} \;-\; A(t))^{-1} \circ \phi_t\right\|. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Como pela hipótese $\Sigma_{a,\omega} \subset \rho(A(t))$ e o par $(\mathscr{X}, \Phi)$ é compatível e além disso $\lambda \in \Sigma_{a,\omega}$, então pela equação (3.21) $(\lambda - \phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t)^{-1}$ é um operador linear limitado em $\mathfrak{X}_0$ e

$$\begin{aligned}
\left\|\Big(\lambda \;-\; \phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t\Big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0)} &\leq \|\phi_{-t}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_t,\mathfrak{X}_0)} \left\|(\lambda I_{\mathfrak{X}_t} \;-\; A(t))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_t)} \|\phi_t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_t)} \\
&\leq c\frac{M}{|\lambda - a|}c \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Portanto, $\phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t$ é um operador linear fechado, densamente definido tal que, para algum ω em $(0, \pi/2)$ e algum $M_1 = c^2 M \geq 1$ e real a, o setor

$$\Sigma_{a,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \omega \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi,\; \lambda \neq a\}$$

está no conjunto resolvente de $\phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t$ e

$$\left\|\Big(\lambda \;-\; \phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t\Big)^{-1}\right\| \leq \frac{M_1}{|\lambda - a|}\,, \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{a,\omega}.$$

□

Existência, unicidade

Lembrando que $\mathscr{X} = \{(\mathfrak{X}_t, \|.\|_{\mathfrak{X}_t})\}_{t\in J}$ é uma família de espaços de Banach real ou complexo. E lembrando também que a família $\Phi = \{\phi_t\}_{t\in J} \subset \bigcup_{s\in J} \mathcal{L}_{is}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_s)$. Seja o par $(\mathscr{X}, \Phi)$ compatível.

Assumimos que $J = [0,T]$ para algum T fixo. A seguir, estamos preocupados com a existência e unicidade da solução do problema de Cauchy abstrato sobre $\mathscr{X}$.

$$\begin{cases} \partial_t^\bullet u(t) + A(t)u(t) &= f(t), \qquad t \in J,\ t \neq 0 \\ u(0) &= u_0, \qquad u_0 \in \mathfrak{X}_0 \end{cases} \tag{3.23}$$

onde $A(t) : \mathrm{dom}(A(t)) \subset \mathfrak{X}_t \to \mathfrak{X}_t$ é um operador linear e $f \in \mathcal{C}(J, \mathscr{X}, \Phi)$.

Enunciaremos os seguintes condições inspiradas na técnica utilizada por Hiroki Tanabe [39], e as noções de derivada material dadas por A. Alphonse, C.M. Elliott e B. Stinner [4]. Além disso, com a experiência que tivemos em demonstrar a Proposição 3.1 e o Lema 3.2 , consideremos $B(t) := \phi_{-t} \circ A(t) \circ \phi_t$ para ajudar na notação.

HIPÓTESE $\left(\boldsymbol{P}_1^\phi\right)$ A família $\mathscr{A} = \{A(t)\}_{t\in J}$ é setorial em $\mathscr{X}$, i.e. $A(t)$ é um operador setorial em $\mathfrak{X}_t$ para todo $t \in J$.
Mais precisamente, para cada $t \in J$, $A(t)$ é um operador linear fechado, densamente definido tal que, para algum ω em $(0, \pi/2)$ e algum $M \geq 1$ e real a, o setor

$$\Sigma_{a,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \omega \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi,\ \lambda \neq a\} \tag{3.24}$$

está no conjunto resolvente de $A(t)$ e

$$\left\|(\lambda - A(t))^{-1}\right\| \leq M/|\lambda - a| \ , \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{a,\omega}. \tag{3.25}$$

HIPÓTESE $\left(\boldsymbol{P}_2^\phi\right)$ O domínio $\phi_{-t}\Big(\mathrm{dom}\left(A(t)\right)\Big) = \mathfrak{D}$ de $B(t)$ é independente de t, e, consequentemente, $B(t) \circ B(\tau)^{-1}$ sendo um operador limitado, é uma função Hölder contínua de t na norma de $\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0)$. Em outras palavras, existem números positivos $\alpha \leq 1$ e k tais que

$$\left\| \left[B(t) - B(s)\right] \circ B(\tau)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0)} \leq k|t-s|^\alpha \tag{3.26}$$

é satisfeito para $t, s, \tau \in J$.

Teorema 3.1 (Silva, R.P. & Mamani, S.M.Q.)**.** Sob as hipóteses $\left(P_1^{\phi}\right)$, $\left(P_2^{\phi}\right)$ seja u_0 um elemento arbitrário de $\mathfrak{X}_0$ e uma função arbitrária $f : [0,\infty) \to \cup_{s\in J}\mathfrak{X}_s$ que satisfaz $f(t) \in \mathfrak{X}_t$, para todo $t \in J$, e além disso $\phi_{-(\cdot)}f(\cdot)$ é Hölder contínua em $s,t \in J$, i.e.

$$\|\phi_{-t}f(t) - \phi_{-s}f(s)\|_{\mathfrak{X}_0} \le c|t-s|^{\rho}, \quad c > 0,\ 0 < \rho \le 1. \tag{3.27}$$

Então a função u definida por $u(t) = \phi_t v(t)$ é a solução única de (3.23), onde v é solução de (3.16).

Demonstração. Como o par $(\mathscr{X},\Phi)$ é compatível, então pelo problema de Cauchy abstrato sobre $\mathscr{X}$, no sentido da derivada material obtém-se

$$\phi_{-t}\left[\partial_t^{\bullet}u(t)\right] + \phi_{-t}\left[A(t)u(t)\right] = \phi_{-t}\left[f(t)\right]. \tag{3.28}$$

Daqui,

$$\frac{d}{dt}\Big(\phi_{-t}u(t)\Big) + \phi_{-t}A(t)\phi_t\phi_{-t}u(t) = \phi_{-t}f(t) \tag{3.29}$$

E imediatamente, tem-se

$$\frac{d}{dt}\Big(\phi_{-t}u(t)\Big) + \Big[\phi_{-t}A(t)\phi_t\Big]\phi_{-t}u(t) = \phi_{-t}f(t) \tag{3.30}$$

Agora definamos, $v(t) := \phi_{-t}u(t), \quad B(t) := \phi_{-t}A(t)\phi_t$ e $g(t) := \phi_{-t}f(t)$

Assim, pela Proposição 3.1, basta provar a existência e unicidade do problema de Cauchy padrão

$$\left\{\begin{array}{rcll} dv(t)/dt + B(t)v(t) & = & g(t), & t \in J,\ t \neq 0 \\ v(0) & = & u_0, & u_0 \in \mathfrak{X}_0 \end{array}\right. \tag{3.31}$$

Como u_0 é um elemento arbitrário de $\mathfrak{X}_0$ e pela hipótese do Teorema g é uma função Hölder contínua em J, e além disso

- Pela hipótese $\left(P_1^{\phi}\right)$, $\{A(t)\}_{t\in J}$ é setorial em $\mathscr{X}$, então pelo Lema 3.2, $B(t)$ é um operador setorial em $\mathfrak{X}_0$ para todo $t \in J$.
- E pela hipótese $\left(P_2^{\phi}\right)$, o domínio $\phi_{-t}\Big(\mathrm{dom}A(t)\Big) = \mathfrak{D}$ de $B(t)$ é independente de t, e o operador $B(t)B(\tau)^{-1}$ é Hölder contínua em t na topologia uniforme dos operadores para cada fixo τ i.e.,

$$\|B(t)B(\tau)^{-1} - B(s)B(\tau)^{-1}\| \le k|t-s|^{\alpha}, \quad k > 0\ \ 0 < \alpha \le 1. \tag{3.32}$$

Então, pelo Teorema 2.3(Hiroki Tanabe [39], 1960) a função v definido por

$$v(t) = U_B(t,0)u_0 + \int_0^t U_B(t,s)g(s)\ ds \tag{3.33}$$

é a única solução de (3.31), onde $U_B(t,s)$ é a solução fundamental da equação homogênea associada ao problema de Cauchy padrão (3.31).

Portanto, como $v \in \mathcal{C}(J;\mathfrak{X}_0) \cap \mathcal{C}^1(J\setminus\{0\};\mathfrak{X}_0)$ é uma solução clássica do problema de Cauchy padrão (3.31), então pela Proposição 3.1

$$u(t) := \phi_t v(t) \in \mathcal{C}(J;\mathscr{X},\Phi) \cap \mathcal{C}(J\setminus\{0\};\mathscr{X},\Phi) \tag{3.34}$$

é uma solução clássica do problema de Cauchy (3.23) (no sentido da derivada material).

$\square$

Comportamento da solução quando $t \to \infty$

Assumimos que $J = [0,\infty)$. A seguir, estamos preocupados com o comportamento quando $t \to \infty$ de uma solução do problema de Cauchy abstrato (3.14) dada em $t \in J$. As HIPÓTESES $\left(P_1^\phi\right)$ e $\left(P_2^\phi\right)$ devem ser satisfeitas uniformemente em J.

Complementamos isto pelas HIPÓTESES abaixo:

HIPÓTESE $\left(\boldsymbol{P}_3^\phi\right)$ Existe um espaço de Banach $\mathfrak{X}_\infty$ e um isomorfismo linear $\phi_\infty \in \mathcal{L}_{is}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_\infty)$ tal que

$$\mathfrak{X}_t \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty \quad \text{no seguinte sentido} \tag{3.35}$$

Para cada $x_\infty \in \mathfrak{X}_\infty$ existe uma sequência (ou rede) $\{x_t\}_{t\in J}$, tal que $\lim\limits_{t\to\infty} \|x_t - \phi_t \circ \phi_{-\infty} x_\infty\|_{\mathfrak{X}_t} = 0$ ($\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \|\phi_{-t}x_t - \phi_{-\infty}x_\infty\|_{\mathfrak{X}_0} = 0$).

HIPÓTESE $\left(\boldsymbol{P}_4^\phi\right)$ $B(t)\circ B(s)^{-1}$ é uniformemente limitado, i.e.,

$$\sup_{t,s\in J} \|B(t)\circ B(s)^{-1}\| < \infty \tag{3.36}$$

e existe um operador fechado $A(\infty)$, tendo $\mathfrak{D}_\infty = \phi_\infty(\mathfrak{D})$ como seu domínio, tal que

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \left[B(t)\ -\ \phi_{-\infty}\circ A(\infty)\circ\phi_\infty\right] \circ A(0)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0)} = 0. \tag{3.37}$$

HIPÓTESE $\left(\boldsymbol{P}_5^{\phi}\right)$ A função $f : [0,+\infty) \longrightarrow \cup_{s\in J}\mathfrak{X}_s$ satisfaz que $f(t) \in \mathfrak{X}_t$, para todo $t \in J$, e além disso, $\phi_{-t}f(t)$ é Hölder contínua uniformemente em $t \in J$, isto é, existem $c > 0$ e $0 < \rho \leq 1$ tal que, para todo $t, s \in J$, temos

$$\|\phi_{-t}f(t) - \phi_{-s}f(s)\|_{\mathfrak{X}_0} \leq c|t-s|^{\rho}, \tag{3.38}$$

e também existe um elemento $f(\infty)$ de $\mathfrak{X}_\infty$ tal que

$$\|\phi_{-t}f(t) - \phi_{-\infty}f(\infty)\|_{\mathfrak{X}_0} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \to \infty. \tag{3.39}$$

Teorema 3.2 (Silva, R.P. & Mamani, S.M.Q.)**.** Seja a família de operadores $\mathscr{A} = \{A(t)\}_{t\in J}$ satisfazendo $\left(P_1^{\phi}\right)$, $\left(P_2^{\phi}\right)$ uniformemente em $J = [0,\infty)$. Adicionalmente assuma $\left(P_3^{\phi}\right)$, $\left(P_4^{\phi}\right)$ e $\left(P_5^{\phi}\right)$. Se $u(t)$ é a solução clássica do problema de Cauchy (3.23) (no sentido da derivada material), então existe um elemento $u(\infty) \in \mathfrak{X}_\infty$, independente de $x \in \mathfrak{X}_0$, tal que

$$\|\phi_{-t}u(t) - \phi_{-\infty}u(\infty)\|_{\mathfrak{X}_0} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \to \infty, \tag{3.40}$$

$$u(\infty) \in \operatorname{dom}(A(t)), \quad A(\infty)u(\infty) = f(\infty), \tag{3.41}$$

$$\|\partial_t^{\bullet} u(t)\|_{\mathfrak{X}_t} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \to \infty \tag{3.42}$$

e

$$\|\phi_{-t}A(t)u(t) - \phi_{-\infty}A(\infty)u(\infty)\|_{\mathfrak{X}_0} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \to \infty. \tag{3.43}$$

Demonstração. Como $u(t)$ é a solução clássica do problema de Cauchy (3.23) (no sentido da derivada material), então pela Proposição 3.1

$$v(\cdot) := \phi_{-(\cdot)}u(\cdot) \in \mathcal{C}(J;\mathfrak{X}_0) \cap \mathcal{C}^1(J\setminus\{0\};\mathfrak{X}_0) \tag{3.44}$$

é uma solução clássica do problema de Cauchy padrão

$$\begin{cases} dv(t)/dt + B(t)v(t) &= g(t), \qquad t \in J,\ t \neq 0 \\ v(0) &= u_0, \qquad u_0 \in \mathfrak{X}_0 \end{cases} \tag{3.45}$$

onde $B(t) := \phi_{-t}A(t)\phi_t$, $g(t) := \phi_{-t}(f(t))$, e além disso

- Pela hipótese $\left(P_1^{\phi}\right)$, $\{A(t)\}_{t\in J}$ é setorial em $\mathscr{X}$, então pelo Lema 3.2, $B(t)$ é um operador setorial em $\mathfrak{X}_0$ para todo $t \in J$.

