Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos autossimilares intransitivos

por

Tulio Marcio Gentil dos Santos

Orientador: Doutor Said Najati Sidki
Co-orientador: Doutor Alex Carrazedo Dantas

Brasília
2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos autossimilares intransitivos

por

Tulio Marcio Gentil dos Santos

Orientador: Doutor Said Najati Sidki
Co-orientador: Doutor Alex Carrazedo Dantas

Brasília
2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos autossimilares intransitivos

por

Tulio Marcio Gentil dos Santos*

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 14 de junho de 2021.

Comissão Examinadora:

Said Sidki
Prof. Dr. Said Najati Sidki - MAT/UnB (Orientador)

Emerson Ferreira de Melo.
Prof. Dr. Emerson Ferreira de Melo – MAT/UnB (Membro)

Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova – Unicamp (Membro)

Prof. Dr. Ilir Snopch – UFRJ (Membro)

* O autor foi bolsista PICME durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

dT917gg

dos Santos, Tulio Marcio Gentil
Grupos autossimilares intransitivos / Tulio Marcio Gentil dos Santos; orientador Said Najati Sidki; co orientador Alex Carrazedo Dantas. -- Brasília, 2021.
115 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2021.

1. automorfismos de árvores. 2. representação autossimilar. 3. centralizador de grupo abeliano autossimilar. 4. grupos do tipo Lamplighter. I. Sidki, Said Najati, orient. II. Dantas, Alex Carrazedo, co-orient. III. Título.

À minha mãe Marionildes.
Aos meus avós Joanildes e Manoel.
Aos meus irmãos Beatriz e Gustavo.

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, pela vida.

A toda minha família pelo incentivo durante toda minha jornada acadêmica, em especial à minha madrinha Izabel que me recebeu de braços abetos em Brasília.

Ao meu orientador Said Sidki, que me ensinou muito no doutorado. Sempre com uma força de trabalho admirável e com muita paciência e sabedoria me conduziu na realização desta tese. Tenho muito orgulho de ter tido a experiência de trabalhar com o professor Said.

Ao meu co-orientador e amigo Alex Dantas, que sempre se prontificou a qualquer tipo de ajuda, não importando dia ou horário. Sempre muito disposto e muito paciente, aprendi muito com o professor Alex.

Ao professor Adilson Berlatto pelas valiosas conversas e discussões acerca do tema da tese.

Aos meus amigos João César, Luís Fernando e Heitor Junio.

As amizades que o Departamento de Matemática me proporcionou, principalmente as de maior convivência: Diego, Genildo, Gustavo, Hércules, John, José Carlos, Márcio, Marcos, Nathália, Renata, Sara Raissa e Wállef.

A todos os meus professores que me acompanham desde o ensino básico.

Aos professores do Instituto de Matemática e Estatística da UFG que sempre me incentivaram seguir estudando matemática, em especial à professora Shirlei Serconek e ao professor Ricardo Oliveira.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB.

Aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade e contribuições para este trabalho.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, OBMEP, que transformou minha vida através de uma única medalha.

Ao Instituto Federal Goiano Campus Campos Belos, pela licença de capacitação concedida durante grande parte do doutorado.

Finalmente, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pela bolsa CAPES-PICME.

Resumo

Neste trabalho estudamos representações autossimilares de grupos em $\mathcal{A}_m$, o grupo de automorfismos da árvore m-ária regular $\mathcal{T}_m$. Um grupo abstrato é dito ser autossimilar se ele admite uma representação autossimilar fiel em alguma árvore $\mathcal{T}_m$; quando a representação autossimilar induz ação transitiva no primeiro nível da árvore, dizemos que o grupo é autossimilar transitivo. Um procedimento padrão para construção de representação autossimilar transitiva de um grupo foi por meio de um único endomorfismo virtual do grupo em questão. Recentemente, foi mostrado que este procedimento, quando aplicado ao produto entrelaçado restrito $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, não pode produzir representação autossimilar transitiva fiel para qualquer $m \geq 2$ (veja [3]). Estudamos subgrupos autossimilares de $\mathcal{A}_m$ sem assumir ação transitiva no primeiro nível de $\mathcal{T}_m$. Esta ação geral é traduzida em um conjunto de endomorfismos virtuais correspondentes à diferentes órbitas da ação no primeiro nível de $\mathcal{T}_m$. Com este novo procedimento, produzimos representações autossimilares fiéis, algumas das quais são também finita por estado, para vários grupos tais como $\mathbb{Z}^{(\omega)}$, $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ e $(\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}) \wr C_2$. Também estendemos resultados de Brunner-Sidki [5], sobre subgrupos abelianos autossimilares transitivos de $\mathcal{A}_m$ ao caso geral, onde o grupo de permutação induzido no primeiro nível da árvore tem $s \geq 1$ órbitas. Provamos que um tal grupo A, na sua representação na árvore, imerge em um único subgrupo abeliano de $\mathcal{A}_m$ o qual é autossimilar e auto-centralizante. Por fim, mostramos que o grupo nilpotente de classe 3 e livre de torção, $N_{3,4}$, de Bludov-Gusev [27], não é autossimilar.

Palavras-chave: automorfismos de árvores, representação autossimilar, centralizador de grupo abeliano autossimilar, grupos do tipo Lamplighter.

Abstract

In this work we study self-similar representations of groups on $\mathcal{A}_m$, the group of automorphisms of a regular m-ary tree $\mathcal{T}_m$. An abstract group is said to be self-similar provided it admits a faithful self-similar representation on some tree $\mathcal{T}_m$; when a self-similar representation induces transitive action on the first level of the tree we say that the group is transitive self-similar. A standard approach for constructing a transitive self-similar representation of a group has been by way of a single virtual endomorphism of the group in question. Recently, it was shown that this approach when applied to the restricted wreath product $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ could not produce a faithful transitive self-similar representations for any $m \geq 2$ (see [3]). We study self-similar subgroups of $\mathcal{A}_m$ without assuming transitive action on the first level of the tree. This general action is translated into a set of virtual endomorphisms corresponding to the different orbits of the action on the first level of $\mathcal{T}_m$. With this new approach we produce faithful self-similar representations, some of which are also finite-state, for a number of groups such as $\mathbb{Z}^{(\omega)}$, $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ and $(\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}) \wr C_2$. We also extend results from Brunner-Sidki [5], on transitive self-similar abelian subgroups of $\mathcal{A}_m$ to the general case where the permutation group induced on the first level of the tree has $s \geq 1$ orbits. We prove that such a group A, in its representation on the tree, embed into a unique abelian subgroup of $\mathcal{A}_m$ which is self-similar and self-centralizing. Finally, we show that the nilpotent group of class 3 and torsion free, $N_{3,4}$, of Bludov-Gusev [27], is not self-similar.

Keywords: tree automorphisms, self-similar representation, centralizer of self-similar abelian group, groups of Lamplighter type.

Índice de Notações

x^y	$y^{-1}xy$;
$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$;
$\|S\|$	cardinalidade do conjunto S;
$H \leqslant G$	H é subgrupo de G;
$H \trianglelefteq G$ *ou* $H \triangleleft G$	H é subgrupo normal de G;
$G \simeq K$	G é isomorfo a K;
$[G : H]$	índice do subgrupo H no grupo G;
$\langle X \rangle$	subgrupo gerado por X;
$[A, B]$	subgrupo $\langle [a, b] \mid a \in A$ e $b \in B \rangle$;
G'	$[G, G]$;
G/N	grupo quociente de G por (um subgrupo normal) N;
$G_1 \times \ldots \times G_k$	produto direto dos grupos $G_1, \ldots, G_k$;
$G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$	soma direta dos grupos abelianos $G_1, \ldots, G_k$;
$\prod_{i \in I} G_i$	produto cartesiano dos grupos G_i, $i \in I$;
$\prod_{i \in I}^{\times} G_i$	produto direto dos grupos G_i, $i \in I$;
$N \rtimes H$	produto semidireto de N por H;
$Sym(m)$	grupo das permutações do conjunto $\{0, 1, ..., m-1\}$;
$Sym(X)$	grupo das permutações do conjunto X;
X^*	conjunto de todas as palavras finitas sobre o conjunto X;
$\mathcal{T}_m$	árvore m-regular uni-raiz;

$\mathcal{A}_m$	grupo de automorfismo da árvore $\mathcal{T}_m$;
$\mathcal{G}(A)$	grupo de automorfismo da árvore $\mathcal{T}_m$ gerado pelos estados do autômata A;
$det(M)$	determinante da matriz quadrada M;
$\mathbb{Z}$	grupo cíclico infinito;
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *ou* C_n	grupo cíclico de ordem n;
$\mathbb{Z}_n$	anel dos inteiros n-ádicos cíclico de ordem n;
$\mathbb{Z}^{(\omega)}$	grupo abeliano livre de posto infinito enumerável;
$\mathfrak{T}_c$-*grupo*	grupo nilpotente de classe c, livre de torção e finitamente gerado.

Sumário

Introdução

Nosso objetivo nesta tese é estudar o fenômeno de autossimilaridade em grupos. A motivação original veio de propriedades fractais dos grupos de Grigorchuk, [22] e Gupta-Sidki, [18]. A primeira formulação da noção de autossimilaridade para grupos foi dada em [6] como sendo grupos agindo em $\mathcal{T}_m$, a árvore uni-raiz regular de valência finita m, de tal modo que os estados de seus elementos continuam sendo elementos do mesmo grupo, em outras palavras, o grupo é fechado por estado ou, equivalentemente, funcionalmente recursivo; veja [6]. Um conceito abstrato intimamente relacionado à autossimilaridade foi o da existência de endomorfismo virtual simples do grupo, uma noção introduzida por V. Nekrashevych e S. Sidki em [30].

Seja $\mathcal{A}_m$ o grupo de automorfismos da árvore $\mathcal{T}_m$. Uma representação de grau m para um grupo abstrato G é um homomorfismo φ de G em $\mathcal{A}_m$. Quando φ é um monomorfismo, dizemos que φ é uma representação fiel. A representação φ é dita ser autossimilar, transitiva ou finita por estado se o grupo G^{φ} é, respectivamente, autossimilar, transitivo na sua ação sobre o primeiro nível da árvore ou finito por estado.

Em [3], A. Dantas e S. Sidki mostraram que o grupo $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ não admite representação fiel autossimilar transitiva, qualquer que seja o grau da árvore. No entanto, $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ tem uma representação autossimilar não transitiva na árvore de grau 3; mais que isso, $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ é um autômata-grupo (Proposição 4.1.4) dado pelo seguinte diagrama.

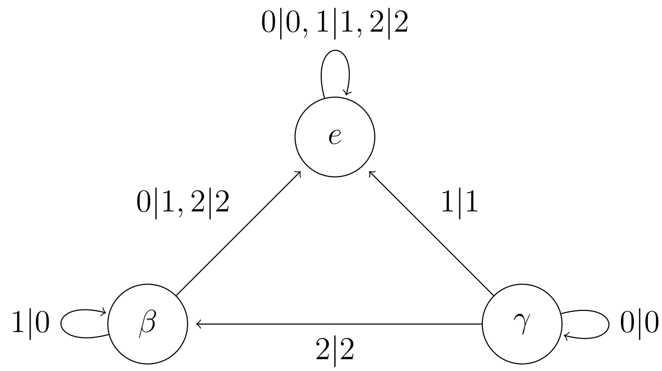


Diagrama de $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$

Grupos autossimilares aparecem naturalmente como grupos de automorfismos da árvore $\mathcal{T}_m$, como é o caso dos grupos de Grigorchuck e Gupta-Sidki ou são construídos através de endomorfismos virtuais. Um *endomorfismo virtual* para o grupo G é um homomorfismo $f : H \to G$, onde H é um subgrupo de índice finito em G.

Em [30], V. Nekrashevych e S. Sidki estabeleceram o seguinte resultado: *um grupo G é autossimilar transitivo se, e somente se, existem H um subgrupo de índice finito em G e um endomorfismo virtual $f : H \to G$ de modo que o maior subgrupo de H, normal em G que é f-invariante é trivial.* Neste trabalho, abrimos mão da transitividade para estudar os grupos autossimilares não necessariamente transitivos. A ação intransitiva no grupo G é traduzida na tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$, onde:

$$\mathbf{H} = (H_i \mid [G : H_i] = m_i \ (1 \leq i \leq s)) ,$$

é uma sequência de subgrupos de índices finito em G,

$$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s) , \ \ m = m_1 + \cdots + m_s \text{ e}$$

$$\mathbf{F} = \{f_i : H_i \to G \mid 1 \leq i \leq s\} ,$$

é um conjunto de endomorfismos virtuais. A s-upla $(m_1, \ldots, m_s)$ é o *tipo-orbital* de G.

O Capítulo 1 introduz os conceitos preliminares necessários para entendimento deste trabalho. Nele definimos o grupo de automorfismos $\mathcal{A}_m$, da árvore uni-raiz m-regular $\mathcal{T}_m$ e o conceito de grupos gerados por autômatas.

No Capítulo 2, produzimos uma ferramenta na qual é possível construir todos os grupos autossimilares, de acordo com o teorema a seguir.

Teorema A. *Um grupo G admite representação autossimilar fiel com tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$ se, e somente se, existem dados $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ para G com $\mathbf{F}$-core de* $\mathbf{H}$

$$\langle K \leqslant \cap_{i=1}^{s} H_i \mid K \lhd G, K^{f_i} \leqslant K, \forall i = 1, \ldots, s \rangle$$

trivial.

Aplicamos o Teorema A para obter famílias de grupos autossimilares.

Teorema B. *Seja $G \leqslant \mathcal{A}_m$ um grupo autossimilar de grau m com tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$ e $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$. Então:*

(i) $G^{(\omega)}$ admite uma representação fiel fechada por estado de grau $m+1$ e tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s, 1)$.

(ii) Seja K um subgrupo regular de $Sym(\{1, \ldots, s\})$. Então o produto entrelaçado restrito $G \wr K$ admite uma representação fiel, fechada por estado e transitiva de grau $(m_1 \cdot m_2 \cdots m_s) \cdot s$.

Com respeito ao primeiro item do Teorema B, para qualquer inteiro positivo k, o produto direto G^k é autossimilar de grau m (Proposição 2.2.1). Em [14], L. Bartholdi e S. Sidki mostraram que o grupo $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ tem uma representação autossimilar de grau 2, mas não existe representação autossimilar transitiva e finita por estado para $\mathbb{Z}^{(\omega)}$, qualquer que seja o grau. No entanto, com este teorema, foi possível construir uma representação autossimilar intransitiva para $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ que é finita por estado (Corolário 2.2.3). O segundo item do Teorema B exibe uma imersão de um grupo autossimilar não transitivo em um grupo autossimilar transitivo.

No Capítulo 3, estudamos os grupos abelianos autossimilares sem assumir transitividade no primeiro nível da árvore e estabelecemos resultados de estrutura de seus centralizadores.

V. Nekrashevych e S. Sidki caracterizaram em [30], os subgrupos abelianos livres de posto finito autossimilares de automorfismos da árvore binária $\mathcal{T}_2$. Mais tarde, A. Brunner e S. Sidki conduziram em [5], um estudo mais completo dos grupos abelianos autossimilares transitivos, mostrando por exemplo, que o fecho de tais grupos pelo monoide gerado pelo *monomorfismo diagonal* $x : \alpha \mapsto (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ é novamente abeliano e autossimilar. Este fato possibilitou interpretar grupos abelianos autossimilares transitivos como módulos da álgebra m-ádica, $\mathbb{Z}_m[[x]]$.

No mesmo trabalho [5], foi mostrado: *o centralizador de um grupo abeliano autossimilar transitivo coincide com seu fecho diagonal-topológico A^*; em particular, A^* é abeliano fechado por estado que é um subgrupo abeliano maximal* *em* $\mathcal{A}_m$. Este resultado nos motivou estudar o centralizador de um grupo abeliano autossimilar intransitivo.

Seja G um subgrupo de $\mathcal{A}_m$. Considere $P = P(G) \leqslant Sym(Y)$ o grupo de permutação induzido por G em Y e sejam $O_{(1)}, \ldots, O_{(s)}$ as órbitas de P de tamanho $m_1, \ldots, m_s$, respectivamente. O grupo P induz grupos de permutações $P_{(i)}$'s em $O_{(i)}$, $i = 1, \cdots, s$, e P é naturalmente identificado com um produto sub-direto dos $P_{(i)}$'s. Assim, um elemento de P se decompõe como $\sigma = \sigma_{(1)}\sigma_{(2)} \cdots \sigma_{(s)}$, onde $\sigma_{(i)} \in P_{(i)}$. Chamamos $(P_{(1)}, \ldots, P_{(s)})$ o *tipo-permutacional* de G. Todo $\alpha = \alpha'\sigma \in G$, onde $\alpha' = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})$ e $\sigma \in P$, pode ser escrito na forma

$$\alpha = [(\alpha_{(1)}, e, \cdots, e)\sigma_{(1)}] \cdots [(e, \cdots, e, \alpha_{(s)})\sigma_{(s)}],$$

onde

$$\alpha_{(1)} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m_1-1}, e, \ldots, e), \ldots, \alpha_{(s)} = (e, \ldots, e, \alpha_{m_1+\cdots+m_{s-1}}, \ldots \alpha_{m-1}).$$

Defina

$$G_{(1)} = \{(\alpha_{(1)}, e, \ldots, e)\sigma_{(1)} | \alpha \in G\}, \ldots, G_{(s)} = \{(e, \ldots, e, \alpha_{(s)})\sigma_{(s)} | \alpha \in G\}.$$

Denote o grupo gerado pelos $G_{(i)}$'s por $B(G)$. Então, $B(G) = G_{(1)} \cdots G_{(s)}$ é um produto direto de seus fatores e G é um produto sub-direto de $B(G)$. Observe que $B(G)$ continua tendo o mesmo tipo-orbital de G.

Generalizando o monomorfismo diagonal, nosso trabalho requer um estudo cuidadoso do monoide livre

$$\Delta = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle,$$

onde para $1 \leq i \leq s$, x_i é o *monomorfismo diagonal parcial* de $\mathcal{A}_m$ definido por:

$$\alpha \mapsto (e, \ldots, e, \alpha, \ldots, \alpha, e, \ldots, e)$$

com α ocorrendo nas coordenadas da órbita $O_{(i)}$ e o automorfismo trivial e nas demais posições. Denotaremos o *fecho de* G *por* Δ por

$$\Delta(G) = \langle G^w \mid w \in \Delta \rangle.$$

Como será demonstrado mais adiante, se A é um grupo abeliano autossimilar e Δ é o monoide de operadores diagonais parciais correspondente ao seu tipo-orbital, então $\Delta(A)$ continua sendo abeliano com mesmo tipo-orbital.

Uma outra operação que desempenha um papel importante é o fecho topológico $\overline{G}$ de G, com relação à topologia adquirida da topologia da árvore; este consiste dos produtos infinitos

$$\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_k\cdots\,,$$

onde α_i é um elemento de $Stab_G(i)$, o estabilizador do nível i em G. Note que em geral, se um grupo G, de automorfismos da árvore, satisfaz uma identidade, então seu fecho topológico continua satisfazendo a mesma identidade.

Seja A um subgrupo abeliano autossimilar de $\mathcal{A}_m$. Denote o centralizador $C_{\mathcal{A}_m}(A)$ de A em $\mathcal{A}_m$ por $C(A)$. O centralizador de $P(A)$ em $Sym(Y)$ tem a forma $P_{(1)}\cdots P_{(s)}S(P)$, onde $S(P)$ é o grupo de permutação induzido por $C(P)$ no conjunto de órbitas $O_{(i)}$ $(1\leq i\leq s)$. Por exemplo, seja A o subgrupo de $\mathcal{A}_4$ gerado por $(0\,1)(2\,3)$. Então, $P(A)=A$, $O_{(1)}=\{0,1\}$, $O_{(2)}=\{2,3\}$, $P_{(1)}=\langle(0\,1)\rangle, P_{(2)}=\langle(2\,3)\rangle$ e $S(P)=\langle(0\,2)(1\,3)\rangle$. Defina

$$S_0(A)=\{s\in S(P)\mid C(A)\cap Stab_{\mathcal{A}_m}(1)s\ \text{ é não vazio}\}.$$

Para cada $s\in S_0(A)$, escolha um levantamento de s em $C(A)$ e defina $D_0(A)$ sendo o grupo gerado por estes levantamentos.

O seguinte resultado nos dá o primeiro teorema de estrutura do centralizador de um grupo abeliano autossimilar.

Teorema C. *Sejam $A, B(A), C(A), D_0(A)$ como acima. Então*

(i) $C(A)=Stab_{C(A)}(1)B(A)D_0(A)$*;*

(ii) o subgrupo $Stab_{C(A)}(1)B(A)$ *é normal em* $C(A)$*;*

(iii) $B(A)$ *centraliza* $Stab_{C(A)}(1)$*;*

(iv) $C(A)$ *e* $Stab_{C(A)}(1)$ *são* Δ *invariantes;*

(v) $\Delta(B(A))$ *é abeliano com mesmo tipo-permutacional de* A*.*

Este resultado nos leva à generalização do grupo A^* de Brunner-Sidki, definido em [5] como sendo o fecho topológico-diagonal de um grupo abeliano autossimilar transitivo A.

Teorema D. *Seja $A\leqslant\mathcal{A}_m$ um grupo abeliano autossimilar com tipo-permutacional $\big(P_{(1)},\ldots,P_{(s)}\big)$. Defina $K=\Delta(A)$ e $A^*=C_{\mathcal{A}_m}(K)$. Então* *(i)* K *é um grupo abeliano autossimilar com mesmo tipo-permutacional de* A*;*

(ii) A^* *deixa cada órbita* $O_{(i)}$ *invariante e*

$$A^* = B(K)Stab_{A^*}(1);$$

(iii) $Stab_{A^*}(1) = (A^*)^{x_1}(A^*)^{x_2} \cdots (A^*)^{x_s}$;

(iv)
$$A^* = \overline{\Delta(B(A))},$$

é o único subgrupo abeliano autossimilar de $C(A)$ *o qual contém* A *e é auto-centralizante; portanto,* A^* *é um subgrupo abeliano maximal de* $\mathcal{A}_m$*.*

No teorema acima, se A é transitivo (ou seja, $s = 1$), então $B(A) = A$ e $A^* = \overline{\Delta(A)}$.

Sejam $A \leqslant \mathcal{A}_m$ abeliano autossimilar de tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$ e n o expoente de $P(A)$. Considere

$$p(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}_n[[\Delta]].$$

Escreva $p(x_1, \ldots, x_s)$ como

$$p(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j \geq 0} q_{ij}(x_1, \ldots, x_s) {x_i}^j,$$

onde os monômios que aparecem em $q_{ij}(x_1, \ldots, x_s)$ são da forma $x_{i_1}^{l_1} x_{i_2}^{l_2} \cdots x_{i_k}^{l_k}$ com $i_k \neq i$. Com isso, escrevemos

$$\alpha^p = \prod_{i=1}^{s} \alpha^{q_{i0}} (\alpha^{q_{i1}})^{x_i} (\alpha^{q_{i2}})^{{x_i}^2} \cdots (\alpha^{q_{ij}})^{{x_i}^j} \cdots .$$

Provaremos a seguinte forma aditiva de A^*.

Teorema E. *Sejam* A *um subgrupo abeliano autossimilar de* $\mathcal{A}_m$ *e* n *o expoente de* $P(A)$*. Então* A^* *é um* $\mathbb{Z}_n[[\Delta]]$ *módulo finitamente gerado.*

Como consequência, obtemos o seguinte resultado.

Teorema F. *Seja* A *um grupo abeliano autossimilar. Então o subgrupo de torção* $Tor(A)$ *de* A *é também um grupo autossimilar. Além disso,* $Tor(A)$ *tem expoente finito, divisor do expoente de* $P(A)$*, e ele é um fator direto de* A*.*

Segue do Teorema F: *um grupo abeliano de torção e de expoente infinito não pode ter representação autossimilar fiel.*

Seja $D_m(j)$ o grupo gerado pelo conjunto de estados $Q(\alpha) = \{\alpha, \alpha^x, \ldots, \alpha^{x^{j-1}}\}$ do automorfismo

$$\alpha = (e, \ldots, e, \alpha^{x^{j-1}})(0 \cdots m-1),$$

onde j é um inteiro positivo. Então $D_m(j)$ é um grupo abeliano livre de posto j o qual é autossimilar transitivo e diagonalmente fechado. Em contraste, no caso geral temos o seguinte resultado.

Teorema G. *Seja A um grupo abeliano livre.*

(i) Suponha que A é de posto finito.

(a) Se A é um grupo autossimilar não-transitivo, então $\Delta(A)$ não é finitamente gerado;

(b) Seja A um subgrupo autossimilar transitivo de $\mathcal{A}_m$. Então a representação autossimilar de A estende-se a uma representação autossimilar não-transitiva em $\mathcal{A}_{m+1}$ com tipo-orbital $(m, 1)$ tal que $\Delta(A)$, com respeito a segunda representação, contém um grupo abeliano livre de posto infinito enumerável que é autossimilar.

(ii) Suponha que A é de posto infinito enumerável. Então A pode ser realizado como um grupo autossimilar de tipo-orbital $(m, 1)$ e é invariante sobre $\Delta = \langle x_1, x_2 \rangle$.

Para ilustrar o segundo item do teorema, seja A o subgrupo de $\mathcal{A}_{m+1}$ gerado por

$$\alpha_1 = (e, \ldots, e, \alpha_1, e)(0\,1 \cdots m-1)(m),$$

$$\alpha_{2i-1} = {\alpha_i}^{x_1}\ (i \geq 2)\ ,\ \alpha_{2i} = {\alpha_i}^{x_2}\ (i \geq 1).$$

Então A é um grupo abeliano de posto infinito enumerável que é autossimilar e fechado sobre $\Delta = \langle x_1, x_2 \rangle$.

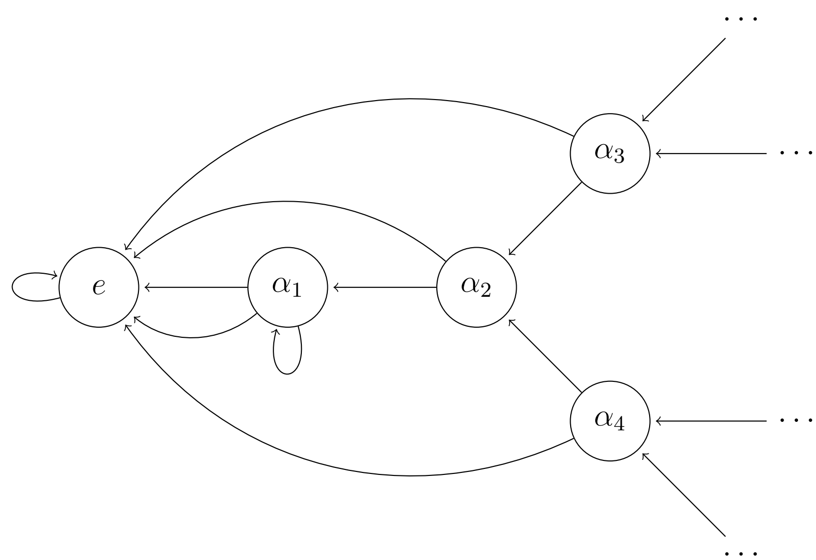


Diagrama de A

Finalizamos o Capítulo 3 descrevendo o centralizador de um subgrupo cíclico autossimilar de $\mathcal{A}_4$. A descrição é baseada no tipo-orbital do grupo.

No Capítulo 4, estudamos representações autossimilares para grupos do tipo Lamplighter generalizados: $A \wr \mathbb{Z}^d$, onde A é um grupo abeliano finitamente gerado e d é um inteiro positivo e para os grupos $C_p \wr \mathbb{Z}^2$, onde p é um número primo. O primeiro exemplo é o grupo Lamplighter clássico $C_2 \wr \mathbb{Z}$ que serviu como contraexemplo para uma conjectura de M. Atiya, [17].

A. Dantas e S. Sidki [2], mostraram que se $A \wr \mathbb{Z}^d$ admite uma representação autossimilar transitiva fiel, então A é necessariamente um grupo de torção de expoente finito. L. Bartholdi e S. Sidki [14], mostraram que quando B é um grupo abeliano finito, então $B \wr \mathbb{Z}^d$ é um autômata-grupo de grau $2|B|$. Generalizamos ambos resultados no teorema a seguir.

Teorema H. *Seja A um grupo abeliano finitamente gerado e considere $T = Tor(A)$. Então $G = A \wr \mathbb{Z}^d$ é um autômata-grupo de grau $2|T| + 4$. No caso particular, para $A = \mathbb{Z}^l$, o grau pode ser reduzido para 4.*

A. Dantas e S. Sidki [3], mostraram que o grupo $C_p \wr \mathbb{Z}^d$, onde C_p é um grupo cíclico de ordem prima p e $d \geq 2$, é um autômata-grupo de grau p^2, mas tal grupo não admite representação autossimilar transitiva de grau primo. Nesta direção, obtemos o seguinte resultado.

Teorema I. *Seja p um número primo. Então o grupo $C_p \wr \mathbb{Z}^2$ é fechado por estado de grau $p+1$ com tipo-orbital $(p,1)$. De fato, $C_p \wr \mathbb{Z}^2$ é gerado por $\alpha = (\alpha, \alpha\sigma, \ldots, \alpha\sigma^{p-1}, \alpha\beta)$, $\sigma = (e, \ldots, e, \sigma)(0\,1\,\cdots p-1)$ e $\beta = (e, \ldots, e, \alpha)$. Em particular, o grupo $C_2 \wr \mathbb{Z}^2$ é fechado por estado de grau 3.*

Seja $f : H \to G$ um endomorfismo virtual. Defina $G_0 = G$ e $G_n = G_{n-1}^{f^{-1}}$ para todo $n \geq 1$. Defina o *subgrupo parabólico* $G_\omega = \cap_{j\geq 0} G_j$. Denote por $G_\omega \setminus G$ o conjunto das classes laterais à direita de G_ω em G. Seja A um grupo e considere

$$A^{(G_\omega \setminus G)} = \{\phi : G_\omega \setminus G \to A \text{ de suporte finito}\},$$

onde cada $g \in G$ age por translação em $A^{(G_\omega \setminus G)}$. O seguinte resultado foi provado para grupos autossimilares transitivos por L. Bartholdi e S. Sidki.

Proposição. *(Proposição 6.1, [14]) Sejam G um grupo autossimilar transitivo de grau m, G_ω o subgrupo parabólico e B um grupo abeliano finito. Então a estensão $B^{(G_\omega \setminus G)} \rtimes G$ é autossimilar transitivo de grau $|B|m$, além disso, é finito por estado sempre que G o é.*

Seja G um grupo fechado por estado com respeito aos dados $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$, onde $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$, com $m_1 \geq 2, \ldots, m_s \geq 2$. Para cada $i = 1, \ldots, s$ defina $G_{i0} = G$, $G_{ij} = (G_{i(j-1)})^{f_i^{-1}}$ $(j > 0)$ e $G_{\omega_i} = \cap_{j\geq 0} G_{ij}$. Com esta notação estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema J. *Sejam B um grupo abeliano finito e G um grupo autossimilar com tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$, com $m_1 \geq 2, \ldots, m_s \geq 2$. Então o grupo*

$$B^{((G_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (G_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$$

é autossimilar com tipo-orbital $(|B| \cdot m_1 \cdots m_s,\, 1)$. Além disso, se G é finito por estado então $B^{((G_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (G_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$ também é finito por estado.

Como consequência do Teorema J, o grupo $C_2 \wr \mathbb{Z}^{(\omega)}$ é finito por estado, veja Exemplo 4.3.3.

No Capítulo 5, consideramos a questão de existência de grupos nilpotentes finitamente gerados que não admitem representação autossimilar. Em particular, estudamos essa questão para a classe $\mathfrak{T}_c$, grupos nilpotentes de classe c, livres de torção e finitamente gerados.

Em [1], A. Berlatto e S. Sidki mostraram que os $\mathfrak{T}_2$-grupos são ricos em autossimilaridade: *se G é um $\mathfrak{T}_2$-grupo e H é um subgrupo de índice finito de G, então* *existe um subgrupo K de índice finito em H o qual admite um endomorfismo recorrente simples $f : K \to G$ (dizemos que o endomorfismo f é recorrente se ele é um epimorfismo).* Como consequência, todo $\mathfrak{T}_2$-grupo é autossimilar transitivo.

