Universidade de Brasília

Soluções invariantes para quase solitons gradientes de Ricci e solitons gradientes de Yamabe conformes a um espaço pseudo-Euclidiano

Murilo Alberto Barroso

Orientador: Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília
2021

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Soluções invariantes para quase solitons gradientes de Ricci e solitons gradientes de Yamabe conformes a um espaço pseudo-euclidiano

por

Murilo Alberto Barroso*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 27 de janeiro de 2021.

Comissão Examinadora:

Tarcisio Castro Silva

Prof. Dr. Tarcisio Castro Silva - MAT/UnB (Orientador)

João Paulo dos Santos

Prof. Dr. João Paulo dos Santos – MAT/UnB (Membro)

Benedito Leandro

Prof. Dr. Benedito Leandro Neto – UFG (Membro)

* O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

AM977s

Alberto Barroso, Murilo
Soluções invariantes para quase solitons gradientes de Ricci e solitons gradientes de Yamabe conformes a um espaço pseudo-Euclidiano / Murilo Alberto Barroso; orientador Tarcísio Castro Silva. -- Brasília, 2021.
88 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2021.

1. Produto torcido. 2. quase solitons gradientes de Ricci. 3. solitons gradientes de Yamabe.. I. Castro Silva, Tarcísio, orient. II. Título.

Agradecimentos

À minha mãe, a mulher guerreira que eu admiro tanto por sempre acreditar em mim, me ensinar a importância dos estudos e de nunca desistir na primeira dificuldade. Sei de todos os sacrifícios que você passou para que eu pudesse chegar nesse momento na minha vida.

À minha irmã Dyelle Benevides pelo apoio, sei que passou por momentos difíceis na nossa família que teve de resolver sozinha.

À minha namorada Natália Florêncio por ser uma companheira incrível, sempre me apoiando em tudo, estando sempre ao meu lado nos momentos difíceis nessa caminhada até chegar a esta conquista.

Ao meu orientador, professor Tarcísio pela confiança e excelente escolha do tema para elaboração do trabalho e pelas valiosas orientações na realização desta dissertação.

Aos professores da banca examinadora, professores Benedito Leandro e João Paulo pelas valiosas sugestões que enriqueceram meu trabalho.

Aos meus colegas que tive a oportunidade de conhecer durante o Mestrado, em especial, Geovane, Tharles, Mateus, Maria Edna, Junio, Jailson, Adler, Gabriel, Katianny, Vinicius Kobayashi, Rodolfo e Rômulo. Agradeço pelos momentos de descontração e experiências compartilhadas.

O programa de Pós-Graduação em Matemática da UnB por me oferecer um curso de excelência de forma gratuita.

A CAPES pelo apoio financeiro durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Baseado em [17] e [18], apresentamos nesta dissertação um estudo de classificação de quase solitons gradientes de Ricci e solitons gradientes de Yamabe. No primeiro caso, estudamos a classificação de quase solitons gradientes de Ricci do tipo $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f (F^m, g_F)$, onde a base $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$ é invariante pela ação de um grupo de translação e a fibra F é uma variedade semi-Riemanniana de Einstein. Em seguida, trabalhamos com a caracterização de quase solitons gradientes de Ricci conformemente *flat* invariantes pela ação de um grupo de translação ou rotação.No segundo caso, apresentamos uma caracterização de solitons gradientes de Yamabe conformes a um espaço pseudo-Euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, invariantes pela ação de um grupo de translação $(n-1)$-dimensional.

Palavras-chave: Produto torcido, quase solitons gradientes de Ricci, solitons gradientes de Yamabe.

Abstract

Based on [17] and [18] we present in this dissertation a classification study of gradient Ricci almost solitons and gradient yamabe solitons. In the firt case, we studied the classification of gradient Ricci almost solitons of the type $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f (F^m, g_F)$, where the base $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$ is invariant the action of a translation group and F semi-Riemannian Einstein fiber. Then, we work with the characterization of gradient Ricci almost solitons for a conformally *flat* invariant by the actions of a translation group or rotation. In the second case, we present a characterization of gradient Yamabe solitons conformal to a pseudo-Euclidean space which is invariant under the action of an $(n-1)$-dimesional translation group.

Keywords: Warped product, gradient Ricci almost solitons, gradient Yamabe solitons.

Conteúdo

Introdução

Em 1982, Hamilton [14] definiu o *fluxo de Ricci* como sendo uma equação de evolução no espaço das métricas Riemannianas; tal fluxo possibilitou anos depois que G. Perelman, provasse a Conjectura de Poincaré.

A equação de evolução proposta por Hamilton é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)}, \quad g(0) = g_0,$$

onde Ric_g é o tensor de Ricci na métrica g.

A relevância de classificar e entender a geometria dos solitons, deve-se ao fato de que tais soluções podem aparecer como possíveis modelos de singularidades do fluxo. Em [14], Hamilton introduziu o conceito de *soliton de Ricci*, que são soluções estacionárias do fluxo de Ricci. Este conceito foi generalizado em [23], com a noção de *quase* soliton de Ricci.

Se (M^n, g) é uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $n \geq 3$, dizemos que M é um *quase soliton de Ricci* se satisfaz

$$Ricg + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{1}$$

onde $\mathcal{L}_X g$ representa a derivada de Lie da métrica g com respeito ao campo vetorial tangente X e $\lambda : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

Quando $X = \nabla h$ para alguma função diferenciável h em M, então M é chamada de *quase soliton gradiente de Ricci* e a equação (1) pode ser reescrita como

$$Ric_g + Hessg(h) = \lambda g,$$

onde Ric_g é o tensor de Ricci e $Hess_g(h)$ é a hessiana da função potencial h na métrica g.

Recentemente, vários autores consideraram o estudo de quase solitons de Ricci com a estrutura de produto torcido (ver [4], [13], [25]). Um dos motivos é pelo fato desses espaços terem uma métrica muito rica, possibilitando construir novos exemplos não triviais de quase solitons de Ricci.

Em 1960, no artigo [27], Hidehiko Yamabe formulou o seguinte problema: *Dada uma variedade Riemanniana compacta* (M^n, g)*, de dimensão* $n \geq 3$*, existe uma métrica conforme a g com curvatura escalar constante?*

O próprio Yamabe acreditou ter solucionado o problema, mas Neil Trudinger em 1968 [26], encontrou um erro. Historicamente, o desenvolvimento da solução do problema de Yamabe encontra-se nos trabalhos de Neil Trudinger [26] em 1968, Thierry Aubin [1] em 1976 e Richard Schoen [24] em 1984. Em 1984, Richard Hamilton [15] definiu o *fluxo de Yamabe* como uma ferramenta para construir métricas de curvatura escalar constante em uma dada classe de métricas Riemannianas conformes.

Em uma variedade Riemanniana, o fluxo de Yamabe pode ser definido como a evolução da métrica Riemanniana g_0 no tempo t para $g = g(t)$ por meio da equação

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -Rg(t), \quad g(0) = g_0,$$

onde R representa a curvatura escalar na métrica g. Os *solitons* de Yamabe representam um tipo de solução especial para o fluxo de Yamabe, e correspodem às soluções auto-similares do fluxo. Assim como no fluxo de Ricci, no fluxo de Yamabe é fundamental compreender as singularidades do fluxo.

Uma variedade Riemanniana (M^n, g), com $n \geq 3$, é um *soliton de Yamabe* se admite um campo vetorial X tal que

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = (R - \lambda)g, \tag{2}$$

onde $\mathcal{L}_X g$ denota a derivada de Lie da métrica g na direção do campo vetorial X e λ um número real.

Quando $X = \nabla f$ na equação (2), para alguma função diferenciável f definida em M, então M é chamada um *soliton gradiente de Yamabe*. Neste caso podemos reescrever a equação (2) como

$$Hess_g f = (R - \lambda)g,$$

onde R denota a curvatura escalar na métrica g. Se $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda < 0$, chamamos o soliton gradiente de Yamabe de *contrátil, estável* ou *expansivo*, respectivamente.

Nos últimos anos, vários estudos foram desenvolvidos com o objetivo de entender a geometria e classificar os solitons. Neste ínterim, os espaços confomes a espaços pseudo-Euclidianos tornaram-se ambientes interessantes na busca de exemplos de solitons gradientes de Yamabe.

Seguindo os passos apresentados em [17] e [18], estudamos alguns resultados de classificação de solitons gradientes de Yamabe, conformes a espaços pseudo-Euclidianos e invariantes pela ação de um grupo de translação de dimensão $(n-1)$; quase solitons gradientes de Ricci com estrutura de produto torcido e quase solitons gradientes de Ricci conformes a espaços pseudo-Euclidianos e invariantes pela ação de um grupo de translação ou rotação. Precisamente, nosso trabalho está estruturado tal como segue:

No Capítulo 1, fixamos notações e tratamos de conceitos preliminares, a saber, variedades semi-Riemannianas, quase solitons gradientes de Ricci, solitons gradientes de Yamabe e produto torcido. As principais referências para este capítulo foram [3], [10], [19] e [21].

No Capítulo 2, baseamo-nos em [17], e estudamos os quase solitons gradientes de Ricci com estrutura de produto torcido, onde a base é conforme a um espaço pseudo-Euclidiano e invariante pela ação de um grupo de translação de dimensão $(n-1)$, e a fibra é uma variedade semi-Riemanniana de Einstein. Outrossim, vimos que os autores forneceram uma classificação para um quase soliton gradiente de Ricci conforme à métrica pseudo-Euclidiana e invariante pelas ações de um grupo de translação ou um grupo pseudo-ortogonal.

No Capítulo 3, baseamos nossos estudos no artigo [18], onde os autores caracterizaram os solitons gradientes de Yamabe conformes a espaços pseudo-Euclidianos n-dimensionais. Soluções que são invariantes pela ação de um grupo de translação de dimensão $(n-1)$ foram consideradas.

Destinamos um apêndice, Capítulo A, a um breve relato de um método para encontrar o grupo de simetria de equações (ou sistema de equações) diferenciais parciais. Esta síntese está baseada em [19], a qual fortemente recomendamos ao leitor desejoso em aprofundar seus estudos.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos apresentar resultados e definições importantes que serão usados ao longo desta dissertação.

Primeiro, definiremos o conceito de variedade semi-Riemanniana e, em seguida, veremos que conexão, curvatura, geodésica, etc., estudados em Geometria Riemanniana, podem ser estendidos para variedades semi-Riemannianas. Prosseguindo, faremos uma breve introdução sobre grupos de simetria de equações diferenciais parciais, e veremos os conceitos de *quase soliton gradiente de Ricci* e *soliton gradiente de Yamabe*, importantes para o bom entendimento dos capítulos seguintes. Finalizaremos esta leitura preliminar definindo *produto torcido*.

Para maiores detalhes indicamos ao leitor, por exemplo, as referências [3], [10], [19] e [21], as quais nortearam estas notas preliminares.

1.1 Variedades semi-Riemannianas

Para os conceitos e resultados seguintes, consideraremos M uma variedade diferenciável.

Definição 1.1. Uma **variedade diferenciável**, de dimensão n, é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$, de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M, tais que:

(i) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;

(ii) Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis;

(iii) A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (i) e (ii).

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou sistema de coordenadas) de M em p; $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada de *vizinhança coordenada* em p. Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo as condições (i) e (ii) é chamada uma *estrutura diferenciável*.

Apresentaremos agora, um objeto extremamente útil em Geometria Diferencial. Os *tensores* são objetos indispensáveis no estudo local e global de variedades deferenciáveis, cuja ideia generaliza para variedades a ideia de campos de vetores, funções reais e 1-formas.

Seja V^* o conjunto de todas as funções $K-$ lineares de V em K, onde V é um espaço vetorial. Denotaremos $V_1 \times \cdots \times V_s$ abreviadamente por V^s.

Definição 1.2. Para inteiros $r \geq 0$, $s \geq 0$, onde r e s são não nulos simultaneamente, uma função $K-$ multilinear $A : (V^*)^r \times V^s \longrightarrow K$ é dita um *tensor* do tipo (r,s) sobre V.

Exemplo 1.1. (*Exemplos de Tensores*)

(i) Produto interno em $\mathbb{R}^n$ é um $(0,2)$-tensor;

(ii) O determinante como função de n vetores é um $(0,n)$-tensor de $\mathbb{R}^n$;

(iii) Os números reais são simplesmente um $(0,0)$-tensor.

Agora, considere V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com dimensão finita. Definiremos agora, uma forma bilinear que é um $(0,2)$-tensor.

Definição 1.3. Uma *forma bilinear* sobre V é uma aplicação $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$, satisfaz

(i) $b(\alpha u_1 + u_2, v) = \alpha b(u_1, v) + b(u_2, v)$,

(ii) $b(u, \alpha v_1 + v_2) = \alpha b(u, v_1) + b(u, v_2)$.

Além disso, dizemos que b é uma *forma bilinear simétrica* se $b(u,v) = b(v,u)$ para todos $u, v \in V$.

Definição 1.4. Uma forma bilinear simétrica b sobre um espaço vetorial V é:

(i) *positiva definida* (respectivamente *negativa definida*) desde que $b(u,u) > 0$, $\forall\, u \neq \mathbf{0}$ em V $(respectivamente < 0)$;

(ii) *positiva semi-definida* (respectivamente *negativa semi-definida*) desde que $b(u,u) \geq 0$, $\forall\, u \in V (respectivamente \leq 0)$;

(iii) *não-degenerada* desde que $b(u,v) = 0$, $\forall\, v \in V$, implica $u = \mathbf{0}$.

Definição 1.5. O *índice* v de uma forma bilinear simétrica b sobre V é o maior inteiro que é a dimensão de um subespaço $W \subset V$, tal que b restrita a W é negativa definida.

Se $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V, a matriz $(b_{ij}) = b(e_i, e_j)$, $n \times n$, é chamada a matriz de b relativa à base β. Em [21] prova-se que uma forma bilinear simétrica é não-degenerada se, e somente se, a matriz (b_{ij}) é não singular, ou seja, inversível.

Para falarmos de comprimento de uma curva, definir objetos geométricos como curvatura ou a área de uma região em uma variedade diferenciável M, é necessário considerar um tensor apropriado em M.

Definição 1.6. Um *tensor métrico* g, em uma variedade diferenciável M, é um $(0,2)$ tensor simétrico não-degenerado em M de índice constante.

Em outras palavras, um tensor métrico g sobre M é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$, uma forma bilinear simétrica não degenerada em T_pM com índice constante v, $\forall p \in M$. Se $v = 0$, M é uma variedade Riemanniana.

Definição 1.7. Uma *variedade semi-Riemanniana* é uma variedade diferenciável M munida de um tensor métrico g.

Em um sistema de coordenadas locais $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ em torno de p, as componentes do tensor métrico g são dadas por

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Como g é não degenerado, temos que em cada ponto p a matriz g_{ij} é inversível. Denotaremos a inversa por g^{ij}.

Pela simetria de g tem-se, $g_{ij} = g_{ji}$, então $g^{ij} = g^{ji}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Assim, em U, o tensor métrico pode ser escrito como

$$g = \sum g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

Para um inteiro ν, com $0 \leq \nu \leq n$, o espaço $\mathbb{R}^n_\nu$ munido com o tensor métrico

$$g(\mathrm{v}_p, w_p) = -\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{v}_i w_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} \mathrm{v}_j w_j, \tag{1.1}$$

de índice ν, é uma variedade semi-Riemanniana, chamado espaço *pseudo-Euclidiano*. Observe que, para o caso $\nu = 0$, a expressão (1.1) reduz-se à métrica euclidiana e $\mathbb{R}^n_0$ ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$; para $\nu = 1$, com $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n_1$ é chamado espaço de *Lorentz-Minkowski*.

Fixando a notação

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1, & 1 \leq i \leq \nu, \\ +1, & \nu + 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

o tensor métrico (1.1) pode ser escrito na seguinte forma

$$g = \sum \varepsilon_i dx_i \otimes dx_j.$$

Definição 1.8. Um vetor tangente v em uma variedade semi-Riemanniana (M,g) é:

(i) *tipo-espaço* se $g(v,v) > 0$ ou $v = \mathbf{0}$;

(ii) *tipo-nulo* se $g(v,v) = 0$ e $v \neq \mathbf{0}$;

(iii) *tipo-tempo* se $g(v,v) < 0$.

Quando M é uma variedade de Lorentz, os vetores tipo-nulos são chamados *tipo-luz*.

A seguir, vamos caracterizar as noções de conexão e derivada covariante sobre uma variedade semi-Riemanniana. Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.9. Uma conexão ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X,Y) \longrightarrow \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades

(i) $\nabla_X Y$ é $\mathcal{D}(M)$-linear em X;

(ii) $\nabla_X Y$ é $\mathbb{R}$-linear em Y;

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y, \quad \forall\, f \in \mathcal{D}(M)$.

Assim, $\nabla_X Y$ é chamada a *derivada covariante* de Y na direção de X com respeito à conexão ∇.

Teorema 1.1. *Em uma variedade semi-Riemanniana M existe uma única conexão ∇ tal que*

(i) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$,

(ii) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall\, X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$.

∇ *é chamada* ***Conexão de Levi-Civita*** *de* M*, e é caracterizada pela fórmula de Koszul*

$$2g(\nabla_Y Z,X) = Yg(Z,X)+Zg(X,Y)-Xg(Y,Z)-g(Y,[Z,X])+g(Z,[X,Y])+g(X,[Y,Z]).$$

Demonstração. Ver [21]. □

Em um sistema de coordenadas locais $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$, a conexão é definida por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde Γ_{ij}^k são os *símbolos de Christoffel* da conexão ∇ que são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m g^{mk}\left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij}\right].$$

No caso semi-Riemanniano os conceitos de transporte paralelo e geodésica são introduzidos de maneira análoga ao caso Riemanniano. No que segue, definiremos completude de uma variedade semi-Riemanniana.

Definição 1.10. Uma variedade semi-Riemanniana (M,g) é *(geodesicamente completa) completa* se toda geodésica de M está definida em todo $\mathbb{R}$.

Em uma variedade semi-Riemanniana M existe uma generalização dos operadores diferenciais: *Gradiente, Divergente e Laplaciano.*

Definição 1.11. Considere (M,g) uma variedade semi-Riemanniana e f uma função diferenciável definida em M. Então,

(i) o *Gradiente* de f em um ponto $p \in M$, denotado por $\nabla_g f$, é definido por

$$g(\nabla_g f, X) = df(X);\ \forall\, X \in \mathcal{X}(M).$$

(ii) a *Hessiana* de f é dado por

$$\nabla_g^2 f(X,Y) = Hess_g f(X,Y) = g(\nabla_X \nabla_g f, Y).$$

(iii) o *Laplaciano* de f, denotado por

$$\Delta_g f = div(\nabla_g f),$$

onde o $div : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é o divergente do campo X definido por

$$divX_p = \text{traço}\{Y_p \longrightarrow \nabla_Y X(p)\}, \ \forall\ p \in M.$$

Em um sistema de coordenadas locais (U,x), o qual será utilizado nos próximos capítulos, temos que os operadores Gradiente, Hessiano e o Laplaciano são dados, respectivamente, por

$$\begin{cases} ||\nabla f||^2 = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}, \\ (Hess_g f)_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_k}, \\ \Delta_g f = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} - \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big). \end{cases}$$

1.1.1 Curvaturas

Iniciaremos esta seção com algumas definições básicas do operador curvatura, que intuitivamente mede o quanto uma variedade deixa de ser Euclidiana e das curvaturas seccional, de Ricci e escalar. Veremos que não são necessárias alterações significativas nestas definições para variedades Riemannianas, ao estendê-las para variedades semi-Riemannianas. Para maiores detalhes, sugerimos ao leitor ver [21].

Lema 1.1. Seja M uma variedade semi-Riemanniana com ∇ a conexão de Levi-Civita. A aplicação $R : \mathcal{X}^3(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M)$$

é um $(1,3)$ tensor em M, chamado *tensor curvatura*.

Considerando um sistema de coordenadas (U,x) em torno de $p \in M$,

$$R\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\Big)\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i R_{jkl}^{i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde as componentes de R são dadas por

$$R_{jkl}^{i} = \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma_{kj}^{i} - \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{lj}^{i} + \sum_m \Gamma_{lm}^{i}\Gamma_{kj}^{m} - \sum_m \Gamma_{km}^{i}\Gamma_{lj}^{m}.$$

O tensor curvatura R é, em geral, muito complicado. Agora, vamos considerar uma função real mais simples que determina o tensor curvatura R completamente.

Definição 1.12. Um subespaço bidimensional Π do espaço tangente T_pM é dito *plano tangente* à M em p. Mais ainda,

$$Q(X,Y) := g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2,$$

para vetores tangentes X,Y.

O plano tangente Π é não degenerado se e somente se $Q(X,Y) \neq 0$, para alguma base $\{X,Y\}$ de Π.

Lema 1.2. Seja Π um subespaço bidimensional não degenerado do espaço tangente T_pM. O número

$$K(X,Y) = \frac{g(R(X,Y)X,Y)}{Q(X,Y)}$$

é independente da escolha da base $\{X,Y\}$ para Π e é chamado de *curvatura seccional* de Π em p.

Definiremos a seguir conceitos importantes que dependem da curvatura seccional, quais sejam, o tensor de Ricci e a curvatura escalar.

Definição 1.13. Seja R o tensor curvatura de uma variedade semi-Riemanniana (M,g). O *tensor curvatura de Ricci* é definido por

$$Ric_p(X,Y) = \text{traço}\{Z \longrightarrow R(X,Z)Y\}$$

onde $X,Y,Z \in T_pM$.

Em um sistema de coordenadas locais (U,x), as componentes do tensor de Ricci são dadas por

$$R_{ij} = R\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) = \sum_{k=1}^{n} R^k_{kij} = \sum_{k,m=1}^{n} g^{km} R_{kljm}.$$

Definição 1.14. Considere (M,g) uma variedade semi-Riemanniana. A *curvatura escalar*, K, de M é uma função $K : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$K = \text{traço}\, A$$

onde A é uma aplicação linear auto-adjunda, $A : T_pM \longrightarrow T_pM$ associado ao tensor de Ricci,

$$Ric_g : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

que é uma forma bilinear simétrica.

Em um sitemas de coordenadas locais (U,x), temos que

$$K = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,k} g^{ij} R^{k}_{ijk}.$$

Prosseguindo, iremos definir e expor alguns resultados importantes sobre métricas conformes, que serão úteis na demonstração de resultados nos capítulos seguintes.