- Pela hipótese $\left(P_2^\phi\right)$, o domínio $\phi_{-t}\left(\operatorname{dom} A(t)\right) = \mathfrak{D}$ de $B(t)$ é independente de t, e o operador $B(t) \circ B(\tau)^{-1}$ é Hölder contínua em t na topologia uniforme dos operadores para cada fixo τ i.e.,

$$\left\| B(t) \circ B(\tau)^{-1} - B(s) \circ B(\tau)^{-1} \right\| \leq k|t-s|^\alpha, \quad k > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{3.46}$$

- Pelas hipóteses $\left(P_3^\phi\right)$, $\left(P_4^\phi\right)$, $B(t) \circ B(s)^{-1}$ é uniformemente limitado e existe um operador fechado

$$B(\infty) := \phi_{-\infty} \circ A(\infty) \circ \phi_\infty \tag{3.47}$$

  com domínio $\mathfrak{D}$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \left[B(t) - B(\infty) \right] \circ B(0)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0)} = 0 \tag{3.48}$$

- Pelas hipóteses $\left(P_3^\phi\right)$, $\left(P_5^\phi\right)$ a função $g : [0,\infty) \to \mathfrak{X}_0$ é Hölder contínua uniformemente em $t \in J$, isto é, existe $c > 0$ e $0 < \rho \leq 1$ tal que, para todo $t, s \in J$, temos

$$\|g(t) - g(s)\|_{\mathfrak{X}_0} \leq c|t-s|^\rho, \tag{3.49}$$

  e também existe um elemento $g(\infty) := \phi_{-\infty} f(\infty)$ de $\mathfrak{X}_0$ tal que

$$\|g(t) - g(\infty)\|_{\mathfrak{X}_0} \longrightarrow 0 \qquad t \to \infty. \tag{3.50}$$

Então, pelo Teorema 2.5(Hiroki Tanabe [41], 1961), existe um elemento $v(\infty) \in \mathfrak{X}_0$, independente de $x \in \mathfrak{X}_0$, tal que

$$\|v(t) - v(\infty)\|_{\mathfrak{X}_0} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \to \infty, \tag{3.51}$$

$$v(\infty) \in \mathcal{D}, \quad B(\infty)v(\infty) = g(\infty), \tag{3.52}$$

$$\|dv(t)/dt\|_{\mathfrak{X}_0} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \to \infty \tag{3.53}$$

e

$$\|B(t)v(t) - B(\infty)v(\infty)\|_{\mathfrak{X}_0} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \to \infty. \tag{3.54}$$

Definamos $u(\infty) := \phi_\infty v(\infty)$, daqui $v(\infty) = \phi_{-\infty} u(\infty)$. E da equação (3.52), hipótese (P_4^ϕ), e da equação (3.47), obtemos

$$u(\infty) := \phi_\infty v(\infty) \in \phi_\infty(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}_\infty = \mathrm{dom} A(t) \tag{3.55}$$

e

$$\begin{aligned} B(\infty)v(\infty) &= g(\infty) \\ [\phi_{-\infty} A(\infty)\phi_\infty]\, \phi_{-\infty} u(\infty) &= \phi_{-\infty} f(\infty) \\ \phi_{-\infty} A(\infty) u(\infty) &= \phi_{-\infty} f(\infty) \\ A(\infty)u(\infty) &= f(\infty). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Por outro lado, da equação (3.53)

$$\left\| \partial_t^\bullet u(t) \right\|_{\mathfrak{X}_t} = \left\| \phi_t \left(\frac{d}{ds} \left(\phi_{-s} u(s) \right) \Big|_{s=t} \right) \right\|_{\mathfrak{X}_t} \leq \|\phi_t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_t)} \cdot \left\| \frac{d}{dt} \phi_{-t} u(t) \right\|_{\mathfrak{X}_0} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty. \tag{3.57}$$

Portanto, existe um elemento $u(\infty) \in \mathfrak{X}_\infty$ independente de $x \in \mathfrak{X}_0$, tal que

$$\|\phi_{-t} u(t) - \phi_{-\infty} u(\infty)\|_{\mathfrak{X}_0} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \to \infty, \tag{3.58}$$

$$u(\infty) \in \mathrm{dom}(A(t)), \quad A(\infty)u(\infty) = f(\infty), \tag{3.59}$$

$$\|\partial_t^\bullet u(t)\|_{\mathfrak{X}_t} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \to \infty \tag{3.60}$$

e

$$\|\phi_{-t} A(t) u(t) - \phi_{-\infty} A(\infty) u(\infty)\|_{\mathfrak{X}_0} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \to \infty. \tag{3.61}$$

□

3.2 Equação linear de reação-difusão em domínios não cilíndricos

Vamos considerar o comportamento assintótico da solução do sistema de reação-difusão colocada no domínio dependente do tempo

$$\begin{cases} du/dt + \nabla u \cdot V + u \operatorname{div} V - \Delta u + \gamma u &= f, \quad \text{em} \quad \cup_{t>0}\,\Omega_t \times \{t\}, \\ \partial u/\partial \nu_t &= 0, \quad \text{sobre} \quad \cup_{t>0}\,\partial\Omega_t \times \{t\}, \end{cases}$$

Seja Ω_0 um domínio suave em $\mathbb{R}^{m+n}$. Assuma-se que $\Omega_0 = \Omega_{\mathbb{X}} \times \Omega_{\mathbb{Y}}$, onde $\Omega_{\mathbb{X}}$ e $\Omega_{\mathbb{Y}}$ são domínios suaves em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Assuma-se que $\Omega_{\mathbb{Y}}$ é simplesmente conexo. Como sempre, denotemos por $(x,y) \in \Omega_{\mathbb{X}} \times \Omega_{\mathbb{Y}}$ um ponto arbitrário de Ω_0.
Defina

$$\begin{array}{rccl} V : & \Omega_0 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ & (x,y,t) & \longmapsto & V(x,y,t) := \left(0_{\mathbb{R}^m}, \dfrac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} y\right) \end{array}$$

onde a função $\varsigma : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ é uma função não-crescente de classe $\mathcal{C}^\infty$ satisfazendo:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \varsigma(0) = \varsigma_0 \ \text{ onde } \ \varsigma_0 \ \text{ é uma constante não nula.} \\ \text{ii.} & \varsigma(t) \to \varsigma_0 \ \text{ quando } \ t \to \infty \\ \text{iii.} & \dot{\varsigma}(t) = o(\varsigma(t)) \ \text{ quando } \ t \to \infty, \quad \text{i.e. } \dot{\varsigma}(t)/\varsigma(t) \to 0 \ \text{ quando } \ t \to \infty. \end{array} \tag{3.62}$$

Exemplos que podem dar uma ideia desta função são:

$$\varsigma(t) = \varsigma_0 \quad ; \quad \varsigma(t) = \varsigma_0 + e^{-t^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \varsigma(t) = \varsigma_0 + \frac{1}{t+1}$$

Portanto, dado $(x,y) \in \Omega_0$, o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X(t) &= V(X(t),t), \\ X(0) &= (x,y) \end{cases} \tag{3.63}$$

tem solução dada por $X(t) = \left(x\,,\ \dfrac{\varsigma(t)}{\varsigma_0}y\right)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}X(t) = \left(0_{\mathbb{R}^m}\,,\ \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma_0}y\right) &= \left(0_{\mathbb{R}^m}\,,\ \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\cdot\frac{\varsigma(t)y}{\varsigma_0}\right)\\
&= V\left(x\,,\ \frac{\varsigma(t)y}{\varsigma_0}\,,\ t\right)\\
&= V\left(X(t)\,,\ t\right).
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

Agora, defina-se $\Omega_t := \Omega_{\mathbb{X}} \times \varsigma(t)\Omega_{\mathbb{Y}}$, e vamos considerar o comportamento assintótico da solução do sistema de reação-difusão colocada no domínio dependente do tempo.

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
\Big[du/dt + \nabla u\cdot V + u\,\mathrm{div}V - \Delta u + \gamma u\Big]\big((\tilde{x},\tilde{y}),t\big) &=& f\big((\tilde{x},\tilde{y}),t\big), & \text{em} \quad \cup_{t>0}\,\Omega_t \times \{t\},\\
\partial u\big((\tilde{x},\tilde{y}),t\big)/\partial \nu_t &=& 0, & \text{sobre} \ \cup_{t>0}\,\partial\Omega_t \times \{t\},
\end{array}
\right.
\tag{3.65}
$$

onde ν_t denota o campo vetorial normal unitário para $\partial\Omega_t$ e $\gamma > 0$.

Para capturar o comportamento limitante da solução, enfatizamos o fato de que a família de domínio Ω_t se desintegre em um subconjunto de dimensões mais baixas quando $t \to \infty$. Para $t > 0$, seja μ_t a completação da medida produto $\mu_m \times \dfrac{\mu_n}{\varsigma(t)^n}$ em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, onde μ_N denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$, onde $N = m, n$.
Seja $\mathfrak{X}_t := L^2(\Omega_t;\mu_t)$, isto é, o espaço de Lebesgue $L^2(\Omega_t)$ munido com a norma

$$
\|u\|_{\mathfrak{X}_t} := \frac{1}{\varsigma(t)^{n/2}}\cdot\left[\int_{\Omega_t}|u|^2\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.66}
$$

A aplicação

$$
\begin{array}{rccc}
\psi_t: & \Omega_0 & \longrightarrow & \Omega_t\\
 & (x,y) & \longmapsto & (x,\varsigma(t)y)
\end{array}
$$

é claramente bijetora cuja inversa é

$$
\begin{array}{rccc}
\psi_{-t}\ : & \Omega_t & \longrightarrow & \Omega_0\\
 & (\tilde{x},\tilde{y}) & \longmapsto & \psi_{-t}(\tilde{x},\tilde{y}) := (\tilde{x},\varsigma(t)^{-1}\tilde{y}).
\end{array}
$$

Então, o operador linear

$$
\begin{array}{rccc}
\phi_t: & L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & \mathfrak{X}_t\\
 & u & \longmapsto & \phi_t u := u\circ\psi_{-t}
\end{array}
$$

é um isomorfismo cujo operador inverso $\phi_{-t} : \mathfrak{X}_t \longrightarrow L^2(\Omega_0)$ é dado por $\phi_{-t}u := u \circ \psi_t$. Portanto, denotando por $\mathfrak{X}_0$ o espaço de Lebesgue $L^2(\Omega_0)$ segue diretamente do Teorema da Mudança de Variável que $\phi_t : \mathfrak{X}_0 \longrightarrow \mathfrak{X}_t$ é uma isometria.

De fato,

$$\begin{aligned}
\|\phi_t u\|^2_{\mathfrak{X}_t} = \int_{\Omega_t} |\phi_t u|^2 \; d\mu_t &= \int_{\Omega_t} |u \circ \psi_{-t}|^2 \; d\mu_t \\
&= \int_{\psi_t(\omega_0)} |u \circ \psi_{-t}|^2 \; d\mu_t \\
&= \int_{\Omega_0} |u \circ \psi_{-t}|^2 \circ \psi_t \operatorname{Jac} \psi_t \; d\mu_t \\
&= \int_{\Omega_0} |u|^2 \; d\mu, \quad \text{pois } \mu_t = \frac{1}{\varsigma(t)^n}\mu \\
&= \|u\|^2_{L^2(\Omega_0)}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Acima, na primeira igualdade, utiliza-se a definição da norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}_t}$. Na segunda igualdade, usa-se a definição de ϕ_t. E na quarta igualdade, utiliza-se o Teorema da Mudança de Variável. Portanto, ϕ_t é uma isometria de $\mathfrak{X}_0$ a $\mathfrak{X}_t$, para todo $t \in J$.
Além disso, $u \in H^1(\Omega_0)$ se, e somente se, $\phi_t u \in H^1(\Omega_t)$ e os gradientes são relacionados por

$$\nabla(\phi_t u)(\cdot) = D\psi_{-t}(\cdot)^* \nabla u(\psi_{-t}(\cdot)), \quad q.s. \text{ em } \Omega_t, \tag{3.68}$$

onde $*$ denota a matriz adjunta, isto é,

$$\nabla(\phi_t u)(x,y) = \left(\nabla_x u(x, \, \varsigma(t)^{-1}y), \;\; \varsigma(t)^{-1}\nabla_y u(x, \, \varsigma(t)^{-1}y)\right), \qquad \text{para } q.s. \quad (x,y) \in \Omega_t. \tag{3.69}$$

Condições de Contorno: Para $w \in \partial\Omega_t$, seja $z = \psi_{-t}w \in \partial\Omega_0$. Então, $D\psi_{-t}(w)$ é um isomorfismo em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ que transforma o plano tangente $T_w(\partial\Omega_t)$ no plano tangente $T_z(\partial\Omega_0)$. Além disso, se $\nu(w)$ é um vetor normal exterior a $\partial\Omega_t$ em w então

$$\eta(z) := D\psi_t(z)^* \nu(w), \tag{3.70}$$

é um vetor nomal exterior a $\partial\Omega_0$ em z.
De fato,

$$D\psi_t : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

Dado $\theta_z \in T_z\big(\partial\Omega_0\big)$, então $D\psi_t\big(\theta_z\big) \in T_\omega\big(\partial\Omega_t\big)$

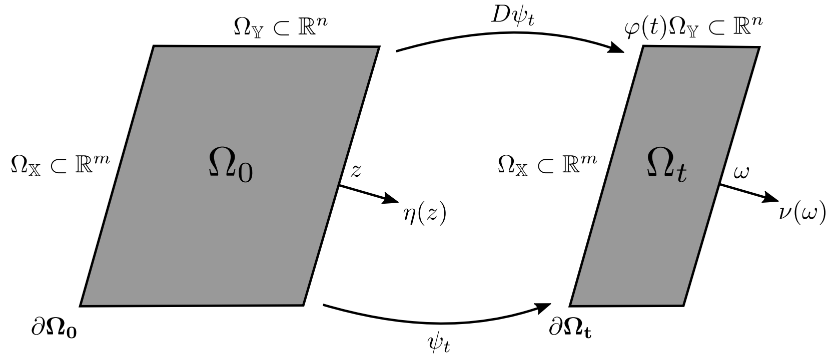

Figura 3.1 Relação entre vetores normais externos

$$\Big\langle \eta(z) \ , \ \theta_z \Big\rangle_{\mathbb{R}^{m+n}} = 0 \tag{3.71}$$

Também,

$$\Big\langle \nu(\omega) \ \ , \ \ D\psi_t\big(\theta_z\big) \Big\rangle_{\mathbb{R}^{m+n}} = 0$$

E como $\langle \cdot \ , \ \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{m+n}}$ é o produto interno no espaço Euclideano $\mathbb{R}^{m+n}$, e $[D\psi_t]^*$ representa a transposta da matriz gradiente de ψ_t, então

$$\Big\langle \big(D\psi_t\big)^* \cdot \nu(\omega) \ \ , \ \ \theta_z \Big\rangle_{\mathbb{R}^{m+n}} = 0 \tag{3.72}$$

Das equações (3.71), (3.72) obtém-se que $\eta(z)$ é paralelo a $\big(D\psi_t\big)^*\nu(\omega)$
Tome

$$\eta(z) = \big(D\psi_t\big)^*\nu(\omega) \tag{3.73}$$

Definindo a variável sendo $v := \phi_{-t}u$, iniciamos a mudança de variável da equação de reação-difusão (3.65) para uma equação equivalente onde o domínio não dependa do tempo. E considerando, $u(\cdot,t)(\tilde{x},\tilde{y}) := u(\tilde{x},\tilde{y},t)$ e $v(\cdot,t)(x,y) := v(x,y,t)$ obtém-se que

$$v(\cdot,t) := \phi_{-t}\big[u(\cdot,t)\big].$$

Devido à definição da aplicação ϕ_{-t}, tem-se $v(\cdot,t) = u(\cdot,t) \circ \psi_t$. Daqui, aplicando a função inversa de ψ_t a ambos lados, pelo lado direito, tem-se,

$$u(\cdot,t) = v(\cdot,t) \circ \psi_{-t}$$

Então, $\big[u(\cdot,t)\big](\tilde{x},\tilde{y}) = \big[v(\cdot,t) \circ \psi_{-t}\big](\tilde{x},\tilde{y})$. E agora utilizando a definição da aplicação ψ_t, consegue-se

$$u(\cdot,t)(\tilde{x},\tilde{y}) = \big[v(\cdot,t)\big](\tilde{x},[\varsigma(t)]^{-1}\tilde{y}).$$

Portanto,

$$u(\tilde{x},\tilde{y},t) = v(x,y,t), \quad \text{onde} \quad x = \tilde{x} \ \text{ e } \ y = [\varsigma(t)]^{-1}\tilde{y} \tag{3.74}$$

Afirmação 1.- $u_t(\tilde{x},\tilde{y},t) = v_t(x,y,t) - \dfrac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\Big\langle \nabla_y v(x,y,t)\ ,\ y\Big\rangle_{\mathbb{R}^n}$.

De fato, sendo, $u(\tilde{x},\tilde{y},t) = v(x,y,t)$, onde $x = \tilde{x}$ e $y = [\varsigma(t)]^{-1}\tilde{y}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(\tilde{x},\tilde{y},t) &= \frac{\partial v}{\partial t}(x,y,t) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial v}{\partial x_i}(x,y,t)\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_j}(x,y,t)\cdot\frac{\partial y_j}{\partial t} \\
&= \frac{\partial v}{\partial t}(x,y,t) + 0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_j}(x,y,t)\cdot\left(-\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)^2}\tilde{y}_j\right) \quad \text{pois} \quad y_j = [\varsigma(t)]^{-1}\tilde{y}_j \\
&= \frac{\partial v}{\partial t}(x,y,t) - \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_j}(x,y,t)\cdot\frac{\tilde{y}_j}{\varsigma(t)} \\
&= \frac{\partial v}{\partial t}(x,y,t) - \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_j}(x,y,t)\cdot y_j \quad \text{pois} \quad y_j = [\varsigma(t)]^{-1}\tilde{y}_j \\
&= \frac{\partial v}{\partial t}(x,y,t) - \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\Big\langle \nabla_y v(x,y,t)\ ,\ y\Big\rangle_{\mathbb{R}^n}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Afirmação 2.- $\nabla u = \left(\nabla_x v\ ,\ \dfrac{1}{\varsigma(t)}\cdot\nabla_y v\right)$.

