



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**Investigações sobre a Teoria de Corpos de Classes: a teoria  
abstrata de Neukirch e o teorema de Golod-Shafarevich**

**Autor(a): Pedro Matos Correia de Souza <sup>1</sup>**

**Orientador(a): Theo A. D. Zapata**

Brasília

2020

---

<sup>1</sup>O(a) autor(a) foi bolsista CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Investigações sobre a Teoria de Corpos de Classes: a teoria abstrata de Neukirch e o teorema de Golod-Shafarevich

por

Pedro Matos Correia de Souza \*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade  
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 28 de julho de 2020.

Comissão Examinadora:



---

Prof. Dr. Mikhail Viktorovich Belolipetsky - IMPA



---

Prof. Dr. Eduardo Tengan - UFSC



---

Prof. Dr. Hemar Teixeira Codinho - UnB



---

Prof. Dr. Theo Allan Darn Zapata - UnB (Orientador)

\* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

## Abstract

In this work, we investigate some aspects of class field theory. First, we present the theory via the abstract version developed by J. Neukirch in the 1980s. Such version is developed only in terms of a profinite group  $G$  and a discrete  $G$ -module  $A$  subject to a cohomological condition. This approach to the subject allows us to quickly obtain a general reciprocity theorem which generalizes the classical theorems of class field theory (local and global). Our investigation naturally leads us to the class field tower problem and we present its solution using the theorem of Golod and Shafarevich on minimal presentations of finite  $p$ -groups. We also report on a modern version of this theorem and an application due to J-P. Serre and A. Lubotzky on the congruence subgroup problem for arithmetic lattices in  $SL_2(\mathbb{C})$ .

**Key-words:** Class field theory; Hilbert class field; Golod-Shafarevich.

## Resumo

Neste trabalho, investigamos alguns aspectos da teoria de corpos de classes. Primeiro, apresentamos a teoria pela versão abstrata desenvolvida por J. Neukirch na década de 1980. Tal versão é desenvolvida apenas em termos de um grupo profinito  $G$  e um  $G$ -módulo discreto  $A$  sujeito à uma condição cohomológica. Esta abordagem para o tópico nos permite rapidamente obter um teorema de reciprocidade geral que generaliza os teoremas clássicos da teoria de corpos de classes (local e global). Nossa investigação naturalmente nos leva ao problema da torre de corpos de classes e apresentamos sua solução usando o teorema de Golod e Shafarevich sobre apresentações mínimas de  $p$ -grupos finitos. Apresentamos também o teorema em uma forma moderna e mostramos uma aplicação devida a J-P. Serre e A. Lubotzky no problema dos subgrupos de congruência para reticulados aritméticos em  $SL_2(\mathbb{C})$ .

**Palavras-chave:** Teoria de corpos de classes; corpo de classes de Hilbert; Golod-Shafarevich.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Números, grupos, e co-homologia</b>	<b>3</b>
1.1 Números . . . . .	3
1.1.1 Corpos de números . . . . .	3
1.1.2 Corpos locais . . . . .	12
1.1.3 Idèles . . . . .	16
1.2 Grupos . . . . .	19
1.2.1 Grupos profinitos . . . . .	19
1.2.2 Apresentações de grupos . . . . .	24
1.2.3 Reticulados aritméticos . . . . .	27
1.3 Cohomologia . . . . .	28
1.3.1 Cohomologia de grupos profinitos . . . . .	30
1.3.2 Cohomologia de grupos pro- $p$ . . . . .	33
1.3.3 Cohomologia de Tate . . . . .	37
<b>2 Teoria abstrata de corpos de classes</b>	<b>41</b>
2.1 Teoria de Galois abstrata . . . . .	42
2.2 Grupos de inércia e ramificação . . . . .	42
2.3 Levantamentos . . . . .	44
2.4 Módulos e valorações . . . . .	46
2.5 Homomorfismo de reciprocidade . . . . .	47
2.6 Lei da reciprocidade geral . . . . .	53