Definição 1.15. Duas métricas g e $\bar{g}$ em uma variedade M são *conformes* se existe uma função diferenciável, positiva e definida, $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo $p \in M$ e todo $u,v \in T_pM$ vale a igualdade

$$\bar{g}_p(u,v) = \frac{1}{\varphi^2(p)} g_p(u,v).$$

Se g for uma métrica flat *(tensor curvatura nulo)*, então a métrica $\bar{g}$ é chamada *conformemente flat*.

O seguinte resultado expressa a relação entre os tensores de Ricci nas métricas conformes, ver [16].

Proposição 1.1. Seja (M^n,g) uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $n \geq 3$ e $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$ uma métrica conforme à g. Então, os tensores de Ricci de g e de $\bar{g}$ satisfazem a relação

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi Hess_g(\varphi) + [\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)||\nabla_g\varphi||^2]g\Big\}. \tag{1.2}$$

No próximo capítulo, vamos considerar o espaço pseudo-Euclidiano $(\mathbb{R}^n,g)$ e a métrica $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$ conforme a métrica pseudo-Euclidiana. Neste caso, o tensor de Ricci da métrica $\bar{g}$ pela proposição acima é da forma

$$Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi Hess_g(\varphi) + [\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)||\nabla_g\varphi||^2]g\Big\}.$$

Em um sistema de coordenadas locais, a expressão para a curvatura escalar é dada por

$$
\begin{aligned}
K = R_{\bar{g}} &= \sum_{i,j} \bar{g}^{ij}\bar{R}_{ij} = \sum_{i,j} \varphi^2 \varepsilon_i \delta_{ij} \bar{R}_{ij} = \varphi^2 \sum_{i}^{n} \bar{R}_{ii}\varepsilon_i \\
&= \varphi^2 \Big[\sum_{i}^{n} \frac{1}{\varphi^2} \Big\{ (n-2)\varphi(Hess_g \varphi)_{ii} + (\varphi \Delta_g \varphi - (n-1)||\nabla_g \varphi||^2)\varepsilon_i \Big\} \Big] \varepsilon_i \\
&= (n-2)(\varphi\Delta_g\varphi) + n\varphi\Delta_g\varphi - n(n-1)||\nabla_g\varphi||^2 \\
&= 2n\varphi\Delta_g\varphi - 2\varphi\Delta_g\varphi - n(n-1)||\nabla_g\varphi||^2 \\
&= (n-1)[2\varphi\Delta_g\varphi - n||\nabla_g\varphi||^2],
\end{aligned}
$$

onde denotamos por δ_{ij} o delta de Kronecker, definido por

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}
$$

Logo, obtemos a seguinte expressão para curvatura escalar na métrica $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$

$$
R_{\bar{g}} = (n-1)(2\varphi\Delta_g\varphi - n||\nabla_g\varphi||^2). \tag{1.3}
$$

O próximo resultado, será útil para mostrarmos a completude de uma variedade Riemanniana que é conforme a uma variedade Riemanniana completa.

Proposição 1.2. Sejam M e $\overline{M}$ variedades Riemannianas e $f : M \to \overline{M}$ um difeomorfismo. Admita que $\overline{M}$ é completa e que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$
||v|| \geq c||df_p(v)||,
$$

para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM$. Então M também é completa.

Demonstração. Sejam $p, q \in M$ e uma curva $\gamma : [a,b] \to M$ diferenciável por partes em M ligando p e q tais que $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ e $f \circ \gamma : [a,b] \to \overline{M}$ uma curva diferenciável por partes em $\overline{M}$ ligando $f(p)$ e $f(q)$. Assim,

$$
\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \geq c \int_a^b |df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))| dt = c \int_a^b |(f \circ \gamma)'(t)| dt = c\ell(f \circ \gamma).
$$

Então,

$$\begin{aligned} d_M(p,q) &= inf\{\ell(\gamma);\ \gamma(a) = p \text{ e } \gamma(b) = q\} \\ &\geq c\ inf\{\ell(f\circ\gamma);\ (f\circ\gamma)(a) = f(p) \text{ e } (f\circ\gamma)(b) = f(q)\} \\ &= d_{\overline{M}}(f(p), f(q)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d_M(p,q) \geq d_{\overline{M}}(f(p), f(q)). \tag{1.4}$$

Agora, considere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M. Segue de (1.4) que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\overline{M}$. Como $\overline{M}$ é completa, temos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \bar{x} \in \overline{M}.$$

Seja $x = f^{-1}(\bar{x}) \in M$. Como f é um difeomorfismo, em particular f^{-1} é contínua. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M.$$

Logo, M é completa como espaço métrico e pelo Teorema de *Hopf - Rinow* [10], M é geodesicamente completa. □

1.2 Grupos de simetria de equações diferenciais

No século XIX o norueguês Sophus Lie apresentou uma alternativa visando solucionar equações diferenciais usando *grupos de simetria*. Um grupo de Lie é um grupo de simetria de um sistema de equações diferenciais, quando a ação do grupo transforma soluções do sistema em outras soluções. Mais precisamente, um grupo de simetria de um sistema de equações diferenciais é um grupo local de transformações G agindo em uma variedade diferenciável M com a propriedade de transformar uma solução x do sistema em uma outra solução $g\cdot x$, com $g \in G$.

A aplicação mais importante dessa técnica, consiste no uso de invariantes pela ação do grupo ou de subgrupos, para reduzir o número de variáveis de uma equação diferencial parcial, podendo reduzir para um sistema de equações diferenciais ordinárias que, a priori, facilita a busca por soluções, pois apresenta mais técnicas de resolução.

Nesta seção, falaremos de algumas definições e exemplos básicos sobre à teoria de grupos de simetria de um sistema de equações diferenciais parciais. As demonstrações dos resultados, e para um maior aprofundamento sobre o assunto, o leitor poderá encontrar em [19] no qual foi baseada esta seção.

1.2.1 Grupo local de transformações

Definição 1.16. Um *grupo de Lie* é uma variedade diferenciável G com uma estrutura de grupo, de tal modo que a aplicação

$$(x,y) \in G \times G \longrightarrow xy^{-1} \in G$$

é diferenciável. Equivalentemente se as aplicações

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis.

Definição 1.17. Seja M uma variedade diferenciável. Um *grupo local de transformações* agindo em M é dado por um grupo de Lie G, um subconjunto aberto U, tais que

$$\{e\} \times M \subset U \subset G \times M,$$

onde e é o elemento neutro do grupo, e uma aplicação diferenciável $\Psi : U \longrightarrow M$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) Se (h,x), $(g,\Psi(h,x))$ e $(g \cdot h,x)$ pertencem a U, então

$$\Psi(g,\Psi(h,x)) = \Psi(g \cdot h,x).$$

(b) Para todo $x \in M$,

$$\Psi(e,x) = x.$$

(c) Se $(g,x) \in U$, então $(g^{-1},\Psi(g,x)) \in U$ e

$$\Psi(g^{-1},\Psi(g,x)) = x.$$

Para simplificar, denotaremos $\Psi(g,x)$ por $g \cdot x$. Assim, na definição acima, teremos:

$$g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x,$$
$$e \cdot x = x,$$
$$g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x.$$

Para todo $g, h \in G$ e $x \in M$.

Uma órbita de um grupo local de transformação é o menor subconjunto não vazio invariante pela ação do grupo na variedade M.

Definição 1.18. Seja G um grupo de Lie local de transformações agindo em M, então, para cada $x \in M$, definimos a *órbita* através de x por

$$\mathcal{O}_x = \{g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_k \cdot x;\ k \geq 1,\ g_i \in G \text{ e } g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_k \cdot x \text{ está definido}\}.$$

Além disso, dizemos que o grupo G age *semi-regularmente* se todas as órbitas são subvariedades de M com a mesma dimensão.

Exemplo 1.2. O grupo de translações em $\mathbb{R}^n$ é um grupo de transformação. Seja $v \neq 0$ um vetor fixado em $\mathbb{R}^n$ e seja $G = \mathbb{R}$ o grupo aditivo. Defina,

$$\Psi_v(\varepsilon, x) = x + \varepsilon v, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Observe que as órbitas são retas paralelas a v, de forma que a ação é semi-regular com órbitas unidimensionais.

Agora, se considerarmos v um campo de vetores e denotarmos por $\Psi(\varepsilon, x)$ a curva integral maximal de v passando por x em M, dizemos que Ψ é o fluxo gerado por v. O fluxo de um campo vetorial possui as seguintes propriedades básicas:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \quad x \in M, \tag{1.5}$$

para todo $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que ambos os lados da equação estão definidas

$$\Psi(0, x) = x \tag{1.6}$$

e

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(\varepsilon, x) = v|_{\Psi(\varepsilon, x)} \tag{1.7}$$

para todo ε.

Comparando as propriedades (1.5) e (1.6) com a) e b) da Definição (1.17) vemos que o fluxo gerado por um campo vetorial é o mesmo que uma ação local do grupo de Lie $\mathbb{R}$ em uma variedade M. Dizemos que Ψ é um *grupo a* 1*-parâmetro de transformações* e v é chamado *gerador infinitesimal* da ação do grupo. Em cooordenadas locais teremos

$$\Psi(\varepsilon,x) = x + \varepsilon\xi(x) + O(\xi^2),$$

onde $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ são os coeficientes de v. Se $\Psi(\varepsilon,x)$ é algum grupo a 1-parâmetro de transformações agindo em M, então o gerador infinitesimal é obtido por

$$v|_x = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon,x). \tag{1.8}$$

O cálculo do fluxo, ou um grupo a 1-parâmetro gerado por um dado campo vetorial v, é frequentemente chamado de *exponenciação* do campo vetorial. Denotamos por

$$\exp(\varepsilon v)x \equiv \Psi(\varepsilon,x).$$

Exemplo 1.3. (*Exemplos de campos vetoriais e fluxos*)

a) Seja $M = \mathbb{R}$ com coordenada x, e considere o campo vetorial $v = \partial_x$. Então

$$\exp(\varepsilon v)x = \exp(\varepsilon\partial_x)x = (1+\varepsilon v)x = x+\varepsilon. \tag{1.9}$$

Para o campo vetorial $v = x\partial_x$, teremos que a exponencial

$$\exp(\varepsilon x\partial_x)x = e^{\varepsilon}x.$$

b) Consideremos $M = \mathbb{R}^n$. O campo vetorial sobre M tem a forma $v_a = \sum_i a_i\partial/\partial_{x_i}$, onde $a = (a_1,\ldots,a_n)$. A exponencial para o grupo de translação é da forma

$$\exp(\varepsilon v_a)x = x + \varepsilon a, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

c) Considere o grupo de rotações em $M = \mathbb{R}^2$

$$\Psi(\varepsilon,(x,y)) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon,\ x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon).$$

Seu gerador infinitesimal é um campo vetorial $v = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$, onde de acordo por (1.8)

$$\xi(x,y) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon) = -y,$$

$$\eta(x,y) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} (x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon) = x.$$

Logo, $v = -y\partial_x + x\partial_y$ é o gerador infinitesimal. O grupo de transformações acima coincide com as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = -y, \qquad \frac{dy}{d\varepsilon} = x.$$

1.2.2 Invariantes pela ação do grupo

Definição 1.19. Seja G um grupo local de transformações agindo em uma variedade M. Uma função $\xi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada um invariante de G se para todo $x \in M$ e para todo $g \in G$ tal que $g \cdot x$ está definido, vale

$$\xi(g \cdot x) = \xi(x).$$

O próximo resultado mostra uma condição necessária e sufuciente para que uma função seja invariante.

Proposição 1.3. Seja G um grupo conexo de transformações agindo em uma variedade M. Uma função diferenciável $\xi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função invariante para G se, e somente se,

$$v(\xi) = 0, \ \forall\, x \in M, \tag{1.10}$$

e para todo gerador infinitesimal v de G.

Frequentemente estamos interessados em determinar quantos invariantes um dado grupo de transformações locais possui.

Definição 1.20. Considere $\xi_1(x), \ldots, \xi_k(x)$ funções reais e diferenciáveis, definidas em M. Então

(a) $\xi_1, \ldots, \xi_k$ são chamadas *funcionalmente dependentes* se para cada $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e uma função real diferenciável $F(z_1, \ldots, z_k)$, não identicamente nula em qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^k$, tal que

$$F(\xi_1(x), \ldots, \xi_k(x)) = 0,$$

para todo $x \in U$.

(b) $\xi_1, \ldots, \xi_k$ são chamadas *funcionalmente independentes* se não são funcionalmente dependentes quando restritas a um subconjunto aberto $U \subset M$.

O próximo resultado fornece a quantidade máxima de invariantes funcionalmente independentes, que podemos obter por uma ação de G em M. A demonstração do Teorema abaixo pode ser encontrado em [19].

Teorema 1.2. *Suponha que G age semi-regularmente na variedade M de dimensão m com órbitas s-dimensionais. Se $x_0 \in M$, então existe precisamente $m-s$ invariantes funcionalmente independentes $\xi_1, \ldots, \xi_{m-s}$ definidos em uma vizinhança de x_0. Além disso, qualquer outro invariante definido nesta vizinhança é da forma*

$$\xi(x) = F(\xi_1(x), \ldots, \xi_{m-s}(x)),$$

para alguma função diferenciável F.

Apresentaremos agora, um método para encontrar invariantes de um dado grupo de transformações. Para encontrarmos esses invariantes, consideremos G um grupo de transformações a 1- parâmetro agindo em M, com gerador infinitesimal

$$v = \xi_1(x)\partial_{x_1} + \ldots + \xi_m(x)\partial_{x_m},$$

expresso em alguma parametrização local dada. Pela Proposição (1.3), um invariante ξ de G é uma solução da seguinte equação diferencial parcial linear de primeira ordem

$$v(\xi) = \xi_1(x)\partial_{x_1}(\xi) + \ldots + \xi_m(x)\partial_{x_m}(\xi) = 0. \tag{1.11}$$

O Teorema (1.2) diz então que, se v é não nulo, então existem $m-1$ invariantes funcionalmente independentes e, consequentemente, $m-1$ soluções funcionalmente independentes da equação diferencial parcial (1.11) em uma vizinhança de $x_0 \in M$.

O cálculo de invariantes independentes para grupo de transformações a r-parâmetros, com $r > 1$, em geral pode ser muito complicado. O cálculo consiste no seguinte: Se $v_k = \sum \xi_k^i(x)\partial_{x_i}$, $k = 1, \ldots, r$ forma uma base para os geradores infinitesimais, então os invariantes são encontrados resolvendo o seguinte sistema linear homogêneo de equações diferenciais parciais de primeira ordem

$$v_k = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i(x)\partial_{x_i}(\xi) = 0, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Exemplo 1.4. Consideremos o grupo de rotações $SO(2)$ no plano, com gerador infinitesimal $v = -y\partial_x + x\partial_y$. O sistema característico correspondente é

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}.$$

Resolvendo esta EDO de primeira ordem, obtemos $x^2 + y^2 = c$, onde c é uma constante arbitrária. Portanto, $\xi(x,y) = x^2 + y^2$ é o único invariante independente do grupo de rotação.

1.3 Quase solitons gradientes de Ricci

Em dimensão $n = 2$ o fluxo de Yamabe é equivalente o fluxo de Ricci. No entanto, em dimensão $n \geq 3$ os fluxos de Yamabe e de Ricci se comportam de maneiras diferentes, pois o primeiro preserva classes de métricas conformes, mas o fluxo de Ricci em geral não preserva.

Hamilton introduziu o conceito de soliton de Ricci, que são as soluções auto-similares para o fluxo de Ricci. Os solitons de Ricci são importantes para compreender as singularidades do fluxo de Ricci, pois, são possíveis modelos de singularidades do fluxo, e, por essa razão, é fundamental entendermos a geometria e classificar tais solitons. Dizemos que uma variedade diferenciável é um *quase* soliton de Ricci se satisfaz

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g,$$

onde $\mathcal{L}_X g$ representa a derivada de Lie na métrica g com relação a um campo $X \in \mathcal{X}(M)$ e λ uma função diferenciável arbitrária.

Quando $X = \nabla h$ para alguma função h definida em M, temos a seguinte definição:

Definição 1.21. Uma variedade semi-Riemanniana (M^n, g) é um *quase soliton gradiente de Ricci*, se existem duas funções diferenciáveis h e λ em M de modo que

$$Ric_g + Hess_g(h) = \lambda g, \tag{1.12}$$

onde Ric_g é o tensor de Ricci, $Hess_g(h)$ é a Hessiana da função potencial h em relação a métrica g.

Um quase soliton gradiente de Ricci é dito ser *contraído*, *estável* ou *expansivo* se $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda < 0$, respectivamente. Se λ tem sinal não constante será chamada de *indefinida*.

O conceito de quase soliton gradiente de Ricci foi introduzido por [23]; trata-se de uma generalização da noção de *soliton gradiente de Ricci*, caso em que a função λ é constante.

Normalmente, quando a variedade é Riemanniana, pede-se que a variedade seja completa. No caso semi-Riemanniano não requer na definição que (M,g) seja completo, ver [2], [5], [6] e [20].

Exemplo 1.5. *(Variedades de Einstein)*
Os quase solitons gradientes de Ricci generalizam as variedades de Einstein. De fato, pela definição de variedade de Einstein, basta considerar h constante na equação (1.12).

1.4 Solitons gradientes de Yamabe

Uma variedade Riemanniana (M,g) é um *soliton de Yamabe* se admite um campo vetorial X tal que

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = (R-\lambda)g, \tag{1.13}$$

onde $\mathcal{L}_X$ denota a derivada de Lie na direção do campo vetorial X na métrica g e λ um número real, [11].

Os solitons de Yamabe representam um tipo de solução especial para o fluxo de Yamabe, e correspondem às soluções auto-similares do fluxo. Os solitons são soluções estacionárias de fluxos geométricos. Tais soluções possuem a propriedade de preservar a mesma geometria da métrica inicial ao longo do fluxo de Yamabe. Em outras palavras, tenta uniformizar a curvatura escalar ao longo do fluxo.

Quando $X = \nabla f$ na equação (1.13), para alguma função f definida em M, podemos reescrevê-la utilizando as propriedades da derivada de Lie e pelo fato de $\nabla g = 0$ temos que

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\nabla f})g(Y,Z) &= g(\nabla_Y \nabla f, Z) + g(Y, \nabla_Z \nabla f) = g(\nabla_Y \nabla f, Z) + g(\nabla_Y \nabla f, Z)\\ &= 2g(\nabla_Y \nabla f, Z),\end{aligned}$$

para todo $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$. Como a Hessiana da f é dada por

$$Hess_g f(Y,Z) = g(\nabla_Y \nabla f, Z),$$

obtemos que

$$\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2Hess_g f.$$

Assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.22. Uma variedade semi-Riemanniana (M^n,g) de dimensão $n \geq 3$ é chamada de *soliton gradiente de Yamabe* se existe uma função potencial diferenciável $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e uma constante λ tal que

$$Hess_g f = (R-\lambda)g \tag{1.14}$$

onde R denota a curvatura escalar na métrica g.

Além disso, se $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda < 0$, chamamos o soliton gradiente de Yamabe de *contraído*, *estável* ou *expansivo*, respectivamente.

Na definição de soliton gradiente de Yamabe, quando a variedade M é Riemanniana usualmente pede-se que a variedade seja completa, no caso semi-Riemanniano não é necessário, ver [7], [9].

A seguir, apresentaremos alguns clássicos exemplos de sólitons gradiente de Yamabe.

Exemplo 1.6. (*Variedades de Einstein*)
Dizemos que uma variedade Riemanniana (M,g) é Einstein se existir uma constante real λ tal que

$$Ricg(t) = \lambda g(t).$$

Considerando f uma função potencial constante, teremos pela Equação (1.14)

$$Rg = \lambda g.$$

Logo, toda variedade de Einstein é um soliton gradiente de Yamabe.

Exemplo 1.7. (*Soliton de Yamabe Gaussiano*)
Considere o espaço eucliano $(\mathbb{R}^n, g)$, onde $g = \delta_{ij}$ é a métrica canônica, e seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ a função potencial definida por

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}||x||^2$$

para alguma constante λ. Como $R_g \equiv 0$, tal soliton satisfaz

$$Hess_g(f) = \lambda g.$$

Logo, $(\mathbb{R}^n, g, f)$ é um soliton gradiente de Yamabe.

1.5 Produto Torcido

Introduziremos nesta seção uma classe de métricas mais rica que a métrica produto. Para mais informações sugerimos ao leitor ver [21] e [22] na qual foi baseada esta seção. A métrica produto torcido foi introduzido em 1969 por Bishop e O'Neil no artigo [22] com o objetivo de construir variedades Riemannianas com curvatura negativa.

Considere $(B,\ g_B)$ e $(F,\ g_F)$ variedades semi-Riemannianas. Uma variedade produto é um variedade semi-Riemanniana $(B\times F,\ g)$ com o tensor métrico

$$g=\pi^*(g_B)+\sigma^*(g_F),$$

onde,

$$\begin{aligned} \pi : B\times F &\longrightarrow B \\ (x,y) &\longmapsto \pi(x,y)=x \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \sigma : B\times F &\longrightarrow F \\ (x,y) &\longmapsto \sigma(x,y)=y, \end{aligned}$$

são as projeções canônicas de $B\times F$ sobre B e F, respectivamente.

Introduziremos agora, a noção de levantamento, que relaciona a variedade produto $M\times N$ com cada componente M e N.

Definição 1.23. Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis e $M\times N$ a variedade produto com $f\in\mathcal{D}(M)$.

(i) O *levantamento* de f a $M\times N$ é definido por $\tilde{f}=f\circ\pi\in\mathcal{D}^\infty(M\times N)$;

(ii) Se $v\in T_pM$ e $q\in N$ então o levantamento de v a (p,q) é o único vetor $\tilde{v}\in T_{(p,q)}M$ tal que $d\pi(\tilde{v})=v$. Como $\tilde{v}\in T_{(p,q)}M$ então $d\sigma(\tilde{v})=0$;

(iii) Se $X\in\mathcal{X}(M)$, o levantamento de X a $M\times N$ é o campo vetorial $\tilde{X}$ em $M\times N$ cujo valor em $(p,q)\in M\times N$ é o levantamento de X_p a (p,q). Assim,

$$d\pi(\tilde{X}_{(p,q)})=(X\circ\pi)(p,q)=X_p \quad \text{e} \quad d\sigma(\tilde{X}_{(p,q)})=0.$$

Portanto, o levantamento de $X\in\mathcal{X}(M)$ a $M\times N$ é o único elemento de $\mathcal{X}(M\times N)$ que é π-relacionado a X e σ-relacionado ao campo vetorial nulo em N. E ainda, como $d\sigma|_{T_{(p,q)}M}=0$, o levantamento $\tilde{X}$ de $X\in\mathcal{X}(M)$ a $M\times N$ é constante em cada fibra $\{p\}\times N$.