De fato, sendo, $u(\tilde{x},\tilde{y},t) = v(x,y,t)$, onde $x = \tilde{x}$ e $y = [\varsigma(t)]^{-1}\tilde{y}$

Então, $\dfrac{\partial u}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x},\tilde{y},t) = \dfrac{\partial v}{\partial x_i}(x,y,t)\cdot\dfrac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_i} = \dfrac{\partial v}{\partial x_i}(x,y,t)$.

Imediatamente vemos que

$$\nabla_{\tilde{x}} u(\tilde{x},\tilde{y},t) = \nabla_x v(x,y,t).$$

Por outro lado, $\dfrac{\partial u}{\partial \tilde{y}_j}(\tilde{x},\tilde{y},t) = \dfrac{\partial v}{\partial y_j}(x,y,t)\cdot\dfrac{\partial}{\partial \tilde{y}_j}\left([\varsigma(t)]^{-1}\tilde{y}_j\right) = \dfrac{\partial v}{\partial y_j}(x,y,t)\cdot[\varsigma(t)]^{-1}$.

Segue que

$$\nabla_{\tilde{y}} u(\tilde{x},\tilde{y},t) = [\varsigma(t)]^{-1}\nabla_y v(x,y,t).$$

Daqui,

$$\nabla u(\tilde{x},\tilde{y},t) = \Big(\nabla_{\tilde{x}} u(\tilde{x},\tilde{y},t)\ ,\ \nabla_{\tilde{y}} u(\tilde{x},\tilde{y},t)\Big) = \Big(\nabla_x v(x,y,t)\ ,\ [\varsigma(t)]^{-1}\cdot\nabla_y v(x,y,t)\Big). \tag{3.76}$$

E, como consequência também temos que

$$\Delta u(\tilde{x},\tilde{y},t) = \Delta_x v(x,y,t) + \frac{1}{[\varsigma(t)]^2}\Delta_y v(x,y,t). \tag{3.77}$$

Agora, utilizando a definição da aplicação de V, vamos examinar $V(\tilde{x},\tilde{y},t)$.

$$
\begin{aligned}
V(\tilde{x},\tilde{y},t) &= V\Big(x\ ,\ \varsigma(t)y\ ,\ t\Big) \\
&= \left(0_{\mathbb{R}^m}\ ,\ \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\cdot\varsigma(t)y\right) \\
&= \Big(0_{\mathbb{R}^m}\ ,\ \dot{\varsigma}(t)y\Big),
\end{aligned}
$$

o que nos leva a expressar o segundo termo da equação (3.65) na nova variável $v(x,y,t)$

$$
\begin{aligned}
\nabla u(\tilde{x},\tilde{y},t)\cdot V(\tilde{x},\tilde{y},t) &= \Big(\nabla_x v(x,y,t)\ ,\ [\varsigma(t)]^{-1}\cdot\nabla_y v(x,y,t)\Big)\cdot\big(0_{\mathbb{R}^m}\ ,\ \dot{\varsigma}(t)y\big) \\
&= \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\Big\langle\nabla_y v(x,y,t)\ ,\ y\Big\rangle_{\mathbb{R}^n}
\end{aligned}
\tag{3.78}
$$

Afirmação 3.- $u\cdot\operatorname{div}V = n\cdot\dfrac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}v$.
De fato, é claro que pela definição de $v := \phi_{-t}u$, obtém-se, $u(\tilde{x},\tilde{y},t) = v(x,y,t)$. E lembrando que $V(\tilde{x},\tilde{y},t) = (0,\dot{\varsigma}(t)y)$. Também podemos expandir $V(\tilde{x},\tilde{y},t)$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
V(\tilde{x},\tilde{y},t) &= (0_{\mathbb{R}^m},\dot{\varsigma}(t)y) \\
&= (0_{\mathbb{R}^m},\dot{\varsigma}(t)\,[\varsigma(t)]^{-1}\,\tilde{y}) \\
&= \left(0_{\mathbb{R}^m},\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\tilde{y}\right) \\
&= \left(0,\cdots,0,\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\tilde{y}_1,\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\tilde{y}_2,\cdots,\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\tilde{y}_n\right).
\end{aligned}
$$

Assim, $\operatorname{div}V(\tilde{x},\tilde{y},t) = \underbrace{0+\cdots+0}_{m-\text{vezes}}+\underbrace{\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}+\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}+\cdots+\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}}_{n-\text{vezes}}.$

Ou seja,

$$
\operatorname{div}V(\tilde{x},\tilde{y},t) = n\cdot\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}.
$$

Portanto,

$$
u(\tilde{x},\tilde{y},t)\cdot\operatorname{div}V(\tilde{x},\tilde{y},t) = n\cdot\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}v(x,y,t) \tag{3.79}
$$

Definindo, $\hat{f}(x,y,t) := f(\tilde{x},\tilde{y},t)$, onde $\tilde{x}=x$ e $\tilde{y}=\varsigma(t)y$ e substituindo as equações (3.75), (3.78), (3.79), (3.77) e (3.74) simultaneamente na equação principal (3.65), obtém-se

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t}(x,y,t)-\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\Big\langle \nabla_y v(x,y,t)\ ,\ y\Big\rangle_{\mathbb{R}^m}\right]+\left[\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\Big\langle \nabla_y v(x,y,t)\ ,\ y\Big\rangle_{\mathbb{R}^m}\right]+\left[n\cdot\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}v(x,y,t)\right]$$
$$-\left[\Delta_x v(x,y,t)+\frac{1}{[\varsigma(t)]^2}\Delta_y v(x,y,t)\right]+\gamma v(x,y,t)=\hat{f}(x,y,t)\quad \text{em}\quad \Omega_0\times(0,\infty).$$

Então,

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t}+n\cdot\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}v-\Delta_x v-\frac{1}{[\varsigma(t)]^2}\Delta_y v+\gamma v\right](x,y,t)=\hat{f}(x,y,t)\quad \text{em}\quad \Omega_0\times(0,\infty). \tag{3.80}$$

Por outro lado, nos dedicaremos fazer a mudança de variável da condição de contorno tipo Neumann da nossa equação principal, (3.65), para alguma equação equivalente no domínio fixo. Lembrando a equação em questão, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_t}(\tilde{x},\tilde{y},t)=0$ sobre $\bigcup\limits_{t>0}\partial\Omega_t\times\{t\}$, onde ν_t denota o campo vetorial normal unitário para $\partial\Omega_t$

De fato, Como, $\psi_{-t}(x,y)=(x,\varsigma(t)^{-1}y)$, a matriz do gradiente de ψ_{-t} é

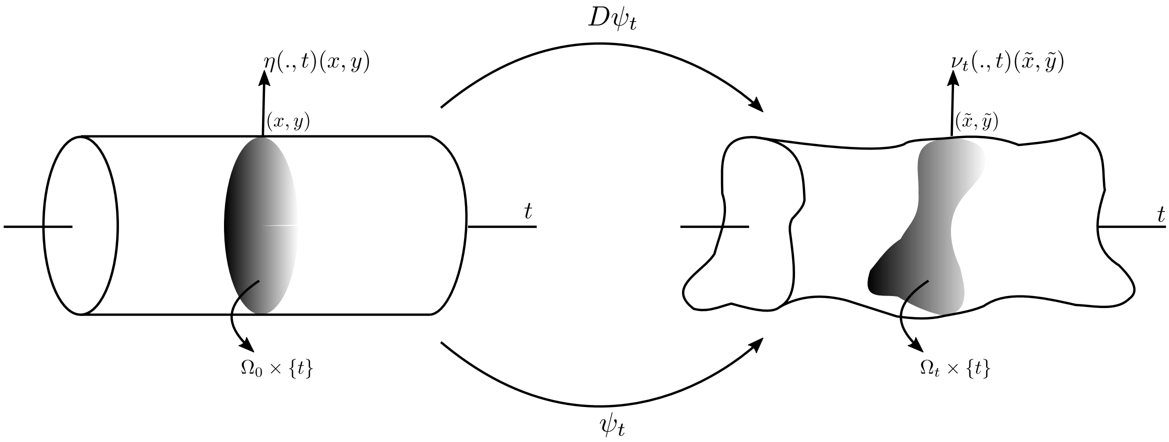

Figura 3.2 Mudança de variável para condição de Neumann

$$D\psi_{-t}(x,y)=\begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times n}\\ 0_{n\times m} & [\varsigma(t)]^{-1}I_{n\times n}\end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)} \tag{3.81}$$

e já que $\psi_t(x,y)=(x,\varsigma(t)y)$, a matriz do gradiente de ψ_t é

$$D\psi_t(x,y)=\begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times n}\\ 0_{n\times m} & \varsigma(t)I_{n\times n}\end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)} \tag{3.82}$$

Daqui, $[D\psi_t]^* = [D\psi_t]$, onde $*$ representa a transposta da matriz. E agora, pela relação entre campos vetoriais normais na equação (3.73) obtém-se $\eta(\cdot,t)(x,y) = [D\psi_t(x,y)]\,\nu_t(\cdot,t)(\tilde{x},\tilde{y})$. Ou seja, $\nu_t(\cdot,t)(\tilde{x},\tilde{y}) = [D\psi_t(x,y)]^{-1}\,\eta(\cdot,t)(x,y)$. E pelo Teorema da Função Inversa A.2

$$\nu_t(\cdot,t)(\tilde{x},\tilde{y}) = [D\psi_{-t}(\tilde{x},\tilde{y})]\,\eta(\cdot,t)(x,y) \tag{3.83}$$

Substituindo a equação (3.81) na equação (3.83), tem-se

$$\begin{aligned}
\nu_t(\tilde{x},\tilde{y},t) = \nu_t(\cdot,t)(\tilde{x},\tilde{y}) &= \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & [\varsigma(t)]^{-1} I_{n\times n} \end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)} \cdot \begin{bmatrix} \eta_x(\cdot,t)(x,y) \\ \eta_y(\cdot,t)(x,y) \end{bmatrix}_{(m+n)\times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \eta_x(\cdot,t)(x,y) \\ \varsigma(t)^{-1}\eta_y(\cdot,t)(x,y) \end{bmatrix}_{(m+n)\times 1} \\
&\equiv \begin{bmatrix} \eta_x(\cdot,t)(x,y) & \varsigma(t)^{-1}\eta_y(\cdot,t)(x,y) \end{bmatrix}_{1\times(m+n)}.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Continuando com a mudança de variável no contorno do domínio não cilíndrico. Da equação (3.76), da afirmação 2 e da equação (3.84) resulta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \nu_t}(\tilde{x},\tilde{y},t) &= \Big\langle \nabla u(\tilde{x},\tilde{y},t)\,,\, \nu_t(\tilde{x},\tilde{y},t) \Big\rangle_{\mathbb{R}^{m+n}} \\
&= \Bigg\langle \Big(\nabla_x v(x,y,t)\,,\, \varsigma(t)^{-1}\nabla_y v(x,y,t) \Big)\ ,\ \Big(\eta_x(\cdot,t)(x.y)\,,\, \varsigma(t)^{-1}\eta_y(\cdot,t)(x,y) \Big) \Bigg\rangle_{\mathbb{R}^{m+n}} \\
&= \nabla_x v(x,y,t)\cdot \eta_x(x,y,t) + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\cdot \nabla_y v(x,y,t)\cdot \eta_y(x,y,t) \\
&= \left[\nabla_x v\cdot \eta_x + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\cdot \nabla_y v\cdot \eta_y \right](x,y,t).
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Portanto, a equação de reação-difusão (3.65) é equivalente à nova equação

$$\left\{ \begin{aligned}
v_t - \Delta_x v - \frac{1}{\varsigma(t)^2}\Delta_y v + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right) v &= \hat{f}, \quad \text{em} \quad \Omega_0\times(0,\infty), \\
\nabla_x v\cdot \eta_x + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y v\cdot \eta_y &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_0\times(0,\infty),
\end{aligned} \right. \tag{3.86}$$

onde $\hat{f}((x,y),\,t) := f((x,\varsigma(t)y),\ t) \quad (x,y)\in\Omega_0$, e $\eta = (\eta_x,\eta_y)$ denota o campo vetorial normal unitário para $\partial\Omega_0$.

Seja $H_t^1(\Omega_0)$ o espaço de Sobolev $H^1(\Omega_0)$ munido com a norma equivalente

$$\|u\|_{H_t^1(\Omega_0)} := \left[\int_{\Omega_0}\left(|\nabla_x u|^2 + \frac{1}{\varsigma(t)^2}|\nabla_y u|^2 + |u|^2\right)dxdy\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.87}$$

Segue diretamente do Teorema de Mudança da Variáveis que $\phi_t : H_t^1(\Omega_0) \longrightarrow H^1(\Omega_t;\mu_t)$ é também uma isometria.

Seja $b_t\ :\ H_t^1(\Omega_0)\times H_t^1(\Omega_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilinear definido como

$$b_t(u,v) := \int_{\Omega_0}\left[\nabla_x u\cdot\nabla_x v + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y u\cdot\nabla_y v + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)uv\right]dxdy, \tag{3.88}$$

Pelo Teorema de Lax-Milgram b_t gera o operador ilimitado $B(t) : \mathrm{dom}(B(t)) \subset \mathfrak{X}_0 \longrightarrow \mathfrak{X}_0$ pela identidade

$$(B(t)u,v) := b_t(u,v), \quad \forall v\in L^2(\Omega_0), \quad u\in \mathrm{dom}(B(t)), \tag{3.89}$$

onde $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno clássico em $L^2(\Omega_0)$. Pela regularidade de Ω_0, temos que $\mathrm{dom}B(t) := \{u\in H^2(\Omega_0)\ :\ \nabla_x u\cdot\eta_x + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y u\cdot\eta_y = 0\}$ onde $\eta = (\eta_x,\eta_y)$ denota o campo vetorial unitário para $\partial\Omega_0$ e $B(t)u = -\Delta_x u - \frac{1}{\varsigma(t)^2}\Delta_y u + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)u$, para todo $u\in\mathrm{dom}B(t)$.

Em fim, para garantir a existência e a unicidade da solução do problema,

$$\left\{\begin{array}{rcll} dv(t)/dt + B(t)v &=& \hat{f}, & \text{em} \quad \Omega_0\times(0,\infty),\\ \partial v/\partial\eta_x + \left(1/\varsigma(t)^2\right)\partial v/\partial\eta_y &=& 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega_0\times(0,\infty), \end{array}\right. \tag{3.90}$$

onde $\hat{f}((x,y),\,t) := f((x,\varsigma(t)y),\ t)\quad (x,y)\in\Omega_0$, e $\eta = (\eta_x,\eta_y)$ *denota o campo vetorial normal unitário para* $\partial\Omega_0$.

Temos o desafio de provar que a família de operadores lineares $\mathscr{B} = \{B(t)\}_{t>0}$ *satisfaça as seguintes HIPÓTESES:*

(P_1) A família $\mathscr{B} = \{B(t)\}_{t>0}$ é setorial em $\mathfrak{X}_0$, i.e. $B(t)$ é um operador setorial em $\mathfrak{X}_0$ para todo $t\in(0,\infty)$.