J. Dyer [12], construiu, a partir de uma álgebra de Lie, um $\mathfrak{T}_6$-grupo que é 2-gerado com comprimento de Hirsh igual a 9, cujo grupo de automorfismo é também nilpotente, que não é autossimilar transitivo. O. Mathieu desenvolveu no seu artigo recente [19], um estudo de $\mathfrak{T}_c$-grupos e suas conexões com nil variedades. Usando uma classe de álgebras de Lie nilpotentes construídas por Y. Benoist [31], ele exibe um $\mathfrak{T}$-grupo com centro cíclico que não é autossimilar. Em 2018, S. Sidki [26], perguntou sobre a existência de um $\mathfrak{T}_3$-grupo que não é autossimilar (Problema 10).

Em [27], V. Bludov e B. Gusev introduziram o $\mathfrak{T}_3$-grupo $N_{3,4}$ dado pelas seguintes relações definidoras:

$$\begin{gathered}
[a,[a,b]] = [a,b,b] = [a,[c,d]] = [a,d,d] = 1, \\
[b,[b,c]] = [b,[c,d]] = [c,[c,d]] = [c,d,d] = 1, \\
[a,[b,c]] \cdot [a,c,b] = [a,[b,d]] \cdot [a,d,b] = 1, \\
[a,[a,d]] \cdot [b,c,c]^{-1} = [a,[a,c]] \cdot [b,[b,d]]^{-1} = 1, \\
[a,c,b] \cdot [b,d,d]^{-1} = [a,c,c] \cdot [b,d,c]^{-1} = [a,d,b] \cdot [a,d,c]^{-1} = 1, \\
[a,b] \cdot [a,c,c]^{-1} = [c,d] \cdot [a,[a,c]]^{-1} = 1.
\end{gathered}$$

Finalizamos o Capítulo 5 respondendo o Problema 10, proposto por S. Sidki, com o seguinte resultado.

Teorema K. *O grupo $N_{3,4}$ não admite representação autossimilar fiel em $\mathcal{T}_m$, qualquer que seja m.*

A maior parte dos resultados deste último capítulo foram obtidos por V. Bludov e B. Gusev em [27]; os resultados inéditos deste capítulo são a Proposição 5.2.4 e o Teorema 5.2.6.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo vamos definir a árvore uni-raiz m-regular $\mathcal{T}_m$ e estudar o grupo $\mathcal{A}_m$, de automorfismos de $\mathcal{T}_m$. Veremos que cada automorfismo de $\mathcal{T}_m$ pode ser descrito através de uma sequência infinita de permutações do grupo simétrico de grau m. Além disso, vamos ver que um automorfismo em $\mathcal{A}_m$ tem uma interpretação natural como um autômata definido sobre um alfabeto finito.

1.1 O grupo de automorfismos da árvore uni-raiz m-regular

1.1.1 A árvore uni-raiz m-regular

Um *grafo* Γ é um par $(V(\Gamma), E(\Gamma))$, onde $V(\Gamma)$ é um conjunto e $E(\Gamma)$ é uma coleção de pares ordenados de elementos de $V(\Gamma)$. Chamamos $V(\Gamma)$ o conjunto de *vértices* de Γ e $E(\Gamma)$ o conjunto de *arestas* de Γ, que é também chamado *relação de incidência*.

Um *caminho* p é uma sequência de vértices $v_1, \ldots, v_n$ tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E(\Gamma)$ para cada $i < n$. O *comprimento* de p, denotado por $|p|$, é $n - 1$.
O grafo Γ é *conexo* se existe um caminho entre quaisquer dois de seus vértices.
Um *ciclo* no grafo Γ é um caminho $v_1, \ldots, v_n$ tal que $n > 1$ e $v_1 = v_n$.

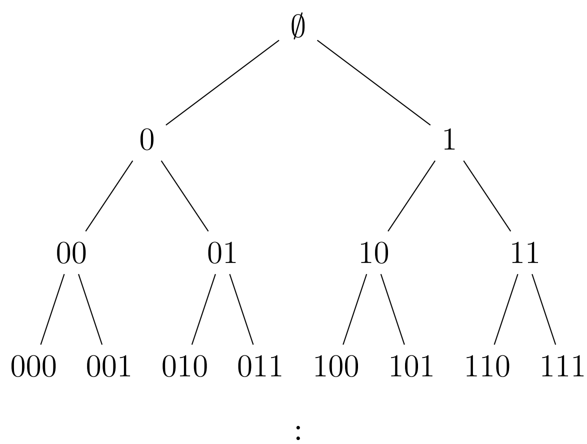
Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos. Uma árvore é *uni-raiz* se ela contém um vértice distinguido, que é chamado a *raiz* da árvore. Se v é um vértice na árvore uni-raiz Γ, os *descendentes* de v são os vértices adjacentes a v mais longe da raiz. Uma árvore uni-raiz é *regular* se cada vértice tem o mesmo número de descendentes; se o número de descendentes de um vértice na árvore uni-raiz regular é m, diremos que a árvore é *uni-raiz m-regular*.

Seja m um inteiro positivo e considere o alfabeto $Y = \{0, \ldots, m-1\}$ e $\mathcal{M} = \mathcal{M}(Y)$ o conjunto de todas as sequências finitas de Y. $\mathcal{M}$ é um monoide livremente gerado por Y com elemento neutro a palavra vazia $\emptyset$. O comprimento de uma palavra $u \in \mathcal{M}$ é denotada por $|u|$.

Definição 1.1.1. *A árvore uni-raiz m-regular $\mathcal{T}_m$ é o grafo $(V(\mathcal{T}_m), E(\mathcal{T}_m))$, onde $V(\mathcal{T}_m) = \mathcal{M}$ e $(u, v) \in E(\mathcal{T}_m)$ se, e somente se, $v = uy$ para algum $y \in Y$, onde $u, v \in \mathcal{M}$.*

Dado um inteiro não negativo n, o *nível* n da árvore $\mathcal{T}_m$ é o subconjunto de $\mathcal{M}$ formado por todas as palavras de comprimento n.

Quando $m = 2$, o alfabeto Y consiste do conjunto $\{0, 1\}$ e a árvore $\mathcal{T}_2$ é chamada *árvore binária*, que pode ser representada pelo seguinte diagrama:



O nível 0 de $\mathcal{T}_2$ consiste da palavra vazia, o nível 1 de $\mathcal{T}_2$ é formado pelas palavras 0 e 1, o nível 2 consiste das palavras 00, 01, 10, 11 e assim por diante.

1.1.2 O produto entrelaçado de grupos

Sejam $G_1, \ldots, G_n$ grupos, então o conjunto $G_1 \times \cdots \times G_n$, das sequências

$$(g_1, \ldots, g_n) \text{ com } g_i \in G_i,$$

é um grupo com respeito à multiplicação

$$(g_1, \ldots, g_n)(g'_1, \ldots, g'_n) = (g_1 g'_1, \ldots, g_n g'_n).$$

Este grupo é chamado o *produto direto* ou *produto cartesiano* dos grupos G_i's. Este conceito pode ser estendido a uma coleção arbitrária de grupos G_i, com i pertencendo a um conjunto arbitrário de índices, I. Seja $G = \prod_{i \in I} G_i$ o conjunto das funções $f : I \to \cup_{i \in I} G_i$ satisfazendo $f(i) \in G_i$ para todo $i \in I$. O conjunto G munido com a operação $(fg)(i) = f(i)g(i)$ é um grupo, chamado o *produto cartesiano* dos grupos G_i's.

O *suporte* da função f é o conjunto

$$Supp(f) = \{i \mid i \in I, f(i) \neq e_{G_i}\}.$$

O subgrupo de G consistindo das funções de suporte finito é chamado o *produto direto* dos G_i's e denotado por $\prod_{i \in I}^{\times} G_i$. Note que se I é finito, então as noções de produto direto e produto cartesiano coincidem. No caso $I = \mathbb{Z}$ e $G_i = G$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, denotaremos $\prod_{i \in I}^{\times} G_i$ por $G^{(\omega)}$.

Um grupo G é dito ser um produto sub-direto dos grupos $G_1, \ldots, G_k$ se $G \leqslant G_1 \times \cdots \times G_k$ e G projeta sobrejetivamente em cada fator.

Sejam N e H grupos e considere $\alpha : H \to Aut(N)$ um homomorfismo. O *produto semidireto* $G = N \rtimes_\alpha H$ é o grupo consistindo dos pares (n, h), $n \in N$, $h \in H$ e munido com a operação

$$(n, h)(n', h') = (n(n')^{h^\alpha}, hh').$$

Por simplicidade, escrevemos $nhn'h' = n(n')^{h^\alpha} hh'$.

Em [8], L. Kaloujnine e M. Krasner introduziram e estudaram o conceito de produto entrelaçado de grupos. Este conceito tornou-se uma ferramenta muito importante em Teoria de Grupos, o qual foi aplicado na construção de contraexemplos e demostrações de teoremas de imersão. Usaremos esse teorema para construir uma representação autossimilar de um grupo abstrato.

Sejam A e B grupos e $A^{[B]}$ o grupo de todas a funções $f : B \to A$, com multiplicação $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$ para todo $x \in B$. O grupo B age em $A^{[B]}$: $f^b : B \to A$ por $f^b(x) = f(xb^{-1})$, para todos $f \in F$, $b, x \in B$. O produto semidireto $A^{[B]} \rtimes B$ associado à esta ação é chamado o *produto entrelaçado* (irrestrito) de A por B e denotado por $A \, Wr \, B$. Cada elemento de $A \, Wr \, B$ pode ser unicamente representado por fb, com $f \in A^{[B]}$ e $b \in B$ e a regra de multiplicação segue da fórmula de conjugação

$$b^{-1} f b(x) = f(xb^{-1}).$$

Denotaremos por $A^{(B)}$ o subgrupo de $A^{[B]}$ consistindo de todas as funções de suporte finito. O *produto entrelaçado restrito* $A\, wr\, B$ de A por B é definido similarmente ao produto entrelaçado irrestrito trocando $A^{[B]}$ por $A^{(B)}$. Ao longo desse trabalho denotaremos esse produto por $A \wr B$.

Sejam G um grupo arbitrário e A um subgrupo normal de G. Defina $B = G/A$ e considere $\pi : G \to B$ a projeção canônica. Seja $s : B \to G$ um transversal de A em G, $b \mapsto b^s$; assim $\pi(b^s) = b$, qualquer que seja $b \in B$. O monomorfismo de Kaloujnine-Krasner $\phi : G \to A\, Wr\, B$ é definido por

$$\phi(g) = f_g \pi(g),$$

$$\text{onde } f_g(x) = (x\pi(g)^{-1})^s g(x^s)^{-1},\ x \in B.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\pi(f_g(x)) &= \pi((x\pi(g)^{-1})^s g(x^s)^{-1}) \\
&= \pi((x\pi(g)^{-1})^s)\pi(g)\pi((x^s)^{-1}) \\
&= x\pi(g)^{-1}\pi(g)x^{-1} \\
&= e.
\end{aligned}$$

Logo, $f_g \in A^{[B]}$. Observe que ϕ é um monomorfismo e com isso fica estabelecido o teorema:

Teorema 1.1.2. *(Kaloujnine-Krasner) Sejam G um grupo e A um subgrupo normal de G. Considere $B = G/A$. Então existe uma imersão de G em $A\, Wr\, B$.*

Ou seja, o teorema estabelece que toda extensão de um grupo A por um grupo B pode ser imerso no produto entrelaçado irrestrito de A por B.

Sejam A um grupo e $B \leqslant Sym(Y)$. Reservamos a notação $A \wr_Y B$ para o produto *entrelaçado permutacional* $A^m \rtimes B$ dado pela ação

$$(a_0, \ldots, a_{m-1})^\sigma = (a_{0^\sigma}, \ldots, a_{(m-1)^\sigma}),$$

onde $(a_0, \ldots, a_{m-1}) \in A^m$ e $\sigma \in B$.

1.1.3 O grupo de automorfismos $\mathcal{A}_m$

Dadas duas árvores $\mathcal{T}$ e $\mathcal{U}$, um *isomorfismo* entre $\mathcal{T}$ e $\mathcal{U}$ é uma aplicação bijetora $\psi : \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ que preserva adjacência de vértices; ou seja, se $(u, v) \in E(\mathcal{T})$ então $(\psi(u), \psi(v)) \in E(\mathcal{U})$.

Definição 1.1.3. *Um automorfismo da árvore uni-raiz m-regular $\mathcal{T}_m$ é um isomorfismo $\psi : \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_m$.*

Podemos dizer também que um automorfismo da árvore uni-raiz m-regular $\mathcal{T}_m$ é uma bijeção que preserva distância e portanto, é uma *isometria* de $\mathcal{T}_m$.

O conjunto de todos os automorfismos de $\mathcal{T}_m$ formam um grupo com respeito a operação composição de funções, o qual chamaremos o *grupo de automorfismos* de $\mathcal{T}_m$ e denotaremos por $\mathcal{A}_m$.

Observações

(1) Dado $u \in \mathcal{M}$ a árvore $u\mathcal{M} = \{uv \mid v \in \mathcal{M}\}$ é isomorfa à árvore original $\mathcal{T}_m$. De fato, basta considerar o isomorfismo $uv \mapsto v$.

(2) Dada uma permutação σ de Y, podemos estendê-la a um automorfismo $\overline{\sigma}$ de $\mathcal{T}_m$ por:
$$(\emptyset)\overline{\sigma} = \emptyset$$
$$(yu)\overline{\sigma} = y^{\sigma}u.$$

(3) Qualquer automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}_m$ induz uma permutação $\sigma(\alpha)$ em Y, basta considerar a restrição de α ao conjunto Y, $\alpha : Y \to Y$.

Veremos a seguir que o desenvolvimento de um elemento $\alpha \in \mathcal{A}_m$ é feito especificando uma sequência infinita de permutações no alfabeto Y.

Todo automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}_m$ induz uma permutação $\sigma(\alpha)$ em Y. Então a composição $\alpha(\overline{\sigma(\alpha)})^{-1}$ age trivialmente sobre o alfabeto Y e assim
$$\alpha(\overline{\sigma(\alpha)})^{-1} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}),$$
onde α_y é um automorfismo de $y\mathcal{M}$, que podem ser vistos com automorfismos de $\mathcal{A}_m$ pelo isomorfismo do item (1) da observação acima. Logo,
$$\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})\sigma(\alpha) \in (\mathcal{A}_m \times \cdots \times \mathcal{A}_m) \rtimes Sym(Y) = (\mathcal{A}_m)^m \rtimes Sym(Y).$$

Portanto, temos que $\mathcal{A}_m = (\mathcal{A}_m)^m \rtimes Sym(Y) = \mathcal{A}_m \wr_Y Sym(Y)$, com ação de $Sym(Y)$ sobre $(\mathcal{A}_m)^m$ dada por

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})^\sigma = (\alpha_{0^\sigma}, \ldots, \alpha_{(m-1)^\sigma}).$$

Assim, o produto de $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})\sigma(\alpha)$ por $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_{m-1})\sigma(\beta)$ é dado por

$$\alpha\beta = (\alpha_0\beta_{0^{\sigma(\alpha)}}, \ldots, \alpha_{m-1}\beta_{(m-1)^{\sigma(\alpha)}})\sigma(\alpha)\sigma(\beta) \tag{1.1}$$

e inverso de α é

$$\alpha^{-1} = (\alpha^{-1}_{0^{(\sigma(\alpha))^{-1}}}, \ldots, \alpha^{-1}_{(m-1)^{(\sigma(\alpha))^{-1}}})\sigma(\alpha)^{-1}. \tag{1.2}$$

Com esses desenvolvimentos, a ação de um automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}_m$ em uma palavra $y_1y_2\cdots y_k \in Y^k$, $k \geq 1$, é dada por

$$\alpha : y_1y_2\cdots y_k \mapsto {y_1}^{\sigma(\alpha)}(y_2\cdots y_k)^{\alpha_{y_1}}$$

e assim essa ação depende apenas da ação de permutações em Y.

Nesta ação, α induz um automorfismo α_k na árvore $\mathcal{T}_{m^k}$ sobre o alfabeto Y^k e assim obtemos uma imersão $\mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_{m^k}$, a qual chamaremos k-*inflação*.

Definição 1.1.4. *Seja $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})\sigma(\alpha) \in \mathcal{A}_m$. O conjunto de estados de α é definido por*

$$Q(\alpha) = \{\alpha_u \mid u \in \mathcal{M}\} = \{\alpha, \alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}\} \cup Q(\alpha_0) \cup Q(\alpha_1) \cup \cdots \cup Q(\alpha_{m-1}).$$

Dizemos que o automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}_m$ é finito por estado se $Q(\alpha)$ é finito.

Exemplo 1.1.5. *Considere os automorfismos $\gamma = (\gamma, e, \beta)$ e $\beta = (e, \beta, e)(0\,1)$ de $\mathcal{A}_3$, onde e é o elemento identidade. Sejam 101 e 210 em $\mathcal{M}(\{0,1,2\})$. Então*

$$(102)^\gamma = 1(02)^e = 102$$

e

$$(210)^\gamma = 2(10)^\beta = 200^\beta = 201.$$

Observe que $Q(\gamma) = \{e, \gamma, \beta\}$ e $Q(\beta) = \{e, \beta\}$.

Definição 1.1.6. *Seja $G \leqslant \mathcal{A}_m$. Dizemos que G é finito por estado se todo elemento de G o é; G é fechado por estado se $Q(\alpha) \subseteq G$ para todo $\alpha \in G$.*

Em decorrência de (1.1) e (1.2) obtemos

$$Q(\alpha\beta) \subseteq Q(\alpha)Q(\beta) \quad \text{e} \quad Q(\alpha^{-1}) = Q(\alpha)^{-1}.$$

Portanto, o subconjunto $F(Y)$ de $\mathcal{A}_m$, consistindo dos automorfismos de estados finito, é um subgrupo de $\mathcal{A}_m$.

Dados G um grupo de automorfismos de $\mathcal{T}_m$, um inteiro i não negativo e uma palavra u sobre o alfabeto Y, definimos:

(1) $Stab_G(i) = \{\alpha \in G \mid v^\alpha = v \text{ para todo } v \in \mathcal{M}(Y) \text{ com } |v| = i\}$, o *estabilizador do nível* i em G;

(2) $Fix_G(u) = \{\alpha \in G \mid u^\alpha = u\}$, o *fixador de* u em G;

(3) $P(G) = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in G\} \leqslant Sym(Y)$, o *grupo de permutação de* G; G é *transitivo* se $P(G)$ é transitivo como subgrupo de $Sym(Y)$.

O grupo de automorfismos $\mathcal{A}_m$ é o limite inverso do seu quociente pelos estabilizadores do i-ésimo nível, isto é

$$\mathcal{A}_m \simeq \varprojlim_{i\geq 0} \frac{\mathcal{A}_m}{Stab_{\mathcal{A}_m}(i)};$$

assim $\mathcal{A}_m$ é um grupo topológico, onde cada $Stab_{\mathcal{A}_m}(i)$ é um subgrupo aberto e fechado. Com isso, se $\alpha \in \mathcal{A}_m$, então α pode ser visto como um produto infinito

$$\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots, \text{ onde } \alpha_i \in Stab_{\mathcal{A}_m}(i).$$

Mais geralmente, se G é um subgrupo de $\mathcal{A}_m$, então seu fecho topológico, $\overline{G}$, consiste dos produtos infinitos $\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots$, onde $\alpha_i \in Stab_G(i)$.
Para definição do limite inverso $\varprojlim$, consulte [16].

1.1.4 Autômatas

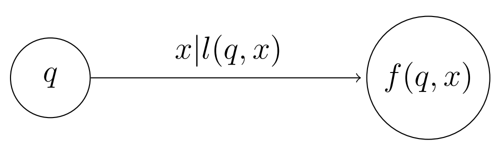
Autômatas são modelos abstratos de máquinas que executam cálculos em uma entrada, movendo-se através de uma série de estados, de modo que em cada estado da computação, uma função de transição determina a próxima configuração da máquina.

Definição 1.1.7. *Um autômata de Mealy é uma sêxtupla* $(Q, L, \Gamma, f, l, q_0)$*, onde*

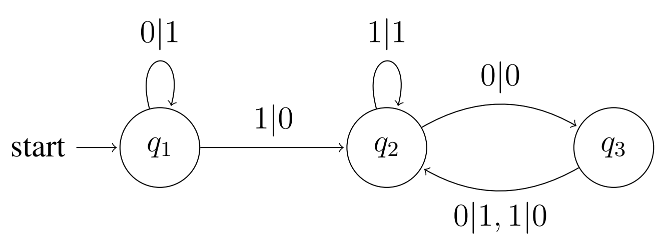
- *Q é o conjunto de estados, onde cada elemento q de Q é uma função bijetiva de Γ, $q : \Gamma \to \Gamma$;*
- *L é o alfabeto de entrada;*
- *Γ é o alfabeto de saída;*
- *$f : Q \times L \to Q$ é a função transição de estados;*
- *$l : Q \times L \to \Gamma$ é a função saída definida por $l(q, x) = q(x)$ para todos $q \in Q$ e $x \in \Gamma$;*
- *$q_0 \in Q$ é o estado inicial.*

Neste trabalho, vamos considerar o alfabeto de entrada igual ao alfabeto de saída e finitos. Dessa forma, a sêxtupla $(Q, L, \Gamma, f, l, q_0)$ pode ser reduzida a quíntupla (Q, Γ, f, l, q_0), com Γ finito. Por vezes, vamos suprimir o estado inicial q_0 e considerar o autômata apenas como (Q, Γ, f, l).

Podemos definir um autômata através do seu diagrama (*diagrama de Moore*). Tal diagrama é um grafo direcionado rotulado de modo que seus vértices são identificados com os estados do autômata. Para cada estado $q \in Q$ e cada letra $x \in \Gamma$, o diagrama tem uma seta de q para $f(q, x)$ e rotulada pelo par $x|l(q, x)$; graficamente:



Exemplo 1.1.8. *Considere o autômata definido pelo seguinte diagrama de Moore.*



Então $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $\Gamma = \{0, 1\}$, o estado inicial é q_1, a função mudança de estados f é dada por

f	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

e a função saída l dada pela tabela abaixo

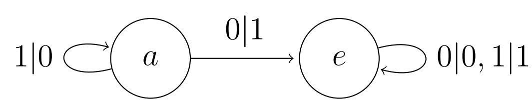
l	0	1
q_1	1	0
q_2	0	1
q_3	1	0

Cada automorfismo finito por estados, $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})\sigma(\alpha) \in \mathcal{A}_m$, pode ser visto como um autômata, onde o conjunto de estados é $Q(\alpha)$, o alfabeto de entrada e saída é o conjunto $Y = \{0, \ldots, m-1\}$, o estado inicial é α e as funções mudança de estados e de saída são dadas por

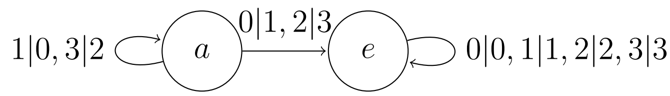
$$\begin{aligned} f : Q(\alpha) \times Y &\to Q(\alpha) \\ (\alpha, y) &\mapsto \alpha_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l : Q(\alpha) \times Y &\to Y \\ (\alpha, y) &\mapsto y^{\sigma(\alpha)} \end{aligned}$$

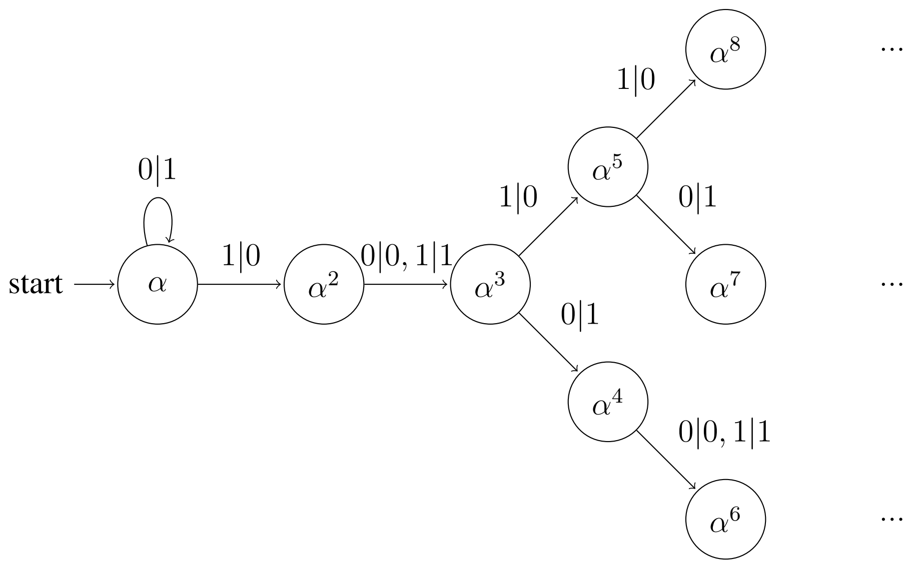
Exemplo 1.1.9. *O automorfismo de $\mathcal{T}_2$ definido por $a = (e, a)\sigma$, com $\sigma = (0\,1)$ transposição de $Sym(\{0,1\})$, é chamado máquina de adição binária. Note que $a^2 = (a, a)$ e assim $a^{2n} = (a^n, a^n)$ e $a^{2n+1} = (a^n, a^{n+1})$ e logo a tem ordem infinita. O conjunto de estados de a é $Q(a) = \{a, e\}$ e portanto a é finito por estado.*



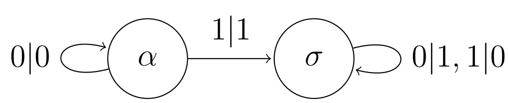
Exemplo 1.1.10. *A máquina de adição dupla é o automorfismo de $\mathcal{T}_4$ definido por $a = (e, a, e, a)(0\,1)(2\,3)$. Note que $a^2 = (a, a, a, a)$ e assim $a^{2n} = (a^n, a^n, a^n, a^n)$ e $a^{2n+1} = (a^n, a^{n+1}, a^n, a^{n+1})$ e logo a tem ordem infinita. O conjunto de estados de a é $Q(a) = \{a, e\}$ e portanto a é finito por estado.*



Exemplo 1.1.11. *Considere o automorfismo $\alpha = (\alpha, \alpha^2)\sigma \in \mathcal{A}_2$, com $\sigma = (0\,1)$. Então $\alpha^{2n} = (\alpha^{3n}, \alpha^{3n})$ e $\alpha^{2n+1} = (\alpha^{3n+1}, \alpha^{3n+2})\sigma$ para todo inteiro $n \geq 1$. Assim, $Q(\alpha) = \{\alpha^n \mid n \leq 1\}$ e α não é finito por estado.*



Exemplo 1.1.12. *Seja $\alpha = (\alpha, \sigma) \in \mathcal{A}_2$, onde $\sigma = (0\,1)$. Então $\alpha^2 = (\alpha^2, e) = e$. Observe que $Q(\alpha) = \{\alpha, \sigma\}$.*



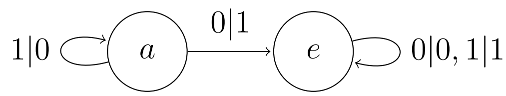
Reciprocamente, dado um autômata (Q, Γ, f, l, q_0), podemos associar a cada estado q de Q um automorfismo de $\mathcal{A}_m$, com $m = |\Gamma|$, $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}\}$. De fato, basta associar $q \in Q$ com o automorfismo

$$\alpha_q = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})\sigma(q),$$

onde α_i corresponde ao estado $q_i = f(q, \gamma_i)$ e a permutação $\sigma(q)$ é definida por $i^{\sigma(q)} = j$ se, e somente se, $l(q, \gamma_i) = \gamma_j$. Assim, o conjunto de estados do autômata $A = (Q, \Gamma, f, l, q_0)$ pode ser considerado como subconjunto de $\mathcal{A}_m$. O grupo gerado pelo autômata A é definido por

$$\mathcal{G}(A) = \langle \alpha_q \mid q \in Q \rangle.$$

Exemplo 1.1.13. *Considere o autômata dado pelo seguinte diagrama de Moore.*



Então o grupo gerado por este autômata é $\mathcal{G}_1 = \langle a = (e, a)(0\,1) \rangle \leqslant \mathcal{A}_2$. Pelo Exemplo 1.1.9, a tem ordem infinita e portanto o grupo gerado por este autômata é isomorfo ao grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$.

Para mais informações sobre autômatas consulte [23].

1.2 Representação de grupos em $\mathcal{A}_m$

Um subgrupo G de $\mathcal{A}_m$ é dito ser *autossimilar* se é fechado por estado; se, além disso, a ação de G no primeiro nível de $\mathcal{T}_m$ é transitiva, dizemos que G é um *grupo autossimilar transitivo*. O grupo G é *finito por estado* se cada um de seus elementos tem um número finito de estados.

Dado um grupo abstrato G, um homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{A}_m$ é dito ser uma *representação de grau m de G*. Se $G^\varphi \leqslant \mathcal{A}_m$ é autossimilar, autossimilar transitivo ou finito por estado, dizemos que a representação φ de G, ou simplesmente que G, é *autossimilar, autossimilar transitivo ou finito por estado*, respectivamente. A representação é *fiel* se o núcleo de φ é trivial.

1.2.1 A árvore de classes laterais

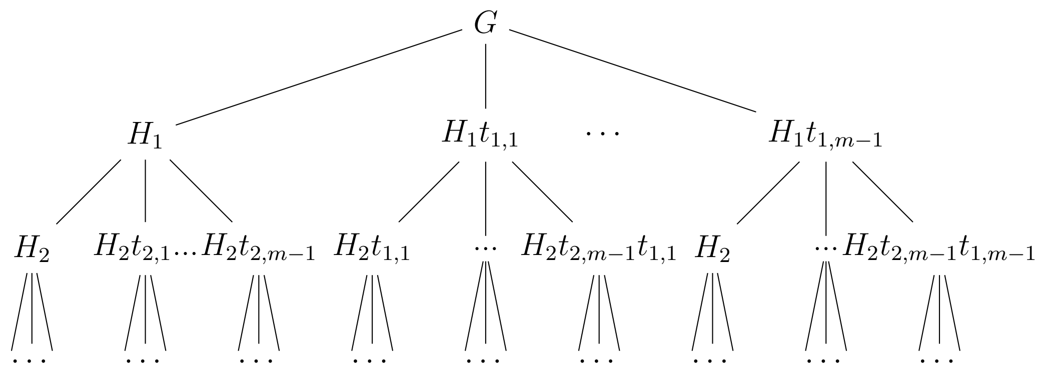
A construção a seguir é baseada em [6] e [24]. Para mais detalhes vide estas referências.

Seja H um grupo que admite uma cadeia de subgrupos

$$H = H_0 > H_1 > \cdots > H_i > H_{i+1} > \cdots$$

tal que $\bigcap_i H_i = 1$. Então $H_{i-1} = \bigcup H_i t_{ij}$ para todo $i \geq 1$. Podemos então construir uma árvore $\mathcal{T}$ na qual os vértices consistem de classes da forma $H_s t_{s,j_s} t_{s-1,j_{(s-1)}} \cdots t_{1,j_1}$ e a relação de incidência é dada pela relação de inclusão de conjuntos.

Suponha que $[H_{i-1} : H_i] = m$ para todo $i \geq 1$, então a árvore $\mathcal{T}$ é regular. Considere $T_i = \{t_{i,0}, \ldots, t_{i,m-1}\}$ transversal de H_i em H_{i-1}, então a árvore $\mathcal{T}$ é representada graficamente da seguinte forma:



Observe que, como grafos, a árvore $\mathcal{T}$ é isomorfa a árvore $\mathcal{T}_m$. Assim, podemos considerar o homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{A}_m$ definido por

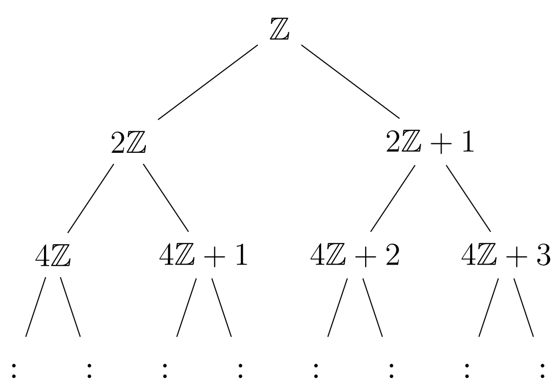
$$h^\varphi : H_i\omega \mapsto H_i\omega h.$$

Como $\bigcap_i H_i = 1$, φ é monomorfismo. Portanto, obtemos uma representação fiel de grau m para H.