(iv) O conjunto de todos os levantamentos $\tilde{X}$ de $X\in\mathcal{X}(M)$ é denotado por $\mathcal{L}(M)$ e tais levantamentos são chamados horizontais;

(v) Funções, vetores tangentes e campos de vetores em N são levantamentos para $M\times N$ da mesma forma usando-se a projeção σ. O conjunto de todos os levantamentos $\tilde{Y}$ de $Y\in\mathcal{X}(N)$ é denotado por $\mathcal{L}(N)$, tais levantamentos são chamados verticais e $\tilde{Y}\in\mathcal{X}(M\times N)$.

Agora, definiremos produto torcido como sendo uma generalização de produto semi-Riemanniano.

Definição 1.24. Sejam (B,g_B) e (F,g_F) varidades semi-Riemannianas e $f: B \longrightarrow (0,\infty)$. O *produto torcido* $M = B\times_f F$ é a variedade produto $B\times F$ com a métrica

$$g = \pi^*(g_B) + (f\circ\pi)^2\sigma^*(g_F),$$

onde π e σ são as projeções de $B\times F$ em B e F, respectivamente.

Observação 1.1. Chamamos f de *função torção*. Se $f\equiv 1$, então $B\times_f F$ reduz-se à variedade produto semi-Riemanniana.

As fibras $\{p\}\times F = \pi^{-1}(p)$ e as folhas $B\times\{q\} = \sigma^{-1}(q)$ com $p\in B$ e $q\in F$, são subvariedades de M.

Observação 1.2. A métrica produto torcido é caracterizada por

(i) Para cada $q\in F$, a aplicação $\pi|_{(B\times\{q\})}$ é uma isometria sobre B,

(ii) Para cada $p\in B$, a aplicação $\sigma|_{(\{p\}\times F)}$ é uma homotetia sobre F, com fator escalar $1/f(p)$,

(iii) Para cada $(p,q)\in M$, as folhas $B\times\{q\}$ e as fibras $\{p\}\times F$ são ortogonais em (p,q).

O Corolário a seguir mostra as expressões que a curvatura de Ricci satisfaz na variedade produto torcido, ver [21].

Corolário 1.1. Sejam $M = B\times_f F$ um produto torcido, com $\tilde{X},\tilde{Y}\in\mathcal{L}(B)$ e $\tilde{V},\tilde{W}\in\mathcal{L}(F)$. Então,

(a) $Ric(\tilde{X},\tilde{Y}) = Ric^B(X,Y) - \dfrac{d}{f}Hess_{g_B}f(\tilde{X},\tilde{Y});$

(b) $Ric(\tilde{X},\tilde{V}) = 0;$

(c) $Ric(\tilde{V},\tilde{W}) = Ric^F(V,W) - \left[\dfrac{\Delta_B f}{f} + (d-1)\dfrac{\langle grad_{g_B}f,\ grad_{g_B}f\rangle}{f^2}\right]\langle\tilde{V},\tilde{W}\rangle.$

O Lema a seguir mostra que se a base B e a fibra F são completas, então a variedade produto torcido é completa. A demonstração deste resultado pode ser encontrado em [22].

Lema 1.3. $M = B\times_f F$ é completa se, e somente se, B e F são completas.

A seguir, exibiremos alguns exemplos clássicos de produto torcido.

Exemplo 1.8. (*Superfícies de Rotação*)
Toda superfície de rotação é um produto torcido, sendo suas folhas as diferentes posições da curva geratriz e as fibras os círculos de revolução.

Seja S uma superfície de rotação. Considere a parametrização $\varphi : (0,2\pi) \times (a,b) \longrightarrow S$ dada por

$$X(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)),$$

onde $\alpha : (a,b) \longrightarrow \alpha((a,b))$, $\alpha(v) = (f(v),0,g(v))$ com $f(v) > 0$ é uma parametrização de uma curva C. Então a métrica em S é dada por

$$ds^2 = du^2 + [f(v)]^2 dv^2,$$

onde du^2 é a métrica em $\mathbb{S}^1(1)$. Logo, $S = C \times_f \mathbb{S}^1(1)$.

Exemplo 1.9. ($\mathbb{R}^3 - \{0\}$ *com estrutura do produto torcido*)
Considere $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ em coordenadas esféricas, isto é, $(x,y,z) = (r\cos u \sin v, r\sin u \sin v, r\cos v)$; a métrica é dada por

$$ds^2 = dr^2 + r^2(du^2 + \sin^2 u du^2).$$

Temos que $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ é difeomorfo a $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^2$ pela aplicação $(t,p) \longmapsto tp$. Portanto, $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ pode ser identificado como o produto torcido $\mathbb{R}_+ \times_r \mathbb{S}^2$. Em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ as folhas são os raios que partem da origem e as fibras são as esferas $\mathbb{S}^2(r)$ com $r > 0$.

CAPÍTULO 2

Soluções invariantes para quase solitons gradientes de Ricci

Em [17], os autores usaram uma técnica da teoria de grupos de simetria de equações diferenciais para reduzir um determinado sistema de EDP's em EDO's, isto é, consideraram os invariantes pela ação do grupo de simetria, mais precisamente, os invariantes básicos pelas ações dos grupos de *translação* e *rotação*. Inicialmente, consideraram um quase soliton gradiente de Ricci com a métrica do produto torcido e forneceram as equações diferenciais que caracterizam tais solitons.

Prosseguindo, também em [17], os autores forneceram uma classificação para quase solitons gradientes de Ricci conformemente flat, invariantes pelas ações de um grupo de translação ou um grupo pseudo-ortogonal, que, no caso Riemanniano, é o grupo de rotação. Finalmente, na última seção desde capítulo, exibiremos alguns exemplos explícitos.

2.1 Quase solitons gradientes de Ricci para produto torcido

Em [17], os autores encontraram uma família de quase solitons gradientes de Ricci no caso do produto torcido $(M,\tilde{g}) = (\mathbb{R}^n,\bar{g}) \times_f (F^m,g_F)$, onde a fibra F é uma variedade de Einstein semi-Riemanniana e a base $\mathbb{R}^n$ é conforme a um espaço pseudo-Euclidiano invariante sob a ação de um grupo de translação de dimensão $n-1$.

O resultado seguinte exibe um sistema de equações diferenciais ordinárias que as funções φ, f, λ e h satisfazem quando $(M,\tilde{g}) = (\mathbb{R}^n,\bar{g}) \times_f (F^m,g_F)$ é um quase soliton gradiente de Ricci.

Teorema 2.1. *Sejam $(\mathbb{R}^n,g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas cartesiana $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, $\varepsilon_i = \pm 1$. Consi-*

dere $(M,\tilde{g}) = (\mathbb{R}^n,\bar{g}) \times_f (F^m,g_F)$*, onde* $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2}g$ *e* F *é uma variedade de Einstein semi-Riemanniana com curvatura de Ricci* λ_F*. Além disso, suponha que exitem funções diferenciáveis não constantes* $h(\xi)$*,* $\lambda(\xi)$ *e* $f(\xi) > 0$*, onde* $\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$*,* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *e* $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0}$ *é igual* -1 *ou* 1 *se é um vetor tipo-tempo ou tipo-espaço, respectivamente. Então, a métrica do produto torcido,* $\tilde{g} = \bar{g} + f^2 g_F$*, é um quase soliton gradiente de Ricci com h como função potencial se, e somente se, as funções* φ*,* f*,* λ *e* h *satisfazem*

$$\begin{aligned} f\big[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h''\big] - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' &= 0, \\ \varepsilon_{i_0}\Big[f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + m\varphi\varphi' f' - f\varphi\varphi' h'\Big] &= \lambda f, \\ \varepsilon_{i_0}\Big[-f\varphi^2 f'' + (n-2)f\varphi f'\varphi' - (m-1)\varphi^2 (f')^2 + f\varphi^2 f' h'\Big] &= \lambda f^2 - \lambda_F. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Demonstração. Sejam $(\mathbb{R}^n,g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$, com coordenadas $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $(M,\tilde{g}) = (\mathbb{R}^n,\bar{g}) \times_f (F^m,g_F)$ um produto torcido onde $\tilde{g} = \bar{g} + f^2 g_F$, $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2}g$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$ e F é uma variedade de Einstein semi-Riemanniana com curvatura de Ricci constante λ_F.

Considerando $X_1,\ldots,X_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $Y_1,\ldots,Y_m \in \mathcal{L}(F)$, onde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{L}(F)$ são, respectivamente, os espaços dos levantamentos dos campos de vetores de $\mathbb{R}^n$ e F para $\mathbb{R}^n \times_f F^m$. Além disso, como $\tilde{g}(Y_i,Y_j) = \bar{g}(Y_i,Y_j) + f^2 g_F(Y_i,Y_j)$, onde $\bar{g}(Y_i,Y_j) = 0$, tem-se que $\tilde{g}(Y_i,Y_j) = f^2 g_F(Y_i,Y_j)$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} Ric_{\tilde{g}}(X_i,X_j) &= Ric_{\bar{g}}(X_i,X_j) - \frac{m}{f}Hess_{\bar{g}}f(X_i,X_j), \quad \forall\, i,j = 1,\ldots,n, \\ Ric_{\tilde{g}}(X_i,Y_j) &= 0, \quad \forall\, i = 1,\ldots,n, \quad \text{e} \quad j = 1,\ldots,m, \\ Ric_{\tilde{g}}(Y_i,Y_j) &= Ric_{g_F}(Y_i,Y_j) - \Big[f\Delta_{\bar{g}}f + (m-1)|\nabla_{\bar{g}}f|^2\Big]g_F(Y_i,Y_j), \quad \forall\, i,j = 1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sabemos que se $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2}g$, com $Ric_g \equiv 0$, então temos

$$Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi Hess_g\varphi + \big[\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)|\nabla_g\varphi|^2\big]g\Big\}. \tag{2.3}$$

Ademais, obtemos, a partir da métrica g, que

$$(Hess_g\varphi)(X_i,X_j) = \varphi_{x_i x_j}, \quad \Delta_g\varphi = \sum_k \varepsilon_k \varphi_{x_k x_k}, \quad |\nabla_g\varphi|^2 = \sum_k \varepsilon_k (\varphi_{x_k})^2. \tag{2.4}$$

Substituindo as expressões (2.4) na equação (2.3), segue-se que

$$\begin{cases} Ric_{\tilde{g}}(X_i,X_j) = (n-2)\dfrac{\varphi_{x_ix_j}}{\varphi}, \quad \forall\, i \neq j = 1,\ldots,n; \\ Ric_{\tilde{g}}(X_i,X_i) = \dfrac{1}{\varphi^2}\left\{(n-2)\varphi\varphi_{x_ix_i} + \left[\varphi\sum_k \varepsilon_k\varphi_{x_kx_k} - (n-1)\sum_k \varepsilon_k\varphi_{x_k}^2\right]\varepsilon_i\right\}, \quad \forall\, i = 1,\ldots,n. \end{cases} \tag{2.5}$$

Considerando $X_1,\ldots,X_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e a hipótese de que $(\mathbb{R}^n,\tilde{g})$ é um quase soliton gradiente de Ricci, então

$$Ric_{\tilde{g}}(X_i,X_j) = \lambda\tilde{g}(X_i,X_j) - Hess_{\tilde{g}}(h)(X_i,X_j).$$

Como $\tilde{g} = \bar{g} + f^2 g_F$, temos que

$$Ric_{\tilde{g}}(X_i,X_j) = \lambda\left[\bar{g}(X_i,X_j) + f^2 g_F(X_i,X_j)\right] - Hess_{\tilde{g}}(h)(X_i,X_j).$$

Lembre-se que $g_F(X_i,X_j) = 0$. Além disso, considerando h como um levantamento de alguma $\bar{h}$ em $\mathbb{R}^n$, isto é, $h = \bar{h}\circ\pi$ e X_i,X_j levantamentos de campos de vetores $\bar{X}_i,\bar{X}_j \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Temos que

$$\begin{aligned} Hess_{\tilde{g}}(h)(X_i,X_j) &= X_i(X_j(h)) - (\nabla_{X_i}X_j)(h) \\ &= X_i\langle\nabla h,\, X_j\rangle - \langle\nabla h,\, \nabla_{X_i}X_j\rangle \\ &= (X_i\langle{}^{\mathbb{R}^n}\nabla\bar{h},\, \bar{X}_j\rangle^{\mathbb{R}^n})\circ\pi - \langle{}^{\mathbb{R}^n}\nabla\bar{h},\, {}^{\mathbb{R}^n}\nabla_{\bar{X}_i}\bar{X}_j\rangle^{\mathbb{R}^n}\circ\pi \\ &= Hess_{\bar{g}}(\bar{h})(\bar{X}_i,\, \bar{X}_j)\circ\pi \\ &= Hess_{\bar{g}}(\bar{h})(d\pi(X_i),\, d\pi(X_j))\circ\pi \\ &= \pi^* Hess_{\bar{g}}(\bar{h})(X_i,\, X_j). \end{aligned}$$

Portanto, $Hess_{\tilde{g}}(h)(X_i,X_j) = Hess_{\bar{g}}(h)(X_i,X_j)$. Logo,

$$Ric_{\tilde{g}}(X_i,X_j) = \lambda\bar{g}(X_i,X_j) - Hess_{\bar{g}}(h)(X_i,X_j).$$

Agora, substituindo na primeira equação do sistema (2.2), temos

$$Ric_{\bar{g}}(X_i,X_j) - \frac{m}{f}Hess_{\bar{g}}(f)(X_i,X_j) = \lambda\bar{g}(X_i,X_j) - Hess_{\bar{g}}(h)(X_i,X_j). \tag{2.6}$$

Lembre-se que o tensor Hessiano de alguma função diferenciável W em coordenadas locais é dado por

$$Hess_{\bar{g}}(W)_{ij} = W_{x_ix_j} - \sum_{k=1}^{n}\bar{\Gamma}_{ij}^{k}W_{x_k}, \tag{2.7}$$

onde $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ são os símbolos de Christoffel da métrica $\bar{g}$. Para i, j, k distintos, com $\bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2} = \dfrac{\varepsilon_i \delta_{ij}}{\varphi^2}$ e $g^{ij} = \varphi^2 \varepsilon_i \delta_{ij}$, temos que

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{mk}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij}\Big]\\ &= \frac{1}{2} g^{kk}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij}\Big],\end{aligned}$$

onde,

$$g^{kk} = \varphi^2 \varepsilon_k \delta_{kk} = \varphi^2 \varepsilon_k, \quad g_{jk} = \frac{\varepsilon_j \delta_{jk}}{\varphi^2} = 0, \quad g_{ik} = \frac{\varepsilon_i \delta_{ik}}{\varphi^2} = 0, \quad g_{ij} = \frac{\varepsilon_i \delta_{ij}}{\varphi^2} = 0.$$

Daí, $\bar{\Gamma}_{ij}^k = 0$. Além disso,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^i = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{mi}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij}\Big] = \frac{1}{2} g^{ii}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{ji} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ii} - \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ij}\Big],$$

onde

$$g^{ii} = \varphi^2 \varepsilon_i \delta_{ii} = \varphi^2 \varepsilon_i, \quad g_{ji} = \frac{\varepsilon_j \delta_{ji}}{\varphi}^2 = 0, \quad g_{ii} = \frac{\varepsilon_i \delta_{ii}}{\varphi^2} = \frac{\varepsilon_i}{\varphi^2}, \quad g_{ij} = \frac{\varepsilon_i \delta_{ij}}{\varphi^2} = 0.$$

Assim,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^i = \frac{1}{2}\varphi^2 \varepsilon_i\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\varepsilon_i}{\varphi^2}\Big)\Big] = \frac{1}{2}\varphi^2 \varepsilon_i\Big[-\frac{2\varepsilon_i \varphi_{x_j}^2}{\varphi^4}\Big] = -\frac{\varepsilon_i^2 \varphi_{x_j}}{\varphi}.$$

Logo, $\bar{\Gamma}_{ij}^i = -\dfrac{\varphi_{x_j}}{\varphi}$.

Agora, observe que

$$\bar{\Gamma}_{ii}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{mk}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{im} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ii}\Big] = \frac{1}{2} g^{kk}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ii}\Big],$$

onde

$$g^{kk} = \varphi^2 \varepsilon_k, \quad g_{ik} = \frac{\varepsilon_i \delta_{ik}}{\varphi^2} = 0, \quad g_{ii} = \frac{\varepsilon_i \delta_{ij}}{\varphi^2}.$$

Daí,

$$\bar{\Gamma}_{ii}^k = \frac{1}{2}\varphi^2 \varepsilon_k\Big[-\frac{\partial}{\partial_{x_k}} g_{ii}\Big] = \frac{1}{2}\varphi^3 \varepsilon_k \frac{2\varepsilon_i \varphi_{x_k}}{\varphi^4}.$$

Portanto, $\bar{\Gamma}_{ii}^{k} = \varepsilon_i \varepsilon_k \dfrac{\varphi_{x_k}}{\varphi}$. Temos também que

$$
\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ii}^{i} &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{mi}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{im} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ii}\Big] \\
&= \frac{1}{2} g^{ii}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{ii} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ii} - \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ii}\Big] \\
&= \frac{1}{2} g^{ii}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{ii}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\varphi^2 \varepsilon_i \Big[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{{\varepsilon_i}^2}{\varphi}\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\varphi^2 \varepsilon_i \Big(-\frac{2\varepsilon_i \varphi \varphi_{x_i}}{\varphi^4}\Big),
\end{aligned}
$$

isto é, $\bar{\Gamma}_{ii}^{i} = -\dfrac{\varphi_{x_i}}{\varphi}$.

Assim, subtituindo na equação (2.7), obtemos

$$
Hess_{\bar{g}}(W) = W_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_i} W_{x_j}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_j} W_{x_i}}{\varphi} - \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij}\varepsilon_i \varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} W_{x_k}. \tag{2.8}
$$

Portanto, o operador Hessiano de alguma função diferenciável W é dado por

$$
\begin{cases}
Hess_{\bar{g}}(W)_{ij} = W_{x_i x_j} + \dfrac{\varphi_{x_j}}{\varphi} W_{x_i} + \dfrac{\varphi_{x_i}}{\varphi} W_{x_j}, \quad i \neq j; \\
Hess_{\bar{g}}(W)_{ii} = W_{x_i x_i} + 2\dfrac{\varphi_{x_i}}{\varphi} W_{x_i} - \varepsilon_i \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} W_{x_k}, \quad i = j.
\end{cases} \tag{2.9}
$$

Substituindo as equações (2.5) e (2.9) em (2.6), tem-se para o caso $1 \leq i \neq j \leq n$, que

$$
(n-2)\frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} - \frac{m}{f}\left(f_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_j} f_{x_i}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_i} f_{x_j}}{\varphi}\right) + h_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi} h_{x_i} + \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} h_{x_j} = 0.
$$

Daí,

$$
(n-2) f \varphi_{x_i x_j} + f \varphi h_{x_i x_j} - m \varphi f_{x_i x_j} - m \varphi_{x_i f x_j} - m \varphi_{x_j} f_{x_i} + f \varphi_{x_i} h_{x_j} + f \varphi_{x_j} h_{x_i} = 0. \tag{2.10}
$$

Agora, para o caso $1 \leq i = j \leq n$, obtemos

$$\frac{1}{\varphi^2}\left\{(n-2)\varphi\varphi_{x_ix_i} + \left[\varphi\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\varphi_{x_kx_k} - (n-1)\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\varphi_{x_k}^2\right]\varepsilon_i\right\}$$
$$-\frac{m}{f}\left(f_{x_ix_i} + 2\frac{\varphi_{x_i}f_{x_i}}{\varphi} - \varepsilon_i\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\frac{\varphi_{x_k}}{\varphi}f_{x_k}\right) = \lambda\varepsilon_i - \left(h_{x_ix_i} + 2\frac{\varphi_{x_i}h_{x_i}}{\varphi} - \varepsilon_i\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\frac{\varphi_{x_k}h_{x_k}}{\varphi}\right),$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}\varphi\big[(n-2)f\varphi_{x_ix_i} + f\varphi h_{x_ix_i} - m\varphi f_{x_ix_i} - 2m\varphi_{x_i}f_{x_i} + 2f\varphi_{x_i}h_{x_i}\big]&\\ +\varepsilon_i\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big[f\varphi\varphi_{x_kx_k} - (n-1)f\varphi_{x_k}^2 + m\varphi\varphi_{x_k}f_{x_k} - f\varphi\varphi_{x_k}h_{x_k}\Big] &= \varepsilon_i\lambda f. \qquad (2.11)\end{aligned}$$

Agora, considere $Y_1,\ldots,Y_m \in \mathcal{L}(F)$. Como $(M,\tilde{g})$ é um quase soliton gradiente de Ricci, então

$$Ric_{\tilde{g}}(Y_i,Y_j) = \lambda\tilde{g}(Y_i,Y_j) - Hess_{\tilde{g}}(h)(Y_i,Y_j),$$

e da terceira equação do sistema (2.2), temos que

$$\lambda\tilde{g}(Y_i,Y_j) - Hess_{\tilde{g}}(Y_i,Y_j) = Ric_{g_F}(Y_i,Y_j) - \big[f\Delta_{\bar{g}}f + (m-1)|\nabla_{\bar{g}}f|^2\big]g_F(Y_i,Y_j).$$

Como $\tilde{g}(Y_i,Y_j) = f^2g_F(Y_i,Y_j)$, pois $\bar{g}(Y_i,Y_j) = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}Ric_{g_F}(Y_i,Y_j) - \big[f\Delta_{\bar{g}}f + (m-1)|\nabla_{\bar{g}}f|^2\big]g_F(Y_i,Y_j)&\\ -\lambda f^2g_F(Y_i,Y_j) + Hess_{\tilde{g}}(Y_i,Y_j) &= 0.\end{aligned} \qquad (2.12)$$

Em sistemas de coordenadas locais, obtemos

$$|\nabla_{\bar{g}}f|^2 = \varphi^2\sum_k\varepsilon_kf_{x_k}^2 \quad \text{e} \quad \Delta_{\bar{g}}f = \varphi^2\sum_k\varepsilon_kf_{x_kx_k} - (n-2)\varphi\sum_k\varepsilon_k\varphi_{x_k}f_{x_k}. \qquad (2.13)$$

Como F é uma variedade de Einstein, então

$$Ric_{g_F}(Y_i,Y_j) = \lambda_F g_F(Y_i,Y_j). \qquad (2.14)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} Hess_{\tilde{g}}(h)(Y_i,Y_j) &= (Y_i,Y_j)(h) - (\nabla_{\tilde{g}Y_i}Y_j)(h) \\ &= \left(\frac{\nabla_{\tilde{g}} f}{f}\right)(h)\tilde{g}(Y_i,Y_j) \\ &= f\bar{g}(\nabla_{\bar{g}}h,\nabla_{\bar{g}}f)g_F(Y_i,Y_j) \\ &= \left(f\varphi^2\sum_k \varepsilon_k f_{x_k}h_{x_k}\right)g_F(Y_i,Y_j). \end{aligned}$$

Substituindo a equação acima e as equações (2.13) e (2.14) em (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_F g_F - \Bigg[f\Bigg(\varphi^2\sum_{k=1}^n \varepsilon_k f_{x_kx_k} - (n-2)\varphi\sum_{k=1}^n \varepsilon_k\varphi_{x_k}f_{x_k}\Bigg) \\ +(m-1)\varphi^2\sum\varphi^2\sum_k f_{x_k}^2\Bigg]g_F - \lambda f^2 g_F + \Bigg[f\varphi^2\sum_{k=1}^n \varepsilon_k f_{x_k}h_{x_k}\Bigg]g_F = 0. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k\Big[-f\varphi^2 f_{x_kx_k} + (n-2)f\varphi f_{x_k}\varphi_{x_k} - (m-1)\varphi^2 f_{x_k}^2 + f\varphi^2 f_{x_k}h_{x_k}\Big] = \lambda f^2 - \lambda_F. \quad (2.15)$$

Por hipótese $f(\xi)$ e $\varphi(\xi)$ são funções de ξ, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Então, as derivadas na $i-$ésima e $j-$ésima coordenadas com respeito a ξ são dadas por

$$\varphi_{x_i} = \alpha_{x_i}\varphi', \quad \varphi_{x_ix_j} = \alpha_i\alpha_j\varphi'', \quad \varphi_{x_ix_i} = \alpha_i^2\varphi''$$

$$f_{x_i} = \alpha_i f', \quad f_{x_ix_j} = \alpha_i\alpha_j f'', \quad f_{x_ix_i} = \alpha_i^2 f''$$

e

$$|\nabla_g\varphi|^2 = \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\alpha_i^2\right)(\varphi')^2 = \varepsilon_{i_0}(\varphi')^2, \quad \Delta_g\varphi = \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\alpha_i^2\right)\varphi'' = \varepsilon_{i_0}\varphi'',$$

onde $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0}$.