Mais precisamente, para cada $t\in(0,\infty)$, B(t) é um operador linear fechado, densamente definido tal que para algum ω em $(0,\pi/2)$ e algum $M\geq 1$ e real a, o setor

$$\Sigma_{a,\omega} = \{\lambda\in\mathbb{C}\ :\ \omega\leq|\arg(\lambda-a)|\leq\pi,\ \lambda\neq a\} \tag{3.91}$$

está no conjunto resolvente de $B(t)$ e

$$\left\|(\lambda - B(t))^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \ , \quad \text{para todo } \ \lambda \in \Sigma_{a,\omega}. \tag{3.92}$$

$(\boldsymbol{P}_2)$ $B(t)^{-1}$ é Hölder contínua em t no sentido de que

$$\|B(t) \circ \left[B(t)^{-1} - B(s)^{-1}\right] \| \leq k|t-s|^{\alpha} \quad \text{para} \quad s,t \in (0,\infty) \tag{3.93}$$

com algum expoente fixo $0 < \alpha \leq 1$ e alguma constante $k > 0$.

Proposição 3.2 (HIPÓTESE $(\boldsymbol{P}_1)$)**.** O operador linear $B(t) : \mathrm{dom}(B(t)) \subset L^2(\Omega_0) \to L^2(\Omega_0)$ sobre o espaço de Hilbert $L^2(\Omega_0)$ é um operador setorial.

Demonstração. Pelo Lema 1.3 no Capítulo 1, basta provar que $B(t)$ é um operador auto-adjunto densamente definido em um espaço de Hilbert e $B(t)$ é limitado inferiormente.

Afirmação 1 $B(t)$ é limitado inferiormente.
De fato,
Sem perda de generalidade, tome $u \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega}_0)$. Daqui pela definição de produto interno em $L^2(\Omega_0)$, tem-se

$$\langle B(t)u \ , \ u\rangle_{L^2(\Omega_0)} = \int_{\Omega_{\mathbb{X}} \times \Omega_{\mathbb{Y}}} B(t)u(x,y)u(x,y)d\mu_m \times d\mu_n$$

onde μ_m é a medida de Lebesgue $m-$dimensional, e μ_n é a medida de Lebesgue $n-$dimensional. Daqui, pela definição do operador linear $B(t)$ e simplificando a notação de $d\mu_m \times d\mu_n$ por apenas $d\mu$

$$\begin{aligned} \langle B(t)u \ , \ u\rangle_{L^2(\Omega_0)} &= \int_{\Omega_0} \left[-\Delta_x u - \frac{1}{\varsigma(t)^2}\Delta_y u + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right) u\right] u \, d\mu \\ &= -\int_{\Omega_0} u\Delta_x u \, d\mu - \frac{1}{\varsigma(t)^2}\int_{\Omega_0} u\Delta_y u \, d\mu + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)\int_{\Omega_0} u^2 \, d\mu. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Agora como no primeiro e no segundo termo no lado direito da equação (3.94) $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}_0)$, então pela Fórmula de Green, página 712 em [12]

$$\begin{aligned}
\langle B(t)u\,,\,u\rangle_{L^2(\Omega_0)} &= \left[\int_{\Omega_0}\nabla_x u\cdot\nabla_x u\,d\mu-\int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial u}{\partial\eta_x}u\,dS\right]+\frac{1}{\varsigma(t)^2}\left[\int_{\Omega_0}\nabla_y u\cdot\nabla_y u\,d\mu-\int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial u}{\partial\eta_y}u\,dS\right]\\
&\quad+\left(\gamma+n\frac{\dot\varsigma(t)}{\varsigma(t)}\right)\int_{\Omega_0}u^2\,d\mu\\
&= \int_{\Omega_0}\left[|\nabla_x u|^2+\frac{1}{\varsigma(t)^2}|\nabla_y u|^2+\left(\gamma+n\frac{\dot\varsigma(t)}{\varsigma(t)}\right)u^2\right]d\mu-\int_{\partial\Omega_0}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta_x}+\frac{1}{\varsigma(t)^2}\frac{\partial u}{\partial\eta_y}\right]u\,dS
\end{aligned}$$

E como a função suave u também está no domínio de $B(t)$, ou seja $\dfrac{\partial u}{\partial\eta_x}+\dfrac{1}{\varsigma(t)^2}\dfrac{\partial u}{\partial\eta_y}=0$, então

$$\begin{aligned}
\langle B(t)u\,,\,u\rangle_{L^2(\Omega_0)} &= \int_{\Omega_0}\left[|\nabla_x u|^2+\frac{1}{\varsigma(t)^2}|\nabla_y u|^2+\left(\gamma+n\frac{\dot\varsigma(t)}{\varsigma(t)}\right)u^2\right]d\mu\\
&\geq \left(\gamma+n\frac{\dot\varsigma(t)}{\varsigma(t)}\right)\int_{\Omega_0}u^2\,d\mu.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle B(t)u\,,\,u\rangle_{L^2(\Omega_0)} \geq \left(\gamma+n\frac{\dot\varsigma(t)}{\varsigma(t)}\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega_0)} \tag{3.95}$$

Devido à condição (3.62) item ii., existe $t_0>0$ tal que $\gamma+n\dfrac{\dot\varsigma(t)}{\varsigma(t)}>0$ para $t>t_0$. Escolhemos $\gamma>0$ tal que

$$\gamma+n\frac{\dot\varsigma(t)}{\varsigma(t)}>0,\quad \text{para todo}\quad t>0$$

e

$$\inf_{t>0}\left(\gamma+n\frac{\dot\varsigma(t)}{\varsigma(t)}\right)>0.$$

Sendo,

$$c:=\inf_{t>0}\left(\gamma+n\frac{\dot\varsigma(t)}{\varsigma(t)}\right) \tag{3.96}$$

Substituindo a equação (3.96) na equação (3.95), obtém-se

$$\langle B(t)u\,,\,u\rangle_{L^2(\Omega_0)}\geq\left(\gamma+n\frac{\dot\varsigma(t)}{\varsigma(t)}\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega_0)}\geq c\|u\|^2_{L^2(\Omega_0)}.$$

Daqui, existe $c>0$ tal que

$$\langle B(t)u\,,\,u\rangle_{L^2(\Omega_0)}\geq c\|u\|^2_{L^2(\Omega_0)},\quad \text{para todo}\quad u\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_0). \tag{3.97}$$

Observando que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_0)$ é denso no $\mathrm{dom}(B(t))$ a desigualdade (3.97) é válida para todo $u \in \mathrm{dom}(B(t))$.

Afirmação 2 $B(t)$ é monótono maximal, i.e. $B(t)$ é monótono e $\mathrm{im}(I+B(t)) = L^2(\Omega_0)$.
De fato, como $B(t)$ é limitado inferiormente, então pela Definição 1.7 $B(t)$ é monótono.
A partir de agora provaremos a segunda parte desta afirmação, ou seja

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega_0),\ \ \exists u_\varphi \in \mathrm{dom}(B(t)) \ \text{ tal que } \ u_\varphi + B(t)u_\varphi = \varphi. \tag{3.98}$$

Dado $\varphi \in L^2(\Omega_0)$.
Basta provar que existe $u \in \mathrm{dom}(B(t))$ tal que $u + B(t)u = \varphi$. Assumindo no momento que u é realmente uma função suave, vamos multiplicar a EDP $\Big[I + B(t)\Big]u = \varphi$ por uma função suave v e integramos sobre Ω_0

$$\int_{\Omega_0} vu\,d\mu - \int_{\Omega_0} v\Delta_x u\,d\mu - \frac{1}{\varsigma(t)^2}\int_{\Omega} v\Delta_y u\,d\mu + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)\int_{\Omega_0} vu\,d\mu = \int_{\Omega_0} v\varphi\,d\mu \tag{3.99}$$

Agora como $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}_0)$ no segundo e terceiro termo no lado esquerdo, então pelas Fórmulas de Green, página 712 em [12]

$$\int_{\Omega_0} vu\,d\mu + \left[\int_{\Omega_0} \nabla_x u\cdot\nabla_x v\,d\mu - \int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial u}{\partial\eta_x}v\,dS\right] + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\left[\int_{\Omega_0}\nabla_y u\cdot\nabla_y v\,d\mu - \int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial u}{\partial\eta_y}v\,dS\right]$$
$$+\left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)\int_{\Omega_0} vu\,d\mu \ = \ \int_{\Omega_0} v\varphi\,d\mu.$$

Daqui,

$$\int_{\Omega_0}\left[\nabla_x u\cdot\nabla_x v + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y u\cdot\nabla_y v + uv + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)vu\right]d\mu - \int_{\partial\Omega_0}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta_x} + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\frac{\partial u}{\partial\eta_y}\right]v\,dS = \int_{\Omega_0} v\varphi\,d\mu \tag{3.100}$$

E como $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_0) \subset \mathrm{dom}(B(t))$, ou seja, $\dfrac{\partial u}{\partial\eta_x} + \dfrac{1}{\varsigma(t)^2}\dfrac{\partial u}{\partial\eta_y} = 0$, então

$$\int_{\Omega_0}\left[\nabla_x u\cdot\nabla_x v + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y u\cdot\nabla_y v + uv + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)vu\right]d\mu \ = \ \int_{\Omega_0} v\varphi\,d\mu \tag{3.101}$$

Por aproximação, encontramos que a mesma identidade (3.101) se mantém com a função suave v substituída por qualquer $v \in \mathrm{dom}(B(t))$. Escolhemos o espaço $H_t^1(\Omega_0)$ para incorporar a sua norma. Definamos a forma bilinear

$$\begin{array}{rcl} a_t : H_t^1(\Omega_0)\times H_t^1(\Omega_0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \displaystyle\int_{\Omega_0}\left[\nabla_x u\cdot\nabla_x v+\frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y u\cdot\nabla_y v+uv+\left(\gamma+n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)vu\right]\,d\mu \end{array}$$

E seja

$$\begin{array}{rcl} g : H_t^1(\Omega_0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \displaystyle\int_{\Omega_0} v\varphi\,d\mu \end{array}$$

<u>$a_t(u,v)$ *é coerciva*</u>
Dado $v\in H_t^1(\Omega_0)$

$$\begin{aligned} a_t(v,v) &= \int_{\Omega_0}\left[|\nabla_x v|^2+\frac{1}{\varsigma(t)^2}|\nabla_y v|^2+|v|^2+\left(\gamma+n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)|v|^2\right]\,d\mu \\ &\geq \int_{\Omega_0}\left[|\nabla_x v|^2+\frac{1}{\varsigma(t)^2}|\nabla_y v|^2+|v|^2\right]\,d\mu \\ &\geq \|v\|^2_{H_t^1(\Omega_0)}. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Assim, existe uma constante $\alpha=1$ tal que

$$a_t(v,v)\geq\alpha\|v\|^2_{H_t^1(\Omega_0)},\quad \text{para todo } v\in H_t^1(\Omega_0).$$

<u>$a_t(u,v)$ *é contínua*</u>
Dado $u,v\in H_t^1(\Omega_0)\hookrightarrow L^2(\Omega_0)$, e lembrando que $\mathfrak{X}_0=L^2(\Omega_0)$

$$\begin{aligned} |a_t(u,v)| &= \left|\int_{\Omega_0}\left[\nabla_x u\cdot\nabla_x v+\frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y u\cdot\nabla_y v+uv+\left(\gamma+n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)vu\right]\,d\mu\right| \\ &\leq \int_{\Omega_0}|\nabla_x u\cdot\nabla_x v|\,d\mu+\frac{1}{\varsigma(t)^2}\int_{\Omega_0}|\nabla_y u\cdot\nabla_y v|\,d\mu+\left[1+\left(\gamma+n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)\right]\int_{\Omega_0}|uv|\,d\mu \end{aligned} \tag{3.103}$$

E devido à desigualdade de Hölder, e devido ao fato que $\left(\gamma+n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)$ é limitada, pela constante M_1, tem-se

$$|a_t(u,v)|\leq\|\nabla_x u\|_{\mathfrak{X}_0}\|\nabla_x v\|_{\mathfrak{X}_0}+\frac{1}{\varsigma(t)^2}\|\nabla_y u\|_{\mathfrak{X}_0}\|\nabla_y v\|_{\mathfrak{X}_0}+(1+M_1)\|u\|_{\mathfrak{X}_0}\|v\|_{\mathfrak{X}_0}$$

E sendo a constante c_1 igual a $\max\{1, 1+M_1\}$, resulta

$$|a_t(u,v)| \leq c_1 \left[\|\nabla_x u\|_{\mathfrak{X}_0} \|\nabla_x v\|_{\mathfrak{X}_0} + \left(\frac{1}{\varsigma(t)} \|\nabla_y u\|_{\mathfrak{X}_0} \right) \left(\frac{1}{\varsigma(t)} \|\nabla_y v\|_{\mathfrak{X}_0} \right) + \|u\|_{\mathfrak{X}_0} \|v\|_{\mathfrak{X}_0} \right]$$

E como, $(ab+cd+ef) \leq (a+c+e)(b+d+f)$ para todo $a,b,c,d,e,f \geq 0$, e além disso, pela equivalência de normas no espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$, i.e. $|(a,b,c)|_S \leq M_2 |(a,b,c)|_E$, para todo $a,b,c > 0$, onde $|\cdot|_S$ é a norma da soma e $|\cdot|_E$ é a norma Euclideana, então

$$|a_t(u,v)| \leq c_1 \left[\|\nabla_x u\|^2_{\mathfrak{X}_0} + \frac{1}{\varsigma(t)} \|\nabla_y u\|^2_{\mathfrak{X}_0} + \|u\|^2_{\mathfrak{X}_0} \right]^{1/2} \left[\|\nabla_x v\|^2_{\mathfrak{X}_0} + \frac{1}{\varsigma(t)} \|\nabla_y v\|^2_{\mathfrak{X}_0} + \|v\|^2_{\mathfrak{X}_0} \right]^{1/2} \tag{3.104}$$

Daqui, pela definição da norma em $H^1_t(\Omega_0)$, obtém-se

$$|a_t(u,v)| \leq c_2 \|u\|_{H^1_t(\Omega_0)} \|v\|_{H^1_t(\Omega_0)}$$

E como $u,v \in H^1_t(\Omega_0)$ foram tomados arbitrários, conclui-se que existe uma constante c_2 tal que

$$|a_t(u,v)| \leq c_2 \|u\|_{H^1_t(\Omega_0)} \|v\|_{H^1_t(\Omega_0)} \quad \text{para todo } \; u,v \in H^1_t(\Omega_0). \tag{3.105}$$

g está bem definida

De fato, dado $v \in H^1_t(\Omega_0)$

$$|g(v)| = \left| \int_{\Omega_0} v\varphi \, d\mu \right| \leq \int_{\Omega_0} |v|.|\varphi| \, d\mu. \tag{3.106}$$

Devido à desigualdade de Hölder, tem-se

$$\int_{\Omega_0} |v||\varphi| \, d\mu \leq \|v\|_{L^2(\Omega_0)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)} \tag{3.107}$$

$g \in \left[H^1_t(\Omega_0)\right]'$

De fato, dado $v \in H^1_t(\Omega_0)$

Como $H^1_t(\Omega_0) \hookrightarrow L^2(\Omega_0)$, então existe uma constante positiva c tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega_0)} \leq c \|v\|_{H^1_t(\Omega_0)} \tag{3.108}$$

Da equação (3.107) em (3.106), obtém-se

$$|g(v)| \leq \|v\|_{L^2(\Omega_0)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}. \tag{3.109}$$

E imediatamente substituindo a equação (3.108) em (3.109), resulta

$$|g(v)| \leq \|v\|_{H_t^1(\Omega_0)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}$$

E como $v \in H_t^1(\Omega_0)$ foi tomado arbitrariamente e φ é uma função fixada em $L^2(\Omega_0)$, então

$$|g(v)| \leq c_1 \|v\|_{H_t^1(\Omega_0)}, \quad \text{para todo } \ v \in H_t^1(\Omega_0) \tag{3.110}$$

Devido à linearidade de g e a equação (3.110), obtém-se que $g \in \left[H_t^1(\Omega_0)\right]'$.