Exemplo 1.2.1. *O grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$ admite representação fiel em $\mathcal{A}_2$. De fato, basta considerar a cadeia de subgrupos*

$$\mathbb{Z} > 2\mathbb{Z} > 4\mathbb{Z} > \cdots > 2n\mathbb{Z} > \cdots$$

que interceptam trivialmente.



1.2.2 Endomorfismos virtuais

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G de índice finito m. Um homomorfismo $f : H \to G$ é chamado um *endomorfismo virtual de* G. Vamos nos referir ao par (H, f) como um *par de similaridade* de G. Um subgrupo U de H é f*-invariante* se $f(U) \subseteq U$. O f*-core de* H é o maior subgrupo de H, normal em G que é f-invariante.

Dado um par (H, f), de similaridade de G, vamos produzir através de uma construção generalizada de Kaloujinine-Krasner uma representação autossimilar transitiva de grau m para G.
Para isso, escolha $T = \{t_0, \ldots, t_{m-1}\}$, com $t_0 = e$, um transversal à direita de H em G. Considere $\sigma : G \to Per(Y)$, $Y = \{0, \ldots, m-1\}$, a representação permutacional de G em Y induzida pela ação do grupo nas classes laterais à direita de H, isto é,

$$i^{\sigma(g)} = j \quad \text{se, e somente se,} \quad Ht_ig = Ht_j.$$

Para cada elemento g em G, obtemos:

(1) sua imagem $\sigma(g)$ sobre σ;

(2) uma m-upla $(\theta(g, t_0), \ldots, \theta(g, t_{m-1}))$ de elementos de Schreier, onde

$$\theta : G \times T \to H$$

é a função definida por $\theta(g, t_i) = t_i g (t_{i^{\sigma(g)}})^{-1}$.

Então, o Teorema de Kaloujnine-Krasner [8], dá um homomorfismo de G no produto entrelaçado $H \ wr_Y \ \sigma(G)$ definido por

$$\varphi_1 : g \mapsto (\theta(g, t_i) \mid i = 0, \ldots, m-1)\sigma(g).$$

Para produzir uma representação $\varphi : G \to \mathcal{A}_m$, usamos o endomorfismo virtual $f : H \to G$ para iterar o processo infinitamente, e assim definimos

$$\varphi : g \mapsto (\theta(g, t_i)^{f\varphi} \mid i = 0, \ldots, m-1)\sigma(g).$$

A seguinte proposição tem sido fortemente usada para construção de grupos autossimilares transitivos.

Proposição 1.2.2 (Nekrashevych & Sidki, [30]). *A aplicação φ, definida acima, é um homomorfismo tal que o estabilizador do primeiro nível em G^φ coincide com H^φ e o núcleo de φ é igual ao f-core de H, isto é*

$$\ker(\varphi) = \langle K \leqslant H \mid K \lhd G, K^f \leqslant K \rangle.$$

Além disso, G^φ é autossimilar transitivo.

Exemplo 1.2.3. *Considere $G = \mathbb{Z}$, $H = 2\mathbb{Z}$ e $f : H \to G$ o endomorfismo virtual definido por $2z \mapsto z$. Então*

$$\ker(\varphi) = \langle K \leqslant H \mid K \lhd G, K^f \leqslant K \rangle = 1.$$

Logo $G \simeq G^\varphi$ é autossimilar transitivo em $\mathcal{T}_2$. Escolhendo o transversal $T = \{0, 1\}$, obtemos $G^\varphi = \langle a = (e, a)(0\,1) \rangle$.

Dado um par de similaridade (H, f) para G, a representação $\varphi : G \to \mathcal{A}_m$ depende da escolha do transversal de H em G. Na verdade, quando mudamos o transversal, produzimos outra representação que é conjugada à primeira via um automorfismo da árvore definido recursivamente, como estabelece o resultado a seguir.

Proposição 1.2.4 (Brunner & Sidki, [5]). *Seja (H, f) um par de similaridade para G e considere*

$$L = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}, \;\; L' = \{x'_0 = h_0 x_0, x'_1 = h_1 x_1, \ldots, x'_{m-1} = h_{m-1} x_{m-1}\}$$

transversais à direita de H em G onde $h_i \in H$.
Sejam $\varphi = \varphi_{x_i}, \varphi' = \varphi_{h_i x_i} : G \to \mathcal{A}_m$ representações correspondentes aos transversais L e L', respectivamente, e defina os seguintes elementos de $\mathcal{A}_m$

$$\gamma = \gamma_{h_i, \varphi'} = ((h_i)^{f\varphi'})_{1 \le i \le m-1},$$

$$\lambda = \lambda_{h_i, \varphi'} = \gamma \gamma^{(1)} \cdots \gamma^{(n)} \cdots \; .$$

Então

$$\varphi_{h_i x_i} = \varphi_{x_i}(\lambda_{h_i{}^{-1}, \varphi x_i}).$$

CAPÍTULO 2

Grupos autossimilares intransitivos

Vimos no Capítulo 1 que podemos construir uma representação para um grupo G através de um endomorfismo virtual; essa representação produz G autossimilar transitivo. Ao longo desse trabalho, vamos abrir mão da condição de transitividade e assim estudar também os grupos autossimilares não transitivos, para isso vamos considerar um conjunto de endomorfismos virtuais.

2.1 Representação autossimilar intransitiva

Seja $G \leqslant \mathcal{A}_m$ um grupo fechado por estado. Então G induz um grupo de permutação $P \leqslant Sym(Y)$ com órbitas $O_{(1)}, \ldots, O_{(s)}$. Ordene os elementos do alfabeto $Y = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ começando com os elementos de $O_{(1)}$, seguidos pelos elementos de $O_{(2)}$ e assim sucessivamente. Podemos supor que as órbitas estão em ordem não-decrescente de tamanho $m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_s$.

O grupo P induz grupos de permutações $P_{(i)}$ em $O_{(i)}$, $i = 1, \ldots, s$ e P é produto sub-direto dos $P_{(i)}$'s. Assim, um elemento de P se decompõe como produto $\sigma = \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(2)} \cdots \sigma_{(s)}$, onde $\sigma_{(i)} \in P_{(i)}$. A s-upla $(P_{(1)}, \ldots, P_{(s)})$ é chamada *tipo-permutacional* de G.

Um elemento α em G pode ser visto como $\alpha = \alpha'\sigma$, onde $\sigma \in P$ e

$$\alpha' = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}) = (\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \ldots, \alpha_{(s)})$$

tendo os índices das entradas de $\alpha_{(i)}$ em $O_{(i)}$. Assim, α pode ser escrito como

$$\alpha = (\alpha_{(1)}, e, \ldots, e)\sigma_{(1)} \cdots (e, \ldots, e, \alpha_{(s)})\sigma_{(s)},$$

onde os fatores comutam entre si.

Dado um grupo G definimos uma tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$, onde:

(1) $\mathbf{H} = (H_i \mid [G : H_i] = m_i \ (1 \leq i \leq s))$, uma sequência de subgrupos de G com índices finito;

(2) $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$ e $m = m_1 + \cdots + m_s$;

(3) $\mathbf{F} = \{f_i : H_i \to G \mid 1 \leq i \leq s\}$, um conjunto de endomorfismos virtuais.

Vamos nos referir à tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ como G-*dados para* G. O $\mathbf{F}$-*core de* $\mathbf{H}$ é o maior subgrupo de $\bigcap_{i=1}^{s} H_i$, normal em G que é f_i-invariante para todo $i = 1, \ldots, s$.

Inspirados na construção da representação autossimilar transitiva do Capítulo 1, vamos produzir uma representação autossimilar intransitiva. Para isso vamos considerar:

(1) $T_i = \{t_{i1}, \ldots, t_{im_i}\}$ (com $t_{i1} = e$), $i = 1, \ldots, s$, um transversal à direita de H_i em G e definir $T = \{t_{11}, \ldots, t_{1m_1}, t_{21}, \ldots, t_{2m_2}, \ldots, t_{s1}, \ldots, t_{sm_s}\}$;

(2) $\sigma_{(i)} : G \to Sym(Y_i)$, $Y_i = \{0, \ldots, m_i - 1\}$, a representação permutacional de G em Y_i induzida pela ação do grupo nas classes laterais à direita de H_i;

(3) um renomeamento dos elementos do conjunto T, ordenadamente, para

$$T = \{t_1, \ldots, t_{m_1}, t_{m_1+1}, \ldots, t_{m_1+m_2}, \ldots, t_{k_s+1}, \ldots, t_m\}$$

onde $k_i = m_1 + \cdots + m_{i-1}$, $i = 2, \ldots, s$ e $k_1 = 0$. Com isso, podemos considerar os conjuntos Y_i's disjuntos;

(4) $\theta_i : G \times T_i \to H_i$ a função de Schreier de H_i em relação ao transversal T_i.

Feito isso, definimos $\varphi : G \to \mathcal{A}_m$ por

$$\varphi : \ g \mapsto \left(\theta_i\,(g, t)^{f_i \varphi} \mid 1 \leq i \leq s, t \in T_i\right)\, \sigma(g),$$

onde $\sigma(g)$ é o produto das permutações $\sigma_{(i)}(g)$.

Proposição 2.1.1. *Com a notação acima, temos que:*

(i) a aplicação $\varphi : G \to \mathcal{A}_m$ é um homomorfismo bem definido e G^φ é fechado por estado;

(ii) o núcleo de φ é o $\mathbf{F}$-core de $\mathbf{H}$, isto é,

$$\ker(\varphi) = \langle K \leqslant \cap_{i=1}^{s} H_i \mid K \lhd G, K^{f_i} \leqslant K, \forall i = 1, \dots, s\rangle.$$

Demonstração. (i) Pela definição de $\sigma(g)$, temos que para $t \in T_i$, $\theta_i(g,t) \in H_i$ e portanto φ é uma função bem definida.

Sejam g e h elementos de G.

Observe que $\sigma(gh) = \sigma(g)\sigma(h)$. De fato, se $k_i \leq l \leq k_{i+1} - 1$ então a ação de σ em l é dada por $\sigma_{(i)}$. Assim,

$$(l)\sigma(gh) = (l)\sigma_{(i)}(gh) = ((l)\sigma_{(i)}(g))\sigma_{(i)}(h).$$

Logo, se $i \in Y$, então

$$i^{(gh)^\varphi} = i^{(gh)^\sigma} = i^{g^\sigma h^\sigma} = i^{g^\varphi h^\varphi}.$$

Por indução no comprimento da palavra em Y temos que

$$(iu)^{(gh)^\varphi} = i^{(gh)^\sigma} u^{(gh)^{\varphi_i}} = i^{(gh)^\sigma} u^{(g^\varphi h^\varphi)_i} = (iu)^{g^\varphi h^\varphi}.$$

Portanto, φ é um homomorfismo.

Pela definição de φ, G^φ é fechado por estado.

(ii) Primeiro, seja $K \leqslant \cap_{i=1}^{s} H_i$ tal que $K \lhd G$ e $K^{f_i} \leqslant K, \forall i = 1, \dots, s$ e considere $x \in K$. Então $\sigma_{(i)}(x) = 1$. De fato,

$$k^{\sigma_{(i)}(x)} = l \iff H_i t_{ik} x = H_i t_{il}$$

$$H_i t_{ik} = H_i x^{t_{ik}^{-1}} t_{ik} = H_i t_{il} \iff k = l.$$

Assim, $\sigma(x) = 1$. Como $K^{f_i} \leqslant K$, $\theta_i(x,t)^{f_i\varphi}$ tem permutação trivial, e assim cada estado de $\varphi(x)$ tem permutação trivial e como $(yu)^\alpha = y^{\sigma(\alpha)}u^\alpha$, segue que $\varphi(x)$ é trivial.
Agora $\ker\varphi \leqslant \cap_{i=1}^{s} H_i$, $\ker\varphi \lhd G$ e $(\ker\varphi)^{f_i} \leqslant \ker\varphi$, porque para cada $k \in \ker\varphi$ temos que $k^{f_i\varphi} = e$, $i = 1, \dots, s$.

□

A partição $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$ é chamada o *tipo-orbital* da representação. A representação φ de G é dita ser *simples* se o $\mathbf{F}$-core de $\mathbf{H}$ é trivial. Neste caso, a representação é fiel e $G \simeq G^{\varphi}$.

Teorema 2.1.2. *Um grupo G admite representação fiel autossimilar com tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$ se, e somente se, existem dados $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ para G com $\mathbf{F}$-core de $\mathbf{H}$*

$$\langle K \leqslant \cap_{i=1}^{s} H_i \mid K \lhd G, K^{f_i} \leqslant K, \forall i = 1, \ldots, s\rangle$$

trivial.

Demonstração. Seja G um grupo autossimilar com tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$. Seja $P(G)$ o grupo de permutações de $Y = \{0, \ldots, m-1\}$ induzido por G e considere $O_{(i)} = \{y_{i1}, \ldots, y_{im_i}\}$, $i = 1, \ldots, s$, as órbitas de $P(G)$.
Defina $H_i = Fix_G(y_{i1}) = \{\alpha \in G \mid (y_{i1})^{\sigma(\alpha)} = y_{i1}\}$ e observe que

$$H_i\alpha \mapsto \alpha(y_{i1})$$

é uma bijeção do conjunto das classes laterais à direita de H_i em G em $O_{(i)}$ e assim $[G : H_i] = m_i$, $m = m_1 + \cdots + m_s$.

Agora defina $\pi_i : H_{y_{i1}} \to G$ por

$$\alpha \mapsto \alpha_{y_{i1}},$$

onde $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})\sigma(\alpha)$ é um elemento em H_i. Dessa forma, obtemos uma tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ para G, onde

$$\mathbf{H} = (H_i \mid [G : H_i] = m_i \ (1 \leq i \leq s)),$$

$$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s),\ m = m_1 + \cdots + m_s$$

e

$$\mathbf{F} = \{\pi_i : H_i \to G \mid 1 \leq i \leq s\}.$$

Afirmamos que o homomorfismo φ induzido pela tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ é um monomorfismo. Para isso, provaremos que para qualquer $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})\sigma(\alpha)$ em $K \leqslant \cap_{i=1}^{s} H_i$ tal que $K \lhd G, K^{f_i} \leqslant K, \forall i = 1, \ldots, s$, é trivial.
Considere $k_i \leq l \leq k_{i+1} - 1$, $i = 0, 1, \ldots, s$, então $(l)\sigma(\alpha) = (l)\sigma_{(i)}(\alpha)$. Suponha que $(l)\sigma_{(i)}(\alpha) = j$, com $l \neq j$. Como G age transitivamente em cada órbita, existe

$\beta \in G$ tal que $(l)\sigma_{(i)}(\beta) = k_i$, o que é equivalente à $(k_i)\sigma_{(i)}(\beta)^{-1} = l$. Como $K \lhd G$, $\alpha^\beta \in K$, então $(k_i)\sigma_{(i)}(\alpha)^{\sigma_{(i)}(\beta)} = k_i$. Então,

$$(k_i)\sigma_{(i)}^{-1}(\beta)\sigma_{(i)}(\alpha)\sigma_{(i)}(\beta) = k_i$$

Logo, $(j)\sigma_{(i)}(\beta) = k_i$. Assim, $(l)\sigma_{(i)}(\beta) = k_i$ e $(j)\sigma_{(i)}(\beta) = k_i$, pela bijetividade de σ_i segue que $j = l$, uma contradição. Portanto, $\ker\varphi = 1$.

Reciprocamente, suponha que $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ é uma tripla para G tal que o $\mathbf{F}$-core de $\mathbf{H}$ trivial. Escolhendo

$$T_i = \{t_{i1}, \ldots, t_{im_i}\}, i = 1, \ldots, s,$$

transversal de H_i em G e considerando T como união dos T_i's, vimos que podemos definir recursivamente o homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{A}_m$ por

$$\varphi :\ g \mapsto \left(\theta_i\left(g,t\right)^{f_i\varphi} \mid 1 \leq i \leq s, t \in T_i\right) \sigma(g),$$

onde $\sigma(g)$ é a permutação de $Sym(Y)$ induzida por T. Pela Proposição anterior, G^φ é fechado por estado e

$$\ker\varphi = \langle K \leqslant \cap_{i=1}^{s} H_i \mid K \lhd G, K^{f_i} \leqslant K, \forall i = 1, \ldots, s\rangle = 1.$$

Logo, a representação é fiel e $G \simeq G^\varphi$. □

Dado um elemento $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})\sigma(\alpha)$, do grupo de automorfismos $\mathcal{A}_m$, dizemos que α é *ativo* se $\sigma(\alpha) \neq 1$ e *inativo* caso contrário.
Observe que se $G \leqslant \mathcal{A}_2$, é um grupo não-trivial fechado por estado, então existe um elemento de G que tem algum estado ativo e portanto G é transitivo; isto é, todo grupo não-trivial de automorfismos de $\mathcal{T}_2$ que é fechado por estado, é também transitivo. Dessa forma, se um grupo não trivial admite representação fechada por estado e não transitiva, essa representação é de grau maior que dois.

2.1.1 Mudança de transversal

Dado um subgrupo P de $Sym(Y)$, o *fecho por camadas* de P em $\mathcal{A}_m$, denotado por $L(P)$, é o subgrupo formado por todos automorfismos em $\mathcal{A}_m$ no qual os estados tem atividades pertencendo a P. Note que, similarmente à estrutura do produto entrelaçado $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m \wr Sym(Y)$, temos que $L(P) = L(P) \wr P$ e claramente $L(P)$ é fechado por estado. Observe que se G é autossimilar de grau m e induz o grupo de permutação P em Y então, G é um subgrupo de $L(P)$. Particione Y nas P-órbitas $\{O_{(1)}, O_{(2)}, \ldots, O_{(s)}\}$ e para cada i, seja P induzindo $P_{(i)}$ em $O_{(i)}$. Então P é um produto sub-direto dos $P_{(i)}$'s.

Lema 2.1.3. *Suponha que P se fatora como $P = P_{(1)} \cdot P_{(2)} \cdots P_{(s)}$. Então $L(P)$ se fatora como $L(P) = L(P_{(1)}) \cdot L(P_{(2)}) \cdots L(P_{(s)})$.*

Demonstração. É suficiente considerar o caso $s = 2$. Um elemento a em $L(P)$ pode ser escrito como $a = a'p$, onde $a' = (a_0, \ldots, a_{m-1})$ e $p = p_1p_2$ com $p_1 \in P_{(1)}, p_2 \in P_{(2)}$. Da mesma forma

$$a_i = (a_{i0}, \ldots, a_{i(m-1)})p_{i1}p_{i2},$$

onde $p_{i1} \in P_{(1)}, p_{i2} \in P_{(2)}$. Reescrevemos essa expressão de modo que as atividades de $P_{(1)}$ são colocadas do lado esquerdo e as atividades de $P_{(2)}$ do lado direito, como segue:

$$\begin{aligned} a &= ((a_0)', \ldots, (a_{m-1})')(p_{01}p_{02}, \ldots, p_{(m-1)1}p_{(m-1)2})p_1p_2 \\ &= ((a_0)', \ldots, (a_{m-1})')[(p_{01}, \ldots, p_{(m-1)1}))p_1][(p_{02}, \ldots, p_{(m-1)2})^{p_1}]p_2, \end{aligned}$$

onde os parênteses da segunda expressão, conjugada por p_1, permuta os primeiros m_1 índices de $(p_{02}, \ldots, p_{(m-1)2})$, e continuamos sucessivamente o processo. □

Cada $P_{(i)}$ é um subgrupo de $S_i = Sym(O_{(i)})$. Definimos S, subgrupo de $Sym(Y)$, por $S_1 \cdot S_2 \cdots S_s$. Então, $L(P)$ é um subgrupo de $L(S)$. Assim, para o grupo G fechado por estado com estrutura orbital definida pelas órbitas $O_{(i)}$'s, $L(S)$ substitui $\mathcal{A}_m$ como o grupo ambiente em que G vive.

Existem duas representações autossimilares transitivas fiéis para o grupo cíclico de ordem 2, $G = \langle a \rangle$, na árvore binária:

$$a \mapsto (e, e)(0\,1) \;\text{ e }\; a \mapsto (\delta, \delta)(0\,1).$$

Por outro lado, o homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{A}_2$ produz a representação

$$a \mapsto (e, e)(0\,1).$$

Problema. (Sidki, [26]) Qual a relação entre representações autossimilares e as representações produzidas pelo homomorfismo φ?

Sejam G um subgrupo autossimilar transitivo de $\mathcal{A}_m$, $H = Fix_G(0)$, f a projeção sobre a primeira coordenada $H \to G$ e T um transversal de H em G. Pela Proposição 1.2.4, quando mudamos o transversal T de H em G para outro T' produzimos outra representação φ' de G tal que $G^{\varphi'}$ é conjugado à G^{φ} por um automorfismo da árvore, definido recursivamente.

O grupo de automorfismos da árvore $\mathcal{A}_m$ é autossimilar transitivo e seu transversal canônico (à direita) de $Fix_{\mathcal{A}_m}(0)$ em $\mathcal{A}_m$ é a união de $\{e\}$ com o conjunto de transposições $\{(0\ i) \mid i = 1, \dots, m-1\}$. Assim, podemos substituir esse transversal canônico por T. Segue que ao extrair a tripla (m, H, f) para G da ação autossimilar de G na árvore e então voltando pelo procedimento de Kaloujnine-Krasner produzimos um subgrupo de $\mathcal{A}_m$ conjugado à G.

Estes resultados estendem ao caso mais geral $s \geq 1$. Primeiramente, a mudança dos transversais T_i $(1 \leq i \leq s)$ para os transversais T_i' $(1 \leq i \leq s)$ de G segue o mesmo procedimento para cálculo no caso transitivo, para produzir um conjugador definido recursivamente em $L(S)$. Em seguida, considerando o ordenamento das órbitas

$$O_{(1)} = \{0, 1, \dots, m_1 - 1\},\ O_{(2)} = \{m_1, m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2 - 1\}, \dots$$

$$O_{(s)} = \{m - m_s, m - m_s + 1, \dots, m - 1\}$$

e a substituição dos transversais canônicos (à direita) de $Fix_{L(S)}(0)$ e de $Fix_{L(S)}(m_1 + \cdots + m_{i-1})$ (para $2 \leq i \leq s$) em $L(S)$ por T_i.

2.2 autossimilaridade de produtos diretos de grupos

Ainda não é bem entendido sobre quais operações a classe de grupos autossimilares é fechada. O resultado abaixo nos diz que se um grupo G é autossimilar de grau m então $G \times G$ é também autossimilar de grau m.

Proposição 2.2.1. *Seja G um grupo autossimilar definido pela tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$. Defina $\left(\mathbf{m}, \overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{F}}\right)$, onde $\overline{\mathbf{H}} = \{H_1 \times G, \dots, H_s \times G\}$ e $\overline{\mathbf{H}} = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s\}$, com $\bar{f}_i : H_i \times G \to G \times G$ dada por $\bar{f}_i(h, x) = (x, h^f), i = 1, \dots, s$. Então $\left(\mathbf{m}, \overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{F}}\right)$ define $G \times G$ autossimilar.*

Demonstração. Seja $\overline{K} \leqslant \bigcap_{i=0}^{s}(H_i \times G)$, $\overline{K} \lhd G \times G$ com $\overline{K}^{\bar{f}_i} \leqslant \overline{K}$ para $i = 1, \dots, s$.
Defina $\pi_0^{(i)} : H_i \times G \to G$ como a projeção sobre a primeira coordenada. Assim,

$$\pi_0^{(i)}(\overline{K}) = \{h \in H_i \mid (h, g) \in \overline{K} \text{ para algum } g \in G\} := K_i \leqslant H_i.$$

Então

$$\textstyle\bigcap_{i=0}^{s} K_i = \{h \in \bigcap_{i=0}^{s} H_i \mid (h, g) \in \overline{K} \text{ para algum } g \in G\}.$$

Como $\overline{K} \lhd G \times G$ temos que $\bigcap_{i=0}^{s} K_i \lhd G$.
Seja $y = (h, x) \in \overline{K} \leqslant \bigcap_{i=0}^{s}(H_i \times G)$, assim $h \in \bigcap_{i=0}^{s} K_i$. Aplicando $\bar{f}_i$, temos:

$$y^{\bar{f}_i} = (x, h^{f_i}) \in \overline{K} \text{ e } x \in \bigcap_{i=0}^{s} H_i.$$

Aplicando $\bar{f}_i$ novamente, obtemos:

$$y^{\bar{f}_i^{\,2}} = (x, h^{f_i})^{f_i} = (h^{f_i}, x^{f_i}) \in \overline{K} \leqslant \bigcap_{i=0}^{s}(H_i \times G) \leqslant H_i \times G.$$

Logo, $h^{f_i} \in \bigcap_{i=0}^{s} K_i$. Como $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ define G autossimilar, pelo Teorema 2.1.2, $\bigcap_{i=0}^{s} K_i = 1$. Portanto $y = (e, x)$ e aplicando $\bar{f}_i$, $y^{\bar{f}_i} = (x, e) \in \bigcap_{i=0}^{s} K_i$ e então $y = (e, e)$. Portanto o $\overline{\mathbf{F}}$-core de $\overline{\mathbf{H}}$ é trivial. □

Em geral, se um grupo G é autossimilar de grau m então G^k, onde $k \geq 1$, é também autossimilar de grau m. Para isso, basta considerar os homomorfismos $\bar{f}_i : H_i \times G^{k-1} \to G^k$, por $\bar{f}_i(h, x_2, \ldots, x_k) = (x_2, \ldots, x_k, h^f)$ e aplicar as técnicas da demostração anterior.

O produto direto restrito de uma quantidade enumerável de vezes de um grupo G, fechado por estado de grau m, é também fechado por estado. No entanto, a representação que conseguimos tem grau $m + 1$ como estabelece o resultado a seguir.

Teorema 2.2.2. *Seja $G \leqslant \mathcal{A}_m$ um grupo autossimilar de grau m com tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$ e $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$. Então:*

(i) $G^{(\omega)}$ admite uma representação fiel fechada por estado de grau $m + 1$ e tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s, 1)$.

(ii) Seja K um subgrupo regular de $Sym(\{1, \ldots, s\})$. Então o produto entrelaçado restrito $G \wr K$ admite uma representação fiel, fechada por estado e transitiva de grau $(m_1 \cdot m_2 \cdots m_s) \cdot s$.

Demonstração. (i) Seja G um grupo autossimilar de grau m com tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$. Então pelo Teorema 2.1.2 existe uma tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ tal que o $\mathbf{F}$-core de $\mathbf{H}$ é trivial.

Todo elemento $g \in G^{(\omega)}$ pode ser unicamente escrito na forma

$$g = (g_1, g_2, g_3, \ldots).$$

Então o subgrupo $L_i = \{(h, g_2, g_3, \ldots) \in G^{(\omega)} \mid h \in H_i\}$ tem índice m_i em $G^{(\omega)}$. Para cada $i = 1, \ldots, s$ defina o homomorfismo $\bar{f}_i : L_i \to G^{(\omega)}$ por

$$(h, g_2, g_3, \ldots)^{\bar{f}_i} = (h^{f_i}, g_2, g_3, \ldots)$$

e o homomorfismo $\bar{f}_{s+1} : L_{s+1} = G^{(\omega)} \to G^{(\omega)}$ por

$$(g_1, g_2, \dots)^{\bar{f}_{s+1}} = (g_2, g_3, \dots).$$

Então

$$\langle L \leqslant \cap_{i=1}^{s+1} L_i \mid L \lhd G^{(\omega)}, L^{\bar{f}_i} \leqslant L, \forall i = 1, \dots, s+1 \rangle$$

é trivial. Usando novamente o Teorema 2.1.2, obtemos que $G^{(\omega)}$ é autossimilar de grau $m+1$ com relação aos dados $(\overline{\mathbf{m}}, \overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{F}})$, onde

$$\overline{\mathbf{m}} = (m_1, \dots, m_s, 1),$$

$$\overline{\mathbf{H}} = (L_1, \dots, L_s, L_{s+1}) \text{ e}$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \{\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_s, \overline{f}_{s+1}\}.$$

(ii) Seja l um inteiro positivo tal que $H_i \neq G$ para $1 \leq i \leq l$ e $H_i = G$ para $l+1 \leq i \leq s$. Defina $H = H_1 \times \cdots \times H_s$ e $W = G \wr K$. Então $[W : H] = s(m_1 \cdots m_l)$ e o endomorfismo $f : H \to W$ dado por

$$(h_1, \dots, h_s) \mapsto (h_1^{f_1}, \dots, h_s^{f_s})$$

é bem definido. Considere L um subgrupo de H, normal em W e f-invariante. Seja $g = (g_1, \dots, g_s) \in L$. Como K é um grupo transitivo de grau s temos que para cada $1 \leq i \neq j \leq s$ existe $h \in K$ tal que $(i)h = j$. Mas,

$$g^{hf} = \left(g_{(1)h}, \dots, g_{(s)h}\right)^f = \left(g_{(1)h}^{f_1}, \dots, g_{(s)h}^{f_s}\right) \in L.$$

Assim,

$$g_{(r)} \in \langle K \leqslant \cap_{i=1}^{s} H_i \mid K \lhd G, K^{f_i} \leqslant K, \forall i = 1, \dots, s \rangle = \{1\}$$

para cada $r = 1, \dots, s$.

Portanto, $L = \{e\}$ e $G \wr K$ é autossimilar de grau $s \cdot (m_1 \cdots m_l)$.

□

Corolário 2.2.3. *O grupo $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ é fechado por estado de tipo-orbital $(2, 1)$, além disso é finito por estados.*

Demonstração. Considere a aplicação $f : 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $2n \mapsto n$. Note que o único subgrupo de $2\mathbb{Z}$ f-invariante é o subgrupo trivial e logo f é um endomorfismo virtual simples. Assim, $\mathbb{Z}$ é autossimilar de grau 2. Aplicando o Teorema 2.2.2 (i), o grupo $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ é fechado por estado de grau $2 + 1 = 3$.
Defina os homomorfismos $\bar{f}_1 : 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{(\omega)} \to \mathbb{Z}$ e $\bar{f}_2 : \mathbb{Z}^{(\omega)} \to \mathbb{Z}^{(\omega)}$ por

$$\bar{f}_1 : (2n_1, n_2, \dots) \mapsto (n_1, n_2, \dots)$$

e

$$\bar{f}_2 : (n_1, n_2, \dots) \mapsto (n_2, n_3, \dots),$$

respectivamente. Considere $T_1 = \{e, (1, 0, 0, \dots)\}$ e $T_2 = \{e\}$, transversais de $2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{(\omega)}$ e $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ em $\mathbb{Z}^{(\omega)}$, respectivamente. Então a representação $\varphi : \mathbb{Z}^{(\omega)} \to \mathcal{A}_3$ induzida por $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, T_1 e T_2 é

$$\mathbb{Z}^{(\omega)} \simeq \mathbb{Z}^{(\omega)\varphi} = \langle \alpha_1 = (e, \alpha_1, e)(0\,1), \alpha_i = (\alpha_i, \alpha_i, \alpha_{i-1}) \mid i = 2, 3, 4, \dots \rangle.$$

Podemos então construir o seguinte autômata de Mealy.