Substituindo as expressões das derivadas com respeito a ξ na equação (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} (n-2)f\varphi''\alpha_i\alpha_j + f\varphi h''\alpha_i\alpha_j - m\varphi f''\alpha_i\alpha_j - m\varphi' f'\alpha_i\alpha_j \\ - m\varphi' f'\alpha_i\alpha_j + f\varphi' h'\alpha_i\alpha_j + f\varphi' h'\alpha_i\alpha_j = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha_i\alpha_j\Big\{(n-2)f\varphi'' + f\varphi h'' - m\varphi f'' - m\varphi' f' - m\varphi' f' + f\varphi' h' + f\varphi' h'\Big\} = 0,$$

para todo $i \neq j$. Assim, se existir $i \neq j$ tais que $\alpha_i\alpha_j \neq 0$, então temos a primeira equação do sistema (2.1)

$$f\big[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h''\big] - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' = 0. \tag{2.16}$$

Agora, substituindo as expressões das derivadas na equação (2.11) tem -se

$$\begin{aligned}
&\varphi\alpha_i^2\Big\{f\Big[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h''\Big] - m\varphi f'' - 2m\varphi' f'\Big\}\\
&+\varepsilon_i\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\alpha_k^2\Big[f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + m\varphi\varphi' f' - f\varphi\varphi' h'\Big] = \varepsilon_i\lambda f.
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (2.16) na equação acima, com $\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\alpha_k^2 = \varepsilon_{i_0}$, teremos a segunda equação do sistema (2.1), isto é,

$$\varepsilon_{i_0}\Big[f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + m\varphi\varphi' f' - f\varphi\varphi' h'\Big] = \lambda f.$$

Finalmente, substituindo as expressões das derivadas em (2.15), obtemos a terceira do sistema (2.1),

$$\varepsilon_{i_0}\Big[-f\varphi^2 f'' + (n-2)f\varphi f'\varphi' - (m-1)\varphi^2(f')^2 + f\varphi^2 f' h'\Big] = \lambda f^2 - \lambda_F.$$

Reciprocamente, suponha que são satisfeitas as equações (2.1). Considerando $X_1,\ldots,X_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, queremos mostrar que

$$Ric_{\tilde{g}}(X_i,X_j) + Hess_{\tilde{g}}(h)(X_i,X_j) = \lambda\tilde{g}(X_i,X_j).$$

Primeiro caso, para todo $1 \leq i \neq j \leq n$, teremos

$$\begin{aligned}
Ric_{\tilde{g}} &= Ric_{\bar{g}}(X_i,X_j) - \frac{m}{f}Hess_{\bar{g}}f(X_i,X_j)\\
&= (n-2)\frac{\varphi_{x_ix_j}}{\varphi} - \frac{m}{f}\left[f_{x_ix_j} + \frac{\varphi_{x_j}f_{x_i}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_i}f_{x_j}}{\varphi}\right]\\
&= \alpha_i\alpha_j\left\{(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} - \frac{m}{f}\left[f'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}f'\right]\right\}\\
&= \frac{\alpha_i\alpha_j}{f\varphi}\Big[(n-2)f\varphi'' - m\varphi f'' - 2m\varphi' f'\Big].
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Hess_{\tilde{g}}(h) = Hess_{\bar{g}}(h) &= h_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi} h_{x_i} + \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} h_{x_j} \\ &= \frac{\alpha_i \alpha_j}{f\varphi}\Big[f\varphi h'' + 2f\varphi' h'\Big]. \end{aligned}$$

Além disso, como $\tilde{g} = \bar{g} + f^2 g_F$ e $g_F(X_i, X_j) = 0$ temos que

$$\lambda \tilde{g}(X_i, X_j) = \lambda[\bar{g}(X_i, X_j) + f^2 g_F(X_i, X_j)] = 0.$$

Pela primeira equação de (2.1), obtemos

$$Ric_{\tilde{g}}(X_i, X_j) + Hess_{\tilde{g}}(h)(X_i, X_j) = \lambda \tilde{g}(X_i, X_j).$$

Agora, para todo $i = 1, \ldots, n$

$$Ric_{\tilde{g}}(X_i, X_j) = Ric_{\bar{g}}(X_i, X_j) - \frac{m}{f} Hess_{\bar{g}} f(X_i, X_j).$$

Assim,

$$\begin{aligned} Ric_{\tilde{g}}(X_i, X_j) = \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi\varphi_{x_i x_i} + \Big[\varphi \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \varphi_{x_k x_k} - (n-1)\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (\varphi)^2_{x_k}\Big]\varepsilon_i\Big\} \\ - \frac{m}{f}\Big\{f_{x_i x_i} + 2\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} f_{x_i} - \varepsilon_i \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} f_{x_k}\Big\}. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} Ric_{\tilde{g}}(X_i, X_i) = &\alpha_i^2 \frac{1}{\varphi f}\Big[(n-2)f\varphi'' - m\varphi f'' - 2m\varphi' f'\Big] \\ &+ \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i_0}}{\varphi f}\Big[\varphi f \varphi'' - (n-1) f (\varphi')^2 + m\varphi' f'\Big]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Hess_{\tilde{g}}(h) = Hess_{\bar{g}}(h) &= h_{x_i x_i} + 2\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} h_{x_i} - \varepsilon_i \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} h_{x_k} \\ &= \frac{1}{\varphi}\Big\{\alpha_i^2[\varphi h'' + 2\varphi' h'] - \varepsilon_i \varepsilon_{i_0} \varphi' h'\Big\}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\lambda \tilde{g}(X_i, X_j) = \lambda \bar{g}(X_i, X_j).$$

Daí, pelo sistema (2.1) tem-se que

$$Ric_{\tilde{g}}(X_i,X_i)+Hess_{\tilde{g}}(h)(X_i,X_i)=\lambda\tilde{g}(X_i,X_i).$$

Agora, considere $Y_1,\ldots,Y_n\in\mathcal{L}(F)$. Mostraremos que

$$Ric_{\tilde{g}}(Y_i,Y_j)+Hess_{\tilde{g}}(h)(Y_i,Y_j)=\lambda\tilde{g}(Y_i,Y_j). \tag{2.17}$$

Para todo $1\leq i\neq j\leq n$, teremos

$$\begin{aligned} Ric_{\tilde{g}}(Y_i,Y_j) &= Ric_{g_F}(Y_i,Y_j)\\ &-\left[f\varphi^2\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k f_{x_kx_k}-(n-1)\varphi\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\varphi_{x_k}f_{x_k}+(m-1)\varphi^2\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k f_{x_k}^2\right]g_F(Y_i,Y_j). \end{aligned}$$

Por hipótese F é uma variedade de Einstein, então

$$Ric_{g_F}(Y_i,Y_j)=\lambda_F g_F(Y_i,Y_j).$$

Daí, com $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\alpha_i^2=\varepsilon_{i_0}$, obtemos

$$Ric_{\tilde{g}}=\left[\lambda_F-\varepsilon_{i_0}f\varphi^2f''-(n-1)\varepsilon_{i_0}\varphi\varphi'f'+(m-1)\varepsilon_{i_0}\varphi^2(f')^2\right]g_F(Y_i,Y_j).$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} Hess_{\tilde{g}}(h)(Y_i,Y_j) &= \left(f\varphi^2\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k f_{x_k}h_{x_k}\right)g_F(Y_i,Y_j)\\ &= \left[\varepsilon_{i_0}f\varphi^2f'h'\right]g_F(Y_i,Y_j). \end{aligned}$$

Além disso, $\tilde{g}=\bar{g}+f^2g_F$, como $\bar{g}(Y_i,Y_j)=0$, temos

$$\lambda\tilde{g}(Y_i,Y_j)=f^2g_F(Y_i,Y_j).$$

Pela terceira equação de (2.1), obtemos

$$Ric_{\tilde{g}}(Y_i,Y_j)+Hess_{\tilde{g}}(h)(Y_i,Y_j)=\lambda\tilde{g}(Y_i,Y_j).$$

Analogamente, para todo $i=1,\ldots,n$, obtemos (2.17). Logo, a métrica produto torcido $\tilde{g}=\bar{g}+f^2g_F$ é um quase soliton gradiente de Ricci com h como função potencial. $\square$

Para o próximo resultado, consideraremos o produto torcido $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$, onde a base é conforme a um espaço pseudo-Euclidiano e a fibra F^m é uma variedade semi-Riemanniana Ricci-*flat*, isto é, $Ric = 0$. Além disso, mediante uma hipótese técnica, concluiremos que as métricas $\tilde{g}$ são quase solitons gradientes de Ricci.

Teorema 2.2. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$, com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, $\varepsilon_i = \pm 1$ com pelo menos um $\varepsilon_i = 1$. Considere $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$, um produto torcido, onde $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$, F é uma variedade de Einstein semi-Riemanniana Ricci flat. Considere $f(\xi) > 0$, $\lambda(\xi)$ e $h(\xi)$ funções diferenciáveis não constantes, onde $\xi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, e $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0}$ igual a -1 ou a 1 se é um vetor tipo-tempo ou tipo-espaço, respectivamente. Dada alguma função $\varphi(\xi)$, a métrica produto torcido $\tilde{g} = \bar{g} + f^2 g_F$ é um quase soliton gradiente de Ricci com h como função potencial, onde as funções f, h e λ são dadas por*

$$\begin{cases} f(\xi)\varphi(\xi) = 1; \\ h(\xi) = k + \displaystyle\int \left\{ c - (m+n-2) \int \varphi\varphi'' d\xi \right\} \frac{1}{\varphi^2} d\xi; \\ \lambda(\xi) = \varepsilon_{i_0} \left\{ \varphi\varphi'' - (m+n-1)(\varphi')^2 - c\dfrac{\varphi'}{\varphi} + (m+n-2)\dfrac{\varphi'}{\varphi} \displaystyle\int \varphi\varphi'' d\xi \right\}, \end{cases} \tag{2.18}$$

onde c e k são constantes.

Demonstração. Considere a primeira equação do sistema (2.1)

$$f\left[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h''\right] - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' = 0.$$

Daí,

$$h'' + 2\frac{\varphi' h'}{\varphi} + (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} - m\frac{f''}{f} - 2m\frac{\varphi' f'}{\varphi f} = 0.$$

Agora, fazendo $y = h'$, a equação acima torna-se uma EDO de primeira ordem linear em y, isto é,

$$y' + 2\frac{\varphi' y}{\varphi} + (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} - m\frac{f''}{f} - 2m\frac{\varphi' f'}{\varphi f} = 0, \tag{2.19}$$

cujo fator integrante é dado por

$$u(\xi) = e^{\int 2\frac{\varphi'}{\varphi}} = \varphi^2.$$

Multiplicando o fator integrante na equação (2.19),

$$\varphi^2 y' + 2\varphi'\varphi y + (n-2)\varphi\varphi'' - m\varphi^2\frac{f''}{f} - 2m\frac{f'}{f}\varphi'\varphi = 0.$$

Daí,

$$(\varphi^2 y)' + (n-2)\varphi\varphi'' - m\varphi^2\frac{f''}{f} - 2m\frac{f'}{f}\varphi'\varphi = 0. \tag{2.20}$$

Integrando a equação (2.20) com respeito a ξ, temos que

$$\varphi^2 y = c + \int \Big[m\varphi^2\frac{f''}{f} + 2m\frac{f'}{f}\varphi'\varphi - (n-2)\varphi\varphi''\Big]d\xi,$$

isto é,

$$h'(\xi) = y = \frac{c}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^2}\int \Big[m\varphi^2\frac{f''}{f} + 2m\frac{f'}{f}\varphi'\varphi - (n-2)\varphi\varphi''\Big]d\xi\Big].$$

Integrando a equação acima com respeito a ξ, obtemos

$$h(\xi) = k + \int \Big\{c + \int \Big[m\varphi^2\frac{f''}{f} + 2m\frac{f'}{f}\varphi'\varphi - (n-2)\varphi\varphi''\Big]d\xi\Big\}\frac{1}{\varphi^2}d\xi. \tag{2.21}$$

Como estamos considerando $f\varphi = 1$, derivando duas vezes, obtemos

$$\varphi f'' + 2f'\varphi' = -f\varphi''. \tag{2.22}$$

Subtituindo a equação (2.22) em (2.21), tem-se que

$$\begin{aligned}
h(\xi) &= k + \int \Big\{c + \int \Big[m\varphi^2\frac{f''}{f} + 2m\frac{f'}{f}\varphi'\varphi - (n-2)\varphi\varphi''\Big]d\xi\Big\}\frac{1}{\varphi^2}d\xi \\
&= k + \int \Big\{c + \int \frac{\varphi}{f}\Big[m(\varphi f'' + 2f'\varphi') - (n-2)f\varphi''\Big]d\xi\Big\}\frac{1}{\varphi^2}d\xi \\
&= k + \int \Big\{c + \int \frac{\varphi}{f}\Big[-mf\varphi'' - (n-2)f\varphi''\Big]d\xi\Big\}\frac{1}{\varphi^2}d\xi \\
&= k + \int \Big\{c + \int \frac{\varphi}{f}\Big[-mf\varphi'' - nf\varphi'' + 2f\varphi''\Big]d\xi\Big\}\frac{1}{\varphi^2}d\xi.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$h(\xi) = k + \int \Big\{c - (m+n-2)\int \varphi\varphi'' d\xi\Big\}\frac{1}{\varphi^2}d\xi.$$

Segue que,

$$h'(\xi) = \frac{c}{\varphi^2} - \frac{(m+n-2)}{\varphi^2}\int \varphi\varphi'' d\xi.$$

Agora subtituindo h e h' na segunda equação do sistema (2.1), obtemos

$$\lambda f = \varepsilon_{i_0}\Big\{f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + m\varphi\varphi' f' - f\varphi\varphi'\Big[\frac{c}{\varphi^2} - \frac{(m+n-2)}{\varphi^2}\int \varphi\varphi'' d\xi\Big]\Big\},$$

isto é,

$$\lambda = \varepsilon_{i_0}\Big\{\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2 + m\varphi\varphi'\frac{f'}{f} - \varphi\varphi'\Big[\frac{c}{\varphi^2} - \frac{(m+n-2)}{\varphi^2}\int \varphi\varphi'' d\xi\Big]\Big\}. \tag{2.23}$$

Temos que $f = \dfrac{1}{\varphi}$, então $f' = -\dfrac{\varphi'}{\varphi^2}$, substituindo na equação (2.23)

$$\lambda(\xi) = \varepsilon_{i_0}\Big\{\varphi\varphi'' - (m+n-1)(\varphi')^2 - c\frac{\varphi'}{\varphi} + (m+n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}\int \varphi\varphi'' d\xi\Big\}. \tag{2.24}$$

Provaremos agora, que a expresão de λ acima está bem definida. Para isso, mostraremos que a terceira equação do sistema (2.1) é igual a equação (2.24).

Lembre - se que a terceira equação do sistema (2.1) é dada por

$$\varepsilon_{i_0}\Big[-f\varphi^2 f'' + (n-2)f\varphi f'\varphi' - (m-1)\varphi^2(f')^2 + f\varphi^2 f' h'\Big] = \lambda f^2 - \lambda_F. \tag{2.25}$$

Por hipótese F é Ricci flat, isto é, $\lambda_F = 0$ e

$$f = \frac{1}{\varphi}, \quad f' = -\frac{\varphi'}{\varphi^2} \quad \text{e} \quad f'' = -\frac{\varphi''}{\varphi} + 2\frac{(\varphi')^2}{\varphi^3}.$$

Substituindo as expressões acima em (2.25), obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda(\xi)\frac{1}{\varphi} &= \varepsilon_{i_0}\Big\{\frac{1}{\varphi^2}\Big[-\varphi\Big(-\varphi'' + 2\frac{(\varphi')^2}{\varphi}\Big) + (n-2)\varphi'(-\varphi') - (m-1)(\varphi')^2 - \varphi\varphi' h'\Big]\Big\} \\
&= \varepsilon_{i_0}\Big[\varphi\varphi'' - 2(\varphi')^2 - (n-2)(\varphi')^2 - (m-1)(\varphi')^2 - \varphi\varphi' h'\Big] \\
&= \varepsilon_{i_0}\Big[\varphi\varphi'' - (m+n-1)(\varphi')^2 - \varphi\varphi' h'\Big].
\end{aligned}$$

Agora, substituindo a expressão de h' na equação acima, temos que

$$\lambda(\xi) = \varepsilon_{i_0}\Big[\varphi\varphi'' - (m+n-1)(\varphi')^2 - c\frac{\varphi'}{\varphi} + (m+n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}\int \varphi\varphi'' d\xi\Big].$$

Portanto, a equação acima é igual a equação (2.24). Logo, pelo Teorema (2.1), a métrica produto torcido $\tilde{g} = \bar{g} + f^2 g_F$ é um quase soliton gradiente de Ricci. $\square$

Observação 2.1. No Teorema (2.2) onde $f\varphi = 1$, podemos reescrever a métrica $\tilde{g}$ como

$$\tilde{g} = \bar{g} + f^2 g_F = \frac{1}{\varphi^2} g_E + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 g_F = \frac{1}{\varphi^2}(g_E + g_F).$$

Logo, todas as métricas conformes a variedade produto $(\mathbb{R}^n \times F^m)$, invariantes por translação, onde F é uma variedade Ricci flat, são quase solitons gradientes de Ricci.