Finalmente, como $a_t(u,v)$ é uma forma bilinear, contínua, coerciva em $H_t^1(\Omega_0)$ e além disso $\varphi \in \left[H_t^1(\Omega_0)\right]'$, então pelo Teorema de Lax-Milgram, página 140 em [5] existe um único elemento $u_\varphi \in H_t^1(\Omega_0)$ tal que

$$a_t(u_\varphi, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \text{para todo } \ v \in H_t^1(\Omega_0) \tag{3.111}$$

O que conclui a prova de $I + B(t)$ ser sobrejetora.

Observação 3.4. É importante observar: Devido a que $B(t) : \text{dom}(B(t)) \subset L^2(\Omega_0) \to L^2(\Omega_0)$ é um operador monótono maximal, então pela Proposição 1.1 $\text{dom}B(t)$ é denso em $L^2(\Omega_0)$.

Afirmação 3 $B(t)$ é simétrica.
De fato, sem perda de generalidade, tome $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_0)$. Devido à definição do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega_0)}$ sobre $L^2(\Omega_0)$

$$\langle B(t)u \ , \ v \rangle_{L^2(\Omega_0)} = \int_\Omega B(t)uv \, d\mu$$

Daqui, pela definição do operador $B(t)$

$$\begin{aligned}
\langle B(t)u \ , \ v \rangle_{L^2(\Omega_0)} &= \int_{\Omega_0} \left[-\Delta_x u - \frac{1}{\varsigma(t)^2} \Delta_y u + \left(\gamma + n \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} \right) u \right] v \, d\mu \\
&= -\int_{\Omega_0} v \Delta_x u \, d\mu - \frac{1}{\varsigma(t)^2} \int_{\Omega_0} v \Delta_y u \, d\mu + \left(\gamma + n \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} \right) \int_{\Omega_0} vu \, d\mu.
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Agora como $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}_0)$ no primeiro e segundo termo no lado direito da equação (3.112),então pelas Fórmulas de Green, página 712 em [12]

$$\begin{aligned}
\langle B(t)u\,,\,v\rangle_{L^2(\Omega_0)} &= \left[\int_{\Omega_0}\nabla_x u\cdot\nabla_x v\,d\mu - \int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial u}{\partial\eta_x}v\,dS\right] + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\left[\int_{\Omega_0}\nabla_y u\cdot\nabla_y v\,d\mu - \int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial u}{\partial\eta_y}v\,dS\right]\\
&\quad + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)\int_{\Omega_0} vu\,d\mu\\
&= \int_{\Omega_0}\left[\nabla_x u\cdot\nabla_x v + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y u\cdot\nabla_y v + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)vu\right]\,d\mu - \int_{\partial\Omega_0}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta_x} + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\frac{\partial u}{\partial\eta_y}\right]v\,dS.
\end{aligned}$$

E como as funções suaves são densas no domínio do operador $B(t)$, então a função suave u também está no domínio do operador $B(t)$, ou seja, $\dfrac{\partial u}{\partial\eta_x} + \dfrac{1}{\varsigma(t)^2}\dfrac{\partial u}{\partial\eta_y} = 0$, isto implica que

$$\langle B(t)u\,,\,v\rangle_{L^2(\Omega_0)} = \int_{\Omega_0}\left[\nabla_x u\cdot\nabla_x v + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y u\cdot\nabla_y v + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)vu\right]\,d\mu. \tag{3.113}$$

Observando que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_0)$ é denso no $\mathrm{dom}(B(t))$, a igualdade (3.113) é válida para todo $u,v\in\mathrm{dom}(B(t))$.

Por outro lado, também devido à definição do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega_0)}$ e a definição de $B(t)$ obtém-se

$$\begin{aligned}
\langle u\,,\,B(t)v\rangle_{L^2(\Omega_0)} &= \int_{\Omega_0} uB(t)v\,d\mu\\
&= \int_{\Omega_0} u\left[-\Delta_x u - \frac{1}{\varsigma(t)^2}\Delta_y u + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)u\right]\,d\mu\\
&= -\int_{\Omega_0} u\Delta_x v\,d\mu - \frac{1}{\varsigma(t)^2}\int_{\Omega_0} u\Delta_y v\,d\mu + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)\int_{\Omega_0} uv\,d\mu.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

E já que $u,v\in\mathcal{C}^2(\overline{\Omega}_0)$ no primeiro e segundo termos no lado direito da equação (3.114), então pelas Fórmulas de Green, página 712 em [12]

$$\begin{aligned}
\langle u\,,\,B(t)v\rangle_{L^2(\Omega_0)} &= \left[\int_{\Omega_0}\nabla_x v\cdot\nabla_x u\,d\mu - \int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial v}{\partial\eta_x}u\,dS\right] + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\left[\int_{\Omega_0}\nabla_y v\cdot\nabla_y u\,d\mu - \int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial v}{\partial\eta_y}u\,dS\right]\\
&\quad + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)\int_{\Omega_0} uv\,d\mu\\
&= \int_{\Omega_0}\left[\nabla_x v\cdot\nabla_x u + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y v\cdot\nabla_y u + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)uv\right]\,d\mu - \int_{\partial\Omega_0}\left[\frac{\partial v}{\partial\eta_x} + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\frac{\partial v}{\partial\eta_y}\right]u\,dS.
\end{aligned}$$

E como as funções suaves são densas no domínio do operador $B(t)$, então a função suave v também está no domínio do operador $B(t)$, ou seja, $\dfrac{\partial v}{\partial \eta_x} + \dfrac{1}{\varsigma(t)^2}\dfrac{\partial v}{\partial \eta_y} = 0$, o que implica que

$$\langle u\ ,\ B(t)v\rangle_{L^2(\Omega_0)} = \int_{\Omega_0}\left[\nabla_x v\cdot\nabla_x u + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y v\cdot\nabla_y u + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)uv\right]\,d\mu \tag{3.115}$$

Observando que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_0)$ é denso no $\mathrm{dom}(B(t))$ a igualdade (3.115) é válida para todo $u, v \in \mathrm{dom}(B(t))$.
Comparando as equações (3.113) e (3.115), obtém-se

$$\langle B(t)u\ ,\ v\rangle_{L^2(\Omega_0)} = \langle u\ ,\ B(t)v\rangle_{L^2(\Omega_0)}, \quad \text{para todo } u, v \in \mathrm{dom}(B(t)). \tag{3.116}$$

Como $L^2(\Omega_0)$ é um espaço de Hilbert e $B(t)$ é um operador monótono maximal, simétrico então pela Proposição 1.2, $B(t)$ é um operador auto-adjunto.

Finalmente, já que $B(t)$ é um operador auto-adjunto e além disso, $B(t)$ é limitada inferiormente, então pelo Lema 1.3 no capítulo 1, $B(t)$ é um operador setorial.

□

Mais precisamente, lembrando a Definição 1.9.
Como o operador linear $B(t)$ é setorial significa que:
B(t) é um operador linear fechado, densamente definido tal que para algum ω em $(0, \pi/2)$ e algum $M \geq 1$ e real a, o setor

$$\Sigma_{a,\omega} = \{\lambda\ :\ \omega \leq |\arg(\lambda - a)| < \pi,\ \lambda \neq a\} \tag{3.117}$$

está contido no conjunto resolvente de $B(t)$ e

$$\left\|(\lambda - B(t))^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}\ , \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{a,\omega}. \tag{3.118}$$

Concluímos, já que $B(t)$ é um operador setorial então pelo Teorema 1.7 no capítulo 1 $-B(t)$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico

$$\left\{e^{-[B(t)]s}\right\}_{s\geq 0}, \quad \text{onde} \tag{3.119}$$

$$e^{-[B(t)]s} := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda + B(t))^{-1}.e^{\lambda s}\,d\lambda, \tag{3.120}$$

onde Γ é um contorno em $\rho(-B(t))$ com $\arg\lambda \to \pm\theta$ quando $|\lambda| \to \infty$ para algum θ em $(\pi/2, \pi)$.
Além disso, $e^{-[B(t)]s}$ pode continuar analíticamente em um setor $\{t \neq 0 \,:\, |\arg t| < \varepsilon\}$ contendo o eixo real positivo, e se Re $\sigma(B(t)) > a$, i.e., se Re $\lambda > a$ sempre que $\lambda \in \sigma(B(t))$, então para $s > 0$

$$\left\| e^{-[B(t)]s} \right\| \leq c e^{-as} \quad , \quad \left\| B(t) e^{-[B(t)]s} \right\| \leq \frac{c}{s} e^{-as} \tag{3.121}$$

para alguma constante c.
Finalmente,

$$\frac{d}{ds} e^{-[B(t)]s} = -B(t) e^{-[B(t)]s}, \quad \text{para } s > 0. \tag{3.122}$$

Por outra parte, escolhemos o espaço $H_t^1(\Omega_0)$ para incorporar a sua norma. E definamos a forma bilinear associada a nosso operador $B(t)$

$$\begin{array}{rcl} b_t \ : \ H_t^1(\Omega_0) \times H_t^1(\Omega_0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \displaystyle\int_{\Omega_0} \left[\nabla_x u \cdot \nabla_x v + \frac{1}{\varsigma(t)^2} \nabla_y u \cdot \nabla_y v + \left(\gamma + n \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} \right) vu \right] d\mu \end{array}$$

<u>*$b_t(u,v)$ é coerciva*</u>
Dado $v \in H_t^1(\Omega_0)$

$$b_t(v,v) \ = \ \int_{\Omega_0} \left[|\nabla_x v|^2 + \frac{1}{\varsigma(t)^2} |\nabla_y v|^2 + \left(\gamma + n \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} \right) |v|^2 \right] d\mu$$

Então pela equação (3.96) da afirmação 1,

$$b_t(v,v) \ \geq \ \int_{\Omega_0} \left[|\nabla_x v|^2 + \frac{1}{\varsigma(t)^2} |\nabla_y v|^2 + c|v|^2 \right] d\mu$$

Imediatamente vemos que, $b_t(v,v) \ \geq \ \min\{1,c\} \displaystyle\int_{\Omega_0} \left[|\nabla_x v|^2 + \frac{1}{\varsigma(t)^2} |\nabla_y v|^2 + |v|^2 \right] d\mu$
Daqui pela definição da norma em $H_t^1(\Omega_0)$ obtém-se

$$b_t(v,v) \ \geq \ \min\{1,c\} \|v\|^2_{H_t^1(\Omega_0)}$$

Assim, existe uma constante $\alpha = \min\{1,c\}$ tal que

$$b_t(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{H_t^1(\Omega_0)}, \quad \text{para todo } v \in H_t^1(\Omega_0).$$

$b_t(u,v)$ é contínua

Dado $u,v \in H_t^1(\Omega_0) \hookrightarrow L^2(\Omega_0)$, e lembrando que $\mathfrak{X}_0 = L^2(\Omega_0)$

$$|b_t(u,v)| = \left| \int_{\Omega_0} \left[\nabla_x u \cdot \nabla_x v + \frac{1}{\varsigma(t)^2} \nabla_y u \cdot \nabla_y v + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} \right) vu \right] \, d\mu \right|$$

E devido à desigualdade de Hölder, e devido a que $\left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} \right)$ é limitada tem-se

$$|b_t(u,v)| \leq \|\nabla_x u\|_{\mathfrak{X}_0} \|\nabla_x v\|_{\mathfrak{X}_0} + \frac{1}{\varsigma(t)^2} \|\nabla_y u\|_{\mathfrak{X}_0} \|\nabla_y v\|_{\mathfrak{X}_0} + M_1 \|u\|_{\mathfrak{X}_0} \|v\|_{\mathfrak{X}_0}$$

E sendo a constante c_1 igual a $\max\{1, M_1\}$, resulta

$$|b_t(u,v)| \leq c_1 \left[\|\nabla_x u\|_{\mathfrak{X}_0} \|\nabla_x v\|_{\mathfrak{X}_0} + \left(\frac{1}{\varsigma(t)} \|\nabla_y u\|_{\mathfrak{X}_0} \right) \left(\frac{1}{\varsigma(t)} \|\nabla_y v\|_{\mathfrak{X}_0} \right) + \|u\|_{\mathfrak{X}_0} \|v\|_{\mathfrak{X}_0} \right]$$

E como, $(ab + cd + ef) \leq (a + c + e)(b + d + f)$ para todo $a,b,c,d,e,f \geq 0$, e além disso, pela equivalencia de normas no espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$, i.e. $|(a,b,c)|_S \leq M_2 |(a,b,c)|_E$, para todo $a,b,c > 0$, onde $|\cdot|_S$ é a norma da soma e $|\cdot|_E$ é a norma Euclideana, então

$$|b_t(u,v)| \leq c_1 \left[\|\nabla_x u\|^2_{\mathfrak{X}_0} + \frac{1}{\varsigma(t)} \|\nabla_y u\|^2_{\mathfrak{X}_0} + \|u\|^2_{\mathfrak{X}_0} \right]^{1/2} \left[\|\nabla_x v\|^2_{\mathfrak{X}_0} + \frac{1}{\varsigma(t)} \|\nabla_y v\|^2_{\mathfrak{X}_0} + \|v\|^2_{\mathfrak{X}_0} \right]^{1/2} \tag{3.123}$$

Daqui, pela definição da norma em $H_t^1(\Omega_0)$, obtém-se

$$|b_t(u,v)| \leq c_2 \|u\|_{H_t^1(\Omega_0)} \|v\|_{H_t^1(\Omega_0)}$$

E como $u,v \in H_t^1(\Omega_0)$ foram tomados arbitrários, conclui-se que existe uma constante c_2 tal que

$$|b_t(u,v)| \leq c_2 \|u\|_{H_t^1(\Omega_0)} \|v\|_{H_t^1(\Omega_0)} \quad \text{para todo } \; u,v \in H_t^1(\Omega_0). \tag{3.124}$$

Proposição 3.3 (HIPÓTESE $(\boldsymbol{P_2})$)**.** $B(t)^{-1}$ é Hölder contínua em t no sentido de que

$$\left\| B(t) \circ \left[B(t)^{-1} - B(s)^{-1} \right] \right\| \leq k|t-s|^{\alpha} \quad \text{para} \quad s,t \in (0,\infty) \tag{3.125}$$

com algum expoente fixo $0 < \alpha \leq 1$ e alguma constante $k > 0$.