2.7	Quociente de Herbrand . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Teorias clássicas de corpos de classes</b>	<b>59</b>
3.1	Teoria local . . . . .	60
3.1.1	Axioma de corpos de classes local . . . . .	60
3.1.2	Lei da reciprocidade local . . . . .	62
3.2	Teoria global . . . . .	65
3.2.1	Axioma de corpos de classes global . . . . .	65
3.2.2	Lei da reciprocidade global . . . . .	69
<b>4</b>	<b>O teorema de Golod-Shafarevich</b>	<b>75</b>
4.1	Exemplos . . . . .	76
4.2	Demonstração do teorema de Golod-Shafarevich . . . . .	78
4.3	Uma generalização do teorema de Golod-Shafarevich . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Aplicações de Golod-Shafarevich</b>	<b>86</b>
5.1	A Infinitude de torres de corpos de classes . . . . .	86
5.2	O problema dos subgrupos de congruência para reticulados aritméticos em $SL_2(\mathbb{C})$ . . . . .	89
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>97</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>101</b>

# Referências Bibliográficas

- [BLS64] H. Bass, M. Lazard, J-P. Serre, *Sous-groupes d'indice fini dans  $SL(n, \mathbb{Z})$* , Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), no. 3, pp. 385-392.
- [BMS67] H. Bass, J. Milnor, J-P. Serre, *Solution of the congruence subgroup problem for  $SL_n(n \geq 3)$  and  $Sp_{2n}(n \geq 2)$* . Publications Mathématiques de l'IHÉS, vol. 33 (1967), pp. 59-137.
- [Bo69] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York (1969).
- [Bro82] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York (1982).
- [CF67] J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Academic Press (1967).
- [CM82] B. Chandler, W. Magnus, *The History of Combinatorial Group Theory*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol. 9, Springer-Verlag, New York (1982).
- [Che40] C. Chevalley, *La théorie du corps de classes*, Annals of Mathematics, vol. 41, pp. 394–418 (1940).
- [DDSMS99] J. D. Dixon, M. P. F. Du Sautoy, A. Mann, D. Segal, *Analytic pro- $p$  groups*, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 61, Cambridge University Press (1999).

- [E61] D. B. A. Epstein, *Finite presentations of groups and 3-manifolds*, The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 12, no. 1, (1961), pp. 205–212.
- [G71] L. J. Goldstein, *Analytic Number Theory*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1971).
- [Go63] E. S. Golod, *On nil-algebras and finitely approximable  $p$ -groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 28:2 (1964), pp. 273–276.
- [GS64] E. S. Golod, I. R. Shafarevich, *On the class field tower*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 28:2 (1964), pp. 261–272.
- [GuSi95] N. Gupta, S. Sidki, *The group transfer theorem*, Arch. Math. 64, No. 1, (1995), pp. 5–7.
- [Hum75] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 21, Springer-Verlag, New York (1975).
- [Hup67] Huppert, B. *Endliche Gruppen I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 134, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1967).
- [Ko02] H. Koch, *Galois Theory of  $p$ -Extensions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2002).
- [Lan02] S. Lang, *Algebra*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York (2002).
- [Lan94] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics vol. 110, Springer-Verlag, New York (1994).
- [Laz65] M. Lazard, *Groupes analytiques  $p$ -adiques*, Publ. Math. IHES 26 (1965), pp. 389–603.
- [Lub83] A. Lubotzky,  *$p$ -Adic Analytic Groups and Lattices in  $SL_2(\mathbb{C})$* , Annals of Mathematics, Second Series, vol. 118, No. 1 (Jul., 1983), pp. 115–130.