2.2 Quase solitons gradientes de Ricci conformes a um espaço pseudo-Euclidiano

Nesta seção, iremos caracterizar os quase solitons gradientes de Ricci invariantes sob a ação dos grupos de translação e rotação. Para isso, consideremos $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano com a métrica g e coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, onde $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $1 \leq i, j \leq n$, e δ_{ij} é o delta de Kronecker, $\varepsilon_i = \pm 1$ com pelo menos um $\varepsilon_i = 1$. Em cada caso, encontraremos funções diferenciáveis φ, f e λ tais que a métrica $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi} g$ satisfaça

$$Ric_{\bar{g}} + Hess_{\bar{g}}(h) = \lambda \bar{g}. \tag{2.26}$$

2.2.1 Quase solitons invariantes pela ação do grupo de rotação

Inicialmente, iremos caracterizar os quase solitons gradientes de Ricci invariantes por uma ação de um grupo pseudo-ortogonal que, no caso Riemanniano, é um grupo de rotação. Seja $r = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2$ um invariante básico para um grupo pseudo-ortogonal de dimensão $n-1$. Nosso objetivo é obter funções diferenciáveis $f(r)$, $\varphi(r)$ e $\lambda(r)$ tais que a métrica $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi} g$ satifaça a expressão (2.26). De fato, consideremos o seguinte resultado

Teorema 2.3. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$, com coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, $\varepsilon_i = \pm 1$ com pelo menos um $\varepsilon_i = 1$. Considere funções diferenciáveis não constantes $h(r)$ e $\varphi(r)$, onde $r = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2$. Existe uma métrica $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$ tal que $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ é um quase soliton gradiente de Ricci com h como função potencial se, e somente se, as funções h, φ e λ satisfazem*

$$\begin{cases} (n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h'' = 0, \\ 4(n-1)\varphi\varphi' + 4r\varphi\varphi'' - 4(n-1)r(\varphi')^2 - 4r\varphi\varphi' h' + 2\varphi^2 h' = \lambda. \end{cases} \tag{2.27}$$

Demonstração. Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano com coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Como a métrica $\bar{g}$ é um quase soliton gradiente de Ricci, obtemos

$$Ric_{\bar{g}} + Hess_{\bar{g}}(h) = \lambda \bar{g}, \quad \lambda \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n). \tag{2.28}$$

Lembre-se da relação $Ric_{\bar{g}}$ se $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$, isto é,

$$Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi Hess_{\bar{g}}\varphi + \Big[\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)|\nabla_g\varphi|^2\Big]g\Big\}. \tag{2.29}$$

Além disso, o operador Hessiano em coordenadas locais é dado por

$$\begin{cases} Hess_{\bar{g}}(h)_{ij} = h_{x_ix_j} + \dfrac{\varphi_{x_j}}{\varphi}h_{x_i} + \dfrac{\varphi_{x_i}}{\varphi}h_{x_j}, \quad \forall\, i \neq j, \\ Hess_{\bar{g}}(h)_{ii} = h_{x_ix_i} + 2\dfrac{\varphi_{x_i}}{\varphi}h_{x_i} - \varepsilon_i\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_k\dfrac{\varphi_{x_k}}{\varphi}h_{x_k}, \quad \forall\, i. \end{cases} \tag{2.30}$$

Para o caso $1 \leq i \neq j \leq n$, tem-se pelas expressões (2.28), (2.29) e (2.30),

$$(n-2)\frac{\varphi_{x_ix_j}}{\varphi} + h_{x_ix_j} + \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi}h_{x_i} + \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}h_{x_j} = 0.$$

Equivalentemente,

$$(n-2)\varphi_{x_ix_j} + \varphi_{x_i}h_{x_j} + \varphi_{x_j}h_{x_i} + \varphi h_{x_ix_j} = 0. \tag{2.31}$$

Para todo i temos que

$$\frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi\varphi_{x_ix_i} + \Big[\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)|\nabla_g\varphi|^2\Big]\varepsilon_i\Big\} \\ + h_{x_ix_i} + 2\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}h_{x_i} - \varepsilon_i\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_k\frac{\varphi_{x_k}}{\varphi}h_{x_k} = \lambda\varepsilon_i\frac{1}{\varphi}.$$

Assim,

$$\varepsilon_i\Big[\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)|\nabla_g\varphi|^2 - \varphi\sum_{k=1}^{n}\varphi_{x_k}h_{x_k}\Big] + \varphi\Big[(n-2)\varphi_{x_ix_i} + \varphi h_{x_ix_i} + 2\varphi_{x_i}h_{x_i}\Big] = \lambda\varepsilon_i. \tag{2.32}$$

Considerando $f(r)$ e $\varphi(r)$ funções de r, onde $r = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i^2$, temos que as derivadas com respeito a r, nas i-ésima e j-ésima coordenadas, são dadas por

$$\varphi_{x_i} = 2\varepsilon_i x_i\varphi', \quad \varphi_{x_ix_j} = 4\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j\varphi'', \quad \varphi_{x_ix_i} = 4x_i^2\varphi'' + 2\varepsilon_i\varphi',$$

$$h_{x_i} = 2\varepsilon_i x_i h', \quad h_{x_i x_j} = 4\varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j h'', \quad h_{x_i x_i} = 4x_i^2 h'' + 2\varepsilon_i h'.$$

Os operadores Gradiente e Laplaciano em coordenadas locais são dados por

$$|\nabla_g \varphi|^2 = 4r(\varphi')^2, \quad \Delta_g \varphi = 4r\varphi'' + 2n\varphi.$$

Substituindo as expressões acima na equação (2.31), obtemos

$$(n-2)4\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j \varphi'' + 4\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j \varphi' h' + 4\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j \varphi' h' + 4\varphi\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j h'' = 0,$$

isto é,

$$4\varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j \left[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h''\right] = 0, \quad \forall\, i \neq j.$$

Portanto,

$$(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h'' = 0. \tag{2.33}$$

Analogamente, subtituindo na equação (2.32), tem-se

$$\begin{aligned}\varepsilon_i\Big[4(n-1)\varphi\varphi' + 4r\varphi\varphi'' - 4(n-1)r(\varphi')^2 + 2\varphi^2 h' - 4r\varphi\varphi' h'\Big]&\\ + 4x_i^2\varphi\Big[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h''\Big] &= \varepsilon_i\lambda.\end{aligned}$$

Agora, subtituindo a equação (2.33) na expressão acima, obtemos a segunda equação do sistema (2.27), isto é,

$$4(n-1)\varphi\varphi' + 4r\varphi\varphi'' - 4(n-1)r(\varphi')^2 + 2\varphi^2 h' - 4r\varphi\varphi' h'.$$

Reciprocamente, suponha que as funções h, φ e λ satisfazem o sistema (2.27). Vamos mostrar que $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ é um quase soliton gradiente de Ricci com função potencial h.

Por um lado, temos que

$$Hess_{\bar{g}}(f) = f_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_i} f_{x_j}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_j} f_{x_i}}{\varphi} - \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} f_{x_k}.$$

Por outro lado, tem-se

$$Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi\varphi_{x_i x_j} + \Big[\varphi\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\varphi_{x_k x_k} - (n-1)\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\varphi_{x_k}^2\Big]g\Big\}.$$

Analisaremos dois casos. Quando $1 \leq i \neq j \leq n$, temos

$$
\begin{aligned}
Hess_{\bar{g}}(h)_{ij} &= h_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi} h_{x_i} + \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} h_{x_j} \\
&= 4\varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j \left[h'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi} h' \right].
\end{aligned}
$$

A expressão para o tensor de Ricci, reduz-se

$$
Ric_{\bar{g}} = (n-2)\frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} = 4\varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} \quad \text{e} \quad \lambda \bar{g} = 0.
$$

Logo, pela primeira equação do sistema (2.27), obtemos

$$
Ric_{\bar{g}} + Hess_{\bar{g}}(h) = \lambda \bar{g}.
$$

Agora, para todo $i = 1, \ldots, n$, temos que

$$
\begin{aligned}
Hess_{\bar{g}}(f) &= f_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_i} f_{x_j}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_j} f_{x_i}}{\varphi} - \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} f_{x_k} \\
&= \frac{4x_i^2}{\varphi}\left[\varphi h'' + 2h'\varphi' \right] + \frac{\varepsilon_i}{\varphi}\left[2\varphi h' - 4rh'\varphi' \right].
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2}\left\{ (n-2)\varphi\varphi_{x_i x_i}\left[\varphi \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \varphi_{x_k x_k} - (n-1)\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \varphi_{x_k}^2 \right]\varepsilon_i \right\},
$$

e $\lambda_{\bar{g}} = \dfrac{\lambda \varepsilon_i}{\varphi^2}$. Assim, aplicando as equações do sistema (2.27) na expressão acima, teremos

$$
Ric_{\bar{g}} + Hess_{\bar{g}}(h) = \lambda \bar{g}.
$$

Logo, $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ é um quase soliton gradiente de Ricci. □

Prosseguindo, o Corolário seguinte fornece um método para criar exemplos de quase solitons gradientes de Ricci, conformes à métrica pseudo-Euclidiana e invariantes sob ação de um grupo de rotação.

Corolário 2.1. Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$, com coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, $\varepsilon_i = \pm 1$ com pelo menos um $\varepsilon_i = 1$. Considere funções diferenciáveis não constantes $h(r)$ e $\varphi(r)$, onde $r = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2$. Dada qualquer função $\varphi(r)$, a métrica $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2}g$ é um quase soliton gradiente de Ricci com h uma função potencial, onde as funções h e λ são dadas por

$$\begin{cases} h(r) = \displaystyle\int \left[c-(n-2)\int \varphi\varphi'' dr\right]\frac{1}{\varphi^2}dr + k, \\ \lambda(r) = 4(n-1)\varphi\varphi' + 4r\varphi\varphi'' - 4(n-1)r(\varphi')^2 \\ \qquad -4cr\dfrac{\varphi'}{\varphi} - 2(n-2)\left(1-2r\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)\displaystyle\int \varphi\varphi'' dr + 2c, \end{cases} \tag{2.34}$$

onde c e k são constantes.

Demonstração. Considerando a primeira equação do sistema do Teorema (2.3), podemos reescrevê-la como

$$h'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}h' + (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} = 0.$$

Fazendo a mudança de variável $y = h'$ na equação acima, obtemos uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem

$$y' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}y + (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} = 0. \tag{2.35}$$

O fator integrante é dado por

$$u(r) = e^{\int 2\frac{\varphi'}{\varphi}dr} = \varphi^2.$$

Multiplicando o fator integrante acima na equação (2.35), obtemos

$$\varphi^2 y' + 2\varphi\varphi' y + (n-2)\varphi\varphi'' = 0,$$

isto é,

$$(\varphi^2 y)' = (n-2)\varphi\varphi''.$$

Agora, integrando a última equação com respeito a r, obtemos

$$\varphi^2 y = c - (n-2)\int \varphi\varphi'' dr. \tag{2.36}$$

A equação (2.36) é equivalente a

$$y = h'(r) = \left[c-(n-2)\int \varphi\varphi'' dr\right]\frac{1}{\varphi^2}. \tag{2.37}$$

Integrando (2.37) com repeito a r, teremos a primeira equação do sistema (2.34),

$$h(r) = \int \left[c - (n-2) \int \varphi\varphi'' dr \right] \frac{1}{\varphi^2} dr + k.$$

Além disso, aplicando a equação (2.37) na segunda equação do sistema do teorema anterior, teremos

$$2\lambda(r) = 4(n-1)\varphi\varphi' + 4r\varphi\varphi'' - 4(n-1)r(\varphi')^2 + \frac{1}{\varphi^2}\Big(2\varphi^2 - 4r\varphi\varphi'\Big)\Big(c - (n-2)\int \varphi\varphi'' dr\Big).$$

Desenvolvendo a expressão acima, obtemos a segunda equação do sistema (2.34), isto é

$$\lambda(r) = 4(n-1)\varphi\varphi' + 4r\varphi\varphi'' - 4(n-1)r(\varphi')^2 - 4cr\frac{\varphi'}{\varphi} - 2(n-2)\Big(1 - 2r\frac{\varphi'}{\varphi}\Big)\int \varphi\varphi'' dr + 2c.$$

□

2.2.2 Quase solitons invariantes pela ação do grupo de translação

Para os próximo resultados desta subseção, considere $\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ um invariante básico para um grupo de translação de dimensão $(n-1)$, onde $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0}$ é igual a -1, 0 ou 1 se for um vetor tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço, respectivamente. Iremos obter funções diferenciáveis $f(\xi)$, $\varphi(\xi)$ e $\lambda(\xi)$ tais que a métrica $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ satisfaça a equação (2.26).

No teorema seguinte, mostraremos condições necessárias e suficientes para que $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ seja um quase soliton gradiente de Ricci. Essas condições diferem-se, dependendo da direção $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha \frac{\partial}{\partial x_i}$ ser tipo-tempo ou tipo-espaço.

Teorema 2.4. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$, com coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Considere funções não constantes diferenciáveis $h(\xi)$ e $\varphi(\xi)$, onde $\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0} \neq 0$. Existe uma métrica $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ tal que $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ é um quase soliton gradiente de Ricci com h como função potencial se, e somente se, as funções h, φ e λ satisfazem*

$$\begin{cases} (n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h'' = 0, \\ \varepsilon_{i_0}\Big[\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2 - \varphi\varphi' h'\Big] = \lambda. \end{cases} \tag{2.38}$$

Demonstração. Suponha $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ um quase soliton gradiente de Ricci; então

$$Ric_{\bar{g}} + Hess_{\bar{g}}(h) = \lambda_{\bar{g}}. \tag{2.39}$$

Lembre-se da relação

$$Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi Hess_g \varphi + \Big[\varphi \Delta_g \varphi - (n-1)|\nabla_g \varphi|^2\Big] g\Big\}. \tag{2.40}$$

e o operador Hessiano em coordenadas locais é dado por

$$\begin{cases} Hess_{\bar{g}}(h)_{ij} = h_{x_i x_j} + \dfrac{\varphi_{x_j}}{\varphi} h_{x_i} + \dfrac{\varphi_{x_i}}{\varphi} h_{x_j}, \quad \forall\, i \neq j; \\ Hess_{\bar{g}}(h)_{ii} = h_{x_i x_i} + 2\dfrac{\varphi_{x_i}}{\varphi} h_{x_i} - \varepsilon_i \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} h_{x_k}, \quad \forall\, i. \end{cases} \tag{2.41}$$

Assim, pelas expressões (2.39), (2.40) e (2.41), teremos

$$\begin{cases} \varphi_{x_i x_j} = -\dfrac{1}{n-2}\Big(\varphi_{x_i} h_{x_j} + \varphi_{x_j} h_{x_i} + \varphi h_{x_i x_j}\Big), \quad i \neq j; \\ (n-2)\varphi\varphi_{x_i x_i} + \Big[\varphi \Delta_g \varphi - (n-1)|\nabla_g \varphi|^2\Big]\varepsilon_i + 2\varphi\varphi_{x_i} h_{x_i} + \varphi^2 h_{x_i x_i} - \varphi\varepsilon_i \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k h_{x_k} \varphi_{x_k} = \lambda \varepsilon_i. \end{cases} \tag{2.42}$$

Estamos supondo que $h(\xi)$ e $\varphi(\xi)$ são funções de ξ, onde $\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Então as expressões das derivadas com respeito a ξ são

$$\varphi_{x_i} = \alpha_i \varphi', \quad \varphi_{x_i x_j} = \alpha_i \alpha_j \varphi'', \quad \varphi_{x_i x_i} = \alpha_i^2 \varphi'',$$

$$h_{x_i} = \alpha_i h', \quad h_{x_i x_j} = \alpha_i \alpha_j h'', \quad h_{x_i x_i} = \alpha_i^2 h''.$$

Além disso, as expressões para os operadores Gradiente e Laplaciano em coordenadas locais, com $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{\varepsilon_{i_0}}$ são dados por

$$|\nabla_g \varphi|^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i^2\Big)(\varphi')^2 = \varepsilon_{i_0}(\varphi')^2 \quad \text{e} \quad \Delta_g \varphi = \Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i^2\Big)\varphi'' = \varepsilon_{i_0}\varphi''.$$

Agora, aplicando as expressões acima na primeira equação do sistema (2.42), obtemos

$$\alpha_i \alpha_j \Big[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h''\Big] = 0, \quad \forall\, i \neq j.$$

Se existirem $i \neq j$, tais que $\alpha_i \alpha_j \neq 0$, então teremos a primeira equação de (2.38)

$$(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h'' = 0. \tag{2.43}$$

Considerando a segunda equação de (2.42), temos que

$$\begin{aligned}(n-2)\varphi\varphi''\alpha_i^2 + \Big[\varphi\varphi''\varepsilon_{i_0} - (n-1)(\varphi')^2\varepsilon_{i_0}\Big]\varepsilon_i + 2\varphi\varphi' h'\alpha_i^2 \\ +\varphi^2 h''\alpha_i^2 - \varphi\varepsilon_i \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 h'\varphi' = \lambda\varepsilon_i.\end{aligned}$$

A equação acima é equivalente a,

$$\varphi\alpha_i^2\Big[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h''\Big] + \varepsilon_{i_0}\varepsilon_i\Big[\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2 - \varphi\varphi' h'\Big] = \lambda\varepsilon_i. \tag{2.44}$$

Aplicando a equação (2.43) em (2.44), teremos a segunda equação de (2.38)

$$\varepsilon_{i_0}\Big[\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2 - \varphi\varphi' h'\Big] = \lambda.$$

Devemos considerar o caso quando $\alpha_{i_0} = 1$ e $\alpha_i \neq 0$ para todo $i \neq i_0$. Então a primeira equação de (2.42) é facilmente satisfeita para todo $i \neq j$. Considerando a segunda equação de (2.42), para $i \neq i_0$, teremos

$$\varepsilon_{i_0}\Big[\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2 - \varphi\varphi' h'\Big] = \lambda.$$

Então, a segunda equação (2.38) é satisfeita. Agora, considerando $i = i_0$ na segunda equação de (2.42), temos que a primeira equação (2.38) é verificada.

Reciprocamente, suponha que as funções h, φ e λ satisfazem (2.38). Pelas equações (2.40) e (2.41), temos:

Para $i \neq j$, as seguintes expressões valem

$$Ric_{\bar{g}} = (n-2)\frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi},$$

$$Hess_{\bar{g}}(h)_{ij} = h_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi} h_{x_i} + \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} h_{x_j} \quad \text{e} \quad \lambda_{\bar{g}} = 0.$$

Daí, pela primeira equação de (2.38), obtemos

$$Ric_{\bar{g}} + Hess_{\bar{g}}(h) = \lambda_{\bar{g}}.$$

Por outro lado, para todo i, teremos

$$Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi\varphi_{x_ix_i} + \Big[\varphi\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\varphi_{x_kx_k} - (n-1)\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\varphi_{x_k}^2\Big]\varepsilon_i\Big\},$$

$$Hess_{\bar{g}}(h)_{ii} = h_{x_ix_i} + 2\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}h_{x_i} - \varepsilon_i\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\frac{\varphi_{x_k}}{\varphi}h_{x_k} \quad \text{e} \quad \lambda_{\bar{g}} = \frac{\lambda\varepsilon_i}{\varphi^2}.$$

Aplicando as equações (2.38) nas expressões acima, obtemos

$$Ric_{\bar{g}} + Hess_{\bar{g}}(h) = \lambda_{\bar{g}}.$$

Logo, $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ é um quase soliton gradiente de Ricci com h como função potencial. □

Corolário 2.2. Seja $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$, com coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Dada qualquer função $\varphi(\xi)$, a métrica $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2}g$ é um quase soliton gradiente de Ricci com h uma função potencial, onde as funções h e λ são dadas por

$$\begin{cases} h(\xi) = \displaystyle\int\Big[c-(n-2)\int\varphi\varphi'' d\xi\Big]\frac{1}{\varphi^2}d\xi + k, \\ \lambda(\xi) = \varepsilon_{i_0}\Big\{\big[\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2\big] - \dfrac{\varphi'}{\varphi}\Big[c-(n-2)\displaystyle\int\varphi\varphi'' d\xi\Big]\Big\}, \end{cases} \tag{2.45}$$

onde c e k são constantes.

Demonstração. Considerando a primeira equação do sistema (2.38), podemos reescrevê-la como

$$h'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}h' + (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} = 0.$$

Fazendo $y = h'$ na equação acima, obtemos uma EDO não linear de primeira ordem

$$y' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}y + (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} = 0, \tag{2.46}$$

cujo fator integrante é dado por

$$u(\xi) = e^{\int 2\frac{\varphi'}{\varphi}d\xi} = \varphi^2.$$

Multiplicando o fator integrante em (2.46), teremos

$$\varphi^2 y' + 2\varphi\varphi' y + (n-2)\varphi\varphi'' = 0. \tag{2.47}$$

Integrando (2.47) com respeito a ξ, temos que

$$y = h'(\xi) = \frac{1}{\varphi^2}\left[c - (n-2)\int \varphi\varphi'' d\xi\right]. \tag{2.48}$$

Integrando novamente a expressão acima com respeito a ξ, tem-se

$$h(\xi) = \int \left[c - (n-2)\int \varphi\varphi'' d\xi\right]\frac{1}{\varphi^2} d\xi + k.$$

Agora, subtituindo (2.48) na segunda equação de (2.38), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda(\xi) &= \varepsilon_{i_0}\left\{\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2 - \frac{\varphi\varphi'}{\varphi^2}\left[c - (n-2)\int \varphi\varphi'' d\xi\right]\right\}\\ &= \varepsilon_{i_0}\left\{\left[\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2\right] - \frac{\varphi'}{\varphi}\left[c - (n-2)\int \varphi\varphi'' d\xi\right]\right\},\end{aligned}$$

como queríamos demonstar. □

2.3 Exemplos

Nesta seção, exibiremos exemplos de alguns resultados expostos neste capítulo. Primeiro, vamos mostrar no corolário seguinte que as métricas dadas pelos Teorema 2.2 e Corolários 2.1 e 2.2 são completas.

Corolário 2.3. Se $(\mathbb{R}^n, g)$ é o espaço Euclidiano, F uma variedade Riemanniana Ricci flat completa e $0 < |\varphi(x)| \leq c$ para alguma constante c, então as métricas dadas pelos Teorema (2.2) e Corolários 2.1 e 2.2 são completas.

Demonstração. Considere o espaço Euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, e a métrica $\bar{g}$ dadas pelos Corolários 2.1 e 2.2. Se $0 < |\varphi(x)| \leq c$, então a métrica $\bar{g}$ é completa, desde que exista uma constante $k > 0$ tal que para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $|v_{\bar{g}}| \geq k|v|$. Pelo Lema 1.3, temos que $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$ é completa se, e somente se, $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ e F^m são completas. Então, as métricas obtidas nos Corolários 2.1 e 2.2 são completas. □

Agora, usando o corolário acima, o Teorema (2.2) e os Corolários (2.1) e (2.2), seguem alguns exemplos.

Exemplo 2.1. Considere $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1$, donde $\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = x_n$, e $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_n$. O semi-espaço de $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^{n*}_{+} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\right\},$$

munido com a métrica
$$g_{can}(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\delta_{ij}}{x_n^2},$$
é chamado *espaço hiperbólico*, com $\varepsilon_i=1$, $\forall\ i$, e denotamos por $(\mathbb{H}^n,g_{can})$. Assim, pelo Teorema (2.2) temos que a variedade produto $(\mathbb{H}^n\times F^m)$, no qual $(F^m,\ g_F)$ é uma variedade Ricci-*flat* completa, é um quase soliton gradiente de Ricci completo. O tensor métrico é dado por
$$ds^2=g_{can}+\frac{1}{x_n^2}g_F.$$
Pela segunda equação do Teorema (2.2), temos que a função potencial é da forma

$$\begin{aligned}h(x_1,\ldots,x_{m+n})&=k+\int\left\{c-(m+n-2)\int x_n(x_n)''dx_n\right\}\frac{1}{x_n^2}\,dx_n\\&=k+c\int\frac{1}{x_n^2}\,dx_n,\end{aligned}$$

ou seja,
$$h(x_1,\ldots,x_{m+n})=k-\frac{c}{x_n}.$$
E pela terceira equação do Teorema (2.2)

$$\begin{aligned}\lambda(x_1,\ldots,x_{m+n})&=\varepsilon_{i_0}\left\{x_n(x_n)''-(m+n-1)(x_n')^2-c\frac{x_n'}{x_n}+(m+n-2)\frac{x_n'}{x_n}\int x_n(x_n)''dx_n\right\}\\&=-(m+n-1)-\frac{c}{x_n},\end{aligned}$$

isto é,
$$\lambda(x_1,\ldots,x_{m+n})=-\left[(m+n-1)+\frac{c}{x_n}\right].$$

Exemplo 2.2. Considerando as mesmas condições do exemplo anterior $\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-1}=0$, $\alpha_n=1$, teremos $\xi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=x_n$ e o semi-espaço de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}_+^{n*}=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ x_n>0\right\},$$

isto é, $\left(\mathbb{R}_+^{n*},g_{can}=\frac{\delta_{ij}}{x_n^2}\right)=(\mathbb{H}^n,g_{can})$, onde g_{can} é a métrica canônica do espaço hiperbólico. Tomando $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=x_n v$, onde v é qualquer função positiva, limitada e diferenciável, temos que a variedade produto $\mathbb{H}^n\times F^m$, com F^m uma variedade Ricci-*flat* completa, pelo

Teorema (2.2) é um quase soliton gradiente de Ricci completo com tensor métrico

$$ds^2 = \frac{1}{v^2}\left(g_{can} + \frac{1}{x_n^2} g_F\right).$$

Temos que a função potencial h e λ são dadas pelas segunda e terceira equações do Teorema 2.2.