Demonstração. De fato, pela caracterização na subseção 1.5.4, basta provar que, $b_t(u,v)$ é Hölder contínua, isto é,

$$|b_t(u,v) - b_s(u,v)| \leq c|t-s|^{\mu} \cdot \|u\| \cdot \|v\|, \quad 0 \leq s,t \leq T, \quad u,v \in H_t^1(\Omega_0) \tag{3.126}$$

com algum expoente $0 < \mu \leq 1$ e alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} b_t(u,v) - b_s(u,v) &= \int_{\Omega_0} \left[\nabla_x u \cdot \nabla_x v + \frac{1}{\varsigma(t)^2} \nabla_y u \cdot \nabla_y v + \left(\gamma + n \frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} \right) uv \right] dxdy \\ &\quad - \int_{\Omega_0} \left[\nabla_x u \cdot \nabla_x v + \frac{1}{\varsigma(s)^2} \nabla_y u \cdot \nabla_y v + \left(\gamma + n \frac{\dot{\varsigma}(s)}{\varsigma(s)} \right) uv \right] dxdy \\ &= \int_{\Omega_0} \left\{ \left[\frac{1}{\varsigma(t)^2} - \frac{1}{\varsigma(s)^2} \right] \nabla_y u \cdot \nabla_y v + n \left[\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} - \frac{\dot{\varsigma}(s)}{\varsigma(s)} \right] uv \right\} dxdy. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$b_t(u,v) - b_s(u,v) = \int_{\Omega_0} \left\{ \left[\frac{1}{\varsigma(t)^2} - \frac{1}{\varsigma(s)^2} \right] \nabla_y u \cdot \nabla_y v + n \left[\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} - \frac{\dot{\varsigma}(s)}{\varsigma(s)} \right] uv \right\} dxdy. \tag{3.127}$$

Primeiramente estimaremos de forma adequada o primeiro termo do integrando acima. Sem perda de generalidade, tome-se $s < t$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varsigma(t)^2} - \frac{1}{\varsigma(s)^2} \right| &= \left| \left(\frac{1}{\varsigma(t)} + \frac{1}{\varsigma(s)} \right) \left(\frac{1}{\varsigma(t)} - \frac{1}{\varsigma(s)} \right) \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{\varsigma(t)} + \frac{1}{\varsigma(t)} \right) \frac{|\varsigma(s) - \varsigma(t)|}{\varsigma(t)^2} \\ &\leq \frac{2}{\varsigma(t)^3} |\varsigma(s) - \varsigma(t)| \\ &\leq c_1 |\dot{\varsigma}(\xi)|.|s-t| \\ &\leq c_2 |s-t|. \end{aligned} \tag{3.128}$$

Na primeira desigualdade, utiliza-se que ς é não-crescente. E na penúltima desigualdade justifica-se pelo Teorema de Valor Médio, e também porque a função $\dfrac{1}{\varsigma(t)^3}$ é limitada devido à condição ii. Assim, existe uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{\varsigma(t)^2} - \frac{1}{\varsigma(s)^2} \right| \leq c_2 |s-t|. \tag{3.129}$$

E imediatamente passamos a estimar de forma adequada o segundo termo do integrando acima.

$$
\begin{aligned}
n\left[\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}-\frac{\dot{\varsigma}(s)}{\varsigma(s)}\right] &= n\frac{1}{\varsigma(t)\varsigma(s)}\left[\dot{\varsigma}(t)\varsigma(s)-\dot{\varsigma}(s)\varsigma(t)\right]\\
&= n\frac{1}{\varsigma(t)\varsigma(s)}\left[\dot{\varsigma}(t)\varsigma(s)-\dot{\varsigma}(t)\varsigma(t)+\dot{\varsigma}(t)\varsigma(t)-\dot{\varsigma}(s)\varsigma(t)\right]\\
&= n\frac{1}{\varsigma(t)\varsigma(s)}\left(\dot{\varsigma}(t)\left[\varsigma(s)-\varsigma(t)\right]+\left[\dot{\varsigma}(t)-\dot{\varsigma}(s)\right]\varsigma(t)\right)\\
&= n\frac{1}{\varsigma(s)}\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\left[\varsigma(s)-\varsigma(t)\right]+n\frac{1}{\varsigma(s)}\left[\dot{\varsigma}(t)-\dot{\varsigma}(s)\right]. \qquad (3.130)
\end{aligned}
$$

Continuando com a estimativa acima, tem-se

$$
\begin{aligned}
\left|n\left[\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}-\frac{\dot{\varsigma}(s)}{\varsigma(s)}\right]\right| &\leq n\frac{1}{\varsigma(s)}\left|\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right||\varsigma(s)-\varsigma(t)|+n\frac{1}{\varsigma(s)}|\dot{\varsigma}(t)-\dot{\varsigma}(s)|\\
&\leq n\frac{1}{\varsigma(s)}\left|\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right||\dot{\varsigma}(\xi_1)||s-t|+n\frac{1}{\varsigma(s)}|\ddot{\varsigma}(\xi_2)||t-s|\\
&\leq c_3|s-t|. \qquad (3.131)
\end{aligned}
$$

Na primeira desigualdade justifica-se pelo Teorema de Valor Médio. E na última desigualdade justifica-se pois $\dfrac{1}{\varsigma(s)}$ e $\left|\dfrac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right|$ são limitadas devido às condições ii, iii respectivamente.

Ou seja, existe uma constante $c_3>0$ tal que

$$
\left|n\left[\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}-\frac{\dot{\varsigma}(s)}{\varsigma(s)}\right]\right| \leq c_3|t-s|. \qquad (3.132)
$$

Agora, retomando ao objetivo de provar a afirmação. Substituindo as equações (3.129), (3.132) na equação (3.127) e utilizando a desigualdade de Hölder respectivamente. Além disso, lembrando que $\mathfrak{X}_0=L^2(\Omega_0)$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
|b_t(u,v)-b_s(u,v)| &\leq c_2|t-s|\int_{\Omega_0}|\nabla_y u\cdot\nabla_y v|\,dxdy \;+\; c_3|t-s|\int_{\Omega_0}|uv|\,dxdy\\
&\leq c_2|t-s|\|\nabla_y u\|_{\mathfrak{X}_0}\|\nabla_y v\|_{\mathfrak{X}_0} \;+\; c_3|t-s|\|u\|_{\mathfrak{X}_0}\|v\|_{\mathfrak{X}_0}\\
&\leq c_3|t-s|\|\nabla_x u\|_{\mathfrak{X}_0}\|\nabla_x v\|_{\mathfrak{X}_0} \;+\; c_2|t-s|\frac{\varsigma(t)^2}{\varsigma(t)^2}\|\nabla_y u\|_{\mathfrak{X}_0}\|\nabla_y v\|_{\mathfrak{X}_0}\\
&\quad + c_3|t-s|\|u\|_{\mathfrak{X}_0}\|v\|_{\mathfrak{X}_0}.
\end{aligned}
\qquad (3.133)
$$

Daqui

$$
\begin{aligned}
|b_t(u,v)-b_s(u,v)| &\leq c_4|t-s|\left[\|\nabla_x u\|_{\mathfrak{X}_0}\|\nabla_x v\|_{\mathfrak{X}_0}+\frac{1}{\varsigma(t)^2}\|\nabla_y u\|_{\mathfrak{X}_0}\|\nabla_y v\|_{\mathfrak{X}_0}+\|u\|_{\mathfrak{X}_0}\|v\|_{\mathfrak{X}_0}\right]\\
&\leq c_4|t-s|\left[\|\nabla_x u\|_{\mathfrak{X}_0}+\frac{1}{\varsigma(t)}\|\nabla_y u\|_{\mathfrak{X}_0}+\|u\|_{\mathfrak{X}_0}\right]\\
&\qquad\cdot\left[\|\nabla_x v\|_{\mathfrak{X}_0}+\frac{1}{\varsigma(t)}\|\nabla_y v\|_{\mathfrak{X}_0}+\|v\|_{\mathfrak{X}_0}\right]\\
&\leq c_4|t-s|M_2\left[\|\nabla_x u\|^2_{\mathfrak{X}_0}+\frac{1}{\varsigma(t)}\|\nabla_y u\|^2_{\mathfrak{X}_0}+\|u\|^2_{\mathfrak{X}_0}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad\cdot\left[\|\nabla_x v\|^2_{\mathfrak{X}_0}+\frac{1}{\varsigma(t)}\|\nabla_y v\|^2_{\mathfrak{X}_0}+\|v\|^2_{\mathfrak{X}_0}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\leq c_5|t-s|\|u\|_{H^1_t(\Omega_0)}\|v\|_{H^1_t(\Omega_0)}. \qquad (3.134)
\end{aligned}
$$

Na primeira desigualdade justifica-se porque $\varsigma(t)^2$ é limitado pela condição ii, a dizer, limitado por uma constante M_1. E a penúltima desigualdade, justifica-se pela equivalência da norma da soma e a euclideana em $\mathbb{R}^3$, isto é, existe uma constante $M_2>0$ tal que $a+b+c\leq M_2\left[a^2+b^2+c^2\right]^{\frac{1}{2}}$, para todo $a,b,c>0$.
Portanto, existe uma constante $c>0$ tal que

$$|b_t(u,v)-b_s(u,v)|\leq c|t-s|\cdot\|u\|_{H^1_t(\Omega_0)}\cdot\|v\|_{H^1_t(\Omega_0)}. \qquad (3.135)$$

□

Apenas para harmonizar na terminologia segundo Hiroki Tanabe e Sobolevskii em [32], observa-se que

$$
\begin{aligned}
B(t)\circ\left[B(t)^{-1}-B(s)^{-1}\right] &= I-B(t)\circ B(s)^{-1}\\
&= B(s)\circ B(s)^{-1}-B(t)\circ B(s)^{-1}\\
&= [B(s)-B(t)]\circ B(s)^{-1}\\
&= -[B(t)-B(s)]\circ B(s)^{-1} \qquad (3.136)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|[B(t)-B(s)]\circ B(\tau)^{-1}\| &= \|[B(t)-B(s)]\circ B(s)^{-1}\circ B(s)\circ B(\tau)^{-1}\|\\
&\leq \|[B(t)-B(s)]\circ B(s)^{-1}\|\cdot\|B(s)\circ B(\tau)^{-1}\|. \qquad (3.137)
\end{aligned}
$$

O primeiro produto acima é estimado pela proposição que acabamos de provar e o segundo produto é limitado devido à afirmação do Lema 2.2. O que conclui a prova.

3.2.1 Comportamento assintótico

Sendo $\mathscr{B} = \{B(t)\}_{t\geq 0}$ a nossa família de operadores no espaço de Banach $\mathfrak{X}_0 = L^2(\Omega_0)$, com

$$\operatorname{dom} B(t) := \{u \in H^2(\Omega_0) \;:\; \nabla_x u \cdot \eta_x + \frac{1}{\varsigma(t)^2}\nabla_y u \cdot \eta_y = 0\}$$

onde $\eta = (\eta_x, \eta_y)$ denota o campo vetorial normal unitário para $\partial\Omega_0$ e

$$B(t)u = -\Delta_x u - \frac{1}{\varsigma(t)^2}\Delta_y u + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}\right)u, \quad \text{para todo } u \in \operatorname{dom} B(t)$$

satisfazendo para todo $T > 0$ as hipóteses $(P_1), (P_2)$. E se, $\hat{f} : [0,\infty) \to \mathfrak{X}_0$ é Hölder contínuo sobre $[0,\infty)$ e fazendo a consideração de que $\operatorname{dom}(B(t)) = \mathfrak{D}$ é constante, então pelo Teorema 2.3(Hiroki Tanabe [39], 1960), o nosso problema

$$\begin{cases} dv(t)/dt + B(t)v &= \hat{f}, & \text{em} & \Omega_0 \times (0,\infty), \\ \partial v/\partial\eta_x + \left(1/\varsigma(t)^2\right)\partial v/\partial\eta_y &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega_0 \times (0,\infty), \end{cases} \tag{3.138}$$

onde $\hat{f}((x,y),\, t) := f((x,\varsigma(t)y),\; t) \quad , (x,y) \in \Omega_0$, e $\eta = (\eta_x, \eta_y)$ denota o campo vetorial normal unitário para $\partial\Omega_0$, tem uma única solução u sobre $[0,\infty)$.

O comportamento assintótico desta solução, quando $t \to \infty$, é o assunto da presente seção. Para este objetivo, assumiremos que as condições $(P_1), (P_2)$ se mantêm uniformemente no $[0,\infty)$ i.e. que eles mantêm para cada $T > 0$ com constantes M, L e α os quais são independentes de T, e lembrando a consideração de que o domínio do operador $B(t)$ é constante e igual a $\mathfrak{D}$. Para nosso objetivo, enunciaremos a seguinte proposição:

Proposição 3.4 (HIPÓTESE $(\boldsymbol{P_4})$)**.** Os operadores $B(t) \circ B(s)^{-1}$ são uniformemente limitados para $0 < s,t < \infty$ e existe um operador fechado $B(\infty)$, tendo $\mathfrak{D}$ como seu domínio, tal que

$$\left\| \Big[B(t) - B(\infty)\Big] \circ B(0)^{-1} \right\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty \tag{3.139}$$

Demonstração. De fato, dado $t, s \in (0,\infty)$. Pela Proposição 3.2, $B(t)$ é setorial em $\mathfrak{X}_0$, i.e. $B(t)$ é um operador linear fechado, densamente definido tal que, para algum ω em $(0,\pi/2)$ e algum $M \geq 1$ e real a, o setor

$$\Sigma_{a,\omega} = \{\lambda \;:\; \omega \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi \quad , \quad \lambda \neq a\} \tag{3.140}$$

está contido no conjunto resolvente de $B(t)$ e

$$\left\|(\lambda - B(t))^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad , \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{a,\omega}. \tag{3.141}$$

O mesmo vale para $B(s)$.

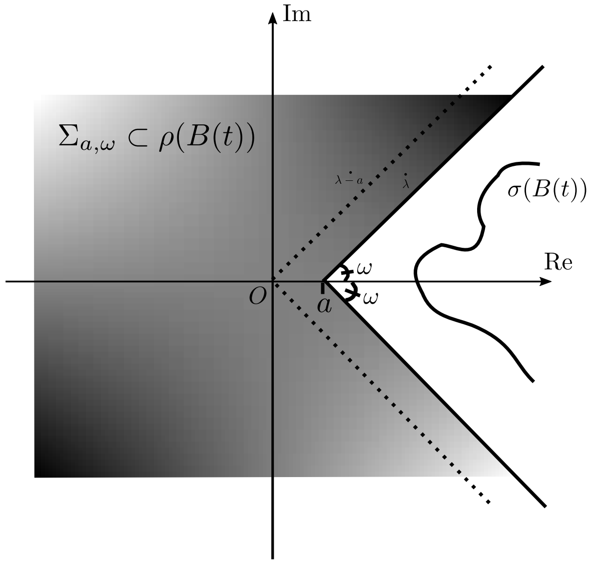

Figura 3.3 Setor contido no conjunto resolvente de B(t)

No caso em que $a \neq 0$, ver a figura 3.3. Tome-se $\lambda = 0$. Daqui, pela equação (3.141) $B(s)^{-1}$ é limitado. E como o operador $B(t)$ é um operador fechado e $B(s)^{-1}$ é limitado, então $B(t) \circ B(s)^{-1}$ é fechado. Então, pelo Teorema 2.9[Teorema do Gráfico Fechado], página 37 em [5] $B(t) \circ B(s)^{-1} : \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{X}_0$ é um operador linear limitado, onde $\mathfrak{X}_0 = L^2(\Omega_0)$. Imediatamente pelo Teorema 2.2 [Teorema de Banach - Steinhaus], página 32 em [5], $B(t) \circ B(s)^{-1}$ é uniformemente limitado. Ou seja,

$$\sup_{t,s \in (0,\infty)} \left\|B(t) \circ B(s)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_0)} < \infty \tag{3.142}$$

Em outras, palavras, existe uma constante c tal que

$$\left\|B(t) \circ B(s)^{-1} u\right\| \leq c\|u\|, \quad \text{para todo } u \in \mathfrak{X}_0, \text{ para todo } t,s \in (0,\infty) \tag{3.143}$$

Por outro lado, defina-se, o operador linear $B(\infty)$ com

$$\operatorname{dom}(B(\infty)) = \left\{ v \in H^2(\Omega_0) \;\; : \;\; \nabla_x v \cdot \eta_x + \frac{1}{\varsigma_0^2}\nabla_y v \cdot \eta_y \right\}$$

onde $\eta = (\eta_x, \eta_y)$ denota o campo vetorial normal unitário a $\partial\Omega_0$ e

$$B(\infty)v = -\Delta_x v - \frac{1}{\varsigma_0^2}\Delta_y v + \gamma v \quad \text{para todo } \; v \in \operatorname{dom} B(\infty). \tag{3.144}$$

Ao respeito de que $B(\infty)$ é fechado, densamente definido, basta seguir o roteiro, quando se provou que $B(t)$ é setorial, ou seja, bastaria provar que $B(\infty)$ seja um operador autoadjunto e limitado inferiormente. Para logo concluir que $B(\infty)$ seja setorial.