- [LM87] A. Lubotzky, A. Mann, *Powerful  $p$ -Groups. II.  $p$ -Adic Analytic Groups*, Journal of Algebra, vol. 105:2, (February 1987), 506-515.
- [LS01] R. C. Lyndon, P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2001).
- [Mar91] G. A. Margulis, *Discrete Subgroups Of Semisimple Lie Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 17, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1991).
- [Mil13] J. Milne, *Class Field Theory*, Notas de aula, 4.02, (2013), disponível em: <https://www.jmilne.org/math/CourseNotes>.
- [Neu99] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 322, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1999).
- [PR92] V. P. Platonov, A. S. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Uspekhi Mat. Nauk, 47:2(284) (1992), 117–141; Russian Math. Surveys, 47:2 (1992), 133–161.
- [Ra76] M. S. Raghunathan, *On the congruence subgroup problem*, Publications mathématiques de l’I.H.É.S., 46 (1976), pp. 107-161.
- [RZ10] L. Ribes, P. Zalesskii, *Profinite Groups*, 2nd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 40, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2010).
- [Ser64] J-P. Serre, *Groupes analytiques  $p$ -adiques*, Séminaire Bourbaki : années 1962/63 - 1963/64, exposés 241-276, Séminaire Bourbaki, vol. 8 (1964), pp. 401-410.
- [Ser66] J-P. Serre, *Existence de tours infinies de corps de classes d’après Golod et Šafarevič*, em *Les Tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres*, Colloques Internationaux du CNRS, Editions du CNRS, vol. 143, (1966), pp. 231-238.
- [Ser73] J-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 7, Springer-Verlag, New York (1973).



- [Ser79] J-P. Serre, *Local Fields*, Graduate texts in mathematics, vol.67, Springer-Verlag, New York (1979).
- [Ser97] J-P. Serre, *Galois Cohomology*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1997).
- [Sha62] I. Shafarevich, *Corps de nombres algébriques*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, pp. 163-176, Stockholm (1962).
- [Weh73] B. Wehrfritz, *Infinite Linear Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, vol. 76, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1973).

# Índice Remissivo

- Álgebra de grupo completa, 35
- Índice de ramificação, 8
- Anel de inteiros, 4
- Anel de valoração, 13
- Apresentação, 24
- Cohomologia, 30
- Cohomologia de Tate, 37
- Complemento, 14
- Complemento profinito, 23
- Corpo de classes de flecha, 70
- Corpo de classes de Hilbert, 71
- Corpo de números, 3
- Corpo local, 15
- Decomposição de primos, 8
- Dedekind - domínio de, 5
- Deficiência, 25
- Dirichlet - teorema dos invertíveis de, 4
- Elemento primo, 14, 47
- Fratini - subgrupo de, 23
- Frobenius - automorfismo de, 11, 43, 71
- Gerador, 23
- Golod-Shafarevich, 84
- Golod-Shafarevich - teorema de, 75
- Grau, 3
- Grau de inércia, 8
- Grupo algébrico, 27
- Grupo analítico  $p$ -ádico, 23
- Grupo de classes, 6
- Grupo de classes de flecha, 7
- Grupo de classes de idèles, 17
- Grupo de decomposição, 10
- Grupo de inércia, 10
- Grupo pro- $p$ , 22
- Grupo pro- $p$  livre, 26
- Grupo profinito, 22
- Homomorfismo de reciprocidade, 47
- Idèle, 17
- Ideal fracionário, 6
- Identidade fundamental, 8, 44
- Kronecker-Weber - teorema de, 64
- Lei da reciprocidade, 54, 62, 69

Mergulho, 3

Número de classes, 7

Não-arquimediano, 13

Norma, 4, 19, 37

Problema da torre de corpos de classes,  
74

Quociente de Herbrand, 58

Relação, 24

Reticulado aritmético, 28

Reticulado uniforme, 28

Símbolo de resíduo de norma, 56, 62, 69

Teorema dos ideais principais, 72

Transfer, 73

Valor absoluto, 12

Valoração, 14, 46