Exemplo 2.3. Considere $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = e^{-x_1^2-\ldots-x_n^2}$ no Corolário 2.1. Então $\mathbb{R}^n$ com a métrica Riemanniana

$$ds^2 = e^{2(x_1^2+\ldots+x_n^2)}(dx_1^2+\ldots+dx_n^2)$$

é um quase soliton gradiente de Ricci completo, onde a função potencial é dada por

$$h(x_1,\ldots,x_n) = \frac{c}{2}e^{2x_1^2+\ldots+2x_n^2} + \frac{(n-2)}{2}(x_1^2+\ldots+x_n^2)+k,$$

e

$$\begin{aligned}\lambda(x_1,\ldots,x_n) = &-[2(n-2)(x_1^2+\ldots+x_n^2)+(3n-2)]e^{-2x_1^2-\ldots-2x_n^2}\\ &+2c[2(x_1^2+\ldots+x_n^2)+1],\end{aligned}$$

onde c e k são constantes.

Exemplo 2.4. Fazendo $n=3$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$, isto é, $\xi = x_1+x_2+x_3$, e

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{1+(x_1+x_2+x_3)^2},$$

segue do Corolário 2.2 que $\mathbb{R}^3$ com a métrica

$$\begin{aligned}ds^2 &= \frac{1}{\varphi^2}(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)\\ &= [1+2(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2+x_3)^4](dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)\end{aligned}$$

é um quase soliton gradiente de Ricci completo, onde a função potencial é dada por

$$\begin{aligned}
h(x_1,x_2,x_3) = {} & \frac{c}{2}\left(\arctan(x_1+x_2+x_3) + \frac{x_1+x_2+x_3}{(1+(x_1+x_2+x_3)^2)}\right) + \frac{1}{8}\ln(1+(x_1+x_2+x_3)^2) \\
& + \frac{1}{240}\Bigg[\Big(12(x_1+x_2+x_3)^4 + 40(x_1+x_2+x_3)^3 + 60(x_1+x_2+x_3)\Big)\arctan(x_1+x_2+x_3) \\
& - 16\ln(1+(x_1+x_2+x_3)^2 - 14(x_1+x_2+x_3)^2 - 3(x_1+x_2+x_3)^4\Bigg] \\
& - \frac{5+(x_1+x_2+x_3)^2}{12[1+(x_1+x_2+x_3)^2]^2} + k
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lambda(x_1,x_2,x_3) = {} & \frac{2(x_1+x_2+x_3)}{[1+(x_1+x_2+x_3)^2]^2}\Bigg[c + \frac{3(x_1+x_2+x_3)^4 + 8(x_1+x_2+x_3)^3 + 21(x_1+x_2+x_3)}{12[1+(x_1+x_2+x_3)^2]} \\
& + \frac{1}{4}\arctan(x_1+x_2+x_3)\Bigg] - \frac{2}{[1+(x_1+x_2+x_3)^2]^3}.
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

Solitons gradientes de Yamabe conformes a um espaço pseudo-Euclidiano

Em [18], Leandro e Tenenblat apresentaram uma caracterização de solitons gradientes de Yamabe conformemente *flat*. Mais especificamente, eles trabalharam no caso $\left(\mathbb{R}^n, \dfrac{1}{\varphi^2}g\right)$, onde g é a métrica pseudo-Euclidiana canônica, e caracterizaram as soluções estáveis que são invariantes pela ação de grupo de translações de dimensão $(n-1)$. O uso dessa técnica permite reduzir o número de váriáveis de uma equação (ou sistema de equações) diferencial(ais) parcial(ais), que, em geral, é de difícil resolução. Assim, um problema de EDP reduz-se a um problema de EDO que, por conseguinte, possui mais técnicas de resolução.

3.1 Solitons gradientes de Yamabe invariantes por translação

Para os próximos resultados, consideremos $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano com a métrica g e coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, com $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $1 \leq i, j \leq n$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, $\varepsilon_i = \pm 1$ com pelo menos um $\varepsilon_i = 1$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \xi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

um invariante básico sob a ação de um grupo de translação de dimensão $(n-1)$, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para todo v pertencente ao conjunto de hiperplanos $(n-1)$-dimensional ortogonais ao vetor não nulo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, vale

$$\xi(x) = \xi(x+v).$$

Queremos obter funções diferenciáveis $f(\xi)$ e $\varphi(\xi)$, onde f e φ são as funções potencial e conforme, respectivamente, tais que a métrica $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$ satisfaça a equação

$$Hess_{\bar{g}} f = (R - \lambda)\bar{g}.$$

Para o primeiro resultado do artigo [18] quando $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 \neq 0$, consideremos sem perda de generalidade $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = \pm 1$. Iremos obter uma condição necessária e suficiente para que uma variedade semi-Riemanniana $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$, onde $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$ e g é a métrica do espaço pseudo-Euclidiano, seja um soliton gradiente de Yamabe.

Teorema 3.1. *Sejam $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$, com coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então existe uma métrica $\bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2}$ tal que $(\mathbb{R}^n, \bar{g}, f)$ é um soliton gradiente de Yamabe com função potencial f se, e somente se, as funções φ e f satisfazem*

$$f_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_i} f_{x_j}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_j} f_{x_i}}{\varphi} = 0, \quad i \neq j \tag{3.1}$$

e para cada i,

$$f_{x_i x_i} + 2\frac{\varphi_{x_i} f_{x_i}}{\varphi} - \varepsilon_i \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} f_{x_k} = \frac{\varepsilon_i}{\varphi^2}\Big[(n-1)(2\varphi\Delta_g\varphi - n|\nabla_g\varphi|^2) - \lambda\Big]. \tag{3.2}$$

Demonstração. Suponha que exista uma métrica $\bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2}$, tal que $(\mathbb{R}^n, \bar{g}, f)$ seja um soliton gradiente de Yamabe com função potencial f. Sendo $\bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2}$ uma métrica conforme a g, sabemos que os tensores de Ricci das métricas g e de $\bar{g}$ satisfazem a relação

$$Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi Hess_g(\varphi) + \Big[\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)|\nabla_g\varphi|^2\Big] g\Big\},$$

com $Ric_g = 0$. Portanto, a curvatura escalar da métrica $\bar{g}$ é dada por

$$R_{\bar{g}} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \varphi^2 (Ric_{\bar{g}})_{kk} = (n-1)(2\varphi\Delta_g\varphi - n|\nabla_g\varphi|^2).$$

Então, substituindo na equação

$$Hess_{\bar{g}} f = (R_{\bar{g}} - \lambda)\bar{g}$$

tem-se

$$Hess_{\bar{g}} f = \Big[(n-1)(2\varphi\Delta_g\varphi - n|\nabla_g\varphi|^2) - \lambda\Big]\bar{g}. \tag{3.3}$$

De modo a calcular $Hess_{\bar{g}} f$.

Lembre-se que o tensor Hessiano de f em coordenadas locais é dado por

$$Hess_{\bar{g}}(f)_{ij} = f_{x_i x_j} - \sum_{k=1}^{n} \bar{\Gamma}_{ij}^{k} f_{x_k}, \tag{3.4}$$

onde $\bar{\Gamma}_{ij}^{k}$ são os símbolos de Christoffel da métrica $\bar{g}$. Para i, j, k distintos, com $\bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2} = \dfrac{\varepsilon_i \delta_{ij}}{\varphi^2}$ e $g^{ij} = \varphi^2 \varepsilon_i \delta_{ij}$. Pelos cálculos apresentados no Teorema 2.1 do capítulo 2 os símbolos de Christoffel na métrica conforme a métrica pseudo-Euclidiana são dados por

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{k} = 0, \quad \bar{\Gamma}_{ij}^{i} = -\frac{\varphi_{x_j}}{\varphi}, \quad \bar{\Gamma}_{ii}^{k} = \varepsilon_i \varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} \quad \text{e} \quad \bar{\Gamma}_{ii}^{i} = -\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}.$$

Assim, subtituindo na equação (3.4), obtemos

$$Hess_{\bar{g}}(f) = f_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_i} f_{x_j}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_j} f_{x_i}}{\varphi} - \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} f_{x_k}. \tag{3.5}$$

Se $i \neq j$, segue-se que

$$Hess_{\bar{g}}(f) = f_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_i} f_{x_j}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_j} f_{x_i}}{\varphi}. \tag{3.6}$$

Note que, $\bar{g} = \dfrac{\varepsilon_i \delta_{ij}}{\varphi^2}$ com $i \neq j$ implica $\bar{g} = 0$. Portanto, pelas equações (3.3) e (3.4) obtemos,

$$f_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_i} f_{x_j}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_j} f_{x_i}}{\varphi} = 0.$$

Agora, consideremos $i = j$; a equação (3.5) é da forma

$$Hess_{\bar{g}}(f) = f_{x_i x_i} + 2\frac{\varphi_{x_i} f_{x_i}}{\varphi} - \varepsilon_i \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} f_{x_k}. \tag{3.7}$$

Por outro lado, $\bar{g} = \dfrac{\varepsilon_i \delta_{ij}}{\varphi^2} = \dfrac{\varepsilon_i}{\varphi^2}$. Assim, pelas equações (3.3) e (3.7), tem-se que

$$f_{x_i x_i} + 2\frac{\varphi_{x_i} f_{x_i}}{\varphi} - \varepsilon_i \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} f_{x_k} = \frac{\varepsilon_i}{\varphi^2}\Big[(n-1)(2\varphi\Delta_g\varphi - n|\nabla_g\varphi|^2) - \lambda\Big].$$

Reciprocamente, seja $\bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2}$ a métrica conforme de g. Suponha que as funções f e φ satisfazem as equações (3.1) e (3.2).

Por um lado temos que

$$Hess_{\bar{g}}(f) = f_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_i} f_{x_j}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_j} f_{x_i}}{\varphi} - \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_k \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} f_{x_k}.$$

Por outro lado, obtemos que

$$(R_{\bar{g}} - \lambda)\bar{g} = \frac{\varepsilon_i \delta_{ij}}{\varphi^2}\Big[(n-1)(2\varphi\Delta_g\varphi - n|\nabla_g\varphi|^2) - \lambda\Big].$$

Agora, analisaremos dois casos, a saber, $i \neq j$ e $i = j$. Quando $i \neq j$, temos por definição de δ_{ij} e pela equação (3.1), que

$$Hess_{\bar{g}} f = (R_{\bar{g}} - \lambda)\bar{g}.$$

No outro caso, considere $i = j$. Pela definição de δ_{ij} e pela equação (3.2), segue-se que

$$Hess_{\bar{g}} f = (R_{\bar{g}} - \lambda)\bar{g}.$$

Logo, pela equação (1.14), $(\mathbb{R}^n, \bar{g}, f)$ é um sóliton gradiente de Yamabe com função potencial f. □

No próximo resultado, mostraremos o sistema de equações diferenciáveis ordinárias que as funções f e φ satisfazem, quando o soliton gradiente de Yamabe dado no Teorema (3.1) é invariante sob a ação de um grupo de translação de dimensão $(n-1)$.

Teorema 3.2. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$, com coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$. Considere as funções diferenciáveis $\varphi(\xi)$ e $f(\xi)$, onde $\xi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, e $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = \varepsilon_{k_0}$ ou $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0$. Então $\bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2}$ é um soliton gradiente de Yamabe com função potencial f se, e somente se, φ e f satisfazem*

$$\begin{cases} f'' + 2\dfrac{\varphi' f'}{\varphi} = 0, \\ -\varphi'\varphi f' = (n-1)\Big[2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2\Big] - \varepsilon_{k_0}\lambda \end{cases} \qquad se \quad \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = \varepsilon_{k_0}, \tag{3.8}$$

e

$$\begin{cases} f'' + 2\dfrac{\varphi' f'}{\varphi} = 0, \\ \lambda = 0, \end{cases} \qquad se \quad \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0. \tag{3.9}$$

Demonstração. Seja $\bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2}$ a métrica conforme a g. Para a escolha de um vetor não nulo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ considere a função

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \xi(x) = \langle \alpha, x \rangle. \end{aligned}$$

Como estamos assumindo que $\varphi(\xi)$ e $f(\xi)$ são funções de ξ, então as derivadas com respeito a $i-$ésima coordenada x_i e a $j-$ésima coordenada x_j são

$$\varphi_{x_i} = \varphi' \alpha_i, \quad f_{x_i} = f' \alpha_i, \quad \varphi_{x_i x_j} = \varphi'' \alpha_i \alpha_j, \quad \text{e} \quad f_{x_i x_j} = f'' \alpha_i \alpha_j.$$

Pelo Teorema (3.1), as funções φ e f satisfazem as equações (3.1) e (3.2). Assim, substituindo as expressões acima em (3.1), obtemos

$$f'' \alpha_i \alpha_j + \frac{\varphi' \alpha_i f' \alpha_j}{\varphi} + \frac{\varphi' \alpha_j f' \alpha_i}{\varphi} = 0, \quad i \neq j.$$

Portanto, se existir i, j com $i \neq j$ tal que $\alpha_i \alpha_j \neq 0$, então

$$f'' + 2\frac{\varphi' f'}{\varphi} = 0.$$

Pela equação (3.2), temos

$$-\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k_0} \alpha_k^2 \Big\{ \varphi \varphi' f' + (n-1)[2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2] \Big\} + \lambda = 0. \tag{3.10}$$

Fazendo $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k_0} \alpha_k^2 = \varepsilon_{k_0}$, obtemos

$$-\varphi \varphi' f' = (n-1)[2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2] - \varepsilon_{k_0} \lambda.$$

Agora, consideremos o caso $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k_0} \alpha_k^2 = 0$. Substituindo na equação (3.1), temos

$$\left(f'' + 2\frac{\varphi' f'}{\varphi} \right) \alpha_i \alpha_j = 0.$$

Como $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k_0} \alpha_k^2 = 0$, então existem i e j, com $i \neq j$, tais que $\alpha_i \alpha_j \neq 0$. Assim,

$$f'' + 2\frac{\varphi' f'}{\varphi} = 0.$$

Daí, pela equação (3.10), temos $\lambda = 0$.

Agora, consideremos o caso em que $\alpha_{k_0} = 1$ e $\alpha_k = 0$, $\forall\, k \neq k_0$. Assim, $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = \varepsilon_{k_0}$. Por conseguinte,

$$\left(f'' + 2\frac{\varphi' f'}{\varphi}\right)\alpha_k \alpha_{k_0} = 0, \quad \forall\, k \neq k_0.$$

Segue-se de (3.10) que

$$-\varphi\varphi' f' = (n-1)[2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2] - \varepsilon_{k_0}\lambda, \quad \text{se} \quad i \neq k_0.$$

Se $i = k_0$, onde $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0$, então a equação

$$\left(f'' + 2\frac{\varphi' f'}{\varphi}\right)\varepsilon_i \alpha_i^2 \varphi^2 - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k_0} \alpha_k^2 \Big\{\varphi\varphi' f' + (n-1)[2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2]\Big\} + \lambda = 0$$

reduza-se à

$$f'' + 2\frac{\varphi' f'}{\varphi} = 0.$$

Reciprocamente, suponha que as funções φ e f satisfazem os sistemas (3.8) e (3.9). Então, as equações (3.1) e (3.2) são facilmente satisfeitas. Logo, pelo Teorema (3.1) temos que $(\mathbb{R}^n, \bar{g}, f)$ é um soliton gradiente de Yamabe com função potencial f. $\square$

Nos resultados seguintes, iremos caracterizar as soluções quando o soliton gradiente de Yamabe é estável, isto é, $\lambda = 0$.

Teorema 3.3. *Sejam $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano com $n \geq 3$, coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Seja $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$ um soliton gradiente de Yamabe estável, com função potencial f. Então φ e f são invariantes sob ação de um grupo de translação de dimensão $n-1$ cujo invariante básico é $\xi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, onde $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ é um vetor não nulo com $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = \varepsilon_{k_0}$ se, e somente se, φ e f satisfazem*

$$\int \frac{\varphi}{\gamma - \beta\varphi^{\frac{n}{2}+1}} d\varphi = \frac{\xi + \nu}{(n-1)(n+2)} \tag{3.11}$$

e

$$f'(\xi) = \frac{\gamma}{\varphi(\xi)^2}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

onde $v, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma^2 + \beta^2 \neq 0$. *Em particular, quando* $\gamma = 0$, *então* f *é constante e* $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ *é um soliton gradiente de Yamabe estável trivial.*

Demonstração. Considere a função $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\xi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \alpha_k \in \mathbb{R}$ e as funções diferenciáveis $\varphi(\xi)$ e $f(\xi)$, $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = \varepsilon_{k_0}$. Pelo Teorema (3.2), $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ é um soliton gradiente de Yamabe estável com função potencial f, se e somente se, φ e f satisfazem (3.8) com $\lambda = 0$. Assim,

$$f'' + 2\frac{\varphi' f'}{\varphi} = 0.$$

Tomando $y = f'$ na equação acima, esta é equivalente a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$y' + 2\frac{\varphi'}{\varphi} y = 0, \tag{3.13}$$

cujo fator integrante é dado por

$$u(\xi) = e^{\int 2\frac{\varphi'}{\varphi} d\xi} = \varphi^2.$$

Multiplicando a equação (3.13) pelo fator integrante, obtemos

$$\varphi^2 y' + 2\varphi\varphi' y = 0,$$

que é equivalente a

$$(\varphi^2 y)' = 0.$$

Assim, integrando a última expressão com respeito a ξ, concluímos que

$$f' = \frac{\gamma}{\varphi^2}, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) na segunda equação do sistema (3.8), obtemos

$$-\varphi\frac{\gamma}{\varphi} = (n-1)[2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2],$$

que é equivalente à equação

$$\varphi\varphi'' - \frac{n}{2}(\varphi')^2 + \frac{\gamma}{2(n-1)}\frac{\varphi'}{\varphi} = 0. \tag{3.15}$$

Considere $\varphi(\xi)^{1-\frac{n}{2}} = \omega(\xi)$; derivando

$$\omega'(\xi) = \Big(1 - \frac{n}{2}\Big)\varphi^{-\frac{n}{2}}\varphi' \quad \text{e} \quad \omega''(\xi) = \Big(1 - \frac{n}{2}\Big)\varphi^{-\frac{n}{2}-1}\Big(\varphi\varphi'' - \frac{n}{2}(\varphi')^2\Big).$$

Agora, substituindo as expressões acima na equação (3.15) tem-se que

$$\omega''(\xi) + \frac{\gamma}{2(n-1)}\omega'(\xi)\omega(\xi)^{\frac{4}{n-2}} = 0. \tag{3.16}$$

Integrando a equação (3.16), obtemos

$$\omega''(\xi) + \frac{\gamma(n-2)}{2(n-1)(n+2)}\omega(\xi)^{\frac{n+2}{n-2}} = \sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

E então,

$$-\int \frac{1}{\frac{\gamma(n-2)}{2(n-1)(n+2)}\omega(\xi)^{\frac{n+2}{n-2}} - \sigma} d\omega = \xi + \nu, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Como $\varphi(\xi)^{1-\frac{n}{2}} = \omega(\xi)$, então

$$\frac{(n-2)}{2}\int \frac{1}{\frac{\gamma(n-2)}{2(n-1)(n+2)}\varphi^{\frac{n}{2}} - \sigma\varphi^{\frac{n}{2}}} d\varphi = \xi + \nu.$$

Como σ é uma constante qualquer, temos que

$$\int \frac{\varphi}{\gamma - \beta\varphi^{\frac{n}{2}+1}} d\varphi = \frac{\xi + \nu}{(n-1)(n+2)}, \quad \gamma^2 + \beta^2 \neq 0,$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, suponha que as funções φ e f satisfazem as equações (3.11) e (3.12). Pelo sistema de equações (3.8) do Teorema (3.2), temos que φ e f são invariantes sob a ação de um grupo de translação de dimensão $n-1$. □

Teorema 3.4. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano com $n \geq 3$, coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Seja $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$, um soliton gradiente de Yamabe estável com função potencial f. Então φ e f são invariantes pela ação de um grupo de translação de dimensão*

$n-1$, *cujo invariante básico é* $\xi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, *onde* $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ *é um vetor tipo luz, isto é,* $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0$ *se, e somente se,* φ *é uma função diferenciável qualquer não nula e*

$$f(\xi) = \gamma \int \frac{1}{\varphi(\xi)} d\xi. \tag{3.17}$$

Demonstração. Por hipótese $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ é um soliton gradiente de Yamabe estável, isto é, $\lambda = 0$ e $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0$. Assim, pelo Teorema (3.2), sistema de equação (3.9), temos

$$f'' + 2\frac{\varphi' f'}{\varphi} = 0.$$

Tomando $y = f'$, tem-se

$$y' + 2\frac{\varphi'}{\varphi} y = 0 \tag{3.18}$$

com fator integrante

$$u(\xi) = e^{\int 2\frac{\varphi'}{\varphi} d\xi} = \varphi^2.$$

Multiplicando o fator integrante na equação (3.18) e, em seguida, integrando com respeito a ξ, temos que

$$f' = \frac{\gamma}{\varphi^2}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

isto é,

$$f(\xi) = \gamma \int \frac{1}{\varphi(\xi)} d\xi.$$

Reciprocamente, suponha que φ seja uma função diferenciável não nula. Derivando a equação (3.17) tem-se que

$$f'' + 2\frac{\varphi' f'}{\varphi} = 0,$$

com $\lambda = 0$. Logo, pelo Teorema (3.2) segue o resultado. □

3.2 Exemplos

Exibiremos agora, alguns exemplos dos Teoremas (3.3) e (3.4).