Agora, tome-se arbitrariamente $u \in \mathfrak{X}_0$,

$$\begin{aligned}
\left\| \Big[B(t) - B(\infty) \Big] \circ B(0)^{-1} u \right\| &= \| B(t)v - B(\infty)v \| \quad \text{onde } \; v = B(0)^{-1} u \\
&= \left\| -\Delta_x v - \frac{1}{\varsigma(t)^2}\Delta_y v + \left(\gamma + n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} \right) v - \left[-\Delta_x v - \frac{1}{\varsigma_0^2}\Delta_y v + \gamma v \right] \right\| \\
&\leq \left\| -\frac{1}{\varsigma(t)^2}\Delta_y v + \frac{1}{\varsigma_0^2}\Delta_y v \right\| + \left| n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)} \right| \|v\| \\
&\leq \left| \frac{1}{\varsigma(t)^2} - \frac{1}{\varsigma_0^2} \right| \|\Delta_y v\| + |n\frac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}| \, \|v\|
\end{aligned} \tag{3.145}$$

Daqui, pelas condições i, ii, iii da função ς em (3.62) ,
obtém-se que $\left| \dfrac{1}{\varsigma(t)^2} - \dfrac{1}{\varsigma_0^2} \right| \to 0 \quad$ e $\quad |n\dfrac{\dot{\varsigma}(t)}{\varsigma(t)}| \to 0$ quando $t \to \infty$.

Assim, $\left\| \Big[B(t) - B(\infty) \Big] \circ B(0)^{-1} u \right\| \to 0$ quando $t \to \infty$. Como $u \in \mathfrak{X}$ foi tomado arbitrariamente, então $\left\| \Big[B(t) - B(\infty) \Big] \circ B(0)^{-1} \right\| \to 0$ quando $t \to \infty$. □

E fazendo a seguinte condição

(F) A função $\hat{f} : [0,\infty) \to \mathfrak{X}_0$ satisfaz um condição de Hölder uniforme sobre $[0,\infty)$, i.e., existem constantes $c \geq 0$ e $0 < \gamma \leq 1$ tais que

$$\|\hat{f}(t) - \hat{f}(s)\| \leq c|t-s|^{\gamma} \quad \text{para} \;\; 0 \leq s,t < \infty \tag{3.146}$$

e existe um elemento $\hat{f}(\infty) \in \mathfrak{X}_0$ para o qual

$$\lim_{t \to 0^+} \|f(t) - f(\infty)\| = 0. \tag{3.147}$$

Concluímos, pelo Teorema 2.5(Hiroki Tanabe [41], 1961), que existe um elemento $v(\infty) \in \mathfrak{X}_0$, independente de $x \in \mathfrak{X}_0$, tal que

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = v(\infty), \tag{3.148}$$

$$v(\infty) \in \mathfrak{D}, \quad B(\infty)v(\infty) = \hat{f}(\infty) \tag{3.149}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} dv(t)/dt = 0. \tag{3.150}$$

Bibliografia

[1] Acquistapace, P. and Terreni, B. (1986). On fundamental solutions for abstract parabolic equations. *Lect. Notes Math.*, 1223:1–11.

[2] Acquistapace, P. and Terreni, B. (1987). A unified approach to abstract linear non autonomous parabolic equations. *Rend. Sem. Mat. Univ.*, 78:47–107.

[3] Alphonse, A., Elliott, C. M., and Stinner, B. (2015a). An abstract framework for parabolic pdes on evolving spaces. *Port. Math.*, 72:1–46.

[4] Alphonse, A., Elliott, C. M., and Stinner, B. (2015b). On some linear parabolic pdes on moving hypersurfaces. *Interfaces and Free Boundaries*, 17:1–32.

[5] Brezis, H. (2011). *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science, New York.

[6] Carvalho, A. N., Langa, J. A., and Robinson, J. C. (2013). *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, volume 182 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York.

[7] Cermelli, P., Fried, E., and Gurtin, M. E. (2005). Transport relations for surface integrals arising in the formulation of balance laws for evolving fluid interfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 544:339–351.

[8] Cholewa, J. W. and Dlotko, T. (2000). *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, volume 278 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, New York.

[9] Chorin, A. J. and Marsden, J. (1993). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, volume 4 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition.

[10] Conti, M., Pata, V., and Temam, R. (2013). Attractors for processes on time-dependent spaces. applications to wave equations. *Journal of Differential Equations*, 255:1254–1277.

[11] Dautray, R. and Lions, J. L. (1988). *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, volume 2. Springer, Berlin.

[12] Evans, L. (2010). *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, University of California, Berkeley, second edition.

[13] Folland, G. B. (1999). *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition.

[14] Friedman, A. (1969). *Partial Differential Equations*. Holt, Rinehart and Winston, New York.

[15] Halmos, P. R. (1950). *Measure Theory*, volume 18 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, first edition.

[16] Hartman, P. (2002). *Ordinary Differential Equations*, volume 38 of *Classics In Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Rio de Janeiro, second edition.

[17] Henry, D. (1981a). *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, volume 840 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.

[18] Henry, D. (1981b). *Notes on evolution equation in Banach spaces*. Anotações de aula, Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, https://www.ime.usp.br/map/dhenry/danhenry/main.htm.

[19] Hille, E. and Phillips, R. (1957). *Functional Analysis and Semi-Groups*. American Mathematical Society, University of California, Berkeley, second edition.

[20] Kato, T. (1961). Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces. *Nagoya Math. J.*, 19:93–125.

[21] Kato, T. and Tanabe, H. (1962). On the abstract evolutions equation. *Osaka Math J.*, 14:107–133.

[22] Kloeden, P., Marín-Rubio, P., and Real, J. (2008). Pullback attractors for a semilinear heat equation in a non-cylindrical domain. *Journal of Differential Equations*, 244:2062–2090.

[23] Knobloch, E. and Krechetnikov, R. (2015). Problems on time-varying domains: Formulation, dynamics, and challenges. *Acta Applicandae Mathematicae*, 137:123–157.

[24] Krein, S. G. (1971). *Linear Differential Equations in Banach Space*, volume 29. (Nauka, Moscow, 1967), (in russian). English Translation of Mathematical Monographs, Providence.

[25] Levi, E. (1907). Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. *Rend.Circ.Mat.Palermo.*, 24:275–317.

[26] Lima, E. L. (2015). *Curso de análise, Volume 2*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, décima primeira edition.

[27] Lions, J. L. (1961). *Équations Differéntielles Opérationnelles et Problémes aux Limites*. Springer, Berlin.

[28] Lions, J. L. and Magenes, E. (1972). *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, I, II*. Springer, Berlin.

[29] Lunardi, A. (1995). *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel, Parma, Italy.

[30] Ma, T. F., Marín-Rubio, P., and Chuño, C. M. S. (2017). Dynamics of wave equations with moving boundary. *Journal of Differential Equations*, 262:3317–3342.

[31] Munkres, J. R. (1974). *Topology, A First Course*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

[32] Pazy, A. (2003). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Academic Press, New York.

[33] Prato, G. D. and Grisvard, P. (1975). Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles. *J. Math. Pures Appl.*, 54:305–387.

[34] Prato, G. D. and Grisvard, P. (1984). Maximal regularity for evolution equations by interpolation and extrapolation. *J. Funct. Anal.*, 58:107–124.

[35] Sobolevskii, P. E. (1960). *On equations of parabolic type in Banach space with unbounded variable operator having a constant domain*. SSR Dokl, Akad.Nauk Azerb.

[36] Sobolevskii, P. E. (1961). Parabolic equations in Banach spaces with an unbounded variable operator, a fractional power of which has a constant domain of definition. *Soviet Math. Dokl.*, 2:545–548.

[37] Solomyak, M. Z. (1958). The application of semigroup theory to the study of differential equations in Banach spaces. *Dokl.Akad.Nauk.SSSR*, 122:766–769.

[38] Spivak, M. (1965). *Calculus on Manifolds, a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. Addison-Wesley, Waltham, Massachusetts.

[39] Tanabe, H. (1960a). On the equations of evolution in a Banach space. *Osaka J. Math. Jour.*, 12:363–376.

[40] Tanabe, H. (1960b). Remarks on the equations of evolutions in a Banach space. *Osaka Math. J.*, 12(4):145–166.

[41] Tanabe, H. (1961). Convergence to a stationary state of the solution of some kind of differential equations in a Banach space. *Osaka J. Math. Jour.*, 31:127–130.

[42] Tanabe, H. (1964). Note on singular perturbation for abstract differential equations. *Osaka J. Math.*, 1:239–252.

[43] Tanabe, H. (1979). *Equations of Evolution*. Monographs and Studies in Mathematics, New York.

[44] Tanabe, H. (1997). *Functional Analytic Methods for Partial Differential Equations*. Marcel Dekker, Inc., New York.

[45] Yagi, A. (2010). *Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

[46] Yosida, K. (1980). *Functional Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, sixth edition.

Apêndice A

Resultados Básicos

Integração Abstrata de Bochner

A seguinte definição pode ser encontrada em Paul Richard Halmos, Measure Theory [15], pág. 24

Definição A.1. Um $\sigma-$*anel* é uma classe não vazia $\boldsymbol{S}$ de conjuntos tal que

(a) Se $E \in \boldsymbol{S}$ e $F \in \boldsymbol{S}$, então $E - F \in \boldsymbol{S}$, e

(b) Se $E_i \in \boldsymbol{S}$, $i = 1, 2, \ldots$, então $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \boldsymbol{S}$

Esta parte pode ser encontrada em Einar Hille e Ralph S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups [19], pág 71-78

Funções mensuraveis

Seja $\mathfrak{S}$ um conjunto abstrato, seja $\mathfrak{E}$ um $\sigma-$anel de subconjuntos de $\mathfrak{S}$, e seja $m(E)$ definido sobre $\mathfrak{E}$ uma função de medida $\sigma-$finita completa. Nesta subseção, pretendemos estudar a noção de mensurabilidade para funções com valor vetorial sobre $\mathfrak{S}$, relativo à função medida $m(E)$. Existem várias noções, assim como haviam várias noções de continuidade para funções com valor vetorial. Várias definições são necessárias desde o início.

Definição A.2. Seja $x(\sigma)$ e $\{x_n(\sigma)\}$ funções sobre $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{X}$. A sequência $\{x_n(\sigma)\}$ converge para $x(\sigma)$ em $\mathfrak{S}$

(1) *quase uniformemente* se para todo $\varepsilon > 0$ existe um conjunto $E_\varepsilon \in \mathfrak{E}$ com $m(E_\varepsilon) < \varepsilon$ e para todo $\delta > 0$ existe um inteiro $n(\delta, \varepsilon)$ tal que

$$\|x(\sigma) - x_n(\sigma)\| < \delta \quad \text{para} \quad \sigma \in \mathfrak{S} \ominus E_\varepsilon \tag{A.1}$$

e $\quad n \geq n(\delta, \varepsilon)$;

(2) q*uase em toda parte* se existe um conjunto de medida nula $E_0 \in \mathfrak{E}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x(\sigma) - x_n(\sigma)\| = 0 \quad \text{para cada} \quad \sigma \in \mathfrak{S} \ominus E_0; \tag{A.2}$$

(3) *em medida* se para todo $\varepsilon > 0$ a medida externa do subconjunto de $\mathfrak{S}$ onde $\|x(\sigma) - x_n(\sigma)\| > \varepsilon$ tende a zero quando $n \to \infty$.

Definição A.3. (1) $x(\sigma)$ é dito ser de *valor finito* se é constante sobre cada um dos números finitos de conjuntos mensuráveis disjuntos E_j e igual a θ sobre $\mathfrak{S} \ominus \cup E_j$.

(2) É uma *função simples* se é de valor finito e se o conjunto para o qual $\|x(\sigma)\| > 0$ é de medida finita.

(3) $x(\sigma)$ é de *valor contável* se assume no máximo um conjunto contável de valores em $\mathfrak{X}$, assumindo que cada valor seja diferente de θ sobre um subconjunto mensurável.

Definição e propriedades da integral de Bochner

Definição A.4. Uma função com valor contável $x(\sigma)$ sobre $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{X}$ é *integrável (Bochner)* se $\|x(\sigma)\|$ é integrável (Lebesgue).

Por definição

$$(B)\int_E x(\sigma)\ dm = \sum_{k=1}^{\infty} x_k m(E_k \cap E) \tag{A.3}$$

onde $x(\sigma) = x_k$ sobre $E_k \in \mathfrak{E}$ $(k = 1, 2, ...)$.

A integral está bem definida para todo $E \in \mathfrak{E}$ e para o próprio S.

Definição A.5. Uma função $x(\sigma)$ sobre $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{X}$ é *integrável (Bochner)* se existe uma sequência de funções integráveis com valor contável $\{x_n(\sigma)\}$ convergindo quase em toda parte a $x(\sigma)$ e tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{S}} \|x(\sigma) - x_n(\sigma)\|\ dm = 0 \tag{A.4}$$

Por definição

$$(B)\int_E x(\sigma)\ dm = \lim_{n\to\infty} (B)\int_E x_n(\sigma)\ dm \tag{A.5}$$

para cada $E \in \mathfrak{E}$ $\quad$ e $\ E = \mathfrak{S}$.

Denotemos a classe de funções sobre $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{X}$, os quais são Bochner integrável relativo a $m(E)$, por $B(\mathfrak{S}; \mathfrak{X}; m)$. Como veremos, $B(\mathfrak{S}; \mathfrak{X}; m)$ se tornará um espaço de Banach se a norma do elemento $x(.)$ é definido como sendo

$$\|x(.)\| = \int_{\mathfrak{S}} \|x(\sigma)\| \ dm. \tag{A.6}$$

Teorema A.1 (EINAR HILLE, 1952)**.** Seja T uma transformação linear fechada sobre $\mathfrak{X}$ para $\mathfrak{Y}$. Se $x(\sigma) \in B(\mathfrak{S};\mathfrak{X};m)$ e $T[x(\sigma)] \in B(\mathfrak{S};\mathfrak{Y};m)$, então

$$T\left[\int_E x(\sigma) \ dm\right] = \int_E T[x(\sigma)] \ dm \tag{A.7}$$

para todo $E \in \mathfrak{E}$ e $E = \mathcal{S}$.

Demonstração. Ver [19], Teorema 3.7.12, página 83. □

Medida e integração e probabilidades

Robert B. Ash, página 202
Para cada $\alpha > 0$, defina a função gamma

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}.e^{-x}\,dx \tag{A.8}$$

E para cada, $\alpha, \beta > 0$ defina a função beta

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}.(1-x)^{s-1}\,dx \tag{A.9}$$

E também podemos expressar

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{A.10}$$

Proposição A.1. Seja $(X,\mathcal{M},\mu)$ espaço de medida, e seja $f,g \in L^1$

a. $\{x : f(x) \neq 0\}$ é σ-finito

b. $\int_E f = \int_E g$, para todo $E \in \mathcal{M}$, se e somente se, $\int_X |f-g| = 0$, se, e somente se, $f = g$, q.c.

Demonstração. Ver [13], Proposição 2.23, página 54. □

O seguinte Lema se encontra enunciado e demonstrado em Atsushi Yagi [45], na página 27, aqui apenas vou reproduzir a demonstração. Seja $\mu > 0$ e $\nu > 0$ dois parâmetros.