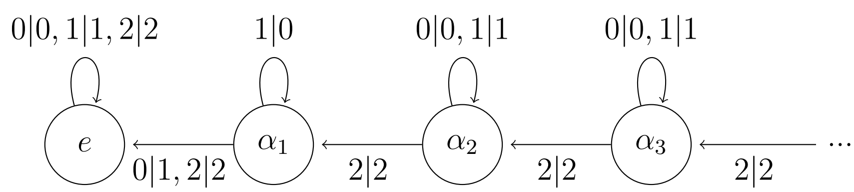


Diagrama de $\mathbb{Z}^{(\omega)}$

$\square$

Aplicação 2.2.4. *Considere G_0 um grupo autossimilar. Para $i \geq 1$ defina recursivamente $G_i = (G_{i-1})^{(\omega)}$. Então, pela proposição anterior, G_i é também um grupo autossimilar.*

Em [14], Bartholdi e Sidki perguntaram se dado um grupo autossimilar G, o grupo $G^{(\omega)}$ é também autossimilar. Para o caso intransitivo, o teorema anterior nos dá uma resposta positiva para essa pergunta. Neste mesmo trabalho, os autores mostraram a existência de uma representação autossimilar transitiva do grupo $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ na árvore binária $\mathcal{T}_2$, além disso mostraram que $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ não pode ser representado, em nenhum grau, de forma autossimilar transitivo e finito por estado. No entanto, pelo Corolário 2.2.3, o grupo $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ admite uma representação autossimilar intransitiva em $\mathcal{T}_3$ que é finita por estado.

2.3 Concatenação de representações autossimilares

Sejam A_1, A_2 e U grupos. Defina $G_1 = A_1 \wr U$ e $G_2 = A_2 \wr U$ e considere $G = (A_1 \oplus A_2) \wr U$. Para $i = 1, 2$, defina os dados $(\mathbf{m_i}, \mathbf{H_i}, \mathbf{F_i})$ para G_i, onde $\mathbf{m_i} = (m_{i1}, \ldots, m_{is_i})$, $\mathbf{H_i} = (H_{i1}, \ldots, H_{is_i})$ e $\mathbf{F_i} = \{f_{i1}, \ldots, f_{is_i}\}$.

Defina os dados $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ para G, onde $\mathbf{m}$ é a concatenação $(\mathbf{m_1}, \mathbf{m_2})$,

$$\mathbf{H} \;=\; \left(\tilde{H}_{1j} = \left(A_2{}^U\right) \cdot H_{1j} \;\; (1 \leq j \leq s_1)\,, \tilde{H}_{2k} = \left(A_1{}^U\right) \cdot H_{2k} \;\; (1 \leq k \leq s_2)\right)$$

e

$$\mathbf{F} = \{\tilde{f}_{11}, \ldots, \tilde{f}_{1s_1}, \tilde{f}_{21}, \ldots, \tilde{f}_{2s_2}\}$$

onde $\tilde{f}_{1j} : \tilde{H}_{1j} \to G$ é o homomorfismo definido por

$$\tilde{f}_{1j} : ah \mapsto h^{f_{1j}}, \text{ onde } a \in A_2{}^U, h \in H_{1j}$$

e $\tilde{f}_{2k} : \tilde{H}_{2k} \to G$ é o homomorfismo definido por

$$\tilde{f}_{2k} : ah \mapsto h^{f_{2k}}, \text{ onde } a \in A_1{}^U, h \in H_{2k}.$$

Para $i = 1, 2$, considere a representação autossimilar de G_i com respeito aos dados $(\mathbf{m_i}, \mathbf{H_i}, \mathbf{F_i})$ e denote por K_i o $\mathbf{F_i}$-core de $\mathbf{H_i}$. Além disso, seja K o $\mathbf{F}$-core de $\mathbf{H}$ da representação autossimilar de G com respeito à tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$.

Teorema 2.3.1. *(Teorema de Concatenação) Mantendo a notação acima:*

(i)
$$K \cap (A_1 \oplus A_2)^U = K_1 (A_2)^U \cap K_2 (A_1)^U \,;$$

(ii) se as representações autossimilares de G_1 e G_2 são fiéis, então a correspondente representação autossimilar de G também é fiel;

(iii) se as representações autossimilares de G_1 e G_2 são finitas por estado, então a correspondente representação autossimilar de G também o é.

Demonstração. Para $i = 1, 2$ defina

$$R_i = \langle S \leqslant \cap_{j=1}^{s_i} \widetilde{H}_{ij} \mid S \lhd G,\; S^{\widetilde{f}_{ij}} \leqslant S, \forall j = 1, \ldots, s_i \rangle,$$

(i) Note que

$$K = \langle S \leqslant \cap_{j=1}^{s_1} \widetilde{H}_{1j} \cap_{K=1}^{s_2} \widetilde{H}_{2k} \mid S \lhd G,\ S^{\widetilde{f}_{1j}} \leqslant S, S^{\widetilde{f}_{2k}} \leqslant S$$

$$\forall j = 1, \ldots, s_1, k = 1, \ldots, s_2\rangle.$$

Assim , $K = R_1 \cap R_2$.

Observe ainda que

$$\begin{array}{rcl} R_1 \cap (A_1 \oplus A_2)^U & = & K_1 (A_2)^U, \\ R_2 \cap (A_1 \oplus A_2)^U & = & K_2 (A_1)^U. \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} K \cap (A_1 \oplus A_2)^U &= K \cap (R_1 \cap R_2) \\ &= R_1 \cap (A_1 \oplus A_2)^U \cap R_2 \cap (A_1 \oplus A_2)^U \\ &= K_1 (A_2)^U \cap K_2 (A_1)^U. \end{aligned}$$

(ii) Como $K_1 = K_2 = \{e\}$, por (i), obtemos que

$$K \cap (A_1 \oplus A_2)^U = (A_2)^U \cap (A_1)^U = \{e\}.$$

Note que K centraliza $(A_1 \oplus A_2)^U$; de fato, sejam $k \in K$ e $a \in (A_1 \oplus A_2)^U$, como K e $(A_1 \oplus A_2)^U$ são subgrupos normais de G, então $k^{-1}a^{-1}ka$ pertence à $K \cap (A_1 \oplus A_2)^U = \{e\}$, logo $ka = ak$.

No entanto, $(A_1 \oplus A_2)^U$ contém todo o seu centralizador em G. Assim, $K = K \cap (A_1 \oplus A_2)^U = \{e\}$.

(iii) Note que se existem transversais de $H_{11}, \ldots, H_{1s_1}$ em G_1 e de $H_{21}, \ldots, H_{2s_2}$ em G_2 tais que G_1 e G_2 são finitos por estado, então estes transversais induzem uma representação finita por estado de G.

□

Autômata de Bartholdi-Šunik

Sejam X um conjunto finito arbitrário e $g : X^{d+1} \to X$ uma função. Defina o autômata $A_g = (X^d, X, f, l)$, onde $f : X^d \times X \to X^d$ e $l : X^d \times X \to X$ são definidas por $f((x_1, \ldots, x_d), x) = (x_2, \ldots, x_d, x)$ e $l((x_1, \ldots, x_d), x) = g(x_1, \ldots, x_d, x)$.

Vamos nos restringir ao seguinte caso particular. Seja X o anel finito $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ e considere $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d$, polinômio mônico de grau $d \geq 1$, o qual é inversível no anel de séries de potências $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[[t]]$, assim a_0 é inversível em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e $a_d = 1$. Considere a função $g : X^{d+1} \to X$ definida por $g(x_0, x_1, \ldots, x_d) = a_d x_0 + a_{d-1} x_1 + \cdots + a_0 x_d$. No caso em que $p(t) = 1 + t$, podemos reescrever as funções de mudança de estado e de saída de A_{1+t} dadas por $l(y, x) = y + x$ e $f(y, x) = x$.

Definição 2.3.2. *Dizemos que um grupo G é um autômata-grupo se existe um autômato $A = (Q, \Gamma, f, l, q_0)$ tal que Q é finito e $\mathcal{G}(A) \simeq G$, com $\mathcal{G}(A)$ finitamente gerado, fechado por estado e finito por estado.*

Proposição 2.3.3. *(Bartholdi & Šunik, [15]) O grupo gerado pelo autômata A_{1+t} é o grupo do tipo Lamplighter*

$$L_n = (\oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}.$$

Aplicação 2.3.4. *Dado um grupo abeliano finito A, podemos escrevê-lo como*

$$A = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}.$$

Utilizando o Teorema 2.3.1 e a Proposição 2.3.3, segue que para A grupo abeliano finito $A \wr \mathbb{Z}$ é um autômata-grupo. Este fato foi mostrado em [20] utilizando máquinas de Cayley. No Capítulo 4, vamos mostrar uma generalização deste resultado.

CAPÍTULO 3

Grupos abelianos autossimilares intransitivos e seus centralizadores

Neste capítulo vamos estudar a estrutura de grupos abelianos autossimilares intransitivos e seus centralizadores. Daremos uma fatoração do centralizador de um grupo abeliano autossimilar e usaremos essa fatoração para calcular o centralizador do fecho por operadores diagonais parciais. Para finalizar, vamos descrever, de maneira recursiva, o centralizador de um grupo cíclico fechado por estado de automorfismos da árvore de grau 4.

3.1 Operadores agindo em automorfismos de árvores

Considere os conjuntos

$$Func(m) = \{f : \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_m \text{ função}\},$$

$$End(m) = \{f : \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_m \text{ endomorfismo}\},$$

$$Mon(m) = \{f : \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_m \text{ monomorfismo}\}.$$

$Func(m)$ é fechado sobre as operações: composição "$\cdot$" definida por

$$(a)(f \cdot g) = ((a)f)g$$

e soma "$+$" definida por

$$(a)(f+g) = (a)f(a)g,$$

para todos $f, g \in Func(m)$ e $a \in \mathcal{A}_m$.

$End(m)$ é fechado sobre a operação composição de funções "$\cdot$" e $Mon(m)$ é um sub-monoide de $End(m)$. Note que para $f, g, h \in Func(m)$,

$$h \cdot (f+g) = h \cdot f + h \cdot g \quad \text{e}$$

$$(f+g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h \text{ se } h \in End(m).$$

Lema 3.1.1. *Sejam $f, g \in End(m)$ e $h = f + g$.*

(i) $h \in End(m)$ *se, e somente se,* $(\mathcal{A}_m)^f$ *comuta com* $(\mathcal{A}_m)^g$*, elemento por elemento.*

(ii) Seja $h \in End(m)$. Então $h \in Mon(m)$ se, e somente se, $Ker(h) = \{e\}$. Se ${\mathcal{A}_m}^f \cap {\mathcal{A}_m}^g = \{e\}$ então $ker(h) = \{e\}$.

Demonstração. (i) Suponha que $h \in End(m)$, então

$$\begin{aligned}(ab)h &= (a)h \cdot (b)h \\ &= (a)f \cdot (a)g \cdot (b)f \cdot (b)g,\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(ab)h &= (ab)f \cdot (ab)g \\ &= (a)f \cdot (b)f \cdot (a)g \cdot (b)g.\end{aligned}$$

Então $(a)f \cdot (a)g \cdot (b)f \cdot (b)g = (a)f \cdot (b)f \cdot (a)g \cdot (b)g$ e $(a)g \cdot (b)f = (b)f \cdot (a)g$ para todos $a, b \in \mathcal{A}_m$.

Reciprocamente, assuma que $(\mathcal{A}_m)^f$ comuta com $(\mathcal{A}_m)^g$, elemento por elemento. Então,

$$\begin{aligned}(ab)h &= (ab)f \cdot (ab)g \\ &= (a)f \cdot (b)f \cdot (a)g \cdot (b)g \\ &= (a)f \cdot (a)g \cdot (b)f \cdot (b)g \\ &= (a)h \cdot (b)h.\end{aligned}$$

(ii) A primeira parte é imediata. Suponha

$$(a)h = (a)(f + g) = (a)f \cdot (a)g = e,$$

então $(a)f = (a^{-1})g$ e $a = e$.

□

3.1.1 Monomorfismos de $\mathcal{A}_m$

$Mon(m)$ contém o grupo $(\mathcal{A}_m)\kappa$ induzido pelas conjugações de $\mathcal{A}_m$ em $\mathcal{A}_m$. Como $m \geq 2$, o centro de $\mathcal{A}_m$ é trivial e $(\mathcal{A}_m)\kappa$ é isomorfo à $\mathcal{A}_m$. Vamos mostrar que a estrutura da árvore induz novos monomorfismos de $\mathcal{A}_m$, o qual chamaremos δ-operadores.

O conjunto Y^* é um monoide livremente gerado por Y; o monoide Y^* admite a relação de ordem:

$$v \leq u \text{ se e somente se } u \text{ é um prefixo de } v.$$

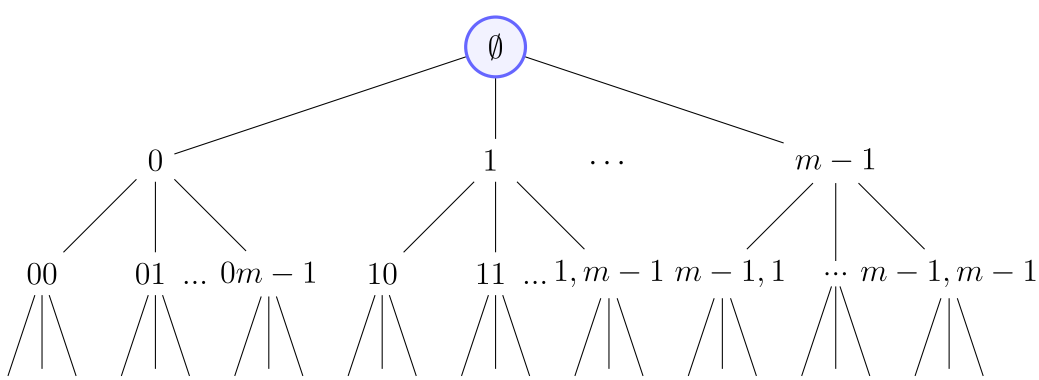
Definição 3.1.2. *Um conjunto conector M de $\mathcal{T}_m$ é um subconjunto de vértices de $\mathcal{T}_m$ tal que*

(i) todo elemento de $\mathcal{T}_m$ é comparável à algum elemento de M;

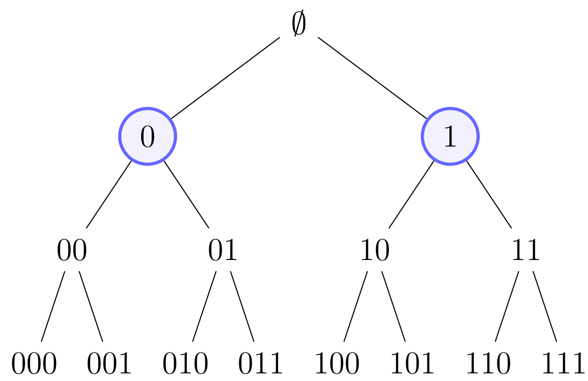
(ii) elementos diferentes de M são incomparáveis.

Exemplo 3.1.3. *Listamos abaixo uma série de conjuntos conectores.*

a) $M = \{\emptyset\}$.



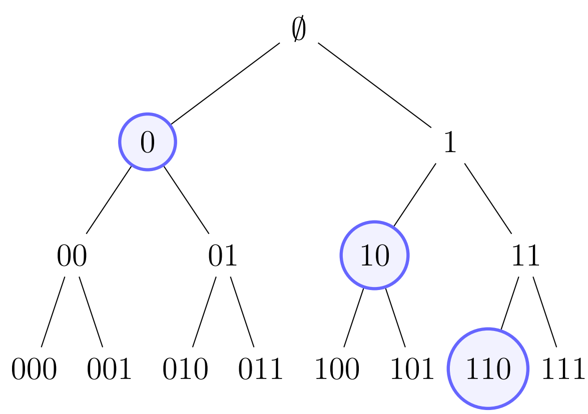
b) $M = Y = \{0, 1\}$.



$$\vdots$$

Do mesmo modo $M = Y = \{0, 1, \cdots m - 1\}$ *é um conjunto conector.*

c) $M = \{0, 10, 110, \cdots, 1^i \cdot 0, \cdots\}$, *onde* $Y = \{0, 1\}$.



$$\vdots$$

Dados um conjunto conector M e N um subconjunto de M (chamado *conjunto conector parcial*), definimos o monomorfismo

$$\delta_N : \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_m,$$

por

$$(a)\delta_N = b$$

onde b é tal que $b_u = a$ para todo $u \in N$ e e para $u \in M \setminus N$. Então $\delta_N \in Mon(\mathcal{A}_m)$. δ_Y é chamado *operador diagonal completo*. Para $w \in Y^*$ denotaremos $\delta_{\{w\}}$ simplesmente por δ_w.

Sejam $\delta(Y)$ o monoide $\langle \delta_i \mid i \in Y \rangle$ e G um subgrupo de $\mathcal{A}_m$. Quando Y está fixado simplificamos $\delta(Y)$ a δ e escrevemos

$$G^\delta = \langle (g)w \mid g \in G \text{ e } w \in \delta \rangle.$$

O monoide $\delta(Y)$

Lema 3.1.4. *(i) Para todos $u, v \in Y^*$, $\delta_u \delta_v = \delta_{vu}$ e assim, $\delta = \langle \delta_i \mid i \in Y^* \rangle$.*

(ii) δ é livremente gerado por $\{\delta_i \mid i \in Y\}$.

Demonstração. (i) Seja $a \in \mathcal{A}_m$, então

$$(a)\delta_u \delta_v = ((a)\delta_u)\delta_v = (a)\delta_{vu}.$$

(ii) Basta observar que se $u, v \in Y^*$ e $\delta_u = \delta_v$, então $u = v$.

□

Fecho de $\delta(Y)$ sobre "+"

Lema 3.1.5. *Sejam $u, v \in Y^*$ incomparáveis e considere $f = \delta_u$, $g = \delta_v$. Então $h = f + g \in Mon(m)$.*

Demonstração. Note que $(\mathcal{A}_m)^f \cap (\mathcal{A}_m)^g$ é trivial e então eles comutam. Basta então aplicar o Lema 3.1.1 (ii). □

3.1.2 O monoide $\langle (\mathcal{A}_m)\kappa, \delta(Y) \rangle$

Lema 3.1.6. *Sejam $b \in \mathcal{A}_m$ e $w \in Y^*$. Então*

$$(\delta_w) \cdot (b)\kappa = (b_w)\kappa \cdot (\delta_{(w)b})$$

e assim, temos a fatoração

$$\langle (\mathcal{A}_m)\kappa, \delta \rangle = (\mathcal{A}_m)\kappa \cdot \delta(Y).$$

Demonstração. Seja $|w| = k$. Podemos escrever b no k-ésimo nível como

$$b = (b_u \mid |u| = k)p$$

para alguma permutação p do k-ésimo nível. Então,

$$(a)(\delta_w) = (e, \ldots, e, a, e, \ldots, e)$$

de comprimento m^k e possui a na posição w.

$$\begin{aligned}(a)(\delta_w) \cdot (b)\kappa &= ((a)\delta_w)^b \\ &= (e, \ldots, e, a, e, \ldots, e)^b \\ &= (e, \ldots, a^{b_w}, e, \ldots, e)^p \\ &= (e, \ldots, e, a^{b_w}, e, \ldots, e),\end{aligned}$$

onde a^{b_w} está na posição $(w)^p = (w)b$. Assim,

$$(a)(\delta_w) \cdot b = (a^{b_w})(\delta_{(w)b}) = (a)((b_w)\kappa \cdot (\delta_{(w)b})),$$

$$(\delta_w) \cdot b = (b_w)\kappa \cdot (\delta_{(w)b}).$$

Claramente $(\mathcal{A}_m)\kappa \cap \delta(Y) = \{id\}$. □

3.1.3 O monoide de operadores diagonais parciais Δ

Seja $\pi = \{Y_j \mid j = 1, \ldots, s\}$ uma partição de Y. Considerando π como alfabeto, geramos o monoide livre π^* no qual as palavras estão em Y^* tendo blocos em π.

Seja G um subgrupo de $\mathcal{A}_m$ com tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$ e considere a partição $\pi = \{O_{(1)}, \cdots, O_{(s)}\}$ de Y nas s órbitas induzidas por G. Definimos os operadores diagonais parciais

$$x_1 := \delta_{O_{(1)}}, \cdots, x_s := \delta_{O_{(s)}}.$$

Denote por Δ_π o monoide gerado por $x_1, \cdots, x_s$ e

$$\Delta_\pi(G) = \langle G \cdot w \mid w \in \Delta_\pi \rangle \leqslant L(P).$$

Quando a partição π está clara no contexto, nós suprimimos o índice π da notação e escrevemos simplesmente Δ e $\Delta(G)$.

Vamos denotar os elementos das órbitas $O_{(i)}$ por $i1, i2, \cdots, im_i$.

Proposição 3.1.7. *Seja $b \in \mathcal{A}_m$.*

(i) Então

$$x_i \cdot (b)\kappa = [(b_{i1})\kappa \cdot (\delta_{(i1)b})] \cdot [(b_{i2})\kappa \cdot (\delta_{(i2)b})] \cdots [(b_{im_i})\kappa \cdot (\delta_{(im_i)b})].$$

(ii) Se $Q(b)$ centraliza um elemento a de $\mathcal{A}_m$, temos que

$$(a)x_i \cdot (b)\kappa = (a)x_k,$$

onde $O_{(k)} = O_{((i)b)}$.

(iii) Suponha que o conjunto de estados $Q(b)$ normaliza G. Então:

(a) $Q(b)$ normaliza G^{δ}; de fato, para todos $u, w \in Y^*$ e $a \in G$

$$(a)(\delta_w) \cdot b_u = (a')\delta_{(w)b_u},$$

onde $a' = a^{b_{uw}}$;

(b) se, além disso, $Q(b)$ centraliza G então $(\delta_w) \cdot b_u = \delta_{(w \cdot b_u)}$ em G e assim, $(\delta_Z)b = \delta_{Z \cdot b}$ em G.

Demonstração. (i) Seja $a \in \mathcal{A}_m$. Então

$$\begin{aligned}(a)x_i \cdot (b)\kappa &= [(a)\delta_{i1}(a)\delta_{i2} \cdots (a)\delta_{im_i}]^b \\ &= [(a)\delta_{i1}]^b[(a)\delta_{i2}]^b \cdots [(a)\delta_{im_i}]^b \\ &= [(a^{b_{i1}})\delta_{(i1)b}][(a^{b_{i2}})\delta_{(i2)b}] \cdots [(a^{b_{im_i}})\delta_{(im_i)b}].\end{aligned}$$

Na última igualdade foi usado o Lema 3.1.6.

(ii) Segue de (i).

(iii) (a) Temos que

$$((a)\delta_w) \cdot b_u = (a)(b_{uw} \cdot (\delta_{(w)b_u}) = (a^{b_{uw}}) \cdot (\delta_{(w)b_u});$$

(b) Segue da equação acima.

□

Lema 3.1.8. *Sejam A um grupo abeliano autossimilar e Δ o monoide correspondente ao seu tipo-orbital. Então $\overline{\Delta(A)}$ é abeliano autossimilar.*

Demonstração. Como A é autossimilar, por definição $\Delta(A)$ é também autossimilar. Para mostrar que $\Delta(A)$ é abeliano é suficiente provar que $[A, A \cdot w] = 1$, onde $w \in \Delta$. Sejam $\alpha, \beta \in A$ e assuma $w = x_i$. Então as coordenadas de $[\alpha, \beta \cdot x_i]$ são da forma

$$\alpha^{-1}_{i^{\sigma(\alpha)^{-1}}} \beta^{-1} \alpha_{i^{\sigma(\alpha)^{-1}}} \beta \text{ ou } \alpha^{-1}_{i^{\sigma(\alpha)^{-1}}} \alpha_{i^{\sigma(\alpha)^{-1}}},$$

como A é abeliano autossimilar, estas entradas são triviais. Por indução, assuma que $[A, A \cdot w] = 1$, onde w é um produto de n operadores x_i's; é suficiente repetir o procedimento para $w' = wx_i$. □

Quando a partição de Y que define Δ difere da partição determinada pela estrutura orbital de $S \leqslant \mathcal{A}_m$ abeliano autossimilar, o fecho $\Delta(S)$ deixa de ser abeliano.

Exemplo 3.1.9. *Considere*

$$Y = \{0, 1, 2, 3\}, a = (0\,1)(2\,3) \in \mathcal{A}_4, \pi = \{\{0, 1\},\ \{2, 3\}\}, \Delta_\pi = \langle x_1, x_2 \rangle,$$

onde

$$g^{x_1} = (g, g, e, e) \ \text{ e } \ g^{x_2} = (e, e, g, g) \text{ para todo } g \in \mathcal{A}_4.$$

Seja $S = \langle (0\,2)(1\,3) \rangle \leqslant \mathcal{A}_4$, então $\Delta(S) \simeq \mathcal{A}_2$.

3.2 A estrutura do centralizador

3.2.1 O centralizador de um subgrupo de $Sym(m)$

Sejam P um subgrupo de $Sym(Y)$, $Y = \{0, \ldots, m-1\}$, e $O_{(1)}, \ldots, O_{(s)}$ suas órbitas de tamanho $m_1, \ldots, m_s$, respectivamente. Identificamos $Sym(O_{(i)})$ com o subgrupo de $Sym(Y)$, tendo a mesma ação sobre $O_{(i)}$ e fixando ponto a ponto os elementos de $Y \setminus O_{(i)}$. Denote por $P_{(i)}$ o grupo de permutação induzido por P em $O_{(i)}$. Com esta identificação, os grupos $P_{(i)}$'s comutam entre si e P é um produto sub-direto de $P_{(1)}, \ldots, P_{(s)}$. Denote por C o centralizador de P em $Sym(m)$ e $C_{(i)}$ o centralizador de $P_{(i)}$ em $Sym(O_{(i)})$. Então os grupos $C_{(i)}$'s comutam entre si e $B_0 = C_{(1)} \cdots C_{(s)}$ é subgrupo de C.

Observação 3.2.1. *O grupo C permuta o conjunto das órbitas*

$$O = \{O_{(1)}, \ldots, O_{(s)}\};$$

sejam $J = \{J_1, \ldots, J_t\}$ o conjunto das órbitas de C nesta ação e $S_{(i)}$ os grupos induzidos por C em J_i, $i = 1, \ldots, t$. Note que os grupos $S_{(i)}$ comutam entre si e cada $S_{(i)}$ é isomorfo à $Sym(J_i)$. Defina $S(P) = S_{(1)} \cdots S_{(t)}$, visto como subgrupo de $Sym(Y)$. Logo,

$$C = B_0 S(P) = (C_{(1)} \cdots C_{(s)})(S_{(1)} \cdots S_{(t)}).$$

3.2.2 Fatoração do centralizador de um subgrupo abeliano fechado por estado em $Aut(\mathcal{T}_m)$

Seja $A \leqslant \mathcal{A}_m$ um grupo abeliano fechado por estado com tipo-permutacional $(P_{(1)}, \ldots, P_{(s)})$, com órbitas $O_{(1)}, \ldots, O_{(s)}$ de tamanho $m_1, \ldots, m_s$, respectivamente. Denote por P o grupo de permutação induzido por A no primeiro nível da árvore. Seguindo a notação anterior, temos que $P_{(i)}$ é um subgrupo abeliano de $Sym(O_i)$ e age transitivamente em $O_{(i)}$, logo $P_{(i)}$ é regular e é auto-centralizante em $Sym(O_{(i)})$. Segue que $C(P) = P_{(1)} \cdots P_{(s)} S(P)$.

Defina $B(A) = A_{(1)} \cdots A_{(s)} \leqslant C_{\mathcal{A}_m}(A)$ e denote por $C(A)$ o centralizador de A em $\mathcal{A}_m$, então

$$C(A) \leqslant Stab_{\mathcal{A}_m}(1) B(A) S(P).$$

Observe que $C(A) = B(A)(C(A) \cap (Stab_{\mathcal{A}_m}(1) S(P)))$. Defina o conjunto

$$S_0(A) = \{s \in S(P) \mid C(A) \cap Stab_{\mathcal{A}_m}(1)s \text{ é não vazio}\}.$$

Para cada $s \in S_0(A)$, escolha $v_s \in Stab_{C(A)}(1)$ tal que $v_s s \in C(A)$, chamado um levantamento de s à $C(A)$ e defina

$$D_0(A) = \langle v_s s \mid s \in S_0(A) \rangle.$$

Então $C(A) = Stab_{C(A)}(1) B(A) D_0(A)$.

Teorema 3.2.2. *Sejam $A, B(A), C(A), D_0(A)$ como acima. Então*

(i) $C(A) = Stab_{C(A)}(1) B(A) D_0(A)$;

(ii) o subgrupo $Stab_{C(A)}(1) B(A)$ *é normal em* $C(A)$;

(iii) $B(A)$ *centraliza* $Stab_{C(A)}(1)$*;*

(iv) $C(A)$ *e* $Stab_{C(A)}(1)$ *são* Δ *invariantes;*

(v) $\Delta(B(A))$ *é abeliano com mesmo tipo-permutacional de* A*.*

Demonstração. (i) Foi provado acima.

(ii) Sejam $d \in D_0(A)$ e $h \in A_{(i)}$. Escreva $h = h' \cdot p$, onde $p \in P_{(i)}$, então $p^d \in P_{(i^d)}$. Como existe $g \in A_{(i^d)}$ tal que $g = g' \cdot p^d$, obtemos $(h^d) \cdot g^{-1} = (h')^d \cdot (g')^{-1} \in Stab_{C(A)}(1)$ e portanto o subgrupo $Stab_{C(A)}(1)B(A)$ é normal em $C(A)$.

(iii) Considere $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}) = f_{(1)}f_{(2)} \cdots f_{(s)} \in Stab_{\mathcal{A}_m}(1)$ e seja $a = a_{(1)} \cdots a_{(s)} \in A$. Então,

$$f^a = {f_{(1)}}^{a_{(1)}} \cdots {f_{(s)}}^{a_{(s)}}.$$

Assim, $f \in C(A)$ se, e somente se, $A_{(i)}$ centraliza $f_{(i)}$ para todo i. Como $A_{(j)}$ centraliza $f_{(i)}$ para todo j diferente i, segue que $f \in C(A)$ se, e somente se, $B(A)$ centraliza $f_{(i)}$ para todo i.

(iv) Dado $c \in C(A)$, então $c^{x_i} \in C$. Portanto, $C(A)^\Delta = C(A)$.

Como $(Stab_{C(A)}(1))^\Delta \leqslant C(A)^\Delta = C(A)$ e $Stab_{C(A)}(1) \leqslant (Stab_{C(A)}(1))^\Delta$, segue que $(Stab_{C(A)}(1))^\Delta = Stab_{C(A)}(1)$.

(v) Por indução no comprimento de operadores em Δ, $B(A)^\Delta$ abeliano é reduzido à $A_{(i)}$ comutar com $(A_{(j)})^w$ para todo i, j. Note que se w é trivial ou $w' \cdot x_k$ para k diferente de i, então $A_{(i)}$ comuta com $(A_{(j)})^w$, No caso $k = i$, temos $A_{(i)}$ comuta com $(A_{(j)})^w$ se, e somente se, $A_{(i)}$ comuta com $(A_{(j)})^{w'}$. □

Proposição 3.2.3. *Seja* $P \leqslant Sym(Y)$ *um grupo abeliano com tipo-permutacional* $(P_{(1)}, \ldots, P_{(s)})$*. Então:*

(i)

$$C = C_{\mathcal{A}_m}(P) = Stab_C(1)C_{Sym(m)}(P), \text{ onde}$$

$$C_{Sym(m)}(P) = B(P)S(P),$$

$$Stab_C(1) = (\mathcal{A}_m)^{x_1} \ldots (\mathcal{A}_m)^{x_s};$$

(ii) $\overline{\Delta(B(P)S(P))} = \overline{\Delta(B(P))}\ \overline{\Delta(S(P))}$ *e é um subgrupo maximal de* $C_{\mathcal{A}_m}(P)$ *sendo fechado por estado.*

Demonstração. (i) Pelo Teorema 3.2.2 e Observação 3.2.1

$$C = C_{\mathcal{A}_m}(P) = Stab_C(1)(B(P)S(P)).$$

Seja $c = (c_{11}, \ldots, c_{1m_1}, \ldots, c_{s1}, \ldots, c_{sm_s}) \in Stab_C(1)$. Como c comuta com $P_{(i)}$, o qual é transitivo em $O_{(i)}$, temos que $c_{11} = \cdots = c_{1m_1}, \ldots, c_{s1} = \cdots = c_{sm_1}$, onde $c_{11}, \ldots, c_{s1}$ são elementos genéricos em $\mathcal{A}_m$.