Exemplo 3.1. Se considerarmos $\gamma \neq 0$ e $\beta = 0$ no Teorema (3.3), então temos pela equação (3.11) que

$$\frac{1}{\gamma}\int \varphi d\varphi = \frac{\xi + v}{(n-1)(n+2)},$$

isto é,

$$\varphi^2(\xi) = \frac{2\gamma(\xi + v)}{(n-1)(n+2)}.$$

Substituindo na equação (3.12), fornece

$$f'(\xi) = \frac{1}{2}\frac{(n-1)(n+2)}{\xi + v}.$$

Integrando a última expressão com respeito a ξ, tem -se que

$$f(\xi) = \frac{1}{2}(n-1)(n+2)\ln|\xi + v|,$$

onde $\gamma(\xi + v) > 0$.

Portanto, $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2}$ é um soliton gradiente de Yamabe estável em um semi-espaço de $\mathbb{R}^n$, com função potencial f.

Exemplo 3.2. Considere $(\mathbb{R}^6, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano de dimensão 6 e $\xi = \sum_{k=1}^{6} \alpha_k x_k$ tal que $\sum_{k=1}^{6} \varepsilon_k \alpha_k^2 = \varepsilon_{k_0}$. Suponhamos $\gamma\beta > 0$. Assim, pela equação (3.11), temos que

$$\int \frac{\varphi}{\gamma - \beta\varphi^4} d\varphi = \frac{\xi + v}{40},$$

ou seja,

$$\varphi^2(\xi) = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \coth\left(\frac{(\xi + v)\sqrt{\gamma\beta}}{20}\right).$$

Por outro lado, pela equação (3.12), teremos

$$f'(\xi) = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\coth\left(\frac{(\xi+v)\sqrt{\gamma\beta}}{20}\right)},$$

isto é, integrando com respeito a ξ, obtemos

$$f(\xi) = 20\ln\left[\coth\left(\frac{(\xi + v)\sqrt{\gamma\beta}}{20}\right)\right],$$

onde $\xi + v > 0$. Segue-se que $\bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2}$ é um soliton gradiente de Yamabe estável em um semi-espaço de $\mathbb{R}^6$, com função potencial f.

Exemplo 3.3. Considerando as mesmas condições do Exemplo (3.2), se as constantes γ e β satisfazem $\gamma\beta < 0$, então podemos resolver as equações (3.11) e (3.12). De fato, obtemos pela equação (3.11)

$$\varphi^2(\xi) = \sqrt{\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|} \tan\left(sgn\ \gamma \frac{(\xi + v)\sqrt{|\gamma\beta|}}{20} \right).$$

E pela equação (3.12) temos que

$$f(\xi) = 20 \ln\left[\sin\left(sgn\ \gamma \frac{(\xi + v)\sqrt{|\gamma\beta|}}{20} \right) \right],$$

onde $\xi + v > 0$ e $0 < sgn\ \gamma \dfrac{(\xi + v)\sqrt{|\gamma\beta|}}{20} < \pi/2$. Segue-se que $\bar{g} = \dfrac{g}{\varphi^2}$ é um soliton gradiente de Yamabe estável em um semi-espaço de $\mathbb{R}^6$, com função potencial f.

Para o próximo exemplo, consideremos $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço de Lorentz, isto é, $\mathbb{R}^n$ munido com a métrica

$$g\Big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\Big) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n.$$

Diferente da métrica Euclidiana, esta métrica não é necessariamente positiva definida.

Exemplo 3.4. No Teorema (3.4), seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço Lorentziano com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e assinatura $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_k = 1$, para $k \geq 2$. Considere $\xi = x_1 + x_2$ e escolha $\varphi(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2}$. Então,

$$\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2(\xi)} g = (1+\xi^2)^2 g \quad \text{e} \quad f'(\xi) = \frac{\gamma}{\varphi^2(\xi)}.$$

Segue-se que

$$f(\xi) = \gamma \int (1+\xi^2)^2 d\xi = \gamma\xi\left(1 + \frac{2}{3}\xi^2 + \frac{1}{5}\xi^4\right),$$

onde $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Portanto, $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ é um soliton gradiente de Yamabe estável, com função potencial f.

3.3 Soliton gradiente de Yamabe estável semi-Riemanniano completo

Consideremos o soliton gradiente de Yamabe do Exemplo 3.4, conforme a um espaço de Lorentz.

Em [8], temos uma relação entre as conexões de Levi-Civita ∇ e $\bar{\nabla}$ correspondentes a g e $\bar{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$, respectivamente, dada por:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{\varphi}\Big[(X\varphi)Y + (Y\varphi)X - g(X,Y)\nabla_g \varphi\Big],$$

onde $Z\varphi = g(\nabla_g \varphi, Z)$ e X,Y,Z são campos de vetores em $\mathbb{R}^n$. Também em [8], obtemos uma relação entre as derivadas covariantes $\dfrac{D}{dt}$ e $\dfrac{\bar{D}}{dt}$ para uma curva qualquer $\phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \bar{g})$, expressa por:

$$\frac{\bar{D}}{dt}\phi' = \frac{D}{dt}\phi' - \frac{1}{\varphi}\Big[2d\varphi(\phi'(t)) \cdot \phi' - g(\phi', \phi') grad_g \varphi\Big]. \tag{3.19}$$

Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço de Lorentz com coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ e assinatura $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_k = 1$, para $k \geq 2$. Considere

$$\xi = x_1 + x_2, \quad \bar{g} = (1+\xi^2)^2 g \quad \text{e} \quad f = \gamma\xi\left(1 + \frac{2}{3}\xi^2 + \frac{1}{5}\xi^4\right),$$

onde $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então, afirmamos que $(\mathbb{R}^n, \bar{g}, f)$ é um soliton gradiente de Yamabe estável completo com função potencial f. De fato, considerando $\xi = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k$, onde $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\alpha_l = 0$ para $l \geq 3$, temos que $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0$. Considerando a aplicação conforme

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2},$$

segue pelo Teorema (3.4) que f é a função pontencial do soliton gradiente de Yamabe estável $(\mathbb{R}^n, \bar{g}, f)$.

Provaremos agora, que $(\mathbb{R}^n, \bar{g}, f)$ é um sóliton gradiente de Yamabe estável completo. Para isso, iremos mostrar que qualquer geodésica $\phi(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e para isso, faremos uso do seguinte resultado que pode ser encontrado em [12].

Teorema 3.5. *Suponha que S seja um retângulo*

$$|x-x_0| \leq a, \quad |y-y_0| \leq b, \quad (a,b>0),$$

ou uma faixa

$$|x-x_0| \leq a, \quad |y| < \infty, \quad (a>0),$$

e $f: S \to \mathbb{R}$ *tal que* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *existe, é contínuo em S, e*

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| \leq K, \quad ((x,y) \in S),$$

para algum K. Então f satisfaz a condição de Lipschitz em S com constante de Lipschitz igual a K.

Como $\nabla_g \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \varphi_{x_i} \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, a curva ϕ é uma geodésica em $(\mathbb{R}^n, \bar{g}, f)$, se e somente se,

$$\frac{\bar{D}}{dt} \equiv 0,$$

isto é, pela expressão (3.19) se as funções coordenadas satisfazem

$$x_i''(t) = \frac{1}{\varphi}\left[2\frac{d}{dt}(\varphi \circ \phi) x_i'(t) - \varepsilon_i \alpha_i \varphi_\xi \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (x_k'(t))^2\right], \quad 1 \leq i \leq n.$$

Portanto, para $l \geq 3$, $\alpha_l = 0$, temos

$$x_l''(t) = \frac{1}{\varphi}\left[2\frac{d}{dt}(\varphi \circ \phi) x_l'(t)\right], \quad l \geq 3.$$

Como $\varphi(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2}$, segue-se que

$$x_l''(t) = -\frac{4\xi\xi'}{1+\xi^2} x_l'(t).$$

Fazendo $y_l(t) = x_l'(t)$ na última equação, obtemos

$$y_l'(t) + \frac{4\xi\xi'}{1+\xi^2} y_l(t) = 0, \tag{3.20}$$

cujo fator integrante é dado por

$$u(\xi) = e^{\int \frac{4\xi\xi'}{1+\xi^2}d\xi} \Rightarrow u(\xi) = (1+\xi^2)^2.$$

Daí, multiplicando-o na equação (3.20), tem-se que

$$y_l'(t)(1+\xi^2)^2 + 4\xi\xi'(1+\xi^2)y_l(t) = 0,$$

isto é,

$$[x_l'(t)(1+\xi^2)^2]' = 0.$$

Integrando a equação acima, obtemos

$$x_l'(t) = \frac{k_l}{(1+\xi^2)^2}, \quad k_l \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Como $\varphi_\xi = \dfrac{-2\xi}{(1+\xi^2)^2}$, concluímos que

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= \frac{1}{\varphi}\Big[2\frac{d}{dt}(\varphi\circ\phi)x_1'(t) - \varepsilon_1\alpha_1\varphi_\xi\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_k'(t))^2\Big] \\ &= (1+\xi^2)\Big[\frac{-4\xi\xi'}{1+\xi^2}x_1'(t) - \frac{2\xi}{1+\xi^2}\Big((x_1')^2 + (x_2')^2 + \sum_{l=3}^{n}\Big(\frac{k_l}{(1+\xi^2)^2}\Big)^2\Big)\Big] \\ &= \frac{-4\xi\xi'}{1+\xi^2}x_1(t) - \frac{2\xi}{1+\xi^2}\Big[(x_1')^2 + (x_2')^2 + \frac{1}{(1+\xi^2)^4}\sum_{l=3}^{n}k_l^2\Big]. \end{aligned}$$

Logo,

$$x_1''(t) = -\frac{2\xi(\xi')^2}{1+\xi^2} - \frac{2\xi\bar{\sigma}}{(1+\xi^2)^5}, \tag{3.22}$$

onde $\bar{\sigma} = \sum_{l=3}^{n} k_l^2$. Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned} x_2''(t) &= \frac{1}{\varphi}\Big[2\frac{d}{dt}(\varphi\circ\phi)x_2'(t) - \varepsilon_2\alpha_2\varphi_\xi\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_k'(t))^2\Big] \\ &= \frac{-4\xi\xi'}{1+\xi^2}x_2'(t) + \frac{2\xi}{1+\xi^2}\Big[(x_1')^2 + (x_2')^2 + \frac{1}{(1+\xi^2)^4}\sum_{l=3}^{n}k_l^2\Big]. \end{aligned}$$

Logo,

$$x_2''(t) = -\frac{2\xi(\xi')^2}{1+\xi^2} + \frac{2\xi\bar{\sigma}}{(1+\xi^2)^5}. \tag{3.23}$$

Como $\xi = x_1 + x_2$, segue das equações (3.22) e (3.23) que

$$\xi'' + \frac{4\xi(\xi')^2}{1+\xi^2} = 0,$$

isto é,

$$\xi' = \frac{\bar{k}}{(1+\xi^2)^2}, \quad \bar{k} \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Substituindo (3.24) nas equações (3.22) e (3.23), concluímos que

$$x_1''(t) = \frac{-2(\bar{\sigma}-\bar{k}^2)(x_1+x_2)}{(1+(x_1+x_2)^2)^5} \quad \text{e} \quad x_2''(t) = \frac{2(\bar{\sigma}-\bar{k}^2)(x_1+x_2)}{(1+(x_1+x_2)^2)^5}.$$

Daí, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1' = y_1 \\ x_2' = y_2 \\ y_1' = \dfrac{-2(\bar{\sigma}-\bar{k}^2)(x_1+x_2)}{(1+(x_1+x_2)^2)^5} \\ y_2' = \dfrac{2(\bar{\sigma}-\bar{k}^2)(x_1+x_2)}{(1+(x_1+x_2)^2)^5} \\ x_l' = \dfrac{k_l}{(1+(x_1+x_2)^2)^2}, \quad l \geq 3. \end{cases}$$

Observe que as funções

$$h(x,y) = \frac{x+y}{\left[1+(x+y)^2\right]^5}$$

e

$$g(x,y) = \frac{1}{\left[1+(x+y)^2\right]^2}$$

são diferenciáveis em todo ponto.

Temos que a derivada parcial de h em relação a y existe e, pela desigualdade do valor médio, temos que

$$\left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| = \sqrt{\left(\frac{1-9(x+y)^2}{\left(1+(x+y)^2\right)^6}\right)^2} \leq \sqrt{81\left(\frac{\left[1+(x+y)^2\right]}{\left[1+(x+y)^2\right]^6}\right)^2} \leq 9.$$

Portanto,

$$\left|h(x,y_1) - h(x,y_2)\right| \leq 9\left|y_1 - y_2\right|,$$

isto é, $h(x,y)$ satisfaz a condição de Lipschitz.

Analogamente, obtemos

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| = \sqrt{\frac{16(x+y)^2}{\left[1+(x+y)^2\right]^6}} \leq \sqrt{\frac{16\left[1+(x+y)^2\right]}{\left[1+(x+y)^2\right]^6}} \leq 4.$$

Portanto,

$$\left|g(x,y_1)-g(x,y_2)\right| \leq 4\left|y_1-y_2\right|,$$

isto é, $g(x,y)$ também satisfaz a condição de Lipschitz

Logo, as soluções do sistema existem para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, toda geodésica $\varphi(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é, $(\mathbb{R}^n, \bar{g}, f)$ é geodesicamente completa.

Agora, vamos calcular o tensor de Ricci e as curvaturas seccional e escalar de $(\mathbb{R}^n, \bar{g}, f)$.

(i) **Curvatura seccional**

$$\begin{aligned}
K\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_l}\Big) = R_{1l1l} &= \frac{\varepsilon_1}{\varphi^2}\Big[\Gamma^s_{11}\Gamma^l_{ls} - \Gamma^s_{l1}\Gamma^l_{1l} + \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^l_{11} - \frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma^l_{l1}\Big]\\
&= -\frac{1}{\varphi^2}\Big[\Big(\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)^2 + \Big(\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)\Big(-\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big) - \Big(-\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)^2 + \frac{\partial}{\partial x_l}\Big(\varepsilon_1\varepsilon_l\frac{\varphi_{x_l}}{\varphi}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(-\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)\Big]\\
&= -\frac{1}{\varphi^2}\Big[\Big(\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)^2 + \Big(\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)^2 - \Big(\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)^2 + \frac{\varphi_{x_1x_1}}{\varphi} - \Big(\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)^2\Big]\\
&= -\frac{1}{\varphi^2}\Big[\frac{\varphi_{x_1x_1}}{\varphi}\Big], \quad l \geq 3
\end{aligned}$$

Note que,

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{(1+\xi^2)}, \quad \text{onde} \quad \xi = x_1 + x_2.$$

Então,

$$\varphi_{x_1} = \frac{-2\xi}{(1+\xi^2)^2} \quad \text{e} \quad \varphi_{x_2} = \frac{-2\xi}{(1+\xi^2)^2}.$$

Daí,

$$\Big(\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)^2 = \Big(\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)^2.$$

Logo,

$$K\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_l}\Big) = \frac{2(1-3\xi^2)}{(1+\xi^2)^4}, \quad l \geq 3.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
K\Big(\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_l}\Big) = R_{2l2l} &= \frac{1}{\varphi^2}\Big[\Gamma^s_{22}\Gamma^l_{ls}-\Gamma^s_{l2}\Gamma^l_{2s}+\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^l_{22}-\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{l2}\Big]\\
&= \frac{1}{\varphi^2}\Big[\Gamma^1_{22}\Gamma^l_{l1}+\Gamma^2_{22}\Gamma^l_{l2}-(\Gamma^l_{l2})^2+\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^l_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^l_{l2}\Big]\\
&= \frac{1}{\varphi^2}\Big[\Big(\varepsilon_2\varepsilon_1\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)\Big(-\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)+\Big(\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)^2-\Big(\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)^2+\frac{\partial}{\partial x_l}\Big(\varepsilon_2\varepsilon_l\frac{\varphi_{x_l}}{\varphi}\Big)-\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(-\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)\Big]\\
&= \frac{1}{\varphi^2}\Big[\Big(\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)^2+\Big(\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)^2-\Big(\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)^2+\frac{\varphi_{x_2x_2}}{\varphi}-\Big(\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)^2\Big]\\
&= -\frac{2(1-3\xi^2)}{(1+\xi^2)^4}, \quad l\geq 3.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$K\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_l}\Big) = -K\Big(\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_l}\Big) = \frac{2(1-3\xi^2)}{(1+\xi^2)^4}.$$

$$\begin{aligned}
K\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\Big) = R_{1212} &= \frac{1}{\varphi^2}\Big[\Gamma^s_{11}\Gamma^l_{2s}-\Gamma^s_{21}\Gamma^l_{1s}+\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^l_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma^l_{21}\Big]\\
&= \frac{1}{\varphi^2}\Big[\Gamma^1_{11}\Gamma^l_{21}+\Gamma^2_{11}\Gamma^l_{22}-\Gamma^1_{21}\Gamma^l_{11}-\Gamma^2_{21}\Gamma^l_{12}+\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^l_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma^l_{21}\Big]\\
&= \frac{1}{\varphi^2}\Big[\Big(\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)\Big(\varepsilon_2\varepsilon_l\frac{\varphi_{x_l}}{\varphi}\Big)-\Big(-\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)\Big(\varepsilon_1\varepsilon_l\frac{\varphi_{x_l}}{\varphi}\Big)+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\varepsilon_1\varepsilon_l\frac{\varphi_{x_l}}{\varphi}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Logo,

$$K\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\Big) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
K\Big(\frac{\partial}{\partial x_r},\frac{\partial}{\partial x_l}\Big) &= \frac{1}{\varphi^2}\Big[\Gamma^s_{rr}\Gamma^l_{ls}-\Gamma^s_{lr}\Gamma^l_{rs}+\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^l_{rr}-\frac{\partial}{\partial x_r}\Gamma^l_{lr}\Big]\\
&= \frac{1}{\varphi^2}\Big[\Gamma^1_{rr}\Gamma^l_{l1}+\Gamma^2_{rr}\Gamma^l_{l2}-(\Gamma^l_{lr})^2+\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^l_{rr}-\frac{\partial}{\partial x_r}\Gamma^l_{lr}\Big]\\
&= \frac{1}{\varphi^2}\Big[\Big(\varepsilon_r\varepsilon_1\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)\Big(-\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)+\Big(\varepsilon_r\varepsilon_2\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)-\Big(\frac{\varphi_{x_r}}{\varphi}\Big)^2+\frac{\partial}{\partial x_l}\Big(\varepsilon_r\varepsilon_l\frac{\varphi_{x_l}}{\varphi}\Big)-\frac{\partial}{\partial x_{x_r}}\Big(\frac{\varphi_{x_r}}{\varphi}\Big)\Big]\\
&= \Big(\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi}\Big)^2-\Big(\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi}\Big)^2 = 0, \quad r,l\geq 3.
\end{aligned}$$

(ii) **Tensor de Ricci**

O tensor de Ricci em coordenadas locais,

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} g^{km} R_{kijm}.$$

Portanto, quando $1 \leq i, j \leq 2$ com $-\varphi^2 R_{1111} = \varphi^2 R_{1212} = 0$, teremos

$$R_{ij} = -2(n-2)\frac{1-3\xi^2}{(1+\xi^2)^4}.$$

Para o caso r, $l \geq 3$, com $\varphi^2 R_{rlrl} = 0$, tem-se que

$$R_{rl} = 0.$$

(iii) **Curvatura escalar**

Quando $1 \leq i, j \leq 2$ temos que

$$\begin{aligned} R_{\bar{g}} = \text{traço}\{Ric\} &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \bar{g}^{ij} R_{ij} = \bar{g}^{11} R_{11} + \bar{g}^{22} R_{22} = -\varphi^2 R_{11} + \varphi^2 R_{22} \\ &= \varphi^2 2(n-1)\frac{(1-3\xi^2)}{(1+\xi^2)^4} - \varphi^2 2(n-1)\frac{(1-3\xi^2)}{(1+\xi^2)^4} = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, para o caso r, $l \geq 3$, tem - se que

$$R_{\bar{g}} = \sum_{r=3}^{n} \sum_{l=3}^{n} \bar{g}^{rl} R_{rl} = 0,$$

ou seja, a curvatura escalar $R_{\bar{g}}$ é *flat*.

Bibliografia

[1] T. Aubin. Équations différentielles non linéaires et problème de yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl.*, 55:269 – 296, (1976).

[2] W. Batat, M. Brozos-Vazquez, E. Garcia-Rio, and S. Gavino-Fernandez. Ricci solitons on lorentzian manifolds with large isometry groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 43(6):1219–1227, (2011).

[3] A. L. Besse. *Einstein Manifolds*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1987).

[4] V. Borges and K. Tenenblat. Ricci almost solitons on semi-riemannian warped products. *arXiv preprint arXiv:1709.04604*, (2017).

[5] M. Brozos-Vazquez, E. Garcia-Rio G. Calvaruso, and S. Gavino-Fernandez. Three-dimensional lorentzian homogeneous ricci solitons. *Israel Journal of Mathematics*, 188(1):385–403, (2011).

[6] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, and S. Gavino-Fernández. Locally conformally flat lorentzian gradient ricci solitons. *Journal of Geometric Analysis*, 23(3):1196–1212, (2011).

[7] E. Calviño-Louzao, J. Seoane-Bascoy, M. E. Vázquez-Abal, and R. Vázquez-Lorenzo. Three-dimensional homogeneous lorentzian yamabe solitons. *Abh Math Semin. Univ. Hamburg.*, 82:193–203, (2012).

[8] A. M. Candela and M. Sanchez. Geodesics in semi-riemannian manifolds: geometric properties and variational tools. *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry in European Mathematical Society Zurich*, 4:359–418, (2008).

[9] H. D. Cao, X. Sun, and Y. Zhang. On the structure of gradient yamabe solitons. *arXiv preprint arXiv:1108.6316*, (2011).

[10] M. Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 5 edição. IMPA, (2015).

[11] B. Chen and S. Deshmukh. Yamabe and quasi-yamabe solitons on euclidean submanifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 15(5):194, (2018).

[12] E. A. Coddington. *An introduction to ordinary differential equations*. Courier Corporation, (2012).

[13] F.E.S. Feitosa, A.A. Freitas Filho, J.N.V. Gomes, and R.S. Pina. Gradient ricci almost soliton warped product. *Journal of Geometry and Physics*, 143:22–32, (2019).

[14] R. S. Hamilton. Three-manifolds with positive ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2):255–306, (1982).

[15] R. S. Hamilton. The ricci flow on surfaces. In *Mathematics and general relativity, Mathematical Sciences on Mathematics in General Relativity (Santa Cruz, California, 1986)*, pages 237–262. Amer. Math. Soc., (1988).