Começamos com introdução à função definida por séries

$$E_{\mu,\nu}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} \qquad ,0 \leq t < \infty. \tag{A.11}$$

onde Γ, $(0 < \xi < \infty)$ é a função gamma. Podemos estimar $E_{\mu,\nu}(t)$ como segue.

Lema A.1.

$$E_{\mu,\nu}(t) \leq \frac{2}{\Gamma_0 \nu}.(1+t)^{2-\mu}.e^{t+1}, \qquad 0 \leq t < \infty \tag{A.12}$$

onde $\Gamma_0 = \min\limits_{0<\xi<\infty} \Gamma(\xi)$.

Demonstração. Primeiro, faremos a demonstração da seguinte afirmação

Afirmação.- $E_{\mu,\nu}(t) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{l \leq \mu+n\nu < l+1} \dfrac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} \right)$

De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{l \leq \mu+n\nu < l+1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} \right) &= \sum_{0 \leq \mu+n\nu < 0+1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \sum_{1 \leq \mu+n\nu < 1+1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \ldots + \sum_{l \leq \mu+n\nu < l+1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \ldots \\
&= \sum_{-\frac{\mu}{\nu} \leq n < \frac{1-\mu}{\nu}} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \sum_{\frac{1-\mu}{\nu} \leq n < \frac{2-\mu}{\nu}} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \ldots + \sum_{\frac{l-\mu}{\nu} \leq n < \frac{(l+1)-\mu}{\nu}} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)}.
\end{aligned}$$

Em adição, note que, já que $\Gamma(\xi)$ é monotonicamente decrescente para $0 < \xi \leq 1$ se espera que $\Gamma(\xi) \geq \Gamma(1) = (1-1)! = 0! = 1$, para $0 < \xi < 1$.
Tome-se, $\Gamma_0 = \min\limits_{1 \leq \xi \leq 2} \Gamma(\xi) > 0$, então $\Gamma(\xi) > 0$, então $\Gamma(\xi) \geq \Gamma_0$, para $1 \leq \xi \leq 2$.
Finalmente, já que $\Gamma(\xi)$ é crescente para $\xi > 2$, temos para $l \geq 2$ e ξ tal que $l \leq \xi < l+1$, $\Gamma(\xi) \geq \Gamma(l) = (l-1)!$.

Ademais, notemos que o número inteiro n tal que $l \leq \mu + n\nu < l+1$ não excede $\dfrac{1}{\nu}$.
Primeiro, seja $1 \leq t < \infty$. Então, podemos ver que

$$\begin{aligned}
E_{\mu,\nu}(t) \quad &= \sum_{0 \leq \mu+n\nu < 0+1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \sum_{1 \leq \mu+n\nu < 1+1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \sum_{2 \leq \mu+n\nu < 2+1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \ldots \\
&\quad + \sum_{l \leq \mu+n\nu < l+1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \ldots.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Analisando os parâmetros do terceiro somatório, obtém-se $2 \leq \mu + n\nu < 3 \Rightarrow \Gamma(2) \leq \Gamma(\mu+n\nu) < \Gamma(3)$

Daqui,

$$\frac{1}{\Gamma(3)} \leq \frac{1}{\Gamma(\mu+n\nu)} \leq \frac{1}{\Gamma(2)}$$

E de $2 \leq \mu+n\nu < 3$ implica que $n\nu < 2+1-\mu$, logo já que $t>0$, tem-se $t^{n\nu} < t^{2+1-\mu}$ Agora estimaremos o terceiro somatório acima

$$\begin{aligned} \sum_{2\leq\mu+n\nu<2+1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} &\leq \sum_{2\leq\mu+n\nu<2+1} \frac{t^{2+1-\mu}}{\Gamma(2)} \\ &= \sum_{2\leq\mu+n\nu<2+1} \frac{t^{2+1-\mu}}{(2-1)!} \\ &= n.\frac{t^{2+1-\mu}}{(2-1)!} \\ &= \frac{1}{\nu}.\frac{t^{2+1-\mu}}{(2-1)!}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Para $l \geq 2$, obtém-se, $l \leq \mu+n\nu < l+1 \Rightarrow \Gamma(l) \leq \Gamma(\mu+n\nu) < \Gamma(l+1)$. Então,

$$\frac{1}{\Gamma(l+1)} \leq \frac{1}{\Gamma(\mu+n\nu)} \leq \frac{1}{\Gamma(l)} \tag{A.15}$$

E de $l \leq \mu+n\nu < l+1$ implica que $n\nu < l+1-\mu$, logo já que $t>0$, tem-se $t^{n\nu} < t^{l+1-\mu}$. Daqui,

$$\begin{aligned} \sum_{l\leq\mu+n\nu<l+1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} &\leq \sum_{l\leq\mu+n\nu<l+1} \frac{t^{l+1-\mu}}{\Gamma(l)} \\ &= \sum_{l\leq\mu+n\nu<l+1} \frac{t^{l+1-\mu}}{(l-1)!} \\ &= n.\frac{t^{l+1-\mu}}{(l-1)!} \\ &= \frac{1}{\nu}.\frac{t^{l+1-\mu}}{(l-1)!}. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Segue que,

$E_{\mu,\nu}(t) \leq \sum_{0\leq\mu+n\nu<1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \sum_{1\leq\mu+n\nu<2} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{\nu}.\frac{t^{l+1-\mu}}{(l-1)!}$. Agora nos dedicaremos a estimar o primeiro somatório imediatamente acima. Já que Γ é monotónicamente decrescente, tém-se

$0 \leq \mu + n\nu < 1 \Rightarrow \Gamma(\mu + n\nu) > \Gamma(1)$. Logo,

$$\frac{1}{\Gamma(\mu+n\nu)} < \frac{1}{\Gamma(1)} \tag{A.17}$$

E de $0 \leq \mu + n\nu < 1$ implica que $n\nu < 1-\mu$, logo já que $t > 0$, tem-se $t^{n\nu} < t^{1-\mu}$

$$\begin{aligned} \sum_{0\leq\mu+n\nu<1} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} &\leq \sum_{0\leq\mu+n\nu<1} \frac{t^{1-\mu}}{\Gamma(l)} \\ &= n.\frac{t^{1-\mu}}{1} \\ &= \frac{1}{\nu}.t^{1-\mu}. \end{aligned} \tag{A.18}$$

Daqui, obtém-se, $E_{\mu,\nu}(t) \leq \frac{1}{\nu}.t^{1-\mu} + \sum_{1\leq\mu+n\nu<2} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{\nu}.\frac{t^{l+1-\mu}}{(l-1)!}$
Analisando os parâmetros do primeiro somatório acima, obtém-se
$1 \leq \mu + n\nu < 2 \Rightarrow \Gamma(\mu+n\nu) \geq \Gamma_0$. Então,

$$\frac{1}{\Gamma(\mu+n\nu)} \leq \frac{1}{\Gamma_0} \tag{A.19}$$

Lembrando que $\Gamma_0 = \min_{1\leq\xi\leq2} \Gamma(\xi) > 0$. Ou seja, $\Gamma(\xi) \geq \Gamma_0$, para $1 \leq \xi < 2$. Segue de $1 \leq \mu + n\nu < 2$ implica que $n\nu < 2-\mu$, logo já que $t > 0$, tem-se $t^{n\nu} < t^{2-\mu}$

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq\mu+n\nu<2} \frac{t^{n\nu}}{\Gamma(\mu+n\nu)} &\leq \sum_{1\leq\mu+n\nu<2} \frac{t^{2-\mu}}{\Gamma_0} \\ &= n.\frac{t^{2-\mu}}{\Gamma_0} \\ &= \frac{1}{\nu}.\frac{t^{2-\mu}}{\Gamma_0}. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Assim,

$$E_{\mu,\nu}(t) \leq \frac{1}{\nu}.t^{1-\mu} + \frac{1}{\nu}.\frac{t^{2-\mu}}{\Gamma_0} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{\nu}.\frac{t^{l+1-\mu}}{(l-1)!} \tag{A.21}$$

Como uma consequência,

$$E_{\mu,\nu}(t) \leq \frac{t^{1-\mu}}{\nu} + \frac{1}{\Gamma_0\nu}t^{2-\mu}.e^t \leq \frac{2}{\Gamma_0\nu}.t^{2-\mu}.e^t \tag{A.22}$$

Segundo, seja $0 \leq t < 1$. Já que, $0 \leq t^{n\nu} \leq 1$, podemos argumentar um racíocinio similar para concluir que

$$E_{\mu,\nu}(t) \leq \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu}.\frac{1}{\Gamma_0} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{\nu(l-1)!} \leq \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\Gamma_0 \nu} e \leq \frac{2e}{\Gamma_0 \nu} \tag{A.23}$$

Combinando as equações (A.22) e (A.23), obtemos a estimativa (A.12). □

Resumindo o Lema anterior:
Se $1 \leq t < \infty$, obtém-se, $E_{\mu,\nu}(t) \leq \dfrac{2}{\Gamma_0 \nu}.t^{2-\mu}.e^t$.

Se $0 \leq t < 1$, obtém-se, $E_{\mu,\nu}(t) \leq \dfrac{2e}{\Gamma_0 \nu}$.

Observação A.1. Frequentemente utilizaremos a seguinte estimativa que pode ser encontrada em [32], na página 174. Seja $0 < \beta \leq 1$, existe uma constante c_β tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{\Gamma(m\beta)} \leq c_\beta x.e^{2x^{\frac{1}{\beta}}}, \quad \text{para } x \geq 0 \tag{A.24}$$

Análise na reta, análise no $\mathbb{R}^n$

Teorema A.2 (Teorema da Função Inversa)**.** Suponha que $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é continuamente diferenciável em um conjunto aberto contendo z e $\det\left[D\psi(z)\right] \neq 0$. Então, existe um conjunto aberto V contendo z e um conjunto aberto W contendo $\psi(z)$ tal que $\psi : V \to W$ tem uma inversa continua $\psi^{-1} : W \to V$ o qual é diferenciável e para todo $w \in W$ satisfaz

$$D\psi^{-1}(w) = \Big[D\psi\big(\psi^{-1}(w)\big)\Big]^{-1} \tag{A.25}$$

Demonstração. Ver Michael Spivak[38], Teorema 2-11, pág.35. □

Teorema A.3 (Teorema da mudança de variáveis)**.** Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e φ uma função $\mathscr{C}^1$ difeomorfismo, com $B = \varphi(A)$ tal que $\det \varphi'(x) \neq 0$ para todo $x \in A$ e além disso, $f : B \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então,

$$\int_B f(y)\, dy = \int_A (f \circ \varphi)(x).\text{Jac}(\varphi(x))\, dx \tag{A.26}$$

Demonstração. Ver Michael Spivak[38], Teorema 3.13, página 67. □

Resumindo, se φ é um $\mathscr{C}^1$ difeomorfismo, e f é integrável

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \tag{A.27}$$

então

$$\int_B f(y)\,dy = \int_A (f\circ\varphi)(x).\mathrm{Jac}(\varphi(x))\,dx \tag{A.28}$$

Lema A.2. Fixado, $T>0$, e seja $0\leq s<t\leq T$

$$\int_s^t (t-y)^{\alpha-1}(y-s)^{\beta-1}\ \ dy = (t-s)^{\alpha+\beta-1}.\frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{A.29}$$

o qual se cumpre para todo $\alpha,\ \beta>0$.

Demonstração. Defina o difeomorfismo $\varphi(x)=s+(t-s)x$

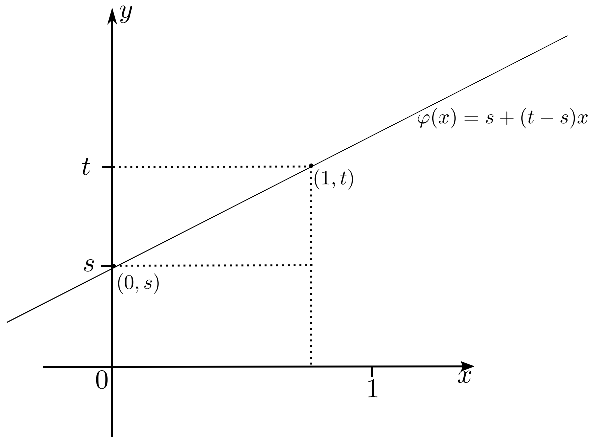

Figura A.1 Difeomorfismo para a mudança de variável.

e seja $f(y)=(t-y)^{\alpha-1}(y-s)^{\beta-1}$. Como $(0,1)\subseteq\mathbb{R}^1$ é um conjunto aberto e φ é um difeomorfismo, com $(s,t)=\varphi\Big((0,1)\Big)$ tal que $\det\varphi'(x)=t-s\neq 0$ para todo $x\in(0,1)$ e além disso, $f:(s,t)\to\mathbb{R}$ é uma função integrável, então pelo Teorema da mudança de variável

$$\int_{(s,t)} f(y)\ \ dy = \int_{(0,1)} (f\circ\varphi)(x).|\det\varphi'(x)|\ \ dx$$

Daqui,

$$\int_{(s,t)} f(y)\ \ dy = \int_{(0,1)} f\big(s+(t-s)x\big).(t-s)\ \ dx \tag{A.30}$$

Da definição de f, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)} f\big(s+(t-s)x\big).(t-s)\ dx &= \int_{(0,1)} \Big[t-\Big(s-(t-s)x\Big)\Big]^{\alpha-1}.\Big[\Big(s+(t-s)x\Big)-s\Big]^{\beta-1}(t-s)\ dx \\
&= \int_{(0,1)} \Big[(t-s)-(t-s)x\Big]^{\alpha-1}.\Big[(t-s)x\Big]^{\beta-1}(t-s)\ dx \\
&= \int_{(0,1)} \Big[(t-s)(1-x)\Big]^{\alpha-1}.\Big[(t-s)x\Big]^{\beta-1}(t-s)\ dx \\
&= (t-s)^{\alpha+\beta-1}\int_{(0,1)} (1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}\ dx \qquad \text{(A.31)}
\end{aligned}$$

E lembrando a caracterização da função β

$$\int_{(0,1)} (1-x)^{\alpha-1}.x^{\beta-1}\ dx = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad \text{(A.32)}$$

Substituindo a equação (A.32) na equação (A.31), obtém-se

$$\int_{(0,1)} f\big(s+(t-s)x\big).(t-s)\ dx = (t-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad \text{(A.33)}$$

De (A.33) em (A.30), tem-se

$$\int_s^t f(y)\ dy = (t-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Portanto,

$$\int_s^t (t-y)^{\alpha-1}(y-s)^{\beta-1}\ dy = (t-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad \text{(A.34)}$$

para todo $\alpha,\ \beta > 0$ $\square$

Teorema A.4 (Regra de Leibniz-Derivação sob o sinal de integral)**.** Dado $U \subseteq \mathbb{R}^n$, aberto, seja $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:

1. Para todo $x \in U$, a função $t \mapsto f(x,t)$ é integrável em $a \leq t \leq b$.

2. A i-ésima derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ existe para cada $(x,t) \in U \times [a,b]$ e a função $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$, assim definida, é contínua.

Então a função $\varphi : U \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$, possui i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt.$

Em suma: pode-se derivar sob o sinal de integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

Demonstração. Ver [26], Regra de Leibniz, página 144. □

Equações Diferenciais Ordinárias

Teorema A.5 (Desigualdade de Gronwall)**.** Seja $u(t),\ v(t)$ funções continuas, não-negativos sobre $[a,b]$; $c \geq 0$ uma constante ; e

$$v(t) \leq c + \int_a^t v(s).u(s)\,ds \quad \text{para todo } a \leq t \leq b \tag{A.35}$$

Então,

$$v(t) \leq c.e^{\int_a^t u(s)\,ds} \quad \text{para todo } a \leq t \leq b \tag{A.36}$$

em particular, se $c = 0$, então $v(t) \equiv 0$.

Demonstração. Ver [16], Teorema 1.1, página 24. □