Em outras palavras,

$$Stab_C(1) = (\mathcal{A}_m)^{x_1} \ldots (\mathcal{A}_m)^{x_s}.$$

(ii) Seja H um subgrupo maximal fechado por estado de $C_{\mathcal{A}_m}(P)$. Note que $B(P)$ e $D_0(A)$ são fechados por estado e assim $\overline{\Delta(B(P)S)} \leqslant H$. Seja $h \in H = (Stab_C(1)B(P)S) \cap H$. Então $h = h_1 b_1 r_1$, onde $h_1 \in Stab_C(1)$, $b_1 \in B(P)$ e $r_1 \in S$. Como H é fechado por estado,

$$h_1 = (h_{11}b_{11}r_{11})^{x_1} \cdots (h_{1s}b_{1s}r_{1s})^{x_s}.$$

Logo,

$$h = (h_{11}^{x_1} \cdots h_{1s}^{x_s})(b_{11}^{x_1} \cdots b_{1s}^{x_s} b_1)(r_{11}^{x_1} \cdots r_{1s}^{x_s} r_1).$$

Como $h_{11}, \ldots, h_{1s} \in H$, repetimos o mesmo procedimento aplicado à h. Portanto, no limite $h \in \overline{\Delta(B(P)S)}$ e $H \leqslant \overline{\Delta(B(P)S)}$.

□

3.2.3 O centralizador de $\Delta(A)$ para A abeliano fechado por estado

Teorema 3.2.4. *Seja* $A \leqslant \mathcal{A}_m$ *um grupo abeliano autossimilar com tipo-permutacional* $\big(P_{(1)}, \ldots, P_{(s)}\big)$. *Defina* $K = \Delta(A)$ *e* $A^* = C_{\mathcal{A}_m}(K)$. *Então*

(i) K *é um grupo abeliano autossimilar com mesmo tipo-permutacional de* A*;*

(ii) A^* *deixa cada órbita* $O_{(i)}$ *invariante e*

$$A^* = B(K)Stab_{A^*}(1);$$

(iii) $Stab_{A^*}(1) = (A^*)^{x_1}(A^*)^{x_2}\cdots(A^*)^{x_s}$;

(iv)
$$A^* = \overline{\Delta(B(A))},$$
é o único subgrupo abeliano autossimilar de $C(A)$ o qual contém A e é auto-centralizante; portanto, A^* é um subgrupo abeliano maximal de $\mathcal{A}_m$.

Demonstração. (i) Como A é fechado por estado, por construção temos que $K = \Delta(A)$ é também fechado por estado. Note que $P(K) = P(A)$, logo K tem mesmo tipo-orbital que A.

(ii) Seja $\gamma = (\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1m_1}, \ldots, \gamma_{s1}, \ldots, \gamma_{sm_s})\sigma \in A^*$. Afirmamos que σ não permuta elementos de órbitas distintas em $P(K)$. Suponha, por contradição, que exista $i \in Y$ tal que $i^\sigma = j$ e não existe permutação $\sigma(\alpha)$ tal que $i^{\sigma(\alpha)} = j$, com $\alpha \in A$. Suponha que i está na k-ésima órbita ($1 \leq k \leq s$). Como $\alpha \in A$,

$$\alpha^{x_k} = (e, \ldots, e, \alpha, \ldots, \alpha, e, \ldots, e) \in K.$$

Note que $(\alpha^{x_k})^\gamma \neq \alpha^{x_k}$ o que implica $\gamma \notin A^*$, um absurdo. Portanto, $D_0(K) = 1$ e
$$A^* = B(K)Stab_{A^*}(1).$$

(iii) Seja $\alpha = (\alpha_{(1)}, \cdots, \alpha_{(s)})\sigma(\alpha)$ um elemento em A^* e considere

$$\gamma = (\gamma_{(1)}, \cdots, \gamma_{(s)}) \in Stab_{A^*}(1).$$

Então
$$\gamma^\alpha = \left((\gamma_{(1)})^{\alpha_{(1)}}, \cdots, (\gamma_{(s)})^{\alpha_{(s)}}\right)^{\sigma(\alpha)}.$$

Como A age transitivamente em $O_{(i)}$ temos que $\gamma = (\gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \cdots, \gamma_{(s)})$, onde

$$\gamma_{(1)} = {\gamma_0}^{x_1}, \gamma_{(2)} = (\gamma_{m_1})^{x_2}, \ldots, \gamma_{(s)} = (\gamma_{m_1+\cdots+m_{s-1}})^{x_s}.$$

Como $\gamma\alpha^{x_i} = \alpha^{x_i}\gamma$, $i = 1, \ldots, s$, para todo $\alpha \in K$, segue que $\gamma_i\alpha = \alpha\gamma_i$ para todo $\alpha \in K$ e $i = 1, \ldots, m$. Assim, $\gamma_i \in A^*$. Portanto,

$$Stab_{A^*}(1) = (A^*)^{x_1}(A^*)^{x_2}\cdots(A^*)^{x_s}.$$

(iv) Denote $B(K)$ por B. Sucessivas substituições de

$$Stab_{A^*}(1) = (A^*)^{x_1}(A^*)^{x_2}\cdots(A^*)^{x_s} \text{ e de } A^*$$

em $A^* = Stab_{A^*}(1)B$ nos dá

$$\begin{aligned} A^* &= Stab_{A^*}(1)B \\ &= (A^*\cdot x_1)(A^*\cdot x_2)\cdots(A^*\cdot x_s)B \\ &= ((Stab_{A^*}(1)B)\cdot x_1)\cdots((Stab_{A^*}(1)B)\cdot x_s)B \\ &= ((((A^*\cdot x_1)\cdots(A^*\cdot x_s))B)\cdot x_1)\cdots((((A^*\cdot x_1)\cdots(A^*\cdot x_s))B)\cdot x_s)B \\ &= (A^*\cdot {x_1}^2)\cdots(A^*\cdot x_s x_1)\cdots(A^*\cdot x_1 x_s)\cdots(A^*\cdot {x_s}^2)(B\cdot x_1)\cdots(B\cdot x_s)B. \end{aligned}$$

No limite, $A^* = \overline{\Delta(B(K))} = \overline{\Delta(B(A))}$.

Pelo item (i), $\overline{\Delta(A)}$ tem mesmo tipo-permutacional que A e é auto centralizante. Suponha que Q é um grupo abeliano autossimilar tal que $A \leqslant Q \leqslant C(A)$ e é auto centralizante. Então $\overline{Q} \leqslant C(Q) = Q$ e logo $\overline{Q} = Q$. Como $C(Q) = Q$ segue que Q é Δ invariante. Além disso, $A \leqslant Q$ implica que $B(A) \leqslant B(Q) = Q$. Assim, $\overline{\Delta(B(A))} \leqslant Q$. Como $\overline{\Delta(B(A))}$ e Q são auto centralizantes, temos que $\overline{\Delta(B(A))} = Q$.

□

Exemplo 3.2.5. *Seja $A = \langle a_1, a_2, a_3, \dots\rangle$ o grupo abeliano livre com base a_i ($i = 1, 2, \dots$). Considere $H_1 = \langle a_1^2, a_2, a_3, \dots\rangle$, $H_2 = A$, subgrupos de A, e os endomorfismos virtuais que estendem as seguintes aplicações:*

$$f_1 : a_1^2 \mapsto a_1,\ a_{2i} \mapsto e\ (i \geq 1),\ a_{2i-1} \mapsto a_i\ (i \geq 2),$$

$$f_2 : a_{2i-1} \mapsto e\ (i \geq 1),\ a_{2i} \mapsto a_i\ (i \geq 1).$$

Então os A-dados $((2,1), \{H_1, H_2\}, \{f_1, f_2\})$ induzem uma representação fiel fechada por estado de A e

$$A \simeq \langle \alpha_i \mid i = 1, 2, \dots\rangle, \quad \textit{onde}$$

$$\alpha_1 = (e, \alpha_1, e)(0\,1), \alpha_{2i-1} = {\alpha_i}^{x_1}\ (i \geq 2)\ ,\ \alpha_{2i} = {\alpha_i}^{x_2}\ (i \geq 1).$$

Aqui $\Delta = \langle x_1, x_2\rangle$, onde

$$a^{x_1} = (a, a, e) \ \textit{e} \ a^{x_2} = (e, e, a).$$

Note que por esta representação de A, tem-se $\Delta(A) = A$; além disso, $B(A) = A$. Portanto, $C(A) = \bar{A}$.

3.3 Interpretação de A^* como um $\mathbb{Z}_n[[\Delta]]$-módulo

O grupo $A^* = \overline{\Delta(B(A))}$ é um subgrupo abeliano autossimilar de $\mathcal{A}_m$ o qual é maximal. A seguir, daremos uma descrição de seus elementos.

Seja $A \leqslant \mathcal{A}_m$ abeliano autossimilar transitivo. Em [5], A. Brunner e S. Sidki introduziram exponenciação por série de potência da seguinte forma: seja $\alpha \in A$ e $q = \sum_{i\geq 0} q_i x^i \in \mathbb{Z}_m[[x]]$ com $q_i \in \mathbb{Z}_m$ então

$$\alpha^q = \alpha^{q_0}\alpha^{q_1 x}\cdots\alpha^{q_i x^i}\cdots .$$

Seja n o expoente de $P(A)$. No caso intransitivo precisamos considerar o anel $\mathbb{Z}_n[[\Delta]]$. Seja $A \leqslant \mathcal{A}_m$ abeliano autossimilar de tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$. Considere

$$p(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}_n[[\Delta]].$$

Escreva $p(x_1, \ldots, x_s)$ como

$$p(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j\geq 0} q_{ij}(x_1, \ldots, x_s){x_i}^j,$$

onde os monômios que aparecem em $q_{ij}(x_1, \ldots, x_s)$ são da forma $x_{i_1}^{l_1}x_{i_2}^{l_2}\cdots x_{i_k}^{l_k}$ com $i_k \neq i$. Com isso, escrevemos

$$\alpha^p = \prod_{i=1}^{s} \alpha^{q_{i0}}(\alpha^{q_{i1}})^{x_i}(\alpha^{q_{i2}})^{{x_i}^2}\cdots(\alpha^{q_{ij}})^{{x_i}^j}\cdots$$

ou na forma aditiva

$$\alpha \cdot p = \sum_{i=1}^{s} \alpha\cdot q_{i0} + (\alpha\cdot q_{i1})\cdot x_i + (\alpha\cdot q_{i2})\cdot {x_i}^2\cdots + (\alpha\cdot q_{ij})\cdot {x_i}^j\cdots + .$$

Vamos usar as duas formas notacionais conforme a conveniência.

Provaremos aqui uma versão mais detalhada do Teorema E.

Teorema 3.3.1. *Seja A um subgrupo abeliano autossimilar de $\mathcal{A}_m$ com tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$ e sejam $\beta_1, \ldots, \beta_k$ elementos de A que induzem em Y um conjunto gerador $\{\sigma_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ de $P(B(A))$. Então*

(i) todo elemento de $Stab_{B(A)}(j)$ pode ser escrito como $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{s^j}$, onde $\gamma_i \in B(A)\cdot w_i(x_1, \ldots, x_s)$ com $|w_i| = j$, para cada $i = 1, \ldots, s^j$;

(ii) *todo elemento α de A^* pode ser escrito como*

$$\alpha = \sum_{1\leq i\leq k} \beta_i \cdot p_i(x_1, \ldots, x_s).$$

onde $p_i(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}_n[[\Delta]]$.

Demonstração. (i) Considere

$$\alpha = (\alpha_{(1)}, \ldots, \alpha_{(s)})\sigma(\alpha) \in A \text{ e } \lambda = (\lambda_{(1)}, \ldots, \lambda_{(s)}) \in Stab_{B(A)}(1).$$

Então

$$\lambda^{\alpha} = \left((\lambda_{(1)})^{\alpha_{(1)}}, \ldots, (\lambda_{(s)})^{\alpha_{(s)}}\right)^{\sigma(\alpha)}.$$

Como $B(A)$ age transitivamente em $O_{(i)}$ então $\lambda = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_s$, onde

$$\gamma_i = (\underbrace{e, \ldots, e}_{m_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{i1}}_{m_i}, \ldots, \underbrace{e, \ldots, e}_{m_s}) = {\lambda_{i1}}^{x_i} \in B(A) \cdot x_i.$$

Por indução, suponha que todo elemento de $Stab_{B(A)}(j)$ pode ser escrito como $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{s^j}$, onde

$$\gamma_i \in B(A) \cdot w_i(x_1, \ldots, x_s) \text{ com } |w_i(x_1, \ldots, x_s)| = j.$$

Seja $\alpha = {\alpha_1}^{x_1}\cdots{\alpha_s}^{x_s}$ um elemento de $Stab_{B(A)}(j+1)$, então todo $\alpha_t \in Stab_{B(A)}(j)$. Por suposição, $\alpha_t = \gamma_{t1}\gamma_{t2}\cdots\gamma_{ts^j}$ com γ_{ti} pertencendo a $B(A) \cdot w_{ti}(x_1, \ldots, x_s)$ e $|w_{ti}(x_1, \ldots, x_s)| = j$. Assim,

$$\alpha = \prod_{t=1}^{s}(\gamma_{t1}\gamma_{t2}\cdots\gamma_{ts^j})^{x_t} = \theta_1\theta_2\cdots\theta_{s^{j+1}},$$

$$\alpha = \theta_1\theta_2\cdots\theta_{s^{j+1}} \in B(A)^{w_{t_1}x_1}A^{w_{t_2}x_2}\cdots B(A)^{w_{t_s}x_s},$$

onde $\theta_i \in B(A) \cdot w'_i(x_1, \ldots, x_s)$ e $|w'_i(x_1, \ldots, x_s)| = j+1$.

(ii) Considere $P(A)$ dado pela apresentação

$$\langle \sigma_i,\ 1 \leq i \leq k \mid \sigma_i^{n_i} = e,\ \sigma_i\sigma_j = 1 \text{ para } i \neq j\rangle.$$

Seja α um elemento de $A^* = \overline{\Delta(B(A))}$ e escreva $\sigma(\alpha)$ como

$$\sigma(\alpha) = \prod_{1\leq i\leq k} \sigma_i^{r_{i1}}, \text{ com } 0 \leq r_{i1} < n_i.$$

Como β_i induz σ_i, temos que ou

$$\alpha \left(\prod_{1\leq i\leq k} \beta_i^{r_{i1}} \right)^{-1}$$

é trivial ou pertence a $Stab_{A^*}(l_1) \setminus Stab_{A^*}(l_1+1)$, com $l_1 \geq 1$. Assim,

$$\alpha \left(\prod_{1\leq i\leq k} \beta_i^{r_{i1}} \right)^{-1} = \gamma_1,$$

onde $\gamma_1 \in A^*$. Aplicando o mesmo procedimento a γ_1 e repetindo o mesmo argumento, no limite obtemos

$$\alpha = \left(\prod_{1\leq i\leq k} \beta_i^{r_{i1}} \right) \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_j\cdots,$$

onde $\gamma_j \in Stab_{A^*}(l_j) \setminus Stab_{A^*}(l_j+1)$ e $1 \leq l_1 < \cdots < l_j < \cdots$.
Defina $s(l_j) = s^{l_j}$. Como $\gamma_j \in Stab_{A^*}(l_j)$, pelo item (i) temos que $\gamma_j = \gamma_{j1}\gamma_{j2}\cdots\gamma_{js(l_j)}$, onde $\gamma_{jt} \in B(A)^{w_{jt}(x_1,\ldots,x_s)}$ e $|w_{jt}(x_1,\ldots,x_s)| = l_j$. Assim,

$$\gamma_j = \prod_{1\leq i\leq k} \beta_i^{p_{ij}(x_1,\ldots,x_s)},$$

onde

$$p_{ij}(x_1,\ldots,x_s) = r_{ij,1}w_{ij,1}(x_1,\ldots,x_s) + \cdots + r_{ij,s(l_j)}w_{ij,s(l_j)}(x_1,\ldots,x_s).$$

Portanto,

$$\alpha = \prod_{1\leq i\leq k} \beta_i^{p_i(x_1,\ldots,x_s)},$$

onde

$$p_i(x_1,\ldots,x_s) = \\ r_{i1} + \textstyle\sum_{j\geq 1} r_{ij,1}w_{ij,1} + r_{ij,2}w_{ij,2} + \cdots + r_{ij,s(l_j)}w_{ij,s(l_j)} \in \mathbb{Z}_n[[\Delta]].$$

$\square$

3.3.1 Grupos de torção

A seguir, vamos provar uma versão mais detalhada do Teorema F.

Teorema 3.3.2. *Seja A um grupo abeliano autossimilar. Então*

(i) a representação autossimilar de A induz uma representação autossimilar de $Tor(A)$;

(ii) $Tor(A)$ tem expoente finito e portanto é um fator direto de A. Além disso, o expoente de $Tor(A)$ divide o expoente de $P(A)$.

Demonstração. (i) Assuma que o tipo-orbital de A é $(m_1, \dots, m_s)$. Denote por T o subgrupo de torção de A e considere $O_{(i)} = \{y_{i1}, \dots, y_{im_i}\}$, $i = 1, \dots, s$, as órbitas de A.

Defina $A_i = \{\alpha \in A : y^{\sigma(\alpha)} = y \text{ para todo } y \in O_{(i)}\}$, $i = 1, \dots, s$. Denote por T_i a interseção $T \cap A_i$. Note que

$$[A : Stab_A(1)] = [A : A_i][A_i : Stab_A(1)].$$

Então $[A : A_i]$ é finito e o mesmo é válido para $[T : T_i]$. Seja $\pi_i : T_i \to T$ a projeção na y_{i1}-ésima coordenada, $i = 1, \dots, s$. Defina os T-dados $(\mathbf{m}', \mathbf{H}', \mathbf{F}')$ por

$$\mathbf{m}' = \{m'_i = [T : T_i],\ i = 1, \dots, s\},\ \mathbf{H}' = (T_1, \dots, T_s),$$
$$\text{e } \mathbf{F}' = \{\pi_1, \dots, \pi_s\}.$$

Então $(\mathbf{m}', \mathbf{H}', \mathbf{F}')$ torna T autossimilar, ou seja, T é um subgrupo autossimilar de $\mathcal{A}_{m'}$, onde $m' = m'_1 + \cdots + m'_s$.

(ii) Seja $\{\sigma_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ um conjunto minimal de geradores para $P(T)$, com respeito a representação obtida no item (i). Considere $\beta_i \in T$ tal que $\sigma(\beta_i) = \sigma_i$.

Defina $r = mmc\{o(\beta_1), \dots, o(\beta_k)\}$. Pela Proposição 3.3.1 (ii), todo elemento $\alpha \in T$ pode ser escrito como

$$\alpha = \prod_{1 \leq i \leq k} \beta_i^{p_i(x_1, \dots, x_s)},$$

onde $p_i(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}_n[[\Delta]]$. Assim, $\alpha^r = e$ e T tem expoente finito e este expoente divide o expoente de $P(A)$.

Como T tem expoente finito, ele é um subgrupo "pure bounded" de A e assim ele é um fator direto de A, [10, Teorema 4.3.8].

□

3.3.2 Grupos abelianos livres

Os G-dados $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ são ditos ser *recorrentes* se cada endomorfismo virtual f_i é um epimorfismo e o $\mathbf{F}$-core de $\mathbf{H}$ é trivial. Dizemos que os G-dados recorrentes $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ são *fortemente recorrentes* se

$$f_i : H_i \cap \bigcap_{j \neq i} ker(f_j) \to G$$

é um epimorfismo para todo f_i em $\mathbf{F} = \{f_1, \ldots, f_s\}$.

Existem G-dados recorrentes $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ que não são fortemente recorrentes. De fato, considere A o grupo gerado pela máquina de adição dupla

$$a = (e, a, e, a)(0\,1)(2\,3).$$

Então, $Fix_A(0) = Fix_A(2) = \langle a^2 \rangle$ e os A-dados

$$((2,2), (Fix_A(0), Fix_A(2)), (\pi_0, \pi_2))$$

são recorrentes, mas não são fortemente recorrentes.

Proposição 3.3.3. *Seja A um grupo abeliano autossimilar de grau $m = m_1 + \cdots + m_s$ e tipo-orbital $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$, com $s \geq 2$. Então $A = \Delta(A)$ se e somente se existem A-dados $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ fiéis, fortemente recorrentes.*

Demonstração. Se $A = \Delta(A)$, então os A-dados $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ com

$$H_1 = Fix_A(0), H_2 = Fix_A(m_1), \ldots, H_s = Fix_A(m_1 + \cdots + m_{s-1}),$$

e

$$f_1 = \pi_0, f_2 = \pi_{m_1}, \ldots, f_s = \pi_{m_1 + \cdots + m_{s-1}},$$

onde π_i é a projeção da i-ésima coordenada, mostram que o grupo é fortemente recorrente.

Agora, suponha que os A-dados fortemente recorrentes $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ induzem uma representação autossimilar $\varphi : A \to \mathcal{A}_m$ de A. Sejam $T_1, \ldots, T_s$ transversais de $H_1, \ldots, H_s$ em A, respectivamente. Mostraremos que dado $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $b^{\varphi} = a^{\varphi x_i}$ para todo $i = 1, \ldots, s$. De fato, como

$$f_i : H_i \cap \bigcap_{j \neq i} ker(f_j) \to A$$

é sobrejetora, então existe $b \in H_i \cap \bigcap_{j \neq i} ker(f_j)$ de modo que $b^{f_i} = a$. Note que $H_i tb = H_i t$ para qualquer $t \in T_i$, então

$$b^{\varphi} = (e, \ldots, e, a^{\varphi}, \ldots, a^{\varphi}, e, \ldots, e) = a^{\varphi x_i}.$$

$\square$

Teorema 3.3.4. *Seja A um grupo abeliano livre.*

(i) Suponha que A é de posto finito.

(a) Se A é um grupo autossimilar não-transitivo, então $\Delta(A)$ não é finitamente gerado;

(b) Seja A um subgrupo autossimilar transitivo de $\mathcal{A}_m$. Então a representação autossimilar de A estende-se a uma representação autossimilar não-transitiva em $\mathcal{A}_{m+1}$ com tipo-orbital $(m, 1)$ tal que $\Delta(A)$, com respeito a segunda representação, contém um grupo abeliano livre de posto infinito enumerável que é autossimilar.

(ii) Suponha que A é de posto infinito enumerável. Então A pode ser realizado como um grupo autossimilar de tipo-orbital $(m, 1)$ e é invariante sobre $\Delta = \langle x_1, x_2 \rangle$.

Demonstração. (i)-(a) Suponha, por contradição, que $K = \Delta(A)$ é finitamente gerado. Como $K = \Delta(K)$, pela Proposição 3.3.3, existem K-dados fortemente recorrentes $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$. Note que o núcleo de cada f_i intercepta trivialmente $\bigcap_{j \neq i} ker(f_j)$, caso contrário $\bigcap_{i=1,\ldots,s} ker(f_i)$ seria um subgrupo normal não trivial de G e $\mathbf{F}$-invariante; logo $f_i|_{H_i \cap \bigcap_{j \neq i} ker(f_j)}$ é injetiva, $H_i \cap \bigcap_{j \neq i} ker(f_j) \simeq K$ e o índice

$$\left[K : H_i \cap \bigcap_{j \neq i} ker(f_j) \right]$$

é finito para todo $i = 1, \ldots, s$. Portanto, $ker(f_1) \cap \cdots \cap ker(f_s) \neq 1$; uma contradição.

(i)-(b) Seja $f : H \to A$ um endomorfismo virtual simples, onde H é um subgrupo de índice m em A. Considere o grupo abeliano livre de posto infinito $A^{(\omega)} =$

$\oplus_{i=1}^{\infty} A_i$, onde $A_i = A$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots$. Escreva $H_1 = H \oplus \oplus_{i=2}^{\infty} A_i$, $H_2 = A^{(\omega)}$ e para $i = 1, 2$, defina os homomorfismos $f_i : H_i \to A^{(\omega)}$

$$f_1 \quad : \quad (h, a_2, a_3, \dots) \mapsto (h^f, a_2, a_3, \dots);$$

e

$$f_2 \quad : \quad (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_2, a_3, a_4, \dots).$$

Segue que os $A^{(\omega)}$-dados

$$(\mathbf{m+1} = (m, 1), \mathbf{H} = (H_1, H_2), \mathbf{F} = \{f_1, f_2\})$$

têm $\mathbf{F}$-core trivial. Seja $\varphi : A^{(\omega)} \to \mathcal{A}_{m+1}$ a representação autossimilar de $A^{(\omega)}$ induzida pelos $A^{(\omega)}$-dados acima. Então

$$A_1^{\varphi} \leq (A^{(\omega)})^{\varphi} \leq \Delta(A_1^{\varphi})$$

e A_1^{φ} é autossimilar.

(ii) Sejam $m \geq 2$ e $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ uma base livre de A. Considere $H_1 = \langle a_1^m, a_2, a_3, \dots \rangle$ e $H_2 = A \leqslant A$. Defina os homomorfismos $f_i : H_i \to A$ que estendem as aplicações

$$f_1 : a_1^m \mapsto a_1,\ a_{2i} \mapsto e\ (i \geq 1)\,,\ a_{2i-1} \mapsto a_i\ (i \geq 2)\,,$$

$$f_2 : a_{2i-1} \mapsto e\ (i \geq 1)\,,\ a_{2i} \mapsto a_i\ (i \geq 1)\,.$$

Note que os A-dados $((m, 1), \{H_1, H_2\}, \{f_1, f_2\})$ são fortemente recorrentes. Pela Proposição 3.3.3 a representação é fechada por $\Delta = \langle x_1, x_2 \rangle$, onde

$$a^{x_1} = (a, ..., a, e) \text{ e } a^{x_2} = (e, ..., e, a),$$

então

$$A \simeq \langle \alpha_i \mid i = 1, 2, \dots \rangle, \quad \text{onde}$$

$$\alpha_1 = (e, ..., e, \alpha_1, e)(0\,1\, \dots\, m{-}1), \alpha_{2i-1} = {\alpha_i}^{x_1}\ (i \geq 2)\ , \alpha_{2i} = {\alpha_i}^{x_2}\ (i \geq 1).$$

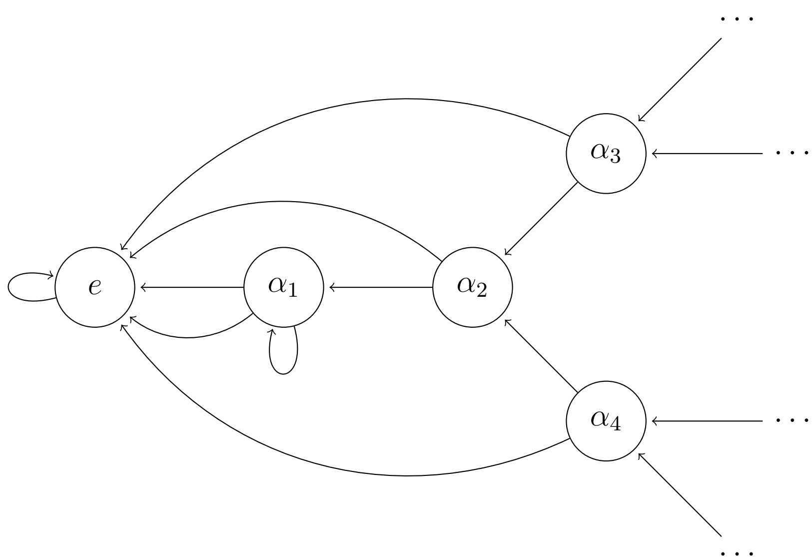


Diagrama de A

$\square$

3.4 Aplicações

Por simplicidade de notação, vamos denotar $C(A), B(A), D_0(A), P(A), S_0(A)$ e $S(P)$, respectivamente por C, B, D_0, P, S_0 e S.

3.4.1 Cálculo do centralizador de grupos cíclicos autossimilares

Seja $A \leqslant \mathcal{A}_m$ um grupo cíclico fechado por estado de tipo-orbital $(m_1, \dots, m_s)$. Então A é gerado por

$$a = (a^{i_{11}}, \dots, a^{i_{1m_1}}, \dots, a^{i_{s1}}, \dots, a^{i_{sm_s}})(0, \dots, m_1-1) \dots (m_1+\dots+m_{s-1}, \dots, m-1).$$

Neste caso:

$$P_{(1)} = \langle (0, \dots, m_1 - 1) \rangle \ , \dots ,$$

$$P_{(s)} = \langle (m_1 + \dots + m_{s-1}, \dots, m - 1) \rangle ,$$

$$A_{(1)} = \langle (a^{i_{11}}, \dots, a^{i_{1m_1}}, 1, \dots, 1)(0, 1, \dots, m_1 - 1) \rangle \ , \dots ,$$

$$A_{(s)} = \langle (1, \ldots, 1, a^{i_{s1}}, \ldots, a^{i_{sm_s}})(m_1 + \cdots + m_{s-1}, \ldots, m-1) \rangle.$$

Etapa 1. A forma de B.

$$B = A_{(1)} \cdots A_{(s)}.$$

Etapa 2. A forma de $\mathtt{Stab}_{\mathbf{C}}(\mathbf{1})$.

Seja $c = (c_{11}, \ldots, c_{1m_1}, \ldots, c_{s1}, \ldots, c_{sm_s})$ um elemento de $Stab_C(1)$. A relação $ca = ac$ é traduzida como

$$c_{jk} a^{i_{jk}} = a^{i_{jk}} c_{j(k)^{\sigma_j}},\ \ j = 1, \ldots, s\ ,\ \ k = 1, \ldots, m_j.$$

Com estas relações, obtemos

$$Stab_C(1) = \mathbf{C_1} \times \cdots \times \mathbf{C_s},$$

onde $\mathbf{C_1}, \ldots, \mathbf{C_s}$ são respectivamente os conjuntos

$$\{(c_{11}, (c_{11})^{a^{i_{11}}}, (c_{11})^{a^{i_{11}+i_{12}}}, \ldots, (c_{11})^{a^{i_{11}+\cdots+i_{1,m_1-1}}}) \mid c_{11} \in C(a^{i_{11}+\cdots+i_{1m_1}})\},$$

$$\vdots$$

$$\{(c_{s1}, (c_{s1})^{a^{i_{s1}}}, (c_{s1})^{a^{i_{s1}+i_{s2}}}, \ldots, (c_{s1})^{a^{i_{s1}+\cdots+i_{s,m_s-1}}}) \mid c_{s1} \in C(a^{i_{s1}+\cdots+i_{sm_s}})\}.$$

Etapa 3. Cálculo de $\mathrm{D_0}$.

Seja $d = (d_{10}, \ldots, d_{1,m_1-1}, \ldots, d_{s0}, \ldots, d_{s,m_s-1})\sigma \in D_0$. Identifique

$$11 := \mathbf{0}, 12 := \mathbf{1}, \ldots, 1m_1 := \mathbf{m_1 - 1}, 21 := \mathbf{m_1}, \ldots, sm_s := \mathbf{m - 1}.$$

A relação $da = ad$ é equivalente à

$$d_j a_{j^\sigma} = a_j d_{j^\sigma}, j = \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{m - 1}.$$

Com estas relações, calculamos o grupo D_0.