[16] W. Kühnel. *Conformal transformations Between Einstein spaces*. In *Conformal geometry*, pages 105–146. Springer, 1988.

[17] B. L. Neto, R. Pina, and T. P. Fleury. Invariant solutions for gradient ricci almost solitons. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, pages 1–16, (2018).

[18] B. L. Neto and K. Tenenblat. On gradient yamabe solitons conformal to a pseudo-euclidian space. *Journal of Geometry and Physics.*, 123:284 – 291, (2018).

[19] P. J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Second Edition, GTM 107. Springer-Verlag New York, (2000).

[20] K. Onda. Lorentz ricci solitons on 3-dimensional lie groups. *Geom. Dedicata*, 147(1):313–322, (2010).

[21] B. O'neill. *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*. American Press New York, (1983).

[22] B. O'neill and R. L. Bishop. Manifolds of negative curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, 145:1–49, (1969).

[23] S. Pigola, M. Rigoli, M. Rimoldi, and A. G. Setti. Ricci almost solitons. *Ann. Sc. N. Super. Pisa-Classe Sci.*, 10(4):757–799, (2011).

[24] R. Schoen. Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Diff. Geom.*, 20:479 – 495, (1984).

[25] W. I. Tokura, L. Adriano, R. Pina, and M. Barboza. Gradient estimates on warped product gradient almost ricci solitons. *arXiv preprint arXiv:1905.00068*, (2019).

[26] N. S. Trudinger. Remarks concerning the conformal deformation of riemannian structures on compact manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 22(2):265–274, (1968).

[27] H. Yamabe. On a deformation of riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Mathematical Journal*, 12(1):21–37, (1960).

CAPÍTULOA

Grupos de simetria

Neste capítulo, seguiremos os passos descritos em [19], afim de fornecer ao leitor um método para encontrar o grupo de simetria de uma determinada classe de equações diferenciais parciais.

Cálculo dos grupos de simetria

Consideremos $\mathcal{S}$ um sistema de equações diferenciais com p variáveis independentes $x = (x_1, \ldots, x_p)$ e q variáveis dependentes $u = (u_1, \ldots, u_q)$. Seja $X = \mathbb{R}^p$, com coordenadas $x = (x_1, \ldots x_p)$, representando o espaço das variáveis independentes e $U = \mathbb{R}^q$, com coordenadas $u = (u_1, \ldots, u_q)$, representando o espaço das variáveis dependentes. Temos a seguinte definição:

Definição A.1. Seja $\mathcal{S}$ um sistema de equações diferenciais. Um *grupo de simetria* do sistema $\mathcal{S}$ é um grupo local de transformações G agindo em um aberto $M \subset X \times U$ com a propriedade de sempre que $u = f(x)$ é uma solução de $\mathcal{S}$ e sempre que $g \cdot f$ está definido para $g \in G$, então $u = g \cdot f(x)$ é ainda uma solução do sistema.

Assim, consideramos um grupo de transformações agindo em um subconjunto aberto $M \subset X \times U$, onde X e U são os espaços das variáveis independentes e das variáveis dependentes, respectivamente. Agora, iremos prolongar o espaço base $X \times U$ para um espaço que além de conter as variáveis dependentes e independentes contenha as derivadas das variáveis dependentes.

Dada uma função diferenciável real $f(x) = f(x_1, \ldots, x_p)$ de p variáveis independentes, existem

$$p_k \equiv \begin{pmatrix} p+k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

diferentes derivadas parciais de k-ésima ordem de f, onde representamos o multi-índice por

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial_{x_{j_1}} \partial_{x_{j_2}} \dots \partial_{x_{j_k}}},$$

para estas derivadas. Nesta notação, $J = (j_1, \dots, j_k)$ é uma k-upla de inteiros não ordenados, com entradas $1 \leq j_k \leq p$, indicando quais derivadas estão sendo tomadas.

O espaço total $X \times U^{(n)}$, cujas coordenadas representam as variáveis independentes, variáveis dependentes e as derivadas das variáveis dependentes até ordem n é chamado *espaço de jatos*. Um ponto do espaço de jatos é denotado por $(x, u^{(n)})$, onde $u^n = pr^{(n)}u(x)$, chamado o *n-ésimo prolongamento* de u. Mais precisamente, dada uma função diferenciável $u = f(x)$, $f : X \longrightarrow U$, de $X \subset \mathbb{R}^p$ para $U \subset \mathbb{R}^q$, então $pr^{(n)}u(x)$ é uma função de X no espaço $U^{(n)}$ que, para cada $x \in X$, associa um vetor tal que suas coordenadas representam os valores de u e suas derivadas de ordem n no ponto x.

Exemplo A.1. Consideremos o caso $p = 2$, $q = 1$. Então $X = \mathbb{R}^2$ tem coordenadas $(x_1, x_2) = (x, y)$ e $U = \mathbb{R}$ tem coordenadas $u = f(x, y)$, o segundo prolongamento $u^{(2)} = pr^{(2)}f(x, y)$ é dado por

$$(u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}).$$

Um sistema, $\mathcal{S}$, de equações diferenciais de ordem n em p variáveis independentes e q variáveis dependentes, é dado como um sistema de equações

$$\Delta_v(x, u^{(n)}) = 0, \qquad v = 1, \dots, l,$$

envolvendo $x = (x_1, \dots, x_p)$, $u = (u_1, \dots, u_q)$ e as derivadas de u com respeito a x até ordem n. Assim, consideremos a aplicação diferenciável

$$\Delta : X \times U^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}^l,$$

onde assumiremos que as funções

$$\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \dots, \Delta_l(x, u^{(n)})),$$

são diferenciáveis em seus argumentos. Quando $\Delta \equiv 0$ em $X \times U^{(n)}$, o sistema $\mathcal{S}$ determina uma subvariedade

$$\mathcal{S}_\Delta = \left\{(x, u^{(n)}) : \Delta(x, u^{(n)}) = 0\right\} \subset X \times U^{(n)}.$$

Deste ponto de vista, dizer que u é uma solução do sistema $\mathcal{S}$ é equivalente a afirmar que o gráfico do prolongamento $pr^{(n)}u(x)$ é um subconjunto da subvariedade $\mathcal{S}_\Delta$, determinada pelo sistema. Podemos assim, tomar um sistema de equações diferenciais como sendo uma subvariedade $\mathcal{S}_\Delta$ do espaço de jato $X \times U^{(n)}$, e uma solução do sistema como sendo uma função cujo gráfico do n-ésimo prolongamento está contido na subvariedade $\mathcal{S}_\Delta$.

Agora, suponha que G é um grupo local de transformações agindo em um subconjunto aberto $M \subset X \times U$ do espaço das variáveis independentes e dependentes. Após prolongarmos o espaço base, iremos prolongar a ação induzida por G no espaço de jatos $M^{(n)}$, chamada n-ésimo prolongamento da ação de G em M é denotada por $pr^{(n)}G$. Este prolongamento é definido de forma que transforma as derivadas de uma função $u = f(x)$ em derivadas correspondentes a função transformada $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. De maneira mais precisa, determinamos a ação de uma transformação prolongada $pr^{(n)}g$ no ponto $(x_0, u_0^n) \in M^{(n)}$ por

$$pr^{(n)}g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)}),$$

onde

$$\tilde{u}_0^{(n)} \equiv pr^{(n)}(g \cdot u)(\tilde{x}_0).$$

Prosseguindo, nosso objetivo é obter um critério para estabelecer que um grupo local de transformações seja um grupo de simetria de um sistema de equações diferenciais. Para isto, precisaremos de mais alguns resultados.

A seguir, vamos definir o prolongamento dos geradores infinitesimais definidos sobre $X \times U$ para o espaço de jatos $X \times U^{(n)}$.

Definição A.2. Seja $M \subset X \times U$ um aberto e suponha que v é um campo vetorial em M, com correspondente grupo a 1-parâmetro $\exp(\varepsilon v)$. O n-ésimo prolongamento de v, denotado por $pr^{(n)}v$, será um campo vetorial no espaço de jatos $M^{(n)}$ e é definido como gerador infinitesimal do correspondente grupo a 1-parâmetro prolongado $pr^{(n)}[\exp(\varepsilon v)]$. Em outras palavras,

$$pr^{(n)}v|_{(x,u^{(n)})} = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} pr^{(n)}[\exp(\varepsilon v)](x, u^{(n)}),$$

para qualquer $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$.

Podemos agora, definir o critério infinitesimal para um grupo G ser um grupo de simetria de um dado sistema de equações diferenciais. Para isto, precisamos da seguinte definição:

Definição A.3. Seja

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, l,$$

um sistema de equações diferenciais. O sistema é dito de *posto máximo* se a matriz Jacobiana

$$J_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x_i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_J^\alpha} \right)$$

de Δ com respeito a todas as variáveis $(x, u^{(n)})$ é de posto l sempre que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$.

A seguir, apresentaremos um importante resultado que determina quando um grupo local de transformações é um grupo de simetria do sistema de equações diferenciais. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [19].

Teorema A.1. *Suponha que*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, l,$$

é um sistema de equações diferenciais de posto máximo, definido sobre $M \subset X \times U$. Se G é um grupo local de transformações agindo em M, e

$$pr^{(n)}v[\Delta_\nu(x, u^{(n)})] = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l \quad \textit{sempre que} \quad \Delta(x, u^{(n)}) = 0, \tag{A.1}$$

para todo gerador infinitesimal v de G, então G é um grupo de simetria do sistema.

Veremos agora, como é dada a prolongação do campo vatorial. Para isto, precisamos da seguinte definição:

Definição A.4. Seja $P(x, u^n)$ uma função diferenciável de x, u e as derivadas de u de ordem no máximo n, definida em um aberto $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. A *derivada total* de P com relação a x_i é a única função $D_iP(x, u^{n+1})$ definida em $M^{(n+1)}$ com a propriedade de que se $u = f(x)$, então

$$D_iP(x, pr^{(n+1)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i}\{P(x, pr^{(n)})f(x)\}.$$

Em geral D_iP pode ser obtida pela expressão

$$D_iP = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J u^\alpha_{J,i} \frac{\partial P}{\partial u^\alpha_J},$$

onde $J = (j_1, \ldots, j_k)$ é multi-índice de ordem k

$$u^\alpha_{J,i} = \frac{\partial^{(k+1)} u^\alpha}{\partial x_i \partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}}.$$

O seguinte Teorema completa um método para encontrar o grupo de simetria de um sistema de equações diferenciais.

Teorema A.2. *Seja*

$$v = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u_\alpha}$$

um campo vetorial definido em um subconjunto aberto $M \subset X \times U$. O n-ésimo prolongamento de v é o campo vetorial

$$pr^{(n)}v = v + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} \phi_{(J)}^{\alpha}(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,J}} \tag{A.2}$$

definido no espaço de jatos correspondente $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$, onde a segunda soma é feita sobre todos os multi-índices $J = (j_1, \ldots, j_k)$, com $1 \leq j_k \leq p$, $1 \leq k \leq n$ e os coeficientes $\phi_{(J)}^{\alpha}$ de $pr^{(n)}v$ são dados pela seguinte fórmula:

$$\phi_{(J)}^{\alpha}(x, u^{(n)}) = D_J \left(\phi^{\alpha} - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{\alpha,i} \right) + \sum_{i=1}^{p} \xi(u_{\alpha,J}), i, \tag{A.3}$$

onde $u_{\alpha,i} = \dfrac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_i}$ e $(u_{\alpha,J}), i = \dfrac{\partial u_{\alpha,J}}{\partial x_i}$.

O Teorema (A.1) juntamente com as expressões (A.2) e (A.3) fornece um método efetivo para encontrar o grupo de simetria (conexo) mais geral de quase todos sistema de equações diferenciais.

Resumindo o método

- Primeiro consideremos os coeficientes $\xi^i(x,u)$ e $\phi^{\alpha}(x,u)$ do gerador infinitesimal v de um grupo de simetria a 1-parâmetro hipotético como funções de x e u desconhecidas;

- Os coeficientes $\phi_{(J)}^{\alpha}$ do gerador infinitesimal prolongado $pr^{(n)}v$ serão expressões envolvendo derivadas parciais de ξ^i e ϕ^{α} com respeito tanto a x quanto a u;

- Em seguida, aplicamos o Teorema (A.1), então as equações irão envolver x, u e as derivadas de u com relação a x, assim como ξ^i, ϕ^{α} e suas derivadas parciais com relação a x e u;

- Depois de eliminar quaisquer dependências entre as derivadas de u causadas pelo sistema, podemos então igualar a zero os coeficientes das derivadas parciais independentes de u. Obtemos assim, um grande número de equações diferenciais parciais elementares para as funções ξ^i e ϕ^{α}, chamadas *equações determinantes* para o grupo de simetria do sistema dado;

- A solução das equações determinantes irá determinar a simetria infinitesimal mais geral do sistema. Finalmente, o grupo de simetria pode ser encontrado exponenciando os campos vetoriais dados.

Agora, ilustraremos este método calculando os grupos de simetria da equação do calor.

Exemplo A.2. *A equação do calor*. Considere a equação para a condução de calor em uma haste unidimensional dado por

$$u_t = u_{xx}.$$

Note que neste caso, temos duas variáveis independentes, x e t e apenas uma dependente, u. Portanto, temos que $p = 2$ e $q = 1$ na nossa notação. A equação do calor é de segunda ordem, $n = 2$ e podemos identificá-la com a subvariedade linear em $X \times U^{(2)}$ determinada por

$$\Delta(x,t,u^{(2)}) = u_t - u_{xx}.$$

Seja

$$v = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{A.4}$$

um campo vetorial em $X \times U$.

Queremos determinar todos os coeficientes possíveis ξ, τ e ϕ tal que o grupo a 1-parâmetro $\exp(\varepsilon v)$ é um grupo de simetria da equação do calor. De acordo com o Teorema (A.1), precisamos saber o segundo prolongamento

$$pr^{(2)}v = v + \phi_{(x)}\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi_{(t)}\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi_{(xx)}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi_{(xt)}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi_{(tt)}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

de v. Quando aplicamos $pr^{(2)}v$ a equação do calor, teremos pelo critério infinitesimal

$$pr^{(2)}v[\Delta_v(x,t,u^{(2)})] = pr^{(2)}v[u_t - u_{xx}] = 0.$$

Daí,

$$\phi_{(t)} = \phi_{(xx)}, \tag{A.5}$$

que deve ser satisfeita sempre que $u_t = u_{xx}$. Temos que os coeficientes da prolongação $\phi_{(t)}$ e $\phi_{(xx)}$ são dados por:

$$\begin{aligned}
\phi_{(t)} &= D_t(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} \\
&= D_t\phi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau \\
&= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\phi_{xx} &= D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\
&= D_x^2\phi - u_x D_x^2\xi - u_t D_x^2\tau - 2u_{xx}D_x\xi - 2u_{xt}D_x\tau \\
&= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t \\
&- \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}.
\end{aligned}
$$

Substituindo os coeficientes dados acima em (A.5) e subtituindo u_t por u_{xx}, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 = \\
&\phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_{xx} + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_{xx} - \xi_{uu}u_x^3 \\
&- \tau_{uu}u_x^3 u_{xx} + (\phi_u - 2\xi_x)u_x x - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 - 2\tau_u u_x u_{xx}.
\end{aligned}
$$

Equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
&\phi_t - \phi_{xx} + (\xi_{xx} - \xi_t - 2\phi_{xu})u_x + (2\xi_{xu} - \phi_{uu})u_x^2 + \xi_{uu}u_x^3 + (\phi_u - \tau_t + \tau_{xx} - \phi_u + 2\xi_x)u_{xx} \\
&+ (2\tau_{xu} - \xi_u + 3\xi_u)u_x u_{xx} + (\tau_{uu})u_x^2 u_{xx} + (\tau_u - \tau_u)u_{xx}^2 + (2\tau_x)u_{xt} + (2\tau_u)u_x u_{xt} = 0.
\end{aligned}
$$

Agora, igualando a zero os coeficientes dos monômios nas primeiras e segundas derivadas parciais de u, encontramos as equações determinantes para o grupo de simetria:

Monômios	**Coeficientes**
$u_x u_{xt}$	$\tau_u = 0$
u_{xt}	$\tau_x = 0$
u_{xx}^2	$-\tau_u + \tau_u = 0$
$u_x^2 u_{xx}$	$\tau_{uu} = 0$
$u_x u_{xx}$	$\xi_u + \tau_{xu} = 0$
u_{xx}	$\tau_x + 2\xi_x - \tau_t = 0$
u_x^3	$\xi_{uu} = 0$
u_x^2	$2\xi_{xu} - \phi_{uu} = 0$
u_x	$\xi_{xx} - 2\phi_{xu} - \xi_t = 0$
1	$\phi_t - \phi_{xx} = 0$

Resolvendo as equações determinantes acima, poderemos encontrar as expressões para ξ, τ e ϕ. Primeiro note que

$$\tau_u = 0 \quad \text{e} \quad \tau_x = 0,$$

então τ é uma função apenas da variável t. Segue daí, que

$$\tau_{xu} + \xi_u = 0 \Rightarrow \xi_u = 0,$$

tem-se que ξ não depende de u. A equação com coeficiente u_{xx}, notamos que $\tau_t = 2\xi_x$, integrando esta equação em x, teremos

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t), \tag{A.6}$$

onde σ é alguma função que depende apenas de t. Agora, com a equação com coeficiente u_x^2,

$$\phi_{uu} = 2\xi_{xu} \Rightarrow \phi_{uu} = 0,$$

integrando duas vezes, obtemos que ϕ é linear em u

$$\phi(x,t,u) = \beta(x,t)u + \alpha(x,t),$$

para certas funções α e β. Prosseguindo, por (A.6) temos que $\xi_{uu} = 0$, assim, a equação com coeficiente u_x

$$\xi_t = -2\beta_x, \tag{A.7}$$

derivando (A.6) em relação a t, obtemos

$$\xi_t = \frac{1}{2}\tau_{tt} x + \sigma_t.$$

Substituindo em (A.7) e em seguida integrando em x, tem-se

$$\beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt} x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t). \tag{A.8}$$

Finalmente, a última equação $\phi_t = \phi_{xx}$ exige que ambas α e β sejam soluções da equação do calor

$$\alpha_t = \alpha_{xx}, \quad \beta_t = \beta_{xx}.$$

Usando a forma para β dada em (A.8), obtemos

$$\tau_{ttt} = 0, \quad \sigma_{tt} = 0, \quad \rho_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt}.$$

Assim, τ é quadrática em t, σ é linear em t e podemos então escrever ξ e ϕ diretamente de ρ, σ e τ. Como temos todas as equações determinantes satisfeitas, concluímos que a simetria infinitesimal mais geral da equação do calor tem os seguintes coeficientes

$$\xi = c_1 + c_4 + 2c_5 t + 4c_6 xt,$$
$$\tau = c_2 + 4c_4 t + 4c_6 t^2,$$
$$\phi = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + \alpha(x,t),$$

onde $c_1, \ldots, c_6$ são constantes arbitrárias e $\alpha(x,t)$ é uma solução qualquer da equação do calor. Assim, a álgebra de Lie da simetrias infinitesimais da equação do calor é gerada pelos seis campos vetoriais dados abaixo:

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$v_2 = \frac{\partial}{\partial t},$$
$$v_3 = u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$v_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t},$$
$$v_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u},$$
$$v_6 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u\frac{\partial}{\partial u},$$

e a subálgebra de dimensão finita

$$v_\alpha = \alpha(x,t)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Onde α é uma solução arbitrária da equação do calor.

Os grupos a 1-parâmetro G_i gerados por v_i são dados abaixo. As entradas fornecem o ponto transformado $\exp(\varepsilon v_i)(x,t,u) = (\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u})$:

$$\begin{aligned}
G_1 &: (x+\varepsilon,t,u),\\
G_2 &: (x,t+\varepsilon,u),\\
G_3 &: (x,t,e^{\varepsilon}u),\\
G_4 &: (e^{\varepsilon}x,e^{2x}t,u),\\
G_5 &: (x+2\varepsilon t,t,u\cdot e^{(-\varepsilon x-\varepsilon^2 t)}),\\
G_6 &: \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t},\frac{t}{1-\varepsilon t},u\sqrt{1-4\varepsilon t}e^{(\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t})}\right),\\
G_\alpha &: (x,t,u+\varepsilon\alpha(x,t)).
\end{aligned}$$

O grupo a 1-parâmetro de simetria mais geral é obtido considerando a combinação linear

$$c_1v_1+\ldots+c_6v_6+v_\alpha,$$

dos campos de vetores, porém a fórmula explícita do grupo de transformações é muito complicada.

Podemos obter as funções invariantes através dos geradores dos grupos de simetria e por conseguinte podendo até reduzir o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Exemplo A.3. Considerando o grupo de simetria da equação do calor

$$G_4 : (e^{\varepsilon}x,e^{2x}t,u), \quad \varepsilon\in\mathbb{R},$$

gerado por $v_4 = x\frac{\partial}{\partial x}+2t\frac{\partial}{\partial t}$. O sistema característico é da forma

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}.$$

Integrando, teremos que o invariante para este grupo é da forma

$$y = xt^{-\frac{1}{2}}.$$

Temos que as soluções para o sistema reduzido dependem de novas variáveis, $v = h(y)$. Reescrevendo a equação do calor, obtemos

$$u_t = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}xv_y \quad \text{e} \quad u_{xx} = \frac{v_{yy}}{t}.$$

Assim,

$$v_{yy} + \frac{1}{2}yv_y = 0.$$

Logo, reduzimos uma EDP em uma EDO de segunda ordem.

Exemplo A.4. Consideremos agora, o grupo de simetria,

$$G_5 : (x + 2\varepsilon t, t, u \cdot e^{(-\varepsilon x - \varepsilon^2 t)}), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

gerado por $v_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}$. O sistema característico é da forma

$$\frac{dx}{2t} = \frac{du}{-xu}.$$

Integrando, teremos que os invariantes para este grupo são da forma

$$y = t, \quad v = ue^{\frac{x^2}{4t}}.$$

Temos que as soluções para o sistema reduzido dependem de novas variáveis, $v = h(y)$. Daí, reescrevendo a equação do calor, com $u = ve^{\frac{-x^2}{4t}}$, obtemos

$$u_t = \left(v_y + \frac{x^2}{4t^2}v\right)e^{\frac{-x^2}{4t}}, \quad u_{xx} = \left(\frac{x^2}{4t} - \frac{1}{2t}\right)ve^{\frac{-x^2}{4t}}.$$

Portanto, a equação do calor reduz-se a uma equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$2yv_y + v = 0.$$