Seja $a = (a_{(1)}, a_{(1)}, \ldots, a_{(s)})\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_s \in Aut(\mathcal{T}_m)$, onde

$$a_{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im_i}),\ \ i = 1, \ldots, s\ \text{ e}$$

$$\sigma_1 = (0\,, \ldots, m_1 - 1),\ \ \sigma_2 = (m_1\,, \ldots, m_1 + m_2 - 1), \ldots,$$
$$\sigma_s = (m_1 + \cdots + m_{s-1}\,, \ldots, m-1).$$

Defina

$$g = (g_{(1)}, g_{(1)}, \dots, g_{(s)}) \text{ com}$$
$$g_{(i)} = (a_{i1}, e, (a_{i2})^{-1}, (a_{i2}a_{i3})^{-1}, \dots, (a_{i2}\dots a_{im_{i-1}})^{-1}).$$

Então, $a^g = b$, onde $b = (b_{(1)}, b_{(2)}, \dots, b_{(s)})\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_s$, com $b_{(i)} = (1, 1, \dots, 1, c_i)$, e $c_i = a_{i2}a_{i3}\cdots a_{i,m_{i-1}}a_{i1}$.
Caso $a_{(k)} = (a^{i_{k1}}, \dots, a^{i_{km_k}})$, $k = 1, \dots, s$, então

$$g_{(k)} = (a_{i1}, e, (a_{i2})^{-1}, (a_{i2}a_{i3})^{-1}, \dots, (a_{i2}\dots a_{im_{i-1}})^{-1}).$$

Seja $j_k = i_{k1} + i_{k2} + \cdots + i_{km_k}$, $k = 1, \dots, s$, pela etapa 2 do procedimento

$$Stab_{C(b)} = C(a^{j_1})^{x_1} \times C(a^{j_2})^{x_2} \times \cdots \times C(a^{j_s})^{x_s},$$

$$Stab_{C(a)}(1) = \big(Stab_{C(b)}(1)\big)^{g^{-1}}.$$

No caso transitivo, $s = 1$, $C(a) = \big(C(a^{j_1})^{x_1}\big)^{g^{-1}}\langle a\rangle$.

3.4.2 Conjugação

O objetivo desta sessão é apresentar a demostração de um resultado (Lema 3.4.4) dado por P. W. Gawron, V. V. Nekrashevych & V. I. Sushchansky, [21]. Nesta sessão, a noção do tipo-orbital de um automorfismo é diferente do que vínhamos usando, ela corresponde a um grafo.

Sejam T uma árvore (possivelmente com várias raízes e não necessariamente regular) e $G \leqslant Aut(T)$ um grupo de automorfismos de T. Denotamos o conjunto de órbitas da ação de G nos vértices V da árvore por $\overline{V} = V/G$ e o conjunto das órbitas da ação de G nas arestas E da árvore por $\overline{E} = E/G$.

O *grafo orbital* T/G é o grafo no qual $\overline{V}$ é o conjunto de vértices, $\overline{E}$ é o conjunto de arestas e dois vértices $\bar{x}$ e $\bar{y}$ estão conectados por uma aresta $\bar{e}$ se e somente se, existem dois vértices $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$ tais que $\{x, y\} \in \bar{e}$.

Seja $u \in Aut(T)$. O grafo orbital de um grupo cíclico gerado pelo automorfismo u será denotado por T_u, o *grafo orbital do automorfismo* u.

Definição 3.4.1. *Seja T uma árvore uni-raiz. O tipo-orbital do automorfismo $u \in Aut(T)$ é o grafo orbital T_u com vértices indexados por inteiros positivos iguais a cardinalidade das órbitas correspondentes.*

Definição 3.4.2. *Dois tipos orbitais Γ_1 e Γ_2 são ditos ser equivalentes se eles são isomorfos como árvores raizes indexadas, i.e. se existe um isomorfismo entre as árvores Γ_1 e Γ_2 preservando os índices dos vértices.*

Teorema 3.4.3. *(P. W. Gawron, V. V. Nekrashevych & V. I. Sushchansky, [21]) Dois automorfismos da árvore uni-raiz T são conjugados no grupo $Aut(T)$ se, e somente se, seus tipos orbitais são equivalentes.*

Lema 3.4.4. *Seja $a \in A \leqslant Aut\,(\mathcal{T}_m)$ e ξ uma unidade no anel $\mathbb{Z}_n$, onde n é o expoente do grupo P (o grupo de permutação induzido por A). Então a^ξ é conjugado à a por algum $g \in Aut\,(\mathcal{T}_m)$.*

Demonstração. Seja a um elemento de $Aut\,(\mathcal{T}_m)$. O tipo-orbital de a é o grafo rotulado, no qual os vértices são as órbitas de a em Y^*; toda órbita é rotulada pela sua cardinalidade e conectamos duas órbitas $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ por uma aresta, se existirem vértices $v_1 \in \mathcal{O}_1$ e $v_2 \in \mathcal{O}_2$, que são adjacentes na árvore $\mathcal{T}_m$. Então dois automorfismos de $\mathcal{A}_m$ são conjugados se e somente se, seus tipos orbitais são isomorfos como grafos rotulados.

Seja $\xi = \sum_{i\geq 0} j_i n^i$ um elemento de $\mathbb{Z}_n$. Definimos α^ξ pelo produto

$$\cdots \alpha^{j_2 n^2} \alpha^{j_1 n} \alpha^{j_0}.$$

Se ξ é uma unidade, segue que o tipo-orbital de a^ξ é isomorfo ao tipo-orbital de a e assim $a^\xi = a^g$ para algum $g \in \mathcal{A}_m$. □

3.4.3 Exemplos

A seguir vamos descrever, de maneira recursiva, o centralizador de um grupo cíclico fechado por estado de $\mathcal{A}_4$. A descrição se baseia em quatro casos, os grupos de tipo-orbital (4), $(2,2)$, $(2,1,1)$ e $(3,1)$. Para isso usaremos o Lema 3.4.4. O primeiro tipo (4), ou seja, a representação é transitiva, foi considerada por Brunner-Sidki [5], página 15.

A **cíclico de tipo-orbital** $(2,2)$

Seja A um grupo cíclico fechado por estado de tipo-orbital $(2,2)$. Então o alfabeto $Y = \{0,1,2,3\}$ é união de duas A-órbitas $O_{(1)} = \{0,1\}, O_{(2)} = \{2,3\}$. Como o grupo A é cíclico fechado por estado, existem inteiros i_1, i_2, i_3, i_4 tais que A é gerado por

$$a = \left(a^{i_1}, a^{i_2}, a^{i_3}, a^{i_4}\right)(0\,1)\,(2\,3)\,.$$

Seguindo a notação anterior,

$$P = \langle (0\,1)\,(2\,3)\rangle\,, P_{(1)} = \langle (0\,1)\rangle\,, P_{(2)} = \langle (2\,3)\rangle\,.$$

$$\begin{aligned} A_{(1)} &= \left\langle \left(a^{i_1}, a^{i_2}, e, e\right)(0\,1) \right\rangle, A_{(2)} = \left\langle \left(e, e, a^{i_3}, a^{i_4}\right)(2\,3) \right\rangle, \\ B &= A_{(1)} A_{(2)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$C_{Sym(4)}(P) = P_{(1)} P_{(2)} S, \text{ onde } S = \langle (0\,2)(1\,3) \rangle,$$

$$\begin{aligned} C(A) &= Stab_{C(A)} B(1) \ \ \langle d \rangle, \text{ onde} \\ d &= (d_1, d_2, d_3, d_4)\, r \text{ e } r \in \langle (0\,2)(1\,3) \rangle. \end{aligned}$$

Cálculo de $\mathbf{Stab_{C(A)}(1)}$ e d.

Seja $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$. Então $c \in C(A)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} (c_1, c_2)\left(a^{i_1}, a^{i_2}\right) &= \left(a^{i_1}, a^{i_2}\right)(c_2, c_1), \\ (c_3, c_4)\left(a^{i_3}, a^{i_4}\right) &= \left(a^{i_3}, a^{i_4}\right)(c_2, c_1); \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} c_2 &= (c_1)^{a^{i_1}}, c_1 \in C\left(a^{i_1+i_2}\right), \\ c_4 &= (c_3)^{a^{i_3}}, c_3 \in C\left(a^{i_3+i_4}.\right) \end{aligned}$$

Denote $j_1 = i_1 + i_2$, $j_3 = i_3 + i_4$. Então,

$$Stab_{C(A)}(1) = \left\{ \left(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}, c_3, (c_3)^{a^{i_3}}\right) \mid c_1 \in C\left(a^{j_1}\right), c_3 \in C\left(a^{j_3}\right) \right\};$$

assim,

$$Stab_{C(A)}(1) = \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_3$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \left\{ \left(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}\right) \mid c_1 \in C\left(a^{j_1}\right) \right\}, \\ \mathbf{C}_3 &= \left\{ \left(c_3, (c_3)^{a^{i_3}}\right) \mid c_3 \in C\left(a^{j_3}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Logo, o problema de descrever $Stab_{C(A)}(1)$ se reduz a descrever $C(a^{j_1})$ e $C(a^{j_3})$.

Forma de d.

Suponha que $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)(0\,2)(1\,3) \in C(A)$. Então $da = ad$ nos dá

$$\begin{aligned} d_2 &= a^{-i_1} d_1 a^{i_3}, \ \left(a^{j_1}\right)^{d_1} = a^{j_3} \\ d_4 &= a^{-i_3} d_3 a^{i_1}, \ \left(a^{j_3}\right)^{d_3} = a^{j_1}. \end{aligned}$$

Combinando a segunda e a quarta equação obtemos que d_1d_3 comuta com a^{j_1}. Escolha $d_1d_3 = e$; isto é, $d_3 = d_1^{-1}$. Com esta escolha, temos

$$d = \left(d_1,\ a^{-i_1}d_1a^{i_3},\ d_1^{-1},\ a^{-i_3}d_1^{-1}a^{i_1}\right)(0\,2)\,(1\,3)\,,$$

onde $\left(a^{j_1}\right)^{d_1} = a^{j_3}$. Assim, a existência de d é reduzida a quando a^{j_1} é conjugado à a^{j_3}.

Fatore $j_1 = 2^{k_1}l_1$, $j_3 = 2^{k_3}l_3$, onde $k_1, k_3 \geq 0$ e l_1, l_3 são inteiros ímpares. Estipulamos que k_i é infinito se, e somente se, $j_i = 0$. Então a^{j_1} é conjugado a a^{j_3} se, e somente se, $k_1 = k_3$.

Descrição de $\mathbf{C}\left(\mathbf{a}^{\mathbf{j_1}}\right), \mathbf{C}\left(\mathbf{a}^{\mathbf{j_3}}\right)$.

Pelo Lema 3.4.4 existem $g_1, g_3 \in Aut\left(\mathcal{T}_4\right)$ tais que $a^{l_1} = a^{g_1}, a^{l_3} = a^{g_3}$ e $g = g_1^{-1}g_3$. Note que

$$\begin{aligned} a^{j_1} &= \left(a^{l_1}\right)^{2^{k_1}} = \left(a^{g_1}\right)^{2^{k_1}} = a^{2^{k_1}g_1}, \\ a^{j_3} &= \left(a^{l_3}\right)^{2^{k_3}} = \left(a^{g_3}\right)^{2^{k_3}} = a^{2^{k_3}g_3}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(a^{j_1}, a^{j_1}, a^{j_3}, a^{j_3}\right), \\ &= \left(a^{2^{k_1}g_1}, a^{2^{k_1}g_1}, a^{2^{k_3}g_3}, a^{2^{k_3}g_3}\right) \end{aligned}$$

e

$$C\left(a^2\right) = U\langle(0\,1)\,,(2\,3)\rangle\,\langle w^\eta\rangle\,,$$

onde

$$U = C\left(a^{2^{k_1}}\right)^{g_1} \times C\left(a^{2^{k_1}}\right)^{g_1} \times C\left(a^{2^{k_3}}\right)^{g_3} \times C\left(a^{2^{k_3}}\right)^{g_3},$$

$w = \left(g, g, g^{-1}, g^{-1}\right)(1,3)\,(2,4)$ e $\eta = 0$ se $k_1 \neq k_3$, $\eta = 1$ se $k_1 = k_3$.

Vamos considerar três situações: j_1, j_3 pares; j_1, j_3 ímpares e j_1 ímpar, j_3 par.

(i) $\mathbf{j_1, j_3}$ **pares.** Neste caso, sucessivas substituições de potências pares de a na expressão acima, mostra que $a^2 \in \cap_{i\geq 1}Stab(i)$ e portanto, $a^2 = e$ e $j_1 = j_3 = 0$, isto é, $i_2 = -i_1, i_4 = -i_3$; assim,

$$a = \left(a^{i_1}, a^{-i_1}, a^{i_3}, a^{-i_3}\right)(0\,1)\,(2\,3)\,.$$

Logo,

$$B = \left\langle \left(a^{i_1}, a^{-i_1}, e, e\right)(0\,1), \left(e, e, a^{i_3}, a^{-i_3}\right)(2\,3)\right\rangle,$$

Além disso,

$$Stab_{C(A)}(1) = \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_3,$$

$$\mathbf{C}_1 = \left\{\left(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}\right) \mid c_1 \in \mathcal{A}_4\right\},$$
$$\mathbf{C}_3 = \left\{\left(c_3, (c_3)^{a^{i_3}}\right) \mid c_3 \in \mathcal{A}_4\right\},$$

Então,

$$C(A) = Stab_{C(A)}(1)\, B\, \langle d \rangle,$$

onde

$$B = \left\langle \left(a^{i_1}, a^{-i_1}, e, e\right)(0\,1), \left(e, e, a^{i_3}, a^{-i_3}\right)(2\,3)\right\rangle,$$

$$Stab_A(1) = \left\{\left(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}, c_3, (c_3)^{a^{i_3}}\right) \mid c_1, c_3 \in \mathcal{A}_4\right\}$$

e como $j_1 = j_3 = 0$, podemos escolher $d_1 = e$ e assim

$$d = \left(e,\ a^{-i_1+i_3},\ e,\ a^{i_1-i_3}\right)(0\,2)(1\,3).$$

(ii) $\mathbf{j_1}, \mathbf{j_3}$ **ímpares.** Neste caso temos $a^{j_1} = a^{g_1}, a^{j_3} = a^{g_3}$ e relembre que $g = g_1^{-1} g_3$.

Então

$$C(A) = Stab_{C(A)}(1)\, B\, \langle d \rangle,$$
$$B = \left\langle \left(a^{i_1}, a^{i_2}, e, e\right)(0\,1), \left(e, e, a^{i_3}, a^{i_4}\right)(2\,3)\right\rangle,$$
$$Stab_{C(A)}(1) = \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_3,$$

$$\mathbf{C}_1 = \left\{\left(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}\right) \mid c_1 \in C(a)^{g_1}\right\},$$
$$\mathbf{C}_3 = \left\{\left(c_3, (c_3)^{a^{i_3}}\right) \mid c_3 \in C(a)^{g_3}\right\}$$

e

$$d = \left(d_1,\ a^{-i_1} d_1 a^{i_3},\ d_1^{-1},\ a^{-i_3} d_1^{-1} a^{i_1}\right)(0\,2)(1\,3)$$

onde $\left(a^{j_1}\right)^{d_1} = a^{j_3}$; podemos escolher $d_1 = g$ e assim,

$$d = \left(g,\ a^{-i_1} g a^{i_3},\ g^{-1},\ a^{-i_3} g^{-1} a^{i_1}\right)(0\,2)(1\,3).$$

(iii) **$\mathbf{j_1}$ ímpar, $\mathbf{j_3}$ par.** Aqui, $a^{j_1} = a^{g_1}, a^{j_3} = a^{2^{k_3}g_3}$, onde $k_3 \geq 1$.

Como a^{j_1} não é conjugado à a^{j_3}, $d = e$ e assim,

$$C(A) = Stab_{C(A)}(1)\, B.$$

$$B = \left\langle \left(a^{i_1}, a^{i_2}, e, e\right)(0\,1), \left(e, e, a^{i_3}, a^{i_4}\right)(2\,3) \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} Stab_{C(A)}(1) &= \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_3, \\ \mathbf{C}_1 &= \left\{ \left(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}\right) \mid c_1 \in C(a)^{g_1} \right\}, \\ \mathbf{C}_3 &= \left\{ \left(c_3, (c_3)^{a^{i_3}}\right) \mid c_3 \in C\left(a^{2^{k_3}}\right)^{g_3} \right\}. \end{aligned}$$

A cíclico de tipo-orbital $(2, 1, 1)$

Seja A um grupo cíclico fechado por estado de tipo-orital $(2, 1, 1)$, com órbitas $O_{(1)} = \{0, 1\}$, $O_{(2)} = \{2\}$ e $O_{(3)} = \{3\}$. Então A é da forma

$$A = \langle a = (a^{i_1}, a^{i_2}, a^{i_3}, a^{i_4})(0\,1)(2)(3)\rangle,$$

onde i_1, i_2, i_3, i_4 são números inteiros. Vamos determinar o centralizador $C = C(A)$ no grupo $Aut(\mathcal{T}_m)$.

Sejam $P = P_{(1)} = \langle(0\,1)\rangle$, $P_{(2)} = P_{(3)} = 1$. Então

$$C_{Sym(4)}(P) = P_{(1)}P_{(2)}P_{(3)}S = PS,$$

onde $S = \langle(2\,3)\rangle$.

Sejam

$$A_{(1)} = \langle(a^{i_1}, a^{i_2}, e, e)(0\,1)\rangle \ , \ A_{(2)} = \langle(e, e, a^{i_3}, 1)\rangle,$$

$$A_{(3)} = \langle(e, e, e, a^{i_4})\rangle \ , \ B = A_{(1)}A_{(2)}A_{(3)},$$

segue que $C(A) = BStab_C(1)\langle d\rangle$, onde $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)r$, para algum r em $\langle(2\,3)\rangle$.

Cálculo de $\mathbf{Stab_{C(A)}(1)}$ e d.

Se $r = 1$, então $d \in Stab_C(1)$ e $C(A) = BStab_C(1)$. Suponha então que $r = (2\,3)$; assim, $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)(2\,3)$. A relação $da = ad$ equivale à

$$d_1 a^{i_1} = a^{i_1} d_2 \ , \ d_2 a^{i_2} = a^{i_2} d_1$$
$$a^{i_4} = (a^{i_3})^{d_3} \ , \ a^{i_4} = (a^{i_3})^{d_4^{-1}}.$$

Estas equações são equivalentes à

$$d_2 = d_1^{\,a^{i_1}} \ , \ d_1 \in C(a^{i_1+i_2})$$

$$(a^{i_3})^{d_3} = (a^{i_4}) \ , \ d_3 d_4 \in C(a^{i_3}).$$

Da terceira equação concluímos que não há solução se a^{i_3} e a^{i_4} não forem conjugados. Por outro lado, se a^{i_3} e a^{i_4} são conjugados então, módulo $Stab_C(1)$, escolhemos um conjugador, que seria d_3; $d_4 = {d_3}^{-1}$,$d_1 = d_2 = e$. Assim, quando d existe, podemos tomá-lo sendo

$$d = (e, e, d_3, {d_3}^{-1})(2\,3).$$

Fatore $i_3 = 2^{k_3} l_3$, $i_4 = 2^{k_4} l_4$, onde l_3 e l_4 são ímpares. Então a^{i_3} é conjugado a a^{i_4} se, e somente se, $k_3 = k_4$.

Seja $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in Stab_C(1)$. Então a relação $ac = ca$ nos dá:

$$a^{i_1} c_2 = c_1 a^{i_1} \ , \ a^{i_2} c_1 = c_2 a^{i_2}$$
$$a^{i_3} c_3 = c_3 a^{i_3} \ , \ a^{i_4} c_4 = c_4 a^{i_4}.$$

Logo, $c_2 = (c_1)^{a^{i_1}}$, $c_1 \in C(a^{j_1})$, $c_3 \in C(a^{i_3})$, $c_4 \in C(a^{i_4})$, onde $j_1 = i_1 + i_2$. Assim,

$$Stab_C(1) = \left\{(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}, c_3, c_4) \mid c_1 \in C(a^{j_1}), c_3 \in C(a^{i_3}), c_4 \in C(a^{i_4})\right\}.$$

Podemos reescrever $Stab_C(1)$ como $\mathbf{C_1} \times \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_3}$, onde

$$\mathbf{C_1} = \{(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}) \mid c_1 \in C(a^{j_1})\},$$
$$\mathbf{C_2} = C(a^{i_3}) \ , \ \mathbf{C_3} = C(a^{i_4}).$$

Descrição de $\mathbf{C(a^{j_1})}$, $\mathbf{C(a^{i_3})}$ e $\mathbf{C(a^{i_4})}$.

Note que $a^2 = (a^{j_1}, a^{j_1}, a^{2i_3}, a^{2i_4})$. Escreva $j_1 = 2^{k_1} l_1$, onde l_1 é um número ímpar.

Pelo Lema 3.4.4 existem $g_1, g_3, g_4 \in \mathcal{A}_4$ tais que $a^{l_1} = a^{g_1}$, $a^{l_3} = a^{g_3}$ e $a^{l_4} = a^{g_4}$. Então

$$a^{j_1} = a^{2k_1 l_1} = (a^{l_1})^{2^{k_1}} = (a^{2^{k_1}})^{g_1}.$$

Do mesmo modo, $a^{i_3} = (a^{2^{k_3}})^{g_3}$ e $a^{i_4} = (a^{2^{k_4}})^{g_4}$.

Logo,

$$C(a^2) = \left(C(a^{2^{k_1}})^{g_1}, C(a^{2^{k_1}})^{g_1}, C(a^{2^{k_3+1}})^{g_3}, C(a^{2^{k_4+1}})^{g_4}\right)\langle(0\,1)\rangle\langle d\rangle.$$

(i) $\mathbf{a^{i_3}}$ **conjugado à** $\mathbf{a^{i_4}}$. Neste caso, $k_3 = k_4$. Defina $g = {g_3}^{-1}g_4$. Então

$$(a^{i_3})^g = (a^{i_3})^{{g_3}^{-1}g_4} = (a^{2^{k_3}})^{g_4} = (a^{2^{k_4}})^{g_4} = a^{i_4}.$$

Assim, podemos escolher $d_3 = g$ e $d = (e, e, g, g^{-1})(3\,, 4)$. Aqui temos

$$\mathbf{C_1} = \left\{(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}) \mid c_1 \in C(a^{2^{k_1}})^{g_1}\right\},$$

$$\mathbf{C_2} = C(a^{2^{k_3}})^{g_3} \;\;,\;\; \mathbf{C_3} = C(a^{2^{k_4}})^{g_4},$$
$$B = \langle (a^{i_1}, a^{i_2}, e, e)(0\,1), (e, e, a^{i_3}, e), (e, e, e, a^{i_4})\rangle.$$

Basta substituir as informações em $C(A) = BStab_C(1)\langle d\rangle$, onde

$$Stab_C(1) = \mathbf{C_1} \times \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_3}.$$

(ii) $\mathbf{a^{i_3}}$ **não é conjugado à** $\mathbf{a^{i_4}}$. Aqui, d não existe e assim $C(A) = BStab_C(1)$, onde

$$\mathbf{C_1} = \left\{(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}) \mid c_1 \in C(a^{2^{k_1}})^{g_1}\right\},$$
$$\mathbf{C_2} = C(a^{2^{k_3}})^{g_3} \;\;,\;\; \mathbf{C_3} = C(a^{2^{k_4}})^{g_4},$$
$$B = \langle (a^{i_1}, a^{i_2}, e, e)(0\,1),\; (e, e, a^{i_3}, e),\; (e, e, e, a^{i_4})\rangle.$$

A **cíclico de tipo-orbital** $(3, 1)$

Seja A um grupo cíclico fechado por estado de tipo-orbital $(3, 1)$ com órbitas $O_{(1)} = \{0, 1, 2\}$ e $O_{(2)} = \{3\}$. Então A é da forma

$$A = \langle a = (a^{i_1}, a^{i_2}, a^{i_3}, a^{i_4})(0\,1\,2)(3)\rangle,$$

onde i_1, i_2, i_3, i_4 são números inteiros. Vamos determinar o centralizador $C = C(A)$ no grupo $Aut(\mathcal{T}_4)$.

Sejam $P = P_{(1)} = \langle(0\,1\,2)\rangle$, $P_{(2)} = 1$. Então $C_{Sym(4)}(P) = P$. Sejam

$$A_{(1)} = \langle(a^{i_1}, a^{i_2}, a^{i_3}, e)(0\,1\,2)\rangle\ ,\ A_{(2)} = \langle(e, e, e, a^{i_4})\rangle\ ,\ B = A_{(1)}A_{(2)},$$

segue que $C(A) = Stab_C(1)B$.
Cálculo de $\mathbf{Stab_{C(A)}\,(1)}$. Seja $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in Stab_C(1)$. Então a relação $ac = ca$ nos dá:

$$c_1a^{i_1} = a^{i_1}c_2\ ,\ c_2a^{i_2} = a^{i_2}c_3$$
$$c_3a^{i_3} = a^{i_3}c_1\ ,\ c_4a^{i_4} = a^{i_4}c_4$$

Estas equações são equivalentes à

$$c_2 = {c_1}^{a^{i_1}}\ ,\ c_3 = {c_1}^{a^{i_1+i_2}}$$
$$c_1 \in C(a^j)\ ,\ c_4 \in C(a^{i_4}),$$

onde $j_4 = i_1 + i_2 + i_3$.
Assim,

$$Stab_C(1) = \left\{(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}, (c_1)^{a^{i_1+i_2}}, c_4) \mid c_1 \in C(a^{j_4}), c_4 \in C(a^{i_4})\right\}.$$

Podemos reescrever $Stab_C(1)$ como $\mathbf{C_1} \times \mathbf{C_2}$, onde

$$\mathbf{C_1} = \{(c_1, (c_1)^{a^{i_1}}, (c_1)^{a^{i_1+i_2}}) \mid c_1 \in C(a^{j_4})\}\ ,\ \mathbf{C_2} = C(a^{i_4}).$$

Vamos aplicar o procedimento acima para calcular o centralizador da máquina de adição dupla.

Exemplo 3.4.5. *Seja $a = (e, a, e, a)(1\,2)(3\,4) \in \mathcal{A}_4$ a máquina de adição dupla. Considere A o grupo cíclico gerado por a. Neste caso, $j_1 = j_3 = 1$ e assim, podemos tomar os conjugadores $g_1 = g_3 = e$. Usando (ii) do caso tipo-orbital (2 ,2), obtemos:*

$$Stab_C(1) = C^{x_1}C^{x_2}, B = A_{(1)}A_{(2)}, D_0 = S = Sym(2).$$

$$\begin{aligned} C &= Stab_C(1)BD_0 \\ &= C^{x_1}C^{x_2}BS \\ &= (Stab_C(1)BS)^{x_1}(Stab_C(1)BS)^{x_2}BS \\ &= ((C^{x_1}C^{x_2})BS)^{x_1}(C^{x_1}C^{x_2})BS)^{x_2}BS \\ &= C^{{x_1}^2}C^{x_2x_1}C^{x_1x_2}C^{{x_2}^2}B^{x_1}B^{x_2}BS^{x_1}S^{x_2}S \end{aligned}$$

No limite, obtemos $C = \overline{\Delta(B)} \cdot \overline{\Delta(S)}$. Observe que $\overline{\Delta(S)} \simeq \mathcal{A}_2$.

O grupo A foi estudado por A. Berlatto e S. Sidki nas sessões 2.1 e 5.4 de [1]. Foi mostrado que existe, em $C(A)$, um conjunto de subgrupos G_n $(n \geq 0)$, tal que cada G_n é $(n+1)$-gerado, metabeliano, elemento de $\mathfrak{T}_{n+1}$.

CAPÍTULO 4

Grupos autossimilares intransitivos do tipo Lamplighter

O grupo clássico do tipo Lamplighter é definido por $C_2 \wr \mathbb{Z}$, onde $C_2 = \{e, a\}$ é o grupo cíclico de ordem 2. A terminologia é devida a seguinte interpretação. Uma estrada (possivelmente infinita) é iluminada por lâmpadas, identificadas com os elementos de $\oplus_{\mathbb{Z}} C_2$, que podem estar ou não ligadas. O elemento $e \in C_2$ é interpretado como lâmpada desligada e $a \in C_2$ é interpretado como lâmpada ligada. Apenas um número finito de lâmpadas estão ligadas (produzindo um elemento em $\oplus_{\mathbb{Z}} C_2$) e um lampião fica diante de uma lâmpada (produzindo um elemento em $\mathbb{Z}$). Note que quando todas as lâmpadas estão desligadas e o lampião encontra-se posicionado diante da lâmpada identificada com elemento neutro de $\mathbb{Z}$, produzimos o elemento neutro de $C_2 \wr \mathbb{Z}$.

Vamos nos referir aos produtos entrelaçados $A \wr B$, com A e B grupos abelianos finitamente gerados, como grupos do tipo Lamplighter generalizados. Neste capítulo, estudaremos representações autossimilares para os grupos do tipo Lamplighter generalizados $A \wr \mathbb{Z}^d$, onde A é um grupo abeliano finitamente gerado e d é um inteiro positivo e para os grupos $C_p \wr \mathbb{Z}^2$, onde p é um número primo.

4.1 Representação autossimilar para $A \wr \mathbb{Z}^d$

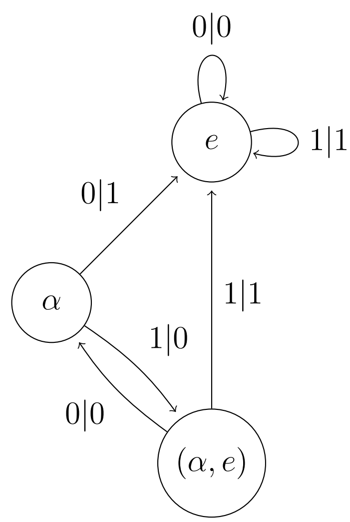
A. Dantas e S. Sidki [3], mostraram que o grupo $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ não admite representação autossimilar transitiva, qualquer que seja o grau da árvore. Mostraremos, no entanto, que $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ admite representação fechada por estado de grau 3, para isso usaremos a operação tree-wreathing, definida por A. Brunner e S. Sidki, [7].

4.1.1 O caso $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$

Considere $\alpha = (e, (\alpha, e))(0\,1) \in \mathcal{A}_2$ e H um grupo agindo em $\mathcal{A}_2$. Para cada $h \in H$ defina recursivamente o automorfismo $\tilde{h} = ((\tilde{h}, h), e)$. Então

$$\tilde{H} = \{\tilde{h} : h \in H\}$$

é um grupo de automorfismos da árvore binária que é isomorfo a H e é sempre finito por estado quando H o é.



Autômata de α

Definição 4.1.1. *Seja G o grupo gerado por $\tilde{H}$ e α. O grupo G é dito ser H tree-wreathed pelo grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$ e denotado por $G = H \bar{\wr} \mathbb{Z}$.*

Defina o subgrupo N de $G = H \bar{\wr} \mathbb{Z}$ por

$$N = \langle [\tilde{H}^{\alpha^i}, \tilde{H}^{\alpha^j}] | 0 \leq i < j \rangle.$$

Em [7], A. Brunner e S. Sidki estabeleceram o seguinte resultado.

Teorema 4.1.2. *(Brunner & Sidki, [7]) Seja $G = H \bar{\wr} \mathbb{Z}$. Então o grupo quociente G/N é isomorfo ao produto entrelaçado restrito $H \wr \mathbb{Z}$.*

Grupos autossimilares são residualmente finitos. A dicotomia de Gruenberg sobre produto entrelaçado residualmente finito [13], nos diz que o produto $G = B \wr X$ é residualmente finito se, e somente se, B e X são residualmente finitos e B é abeliano ou X é finito.

Em [3], A. Dantas e S. Sidki investigaram produtos entrelaçados autossimilares de grupos abelianos e obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 4.1.3 (Dantas & Sidki, [3]). *Seja $G = B \wr X$ um produto entrelaçado autossimilar transitivo de grupos abelianos. Se X é livre de torção então B é um grupo de torção de expoente finito.*

Observe que este resultado satisfaz a dicotomia de Gruenberg. Como aplicação desse teorema temos que o grupo $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ não admite representação autossimilar transitiva. Em contraste, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 4.1.4. *O grupo $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ é fechado por estado de grau 3. Mais que isso, $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ é um autômata-grupo 3-gerado sobre um alfabeto de 3 letras.*

Demonstração. Seja H um subgrupo abeliano de $\mathcal{A}_2$. Então,

$$N = \langle [\tilde{H}^{\alpha^i}, \tilde{H}^{\alpha^j}] | 0 \leq i < j \rangle$$

é trivial. Pelo Teorema 4.1.2, se $\alpha = ((e, e), (\alpha, e))(0\,1)$, então $\langle \tilde{H}, \alpha \rangle \simeq \tilde{H} \wr \langle \alpha \rangle$, onde

$$\tilde{H} = \{\tilde{h} = ((\tilde{h}, h), (e, e)) \mid h \in H\}.$$

Note que $\tilde{H} \simeq H$. Considere $H = \langle \alpha \rangle$, assim $\tilde{H} \wr \langle \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} \rangle \wr \langle \alpha \rangle \simeq \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$. Como

$$\langle \tilde{\alpha} \rangle \wr \langle \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} = ((\tilde{\alpha}, \alpha), (e, e)), \alpha = ((e, e), (\alpha, e))(0\,1) \rangle,$$

segue que $\langle \tilde{\alpha} \rangle \wr \langle \alpha \rangle$ é fechado por estado no nível 2.

Agora, observe que se $\bar{\sigma}(\alpha)$ é o automorfismo $((\sigma_0(\alpha), \sigma_1(\alpha))\sigma_\phi(\alpha)$ e indexando $00 :=$ **0**, $01 :=$ **1**, $10 :=$ **2**, e $11 :=$ **3**, temos que $\bar{\sigma}(\alpha)$ pode ser visto como a permutação $\sigma(\alpha)$ do conjunto $\{$**0,1,2,3**$\}$ e cada α_{ij} pode ser visto como automorfismo α_{i+2j} da árvore $\mathcal{T}_4$. Então o homomorfismo

$$\Psi : G \to \mathcal{A}_4$$

$$\alpha \mapsto (\alpha_{\mathbf{0}}, \alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \alpha_{\mathbf{3}})\sigma(\alpha)$$

é tal que $G \simeq G^\Psi$ e G^Ψ é um grupo fechado por estado de grau 4.
Portanto,

$$(\langle \tilde{\alpha} \rangle \wr \langle \alpha \rangle)^\Psi = \langle \tilde{\alpha}^\Psi = (\tilde{\alpha}^\Psi, \alpha^\Psi, e, e), \alpha^\Psi = (e, e, \alpha^\Psi, e)(0\,2)(1\,3) \rangle \simeq \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$$

é fechado por estado de grau 4.

Finalmente, a aplicação

$$\alpha^\Psi \mapsto \alpha_1 = (e, \alpha_1, e)(0\,1)$$

$$\tilde{\alpha}^\Psi \mapsto \beta = (\beta, e, \alpha_1)$$

estende a um isomorfismo ϕ de

$$\langle \tilde{\alpha}^\Psi = (\tilde{\alpha}^\Psi, \alpha^\Psi, e, e), \alpha^\Psi = (e, e, \alpha^\Psi, e)(0\,2)(1\,3) \rangle$$

à

$$\langle \gamma = (\gamma, e, \beta), \beta = (e, \beta, e)(0\,1) \rangle.$$

Portanto $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ é fechado por estado de grau 3.

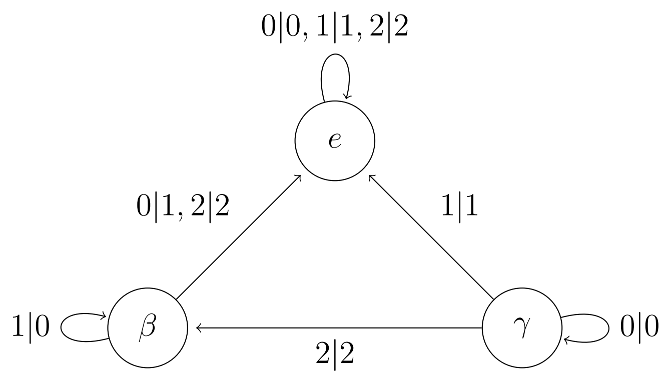


Diagrama de $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$

□

Corolário 4.1.5. *O grupo* $(\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}) \wr C_2$ *é um autômata-grupo de grau* 4*.*

Demonstração. Aplicando a Proposição 4.1.4 e o Teorema 2.2.2 (ii) obtemos:

$$(\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}) \wr C_2 \simeq \langle \sigma = (0\,2)(1\,3), \gamma = (\gamma, e, \alpha^\sigma, \alpha^\sigma), \alpha = (e, \alpha, e, e)(0\,1) \rangle;$$

ou seja, o grupo $(\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}) \wr C_2$ é gerado pelo autômata:

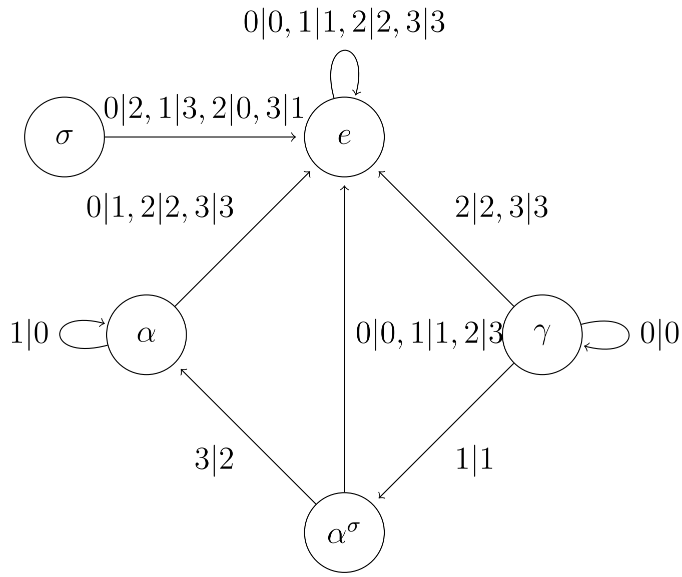


Diagrama de $(\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}) \wr C_2$

$\square$

Note que 3 é o menor grau para o qual $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ admite uma representação autossimilar. A. Woryna [9], questionou sobre a existência de um autômata de Mealy finito S de maneira que $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \simeq \langle S \rangle$. Com a proposição anterior respondemos positivamente essa questão.

Considere $G = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = \langle \gamma = (\gamma, e, \beta), \beta = (e, \beta, e)(0\,1) \rangle$. Então

$$Fix_G(0) = \langle \gamma^2, \beta^{\gamma^k}\ , k \geq 0 \rangle \text{ e } Fix_G(2) = \langle \gamma, \beta \rangle = G.$$

O conjunto $T_1 = \{e, \gamma\}$ é um transversal de $Fix_G(0)$ em G e assim, o índice de $Fix_G(0)$ em G é 2. Observe que

$$\gamma^{2n} = (\gamma^n, \gamma^n, e) \text{ e } \gamma^{2n+1} = (\gamma^n, \gamma^{n+1}, e)(0\,1),$$

assim,

$$\beta^{\gamma^{2n}} = (\beta^{\gamma^n}, e, e) \text{ e } \beta^{\gamma^{2n+1}} = (e, \beta^{\gamma^n}, \gamma).$$

Sejam π_0 e π_2 as projeções nas primeira e terceira coordenadas respectivamente, ou seja,

$$\begin{array}{rrcl} \pi_0: & Fix_G(0) & \to & G \\ & \beta^{\gamma^{2n}} & \mapsto & \beta^{\gamma^n} \\ & \beta^{\gamma^{2n+1}} & \mapsto & e \\ & \alpha^2 & \mapsto & \alpha \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} \pi_2: & Fix_G(2) & \to & G \\ & \beta & \mapsto & \gamma \\ & \gamma & \mapsto & e. \end{array}$$

Esses homomorfismos inspiraram a construção dos endomorfismos virtuais para o caso mais geral $G = \mathbb{Z}^l \wr \mathbb{Z}^d$, o qual veremos a seguir.

4.1.2 O caso geral

Sejam l e d inteiros positivos. Considere o grupo $G = \mathbb{Z}^l \wr \mathbb{Z}^d = \oplus_{x \in X} \mathbb{Z}^l \rtimes X$, onde $X = \mathbb{Z}^d = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle$. Então cada elemento de G é unicamente expresso como

$$a_1^{p_1(x_1,\ldots,x_d)} a_2^{p_2(x_1,\ldots,x_d)} \cdots a_l^{p_l(x_1,\ldots,x_d)} x_1^{s_1} \cdots x_d^{s_d},$$

onde $\mathbb{Z}^l = \langle a_1, \ldots, a_l \rangle$ e $p_i(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}\langle X \rangle$, $i = 1, \ldots, l$.

Proposição 4.1.6. *Seja $G = \mathbb{Z}^l \wr \mathbb{Z}^d$. Então G é um autômata-grupo de grau* 4.

Demonstração. Denotando $\mathbb{Z}^l$ por A e $\mathbb{Z}^d$ por X, podemos escrever o grupo G como o produto semi-direto $G = A^{\mathbb{Z}\langle X \rangle} \cdot X$.

Defina os seguintes subgrupos de G:

$$\begin{array}{rcl} H_1 & = & A^{\mathbb{Z}\langle X \rangle} \langle x_1^2, x_2, \ldots, x_d \rangle, \\ H_2 & = & H_3 = G, \end{array}$$

e observe que $\bigcap_{i=1}^3 H_i = H_1$.

Para $i = 1, 2, 3$, defina os homomorfismos $f_i : H_i \to G$ que estendem as aplicações:

$$\begin{array}{rcl} f_1 & : & x_1^2 \mapsto x_1,\ x_i \mapsto x_i\ (2 \leq i \leq d), \\ a_i^{x_1^{2n} q(x_2,x_3,\ldots,x_d)} & \mapsto & a_{i-1}^{x_1^n q(x_2,x_3,\ldots,x_d)},\ a_i^{x_1^{2n+1} q(x_2,x_3,\ldots,x_d)} \mapsto e\ ; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_2 & : & x_i \mapsto x_{i-1} \ (1 \leq i \leq d)\,, \\ a_i^{p(x_1,x_2,\ldots,x_d)} & \mapsto & a_i^{p(x_d,x_1,\ldots,x_{d-1})} \ (1 \leq i \leq l)\,; \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} f_3 & : & X \mapsto \{e\}\ , \\ a_1^{p(x_1,x_2,\ldots,x_d)} & \mapsto & x_1^{p(1,1,\ldots,1)}, \\ a_i^{p(x_1,x_2,\ldots,x_d)} & \mapsto & e \ (2 \leq i \leq l) \end{array}$$

Então $A^{\mathbb{Z}\langle X\rangle}\langle x_2,\ldots,x_d\rangle$ é o f_1-core de H_1, H_2 é o f_2-core de H_2 e H_3 é o f_3-core de H_3.

Seja K o **F**-core de **H**. Então $K \leq A^{\mathbb{Z}\langle X\rangle}\langle x_2,\ldots,x_d\rangle$ e aplicando f_2 temos que $K \leq A^{\mathbb{Z}\langle X\rangle}$.

Mostraremos que K é trivial. Suponha, por absurdo, que K é não trivial. Como K é normal em G, então $K_+ := K \cap A^{\mathbb{Z}[X]}$ é não trivial. Todo elemento h de K_+ é expresso unicamente da seguinte forma

$$h = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_l^{p_l},$$

onde $p_i = p_i(x_1,x_2,\ldots,x_d) \in \mathbb{Z}\,[X]$.
Reescrevendo $p_i(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ na forma

$$p_{i0}(x_2,\ldots,x_d) + \sum p_{i,2j}(x_2,\ldots,x_d)x_1^{2j} + \sum p_{i,2j+1}(x_2,\ldots,x_d)x_1^{2j+1},$$

observe que

$$h^{f_1} = a_l^{p_1'} a_1^{p_2'} \cdots a_l^{p_{l-1}'},$$

onde

$$p_i' = p_i'(x_1,x_2,\ldots,x_d) = p_{i0}(x_2,\ldots,x_d) + \sum p_{i,2j}(x_2,\ldots,x_d)x_1^{j};$$

$$h^{f_2} = a_1^{p_1''} a_2^{p_2''} \cdots a_l^{p_l''},$$

onde

$$p_i'' = p_i''(x_1,x_2,\ldots,x_d) = p_i(x_d,x_1,\ldots,x_{d-1});$$

e

$$h^{f_3} = x_1^{p_1(1,1,\ldots,1)}.$$

Defina $\delta_{x_j}(h)$ sendo o grau máximo em x_j do polinômio p_i para todo i. Se o grau máximo de todos os $\delta_{x_j}(h)$ acontece para $j = k$ então aplicando uma potência adequada de f_2 a h, podemos assumir que $j = 1$.
Escolha $h \in K_+$ tal que $h \neq e$ que envolve um número mínimo de variáveis do conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$.

(1) Suponha p_i é constante para todo i. Então existe j tal que $p_j \neq 0$. Aplicando f_3 a h obtemos que $x_1^{p_1} \neq e$ e $x_1^{p_1} \in K$, o que não pode ocorrer.

(2) Denote $\delta_{x_1}(h)$ por n, então $n \neq 0$.

(2.1) Suponha que n é par, $n = 2k$. Aplicando f_1 a h temos que $h' \neq e$ e $\delta_{x_1}(h') = k$, um absurdo.

(2.2) Suponha que n é ímpar, $n = 2k+1$. Conjugando h por x_1 obtemos

$$\begin{aligned} h' &= h^{x_1} = a_1^{p_1'} a_2^{p_2'} \cdots a_l^{p_l'} \in K_+, \\ p_i' &= p_i x_1,\ \delta_{x_1}(h') = 2k+2. \end{aligned}$$

Aplicando f_1 a h' temos que $h'^{f_1} = h'' \in K_+$ com $\delta_{x_1}(h'') = k+1$. Agora, $k+1 < 2k+1$, caso $k \neq 0$; assim, temos que $\delta_{x_1}(h) = 1$ e para todo i,

$$p_i = p_{i0} + p_{i1} x_1,$$

onde $p_{i0}, p_{i1} \in \mathbb{Z}[x_2, \dots, x_d]$. Então, como feito antes com $h' = h^{x_1}$ temos que $p_i' = p_{i0} x_1 + p_{i1} x_1^2$ e $h'^{f_1} = h'' = (a_1^{p_{11}} a_2^{p_{21}} \cdots a_l^{p_{l1}})^{x_1} \in K_+ \setminus \{e\}$. Como

$$h''' = (h'')^{x_1^{-1}} = a_1^{p_{11}} a_2^{p_{21}} \cdots a_l^{p_{l1}} \in K_+ \setminus \{e\}$$

e envolve um número menor de variáveis que h, obtemos uma contradição.

Uma representação fiel autossimilar para o grupo $G = \mathbb{Z}^l \wr \mathbb{Z}^d$ com respeito à tripla

$$((2,1,1), (H_1,\ H_2 = G, H_3 = G), \{f_1, f_2, f_3\})$$

e os transversais T_i de H_i em G definidos por

$$T_1 = \{e, x_1\}, T_2 = T_3 = \{e\},$$

é

$$G^{\varphi} = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_l \rangle \wr \langle \alpha_1, \dots, \alpha_d \rangle,$$

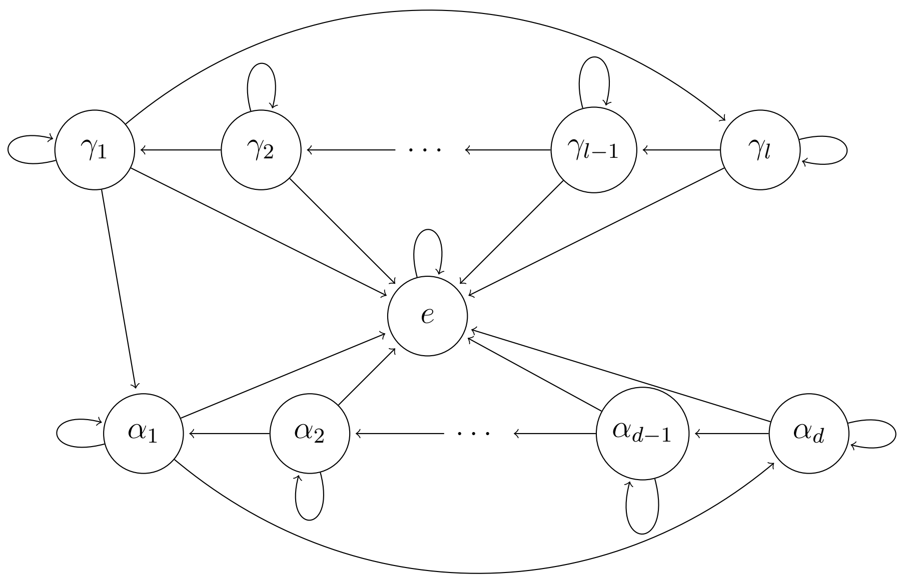
onde

$$\gamma_1 = (\gamma_l, e, \gamma_1, \alpha_1),\ \gamma_2 = (\gamma_1, e, \gamma_2, e), \ldots, \gamma_l = (\gamma_{l-1}, e, \gamma_l, e),$$

$$\alpha_1 = (e, \alpha_1, \alpha_d, e)(0\,1),\ \alpha_2 = (\alpha_2, \alpha_2, \alpha_1, e), \ldots, \alpha_d = (\alpha_d, \alpha_d, \alpha_{d-1}, e).$$

Portanto, G^{φ} é finitamente gerado, finito por estados e autossimilar; ou seja, G é um autômata-grupo.

Na figura abaixo suprimimos os índices das setas para não sobrecarregar o diagrama.



Autômata de $\mathbb{Z}^l \wr \mathbb{Z}^d$

□

Corolário 4.1.7. *O grupo $\mathbb{Z}^l \wr \mathbb{Z}$ é um autômata-grupo de grau 3; em particular $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ é um autômata-grupo de grau 3.*

Demonstração. Basta notar que se $d = 1$ na proposição anterior, H_2 e f_2 são desnecessários na demostração. □

Proposição 4.1.8. *(Bartholdi & Sidki, [14]) Sejam G um grupo autossimilar transitivo de grau m, G_ω seu subgrupo parabólico e B um grupo abeliano finito. Então a extensão $B^{(G_\omega \backslash G)} \rtimes G$ é autossimilar transitivo de grau $|B|m$, além disso, é finito por estado sempre que G o é.*

Aplicação 4.1.9. *Usando o endomorfismo virtual $f : 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dado por $2z \mapsto z$, temos que $\mathbb{Z}$ é autossimilar transitivo de grau 2. Note que $\mathbb{Z}_\omega = 1$. Aplicando o Teorema anterior obtemos que $B \wr \mathbb{Z}$ é autossimilar transitivo de grau $2|B|$, onde B é um grupo abeliano finito. Observe que o endomorfismo f dá $\mathbb{Z}$ finito por estado. Assim, $B \wr \mathbb{Z}$ é um autômata-grupo.*

Teorema 4.1.10. *Seja A um grupo abeliano finitamente gerado e considere $T = Tor(A)$. Então $G = A \wr \mathbb{Z}^d$ é um autômata-grupo de grau $2|B| + 4$. No caso particular, para $A = \mathbb{Z}^l$, o grau pode ser reduzido para 4.*

Demonstração. Bata aplicar o Teorema de Concatenação (2.3.1) aos casos $\mathbb{Z}^l \wr \mathbb{Z}^d$ e $T \wr \mathbb{Z}^d$. □

4.2 Representação autossimilar para $C_p \wr \mathbb{Z}^2$

4.2.1 Endomorfismos de produtos semi-diretos

No que segue, listamos algumas propriedades de endomorfismos de produtos semidiretos estudadas por A. Dantas e S. Sidki em [2] e as usaremos para obter resultados sobre existência de representação fechada por estado de grupos do tipo $C_p \wr \mathbb{Z}^2$, com p primo.

Teorema 4.2.1. *(Dantas & Sidki, [2]) Considere o grupo $G = AX$, produto semidireto do subgrupo A pelo subgrupo X. Suponha que existam H um subgrupo de índice finito m em G e um endomorfismo $f : H \to G$. Defina $Y = AH \cap X$, $A_0 = A \cap H$ e $\dot{H} = A_0 Y$ e suponha que A_0 seja normal em G. Nessas condições temos:*

(i) $[G : \dot{H}] = m$;

(ii) *se* $H \trianglelefteq G$ *e* $[A, Y] \leqslant A_0$, *então* $\dot{H} \trianglelefteq G$;

(iii) *se* A *é abeliano, então* $H \trianglelefteq G$ *implica que* $\dot{H} \trianglelefteq G$;

(iv) *se* A *é abeliano então* $\dot{f}$ *é homomorfismo;*

(v) *se* A *é abeliano,* $C_X(A) = 1$ *e* f *é simples, então* $\dot{f}$ *é simples. Além disso, se* $[G : H] = p$, *pode-se supor* $X \leqslant H$.

Com a notação acima, suponha que o endomorfismo $f : H \to G$ é tal que $A_0^f \leqslant A$, por exemplo quando A é de torção e X é livre de torção.
Defina os homomorfismos $\mu : A_0 \to A$ por $a_0^\mu = a_0^f$ e $\alpha : Y \to X$ por $y^\alpha = y'$ se, e somente se, $(ay)^f = by'$, onde $a, b \in A$.

Seja B um grupo abeliano finito. Então

$$B = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle b_r \rangle,$$

onde b_i é cíclico de ordem n_i.

Defina $G_{B,d} = B \wr \mathbb{Z}^d = AX$, onde $A = \oplus_{x \in X} B$, $X = \mathbb{Z}^d = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle$. Um elemento típico em $G_{B,d}$ é

$$(b_1^{p_1(x_1,\ldots,x_d)} \cdots b_r^{p_r(x_1,\ldots,x_d)})(x_1^{s_1} \cdots x_d^{s_d}),$$

onde $p_i(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}\langle X \rangle$, $i = 1, \ldots, r$.

Para $r = 1$, escrevemos: $B = \langle b \rangle$, $|b| = n$, $G_{B,d} = G_{n,d}$ e $f : H \to G_{n,d}$. Observe que $C_X(A) = 1$.

Vamos considerar $G_{n,d} = C_n \wr \mathbb{Z}^d = \langle a \rangle \wr \langle x_1, \ldots, x_d \rangle$. Note que podemos escrever $G_{n,d} = AX$, onde $A = \langle a \rangle^{\langle x_1,\ldots,x_d \rangle}$ e $X = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle$.

Seja $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ dados para $G_{n,d}$ de modo que cada subgrupo em $\mathbf{H}$ é normal em $G_{n,d}$.

Defina $A_i = A \cap H_i$, $Y_i = AH_i \cap X$, $i = 1, \ldots, s$. Como A é de torção e X é livre de torção, temos que $A_i^{f_i} \leqslant A$; além disso, se A é abeliano, podemos considerar $\dot{H}_i = A_i Y_i$ subgrupo de $G_{n,d}$ e $\dot{f}_i : \dot{H}_i \to G_{n,d}$ homomorfismo. Sejam $\dot{\mathbf{H}} = (\dot{H}_1, \ldots, \dot{H}_s)$ e $\dot{\mathbf{F}} = \{\dot{f}_1, \ldots, \dot{f}_s\}$.

Proposição 4.2.2. *Suponha que $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ induz uma representação autossimilar fiel para o grupo G de modo que cada subgrupo em $\mathbf{H}$ é normal em G. Então $(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{F}})$ também induz uma representação fiel autossimilar para o grupo G.*

Demonstração. Sejam $K \leqslant \dot{H}_1 \cap \cdots \cap \dot{H}_s := \dot{H}$, $K \trianglelefteq G_{n,d}$, $K^{\dot{f}_i} \leqslant K$, $i = 1, \ldots, s$. Considere $K_0 = K \cap A_1 \cap \cdots \cap A_s$. Assim, para $i = 1, \ldots, s$ temos que

$$K_0^{\dot{f}_i} = (K \cap A_1 \cap \cdots \cap A_s)^{\dot{f}_i} \leqslant (K \cap A_i)^{\dot{f}_i} \leqslant K \cap A \leqslant K \cap (\dot{H} \cap A) = K_0.$$

Mas, $K_0^{f_i} = K_0^{\dot{f}_i}$ para $i = 1, \ldots, s$, assim K_0 é trivial. Como $[K, A] \leqslant K_0 = 1$, temos que $K \leqslant C_X(A) = 1$. Portanto, $(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{F}})$ induz uma representação autossimilar fiel para o grupo G.

□

Análogo ao que foi feito anteriormente, definimos os homomorfismos $\mu_i : A_i \to A$ por $a^{\mu_i} = a^{f_i}$, onde $a \in A_i$ e $\alpha_i : Y_i \to X$ por $y^{\alpha_i} = y'$ se, e somente se, $(ay)^f = by'$, onde $a, b \in A$, $i = 1, \ldots, s$.

Note que A pode ser visto como anel de grupo $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\langle X \rangle$, e $A_1, \ldots, A_s$ podem ser vistos como ideais $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_s$, respectivamente, já que $A_1, \ldots, A_s$ são normais em A. Dessa forma, os homomorfismos

$$f_1 : A_1 \to A, \ldots, f_s : A_s \to A$$

podem ser vistos como homomorfismos de grupos entre anéis

$$\mu_1 : \mathcal{I}_1 \to \mathcal{A}, \ldots, \mu_s : \mathcal{I}_s \to \mathcal{A}.$$

Denote por μ o conjunto $\{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$. Diremos que um ideal de $\mathcal{A}$ é μ-invariante se é μ_i-invariante para $i = 1, \ldots, s$.

Similarmente, $\alpha_1 : Y_1 \to X, \ldots, \alpha_s : Y_s \to X$ estendem-se a homomorfismos de grupos abelianos $\alpha_1 : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{A}, \ldots, \alpha_s : \mathcal{B}_s \to \mathcal{A}$, onde $\mathcal{B}_i = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\langle Y_i \rangle$, $i = 1, \ldots, s$.

Proposição 4.2.3. *Seja* $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ *dados para* $G_{n,d}$ *tal que cada subgrupo em* $\mathbf{H}$ *é normal em* $G_{n,d}$. *Então o* $\mathbf{F}$*-core de* $\mathbf{H}$ *é trivial se, e somente se, o único ideal de* $\mathcal{A}$ *contido em* $\bigcap_{i=1}^{s} \mathcal{I}_i$ *e* μ*-invariante é o ideal trivial* $\{0\}$.

Demonstração. Defina

$$\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^{s} \mathcal{I}_i.$$

Se $p \in \mathcal{I}$ e $q \in \mathcal{B}_i$, então teremos que

$$(b^{pq})^{\mu_i} = b^{p^{\mu_i} q^{\alpha_i}}.$$

Seja $K_i = \ker_{\mathcal{B}_i}(\alpha_i)$ e defina $K = \bigcap_1^s K_i$ (ideal de $\mathcal{A}$). Então $\mathcal{I}\mathcal{K}$ é um ideal de $\mathcal{A}$ contido em $\ker_{\mu_i}(\mu_i)$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Logo, $\langle b^{\mathcal{I}\mathcal{K}} \rangle$ é um subgrupo de $\bigcap_{i=1}^{s} H_i$, normal em G e f_i-invariante $i = 1, \ldots, s$. Dessa forma, $\langle b^{\mathcal{I}\mathcal{K}} \rangle$ é trivial pois o $\mathbf{F}$-core de $\mathbf{H}$ é trivial. □

4.2.2 Representação fechada por estado para $G_{p,2}$

Em [2], A. Dantas e S. Sidki mostraram que o grupo $C_p \wr \mathbb{Z}^d$, onde p é um primo e $d \geq 2$, é autossimilar transitivo de grau p^2, mais que isso, eles provaram que este grupo não admite representação autossimilar transitiva numa árvore de grau primo. No caso $p = 2$, foi exibida uma representação na árvore de grau 4 como um autômata-grupo com 12 estados. Lançando mão da transitividade, conseguimos diminuir o grau da representação do grupo $C_p \wr \mathbb{Z}^2$ para $p + 1$, como estabelece o seguinte resultado.

Teorema 4.2.4. *Seja p um número primo. Então o grupo $C_p \wr \mathbb{Z}^2$ é fechado por estado de grau $p + 1$ com tipo-orbital $(p, 1)$. De fato, $C_p \wr \mathbb{Z}^2$ é gerado por $\alpha = (\alpha, \alpha\sigma, \ldots, \alpha\sigma^{p-1}, \alpha\beta)$, $\sigma = (e, \ldots, e, \sigma)(0\,1\, \cdots p-1)$ e $\beta = (e, \ldots, e, \alpha)$. Em particular, o grupo $C_2 \wr \mathbb{Z}^2$ é fechado por estado de grau 3.*

Antes de demonstrar o Teorema 4.2.4, vamos provar o seguinte lema.

Lema 4.2.5. *Sejam k um corpo e X o grupo $\langle x, y\rangle \simeq \mathbb{Z}^2$. Considere $p_i(x, y)$ uma sequência de elementos não inversíveis na k-álgebra $k[X]$, m_i o grau de x no polinômio $p_i(x, y)$ e n_i o grau de y em $p_i(x, y)$ e defina $\delta(p_i(x, y)) = (m_i, n_i)$. Suponha que $m_i, n_i \to \infty$ quando $i \to \infty$. Então o ideal $\bigcap_{i=0}^{\infty} \langle p_i(x, y)\rangle$ é nulo.*

Demonstração. Observe que a álgebra $k[X]$ é o mesmo que o anel de polinômios de Laurent $k[x, y, x^{-1}, y^{-1}]$. Sejam $p(x, y), q(x, y)$ elementos não inversíveis de $k[X]$, então
$$\delta(p(x, y)q(x, y)) \geq \delta(p(x, y)), \delta(q(x, y)).$$
Como $m_i, n_i \to \infty$ quando $i \to \infty$, o ideal $\bigcap_{i=0}^{\infty} \langle p_i(x, y)\rangle$ é nulo. □

Demonstração. (*Teorema 4.2.4*) Sejam $C_p = \langle a\rangle$, $\mathbb{Z}^2 = \langle x, y\rangle$ e $G = C_p \wr \mathbb{Z}^2$. Defina os seguintes subgrupos de G: $H_1 = G'\langle x, y\rangle$ e $H_2 = G$.

Note que $[G : H_1] = p$. Observe que G' pode ser visto como $\langle a^{x-1}, a^{y-1}\rangle$. Assim, elementos de H_1 podem ser expressos unicamente como $a^{s(x,y)} \cdot x^i y^j$, onde $s(x, y)$ é um elemento do ideal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{Z}\langle x, y\rangle$, gerado por $x - 1$ e $y - 1$. Além disso, elementos de $\mathcal{I}$ podem ser unicamente escritos como
$$s(x, y) = p(x)(x - 1) + q(y)(y - 1) + r(x, y)(x - 1)(y - 1).$$
Defina os seguintes homomorfismos:
$$\begin{array}{rccc} f_1 : & H_1 & \to & G \\ & a^{s(x,y)}x^i y^j & \mapsto & a^{q(y)}y^j \end{array}$$
e
$$\begin{array}{rccc} f_2 : & H_2 & \to & G \\ & a^{r(x,y)}x^i y^j & \mapsto & a^{r(y,xy)}x^j y^{i+j}. \end{array}$$

Suponha que K é um subgrupo de $H_1 \cap H_2 = H_1$, normal em G e $\{f_1, f_2\}$-invariante. Observe que o subgrupo $L = K \cap G'$ é trivial se, e somente se, K é também trivial. Mostraremos que $K = 1$. Suponha, por contradição, que $g = a^{s(x,y)}$ é um elemento não trivial de L. Assim $a^{s(x,y)f_1} = a^{q(y)}$ e sucessivas aplicações de f_1 em $a^{q(y)}$ resulta que $q(y) = 0$, e assim $x - 1$ divide $s(x, y)$.

Como $a^{s(x,y)f_2} = a^{s(y,xy)} \in L$, segue que $x - 1$ também divide $s(y, xy)$, ou seja, $s(y, xy) = (x - 1)t(x, y)$. Então

$$\begin{aligned} a^{s(x,y)} &= a^{(s(y,xy))f_2^{-1}} \\ &= a^{((x-1)t_1(x,y))f_2^{-1}} \\ &= a^{(x^{-1}y-1)t_2(x^{-1}y,x)} \\ &= a^{x^{-1}(y-x)t_2(x^{-1}y,x)} \\ &= a^{(x-y)t_3(x,y)} \end{aligned}$$

e $x-y$ divide $s(x, y)$. Repetindo o argumento, temos que $x^{n_i} - y^{n_{i-1}}$ divide $s(x, y)$ para todo n_i, onde n_i é a sequência de Fibonacci definida por $n_i = n_{i-1} + n_{i-2}$ e $n_0 = 0, n_1 = 1, n_2 = 1, i \geq 0$. Então $s(x, y) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \langle x^{n_i} - y^{n_{i-1}} \rangle$ que é nulo, pelo Lema anterior, uma contradição. Portanto, G é fechado por estado de grau $p + 1$ e tipo-orbital $(p, 1)$.

Escolha os transversais $T_1 = \{e, a, ..., a^{p-1}\}$ e $T_2 = \{e\}$ de H_1 e H_2, respectivamente. Assim, obtemos uma representação fechada por estado de G gerado pelos automorfismos

$$\sigma = (e, e, \ldots, e, \sigma)(0\,1), \alpha = (\alpha, \alpha\sigma, \ldots, \alpha\sigma^{p-1}, \alpha\beta), \beta = (e, e, \ldots, e, \alpha).$$

Note que $\alpha^m \beta^n = (\alpha^m, (\alpha\sigma)^m, \ldots, (\alpha\sigma^{p-1})^m, \alpha^{m+n}\beta^m)$, para $m, n \in \mathbb{Z}$, então $\{\alpha, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta^2, \ldots, \alpha^{n_i}\beta^{n_{i-1}}, \ldots\} \subset Q(\alpha)$ e esta representação não é finita por estado. $\square$

4.3 Outros produtos semidiretos

Seja G um grupo fechado por estado com respeito aos dados $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$, onde $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$, com $m_1 \geq 2, \ldots, m_s \geq 2$. Para cada $i = 1, \ldots, s$, defina

$$G_{i0} = G,\ G_{ij} = (G_{i(j-1)})^{f_i^{-1}}\ (j > 0) \text{ e } G_{\omega_i} = \cap_{j \geq 0} G_{ij}.$$

Com esta notação estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.1. *Sejam B um grupo abeliano finito e G um grupo autossimilar com tipo-orbital $(m_1, \ldots, m_s)$, com $m_1 \geq 2, \ldots, m_s \geq 2$. Então o grupo*

$$B^{((G_{\omega_1} \backslash G) \times \cdots \times (G_{\omega_s} \backslash G))} \rtimes G^s$$

é autossimilar com tipo-orbital $(|B| \cdot m_1 \cdots m_s,\, 1)$. Além disso, se G é finito por estado então $B^{((G_{\omega_1} \backslash G) \times \cdots \times (G_{\omega_s} \backslash G))} \rtimes G^s$ também é finito por estado.

Demonstração. Seja $\mathcal{G}$ o grupo $B^{((G_{\omega_1} \backslash G) \times \ldots \times (G_{\omega_s} \backslash G))} \rtimes G^s$ e considere H o subgrupo $\prod_{i=1}^{s} H_i$ of G^s. Defina o conjunto de s-uplas de classes

$$U = \prod_{i=1}^{s} (G_{\omega_i} \setminus G)$$

e defina a extensão

$$\mathcal{H} = \left\{ \phi : U \to B \text{ com suporte finito, } \prod_{\bar{g} \in U} \phi(\bar{g}) = 1 \right\} \rtimes H.$$

Note que o índice $[\mathcal{G} : \mathcal{H}]$ é $|B| \cdot m_1 \cdots m_s$. Agora, considere a aplicação definida nas s-uplas de classes:

$$\lambda \quad : \quad \prod_{i=1}^{s} (G_{\omega_i} \setminus H_i) \to \prod_{i=1}^{s} (G_{\omega_i} \setminus G)$$

$$(G_{\omega_1} h_1, \ldots, G_{\omega_s} h_s) \mapsto (G_{\omega_1} h_1^{f_1}, \ldots, G_{\omega_s} h_s^{f_s}).$$

Se $(G_{\omega_i} h_i)^{\lambda} = (G_{\omega_i} h_i')^{\lambda}$, então $(h_i (h_i')^{-1})^{f_i} \in G_{\omega_i}$ para cada $1 \leq i \leq s$; portanto λ é uma função injetiva.

Defina a aplicação λ'

$$\lambda' \quad : \quad \prod_{i=1}^{s} (G_{\omega_i} \setminus G) \to \prod_{i=1}^{s} (G_{\omega_i} \setminus G)$$

por

$$\bar{y} = (G_{\omega_1} y_1, \ldots, G_{\omega_s} y_s) \mapsto \bar{x} = (G_{\omega_1} x_1, \ldots, G_{\omega_s} x_s), \text{ se } \lambda(\bar{x}) = \bar{y};$$

caso contrário, defina como $\bar{e} = (G_{\omega_1}, \ldots, G_{\omega_s})$. Além disso, defina o homomorfismo $\chi_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$

$$(\phi, (h_i)_{i=1}^s) \mapsto \left(\bar{x} = (G_{\omega_1}x_1, \ldots, G_{\omega_s}x_s) \mapsto \phi(\lambda'(\bar{x})), (h_i^{f_i})_{i=1}^s\right).$$

Defina também o homomorfismo $\chi_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ por

$$(\phi, (g_1, \ldots, g_s)) \mapsto ((G_{\omega_i}x_i)_{i=1}^s \mapsto \phi((G_{\omega_i}x_{i+1})_{i=1}^s), (g_{i+1})_{i=1}^s)).$$

Afirmamos que a representação fechada por estado de $\mathcal{G}$ induzida pela tripla

$$((|B|\prod_{i=1}^{s}[G : H_i], 1), (\mathcal{H}, \mathcal{G}), \{\chi_1, \chi_2\})$$

é fiel.

Considere $K \leq \mathcal{H}$ com $K \lhd \mathcal{G}$ e $K^{\chi_r} \leq K$, $r = 1, 2$. Primeiramente, a hipótese de $\mathbf{F}$ ser livre de core e usando a definição de χ_2 temos que $K \leq B^{((G_{\omega_1}\backslash G)\times\cdots\times(G_{\omega_s}\backslash G))}$. Considere $\phi : U \to B$ um elemento não trivial em K, então $\prod_{\bar{g}\in U} \phi(\bar{g}) = 1$ e logo $|Supp\,(\phi)| \geq 2$.

Escolha ϕ com suporte S, de cardinalidade minimal. Como ϕ é não trivial, podemos assumir, por conjugação em $\mathcal{G}$, que $\phi(G_{\omega_1}, \ldots, G_{\omega_s}) \neq 1$, assim $(G_{\omega_1}, \ldots, G_{\omega_s}) \in S$ e S contém no mínimo dois elementos.

Defina $\phi_j = \phi^{\chi_1^j}$ para $j \geq 0$. Observe que ϕ_j é dado por

$$\phi_j(G_{\omega_1}a_1^{f_1}, \ldots, G_{\omega_s}a_s^{f_s}) = \phi_{(j-1)}(G_{\omega_1}a_1, \ldots, G_{\omega_1}a_s),$$

para $(a_1, \ldots, a_s)$ pertencente a $G_{1j} \times \cdots \times G_{sj}$, estendida pela identidade fora de $(G_{1j} \times \cdots \times G_{sj})^{\lambda}$.

Logo,

$$\begin{aligned} \phi_1 : G_{\omega_1} \setminus H_1^{f_1} \times ... \times G_{\omega_s} \setminus H_s^{f_s} &\to B \\ (G_{\omega_1}a_1^{f_1}, ..., G_{\omega_s}a_s^{f_s}) &\mapsto \phi(G_{\omega_1}a_1, \ldots, G_{\omega_1}a_s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Supp(\phi_1) &= \{(G_{\omega_1}a_1^{f_1}, \ldots, G_{\omega_s}a_s^{f_s}) \mid (G_{\omega_1}a_1, \ldots, G_{\omega_s}a_s) \in S\} \\ &= G_{\omega_1}(S^{\pi_1} \cap H_1)^{f_1} \times \cdots \times G_{\omega_s}(S^{\pi_s} \cap H_s)^{f_s}, \end{aligned}$$

onde π_i, $i = 1, \ldots, s$, é a projeção na i-ésima coordenada.

Se $(G_{\omega_1}a_1^{f_1}, \ldots, G_{\omega_s}a_s^{f_s}) \in Supp(\phi_1)$ então $(G_{\omega_1}a_1, \ldots, G_{\omega_s}a_s) \in S$, assim $|Supp(\phi_1)| \leq |S|$. Pela minimalidade da cardinalidade do conjunto S, temos que $|Supp(\phi_1)| = |S|$. Continuando o processo, o suporte de ϕ_j é

$$G_{\omega_1}(S^{\pi_1} \cap G_{1j})^{f_1} \times \cdots \times G_{\omega_s}(S^{\pi_s} \cap G_{sj})^{f_s},$$

o qual tem a mesma cardinalidade de S. Portanto, temos que $S \subset (G_{1j}, \ldots, G_{sj})$ para todo j e assim $S \subset \{(G_{\omega_1}, \ldots, G_{\omega_s})\}$; uma contradição.

Note que como G é finito por estado, G^s também o é. Sejam $T_1, \ldots, T_s$ transversais de $H_1, \ldots, H_s$ em G, respectivamente, com t_{0i} representante de H_i, $i = 1, \ldots, s$. Defina

$$\dot{B} = \{\phi : U \to B \text{ com suporte em } G_{\omega_1} \times \cdots \times G_{\omega_s}\}.$$

Note que a aplicação $\phi \mapsto \phi(G_{\omega_1}, \ldots, G_{\omega_s})$ dá um isomorfismo entre $\dot{B}$ e B. Para $b \in B$ escrevemos $\dot{b}$ o elemento de $\dot{B}$ de modo que $\dot{b}(G_{\omega_1}, \ldots, G_{\omega_s}) = b$. Considere $\dot{B} \times \times_{i=1}^{s} H_i$ transversal de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ é gerado por $\dot{B} \cup G^s$, basta mostrar que esses elementos são finito por estado. Considere a representação de G^s dada por $g^{\varphi} = (t \mapsto g_t) \cdot \pi$, onde $t \in \left(\bigcup_{i=1}^{s} T_i\right)^s$. Então, se $g \in G^s$

$$g^{\dot{\varphi}} = \Big((\dot{b}, t) \mapsto g_t, 1_{\mathcal{G}} \mapsto g'\Big) \Big((\dot{b}, t) \mapsto tg\Big),$$

onde g' é um elemento em G^s. caso $\dot{a} \in B$, então

$$\dot{a}^{\dot{\varphi}} = \left((\dot{b}, t) \mapsto \begin{cases} \dot{a}, & \text{se } t = t_{01}, \ldots, t_{0s} \\ e, & \text{caso contrário} \end{cases}\right) \Big((\dot{b}, t) \mapsto \dot{ba}\Big)$$

No primeiro caso, o conjunto de estados de g em $\mathcal{G}$ é o mesmo que o conjunto de estados de g em G^s acrescidos dos estados de g' em G^s; enquanto no segundo caso, o conjunto de estados de $\dot{a}$ é $\{e, \dot{a}\}$. Portanto $\mathcal{G}$ é finito por estado.

□

Corolário 4.3.2. *Sejam B um grupo abeliano finito e G um grupo autossimilar com tipo-orbital $(m_1 > 1, \ldots, m_l > 1, m_{l+1} = 1, \ldots, m_s = 1)$. Então existem subgrupos próprios $R_{l+1}, \ldots, R_s$ de G tais que*

$$B^{((G_{\omega_1} \backslash G) \times \cdots \times (G_{\omega_l} \backslash G) \times (R_{l+1} \backslash G) \times \cdots \times (R_s \backslash G))} \rtimes G^s$$

é um grupo autossimilar com tipo-orbital $(|B| \cdot m_1 \cdots m_l^{s-l+1},\ 1)$.

Demonstração. Para cada $l+1 \leq j \leq s$ a restrição $\dot{f}_j = f_j : \dot{H}_j = H_l \to G$ é bem definida. Defina a tripla $(\dot{\mathbf{m}}, \dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{F}})$ por

$$\dot{\mathbf{m}} = (m_1, \ldots, m_l, m_l, ..., m_l), \dot{\mathbf{H}} = (H_1, ..., H_l, \dot{H}_{l+1} = H_l, \ldots, \dot{H}_s = H_l),$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \{f_1, \ldots, f_l, \dot{f}_{l+1}, \ldots, \dot{f}_s\}.$$

e R_j o subgrupo parabólico de $\dot{f}_j$ para $j = l+1, \ldots, s$. Como G tem uma representação fiel autossimilar com respeito à tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$, o mesmo é válido para a representação com respeito à tripla $(\dot{\mathbf{m}}, \dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{F}})$; de fato, o $\mathbf{F}$-core de $\mathbf{H}$ e o $\dot{\mathbf{F}}$-core de $\dot{\mathbf{H}}$ são os mesmos. Como $m_i > 1$ para cada m_i em $\dot{\mathbf{m}}$, aplicamos o Teorema anterior e obtemos o resultado. □

Exemplo 4.3.3. *Seja $A = \langle a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n, \ldots \rangle$ grupo abeliano livre de posto infinito. Considere $H_1 = H_2 = \langle {a_1}^2, a_2, a_3 \ldots, a_n, \ldots \rangle$ subgrupos de índice 2 em A. Para $i = 1, 2$, defina os homomorfismos $f_i : H_i \to A$ que estendem as aplicações:*

$$f_1 : H_1 \to A$$
$${a_1}^2 \mapsto a_1$$
$$a_n \mapsto a_{n-1} \ (n \geq 2)$$

e

$$f_2 : H_2 \to A$$
$${a_1}^2 \mapsto a_2$$
$$a_n \mapsto a_{n-1} \ (n \geq 2)$$

Observe que

$$A_{\omega_1} = \langle a \in H_1 \mid \ a^{f_1^k} \in H_1 \ \forall k \in \mathbb{N} \rangle = \langle a_{n+1}{a_n}^{-2} \mid n \geq 1 \rangle \text{ e}$$

$$A_{\omega_2} = \langle a \in H_2 \mid \ a^{f_2^k} \in H_2 \ \forall k \in \mathbb{N} \rangle = \langle a_{n+1}{a_{n-1}}^{-2} \mid n \geq 2 \rangle.$$

Além disso, $A_{\omega_1} \cap A_{\omega_2} = \{e\}$. O $\{f_1, f_2\}$-core de $\{H_1, H_2\}$ é

$$\langle K \leqslant H_1 \cap H_2 \mid K \lhd G, K^{f_i} \leqslant K, i = 1, 2 \rangle =$$

$$\langle K \leqslant H_1 \cap H_2 \mid K^{f_i} \leqslant K, i = 1, 2 \rangle \leqslant A_{\omega_1} \cap A_{\omega_2} = \{e\}.$$

Portanto, os dados $((2,2), \{H_1, H_2\}, \{f_1, f_2\})$ induzem uma representação autossimilar para o grupo abeliano livre de posto infinito A.

Pelo Teorema 4.3.1,

$${C_2}^{((A_{\omega_1}\setminus A)\times(A_{\omega_2}\setminus A))} \rtimes A^2$$

é um grupo autossimilar de grau $2\times 2\times 2+1 = 9$ e além disso, é finito por estado. O grupo

$$W = \langle (a,(1,1)), (e,(a_n,a_n)) \mid n = 1,2,\ldots \rangle \simeq C_2 \wr \mathbb{Z}^{(\omega)}$$

é um subgrupo de ${C_2}^{((A_{\omega_1}\setminus A)\times(A_{\omega_2}\setminus A))} \rtimes A^2$ e portanto é também finito por estado.

CAPÍTULO 5

Sobre grupos nilpotentes não autossimilares

Em [6], A. Brunner e S. Sidki mostraram que o grupo $\mathbb{Z}^n \rtimes GL(n, \mathbb{Z})$ é finito por estado e fechado por estado em $\mathcal{A}_m$, onde $m = 2^n$. Como todo $\mathfrak{T}$-grupo é isomorfo a algum subgrupo de $GL(n, \mathbb{Z})$ ([11], Teorema 5, p. 92), segue que todo $\mathfrak{T}$-grupo admite uma representação finita por estado em $\mathcal{A}_{2^n}$ para algum n. No entanto, nem sempre é possível obter uma representação autossimilar para um dado $\mathfrak{T}$-grupo. Vamos exibir um $\mathfrak{T}_3$-grupo que não é autossimilar, qualquer que seja o grau da árvore; o exemplo vem do trabalho de V. Bludov e B. Gusev, [27].

5.1 $\mathfrak{T}$-grupos

Dizemos que um grupo G é um $\mathfrak{T}$-*grupo* se G é nilpotente, livre de torção e finitamente gerado; quando a classe de nilpotencia de G é c, dizemos que G é um $\mathfrak{T}_c$-*grupo*.

Todo $\mathfrak{T}$-grupo G é *policíclico*, isto é, G admite uma série sub-normal

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq G_n,$$

tal que G_i/G_{i-1} é cíclico para $i = 1, \ldots, n$. O número de fatores cíclicos infinitos em uma série de um grupo policíclico G é chamado o *comprimento de Hirsch* de G e denotado por $h(G)$; este número é um invariante de G, ou seja, quaisquer duas séries policíclicas de G tem o mesmo número de fatores cíclicos infinitos.

Fatos sobre grupos nilpotentes

(1) Seja G um grupo nilpotente livre de torção.

(a) Seja K um subgrupo de G. Então o *isolador* de K em G é definido como

$$\sqrt[G]{K} = \{x \in G \mid x^n \in K \text{ para algum inteiro positivo } n\}.$$

é um subgrupo de G. Além disso, se G é finitamente gerado então $[\sqrt[G]{K} : K]$ é finito.

(b) Seja H um subgrupo de índice finito m em G. Então $H \cap Z_i(G) = Z_i(H)$ para todo i. Aqui Z_i denota o i-ésimo termo da série superior central de G.

(2) Seja G um grupo nilpotente de classe c que é finitamente gerado. Então G é policíclico. Além disso, um subgrupo H de G tem índice finito se, e somente se, $h(H) = h(G)$.

Completamento de Malcev

Um grupo G é dito ser *completo* ou *divisível* se a equação $x^n = g$ tem uma solução no grupo G para qualquer natural n e qualquer $g \in G$.

Definição 5.1.1. *Seja $G^{\#}$ um grupo nilpotente, livre de torção e completo que contém um subgrupo G tal que todo elemento de $G^{\#}$ elevado a uma potência apropriada (positiva) pertence à G. Então $G^{\#}$ é chamado um completamento de Malcev de G.*

Teorema 5.1.2. *Todo grupo nilpotente livre de torção G está contido em um grupo nilpotente livre de torção $G^{\#}$ que é um completamento de G. Se $G_1^{\#}$ e $G_2^{\#}$ são dois completamentos de G, então existe um único isomorfismo entre $G_1^{\#}$ e $G_2^{\#}$ que estende o automorfismo identidade de G.*

Se K é um subgrupo de índice finito em G, então $\sqrt[G]{K} = G$. Assim, o completamento de Malcev de um subgrupo K de índice finito no grupo G é igual à $G^{\#}$.

IA-automorfismos

Definição 5.1.3. *Seja G um grupo. Um IA-automorfismo de G é um automorfismo de G que induz em G/G' o automorfismo identidade. O conjunto de todos os IA-automorfismo de um grupo G formam um grupo, denotado por $IA(G)$.*

É conhecido que $IA(G)$ é um subgrupo normal de $Aut(G)$ e $Inn(G) \leqslant IA(G)$. Além disso, $\gamma_j(IA(G))$ age identicamente em $\frac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+j}(G)}$ (veja Teorema 7.13 em [4]). Em particular, se G é nilpotente de classe c então $IA(G)$ é nilpotente de classe $c-1$ e para $\alpha \in IA(G)$ temos que $x^\alpha = x$, para todo $x \in \gamma_c(G)$.

Seja $f : H \to G$ um endomorfismo virtual de G. Se o único subgrupo f-invariante de G é o subgrupo trivial dizemos que f é *fortemente simples*.

$\mathfrak{T}_2$-grupos são ricos em autossimilaridade no seguinte sentido:

Teorema 5.1.4 (Berlatto & Sidki, [1])**.** *Seja G um $\mathfrak{T}_c$-grupo com $c \leq 2$ e H um subgrupo de índice finito em G. Então existe um subgrupo K de índice finito em H, o qual admite um epimorfismo fortemente simples $f : K \to G$.*

Considere G um $\mathfrak{T}$-grupo. Seja $f : H \to G$ um endomorfismo virtual que é injetor, então $H \simeq H^f$. Usando o item 2. acima, concluímos que $h(H) = h(H^f) = h(G)$ e portanto $f(H)$ tem índice finito em G. Usaremos esse fato na demostração das proposições 5.1.5 e 5.2.4.

Proposição 5.1.5. *Seja G um $\mathfrak{T}$-grupo autossimilar com centro cíclico. Então G é autossimilar transitivo.*

Demonstração. Sejam $Z(G) = \langle z \rangle$, $Z(H) = \langle z^n \rangle$. Podemos supor $H_i = H$ para $i = 1, \ldots, s$ e que $K_i = f_i$-core(H_i) é não-trivial. Defina $L_i = ker(f_i)$ e $M_i = L_i \cap Z(H)$.

Temos $f_i(Z(H)) \simeq (Z(H)L_i)/L_i \simeq Z(H)/M_i$ é um grupo livre de torção. Se L_i é não trivial então M_i é não trivial, portanto $Z(H)/M_i$ é um grupo de torção e logo $M_i = Z(H)$. Segue que L_i é trivial para algum i. Suponha que L_i é trivial para $1 \leq i \leq r$ e não trivial para $r \leq i \leq s$. Então $f_i(H) \simeq H$, $1 \leq i \leq r$ e logo tem índice finito em G. Portanto, $f_i(Z(H)) \leqslant Z(G)$ para $1 \leq i \leq r$ e $f_i(Z(H)) = e$ para $r+1 \leq i \leq s$.

Defina $Z_i = K_i \cap Z(H)$. Então para $1 \leq i \leq r$, $f_i(Z_i) \leqslant K_i \cap Z(G) = K_i \cap Z(G) \cap H = K_i \cap Z(H) = Z_i$.

Escreva $Z_i = \langle z^{n_i} \rangle$ e defina $Z_0 = Z_1 \cap Z_2 \cap \cdots \cap Z_r = \langle z^q \rangle$, onde $q = mmc\{n_i \mid 1 \leq i \leq r\}$. Para $1 \leq i \leq r$, existe k_i não nulo tal que $f_i(z^{n_i}) = z^{n_i \cdot k_i}$. Fatore $q = n_i \cdot t_i$. Então,

$$f_i(z^q) = f_i(z^{n_i \cdot t_i}) = f_i(z^{n_i})^{t_i} = z^{((n_i \cdot k_i) \cdot t_i)} = z^{(q \cdot k_i)} = (z^q)^{k_i},$$

ou seja, Z_0 é f_i invariante para $1 \leq i \leq r$. Como $f_i(Z_0) = \{e\}$ para $r+1 \leq i \leq s$, temos que Z_0 é f_i invariante para todo i e assim Z_0 é trivial; uma contradição. $\square$

A proposição acima foi mostrada em [19] utilizando completamento de Malcev.

5.2 O grupo $N_{3,4}$

O grupo $N_{3,4}$ foi introduzido por V. Bludov e B. Gusev em [27]. O grupo $N_{3,4}$ é o grupo nilpotente de classe 3 gerado por a, b, c, d e relações definidoras dadas por:

$$[a,[a,b]] = [a,b,b] = [a,[c,d]] = [a,d,d] = 1, \tag{5.1}$$

$$[b,[b,c]] = [b,[c,d]] = [c,[c,d]] = [c,d,d] = 1, \tag{5.2}$$

$$[a,[b,c]] \cdot [a,c,b] = [a,[b,d]] \cdot [a,d,b] = 1, \tag{5.3}$$

$$[a,[a,d]] \cdot [b,c,c]^{-1} = [a,[a,c]] \cdot [b,[b,d]]^{-1} = 1, \tag{5.4}$$

$$[a,c,b] \cdot [b,d,d]^{-1} = [a,c,c] \cdot [b,d,c]^{-1} = [a,d,b] \cdot [a,d,c]^{-1} = 1, \tag{5.5}$$

$$[a,b] \cdot [a,c,c]^{-1} = [c,d] \cdot [a,[a,c]]^{-1} = 1. \tag{5.6}$$

Fatos sobre o grupo $\mathbf{N_{3,4}}$

Vamos listar abaixo alguns fatos sobre o grupo $G = N_{3,4}$ que foram estabelecidos em [27].

(1) O conjunto $\{[a,c],[a,d],[b,c],[b,d]\}$ é uma base para o grupo abeliano livre $Z_2(G)/Z(G)$.

(2) O conjunto $\{[a,b],[c,d],[a,[a,d]],[a,[b,c]],[a,[b,d]]\}$ é uma base do grupo abeliano livre $Z(G)$.

(3) G é um $\mathfrak{T}_3$-grupo.

(4) As séries superior central

$$1 = Z_0(G) \leqslant Z_1(G) \leqslant Z_2(G) \leqslant Z_3(G) = G$$

e inferior central

$$1 = \gamma_4(G) \leqslant \gamma_3(G) \leqslant \gamma_2(G) \leqslant \gamma_1(G) = G$$

coincidem.

Lema 5.2.1 (Robinson, [10]). *Sejam x, y e z elementos de um grupo G. Então*

(i) $[y, x] = [x, y]^{-1}$.

(ii) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$.

(iii) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$.

(iv) $[x, y^{-1}] = [y, x]^{y^{-1}}$.

(v) $[x^{-1}, y] = [y, x]^{x^{-1}}$.

(vi) $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y] = 1$ *(Identidade de Hall-Witt).*

(vii) Se G é um grupo nilpotente de classe c. Então

$$[x_1^{t_1}, x_2^{t_2}, \ldots, x_c^{t_c}] = [x_1, x_2, \ldots, x_c]^{t_1 t_2 \cdots t_c},$$

para quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_c \in G$ e $t_1, t_2, \ldots, t_c$ inteiros.

5.2.1 Endomorfismos virtuais de $N_{3,4}$

Em [27] Bludov e B. Gusev estudaram com detalhes os automorfismos do grupo $N_{3,4}$. No que segue faremos uma releitura dessas ideias para endomorfismos virtuais de $N_{3,4}$.

Sejam $G = N_{3,4}$, H um subgrupo de índice finito de G e $f : H \to G$ um endomorfismo virtual. Considere m, n, k, j inteiros positivos tais que

$$a_1 = a^m, b_1 = b^n, c_1 = c^k, d_1 = d^j \text{ pertencem a } H.$$

No decorrer deste capítulo, denotaremos por K o grupo gerado por a_1, b_1, c_1 e d_1.

É conhecido que K tem índice finito em G (veja [27], Lema 1.1). Usando as relações 5.1, 5.2, 5.3, o Lema 5.2.1 e o fato de G ser livre de torção, segue que K satisfaz as relações

$$[a_1, [a_1, b_1]] = [a_1, b_1, b_1] = [a_1, [c_1, d_1]] = [a_1, d_1, d_1] = 1, \tag{5.7}$$

$$[b_1, [b_1, c_1]] = [b_1, [c_1, d_1]] = [c_1, [c_1, d_1]] = [c_1, d_1, d_1] = 1 \text{ e} \tag{5.8}$$

$$[a_1, [b_1, c_1]] \cdot [a_1, c_1, b_1] = [a_1, [b_1, d_1]] \cdot [a_1, d_1, b_1] = 1. \tag{5.9}$$

Usando o Lema 5.2.1 e as relações 5.4, 5.5 e 5.6 obtemos:

$$[a_1, [a_1, d_1]]^{nk^2} = [b_1, c_1, c_1]^{m^2 j}, \tag{5.10}$$

$$[a_1, [a_1, c_1]]^{n^2 j} = [b_1, [b_1, d_1]]^{m^2 k}, \tag{5.11}$$

$$[a_1, c_1, b_1]^{j^2} = [b_1, d_1, d_1]^{mk}, \tag{5.12}$$

$$[a_1, c_1, c_1]^{nj} = [b_1, d_1, c_1]^{mk}, \tag{5.13}$$

$$[a_1, d_1, b_1]^{k} = [a_1, d_1, c_1]^{n}, \tag{5.14}$$

$$[a_1, b_1]^{k^2} = [a_1, c_1, c_1]^{n} \text{ e } [c_1, d_1]^{m^2} = [a_1, [a_1, c_1]]^{j}. \tag{5.15}$$

Como $K^f \leqslant G$, podemos escrever

$$\begin{aligned} {a_1}^f &= a^{n_{11}} b^{n_{12}} c^{n_{13}} d^{n_{14}} u_1; \\ {b_1}^f &= a^{n_{21}} b^{n_{22}} c^{n_{23}} d^{n_{24}} u_2; \\ {c_1}^f &= a^{n_{31}} b^{n_{32}} c^{n_{33}} d^{n_{34}} u_3; \\ {d_1}^f &= a^{n_{41}} b^{n_{42}} c^{n_{43}} d^{n_{44}} u_4; \end{aligned}$$

onde $u_1, u_2, u_3, u_4 \in G'$. Para $1 \leq i, j \leq 4$, considere a matriz

$$N_f = (n_{ij}) = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{pmatrix}$$

induzida por f.

A seguir vamos mostrar que se $det(N_f) \neq 0$ então f se comporta como um IA-automorfismo. Isso será feito através de uma sequência de lemas.

Lema 5.2.2. *Se $det(N_f) \neq 0$ então N_f assume uma das formas:*

$$N_1 = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} & n_{34} \\ 0 & 0 & n_{43} & n_{44} \end{pmatrix} \quad ou \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_{13} & n_{14} \\ 0 & 0 & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & 0 & 0 \\ n_{41} & n_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Vamos considerar $[a_1{}^f, b_1{}^f]$ módulo $Z(G)$.

$$1 \equiv [a_1{}^f, b_1{}^f] = [a^{n_{11}}b^{n_{12}}c^{n_{13}}d^{n_{14}}u_1, a^{n_{21}}b^{n_{22}}c^{n_{23}}d^{n_{24}}u_2] \equiv$$

$$\equiv [a,c]^{n_{11}n_{23}-n_{13}n_{21}}[a,d]^{n_{11}n_{34}-n_{14}n_{21}}[b,c]^{n_{12}n_{23}-n_{13}n_{22}}[b,d]^{n_{12}n_{34}-n_{14}n_{24}}.$$

Vamos denotar δ_{ij}^{ks} por $\begin{vmatrix} n_{ik} & n_{is} \\ n_{jk} & n_{js} \end{vmatrix}$. Assim, a relação acima pode ser reescrita na forma

$$1 \equiv [a_1{}^f, b_1{}^f] \equiv [a,c]^{\delta_{34}^{13}}[a,d]^{\delta_{34}^{14}}[b,c]^{\delta_{12}^{23}}[b,d]^{\delta_{12}^{24}} \ mod(Z(G)).$$

Como $\{[a,c],[a,d],[b,c],[b,d]\}$ é base para $Z_2(G)/Z(G)$, segue que

$$\delta_{34}^{13} = \delta_{34}^{14} = \delta_{12}^{23} = \delta_{12}^{24} = 0.$$

Como $det(N_f) \neq 0$, δ_{12}^{12} e δ_{12}^{34} não podem ser simultaneamente nulos.

- Assuma $\delta_{12}^{12} \neq 0$. Se $n_{13} \neq 0$, então de $\delta_{12}^{23} = \delta_{12}^{13} = 0$ obtemos que

  $$n_{22} = \frac{n_{12}n_{23}}{n_{13}} \ , \ n_{21} = \frac{n_{11}n_{23}}{n_{13}}.$$

  Substituindo as expressões de n_{22} e n_{21} em δ_{12}^{12} temos

  $$\delta_{12}^{12} = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} = \frac{n_{11}n_{12}n_{23}}{n_{13}} - \frac{n_{12}n_{11}n_{23}}{n_{13}} = 0,$$

  uma contradição, logo $n_{13} = 0$. Trocando a terceira e quarta colunas da matriz e usando o mesmo argumento, segue que $n_{14} = 0$. Se $n_{23} \neq 0$, então de $\delta_{12}^{23} = \delta_{12}^{13} = 0$ obtemos que

  $$n_{12} = \frac{n_{13}n_{22}}{n_{23}} \ , \ n_{11} = \frac{n_{13}n_{21}}{n_{23}}.$$

  Logo,

  $$\delta_{12}^{12} = \frac{n_{13}n_{21}n_{22}}{n_{23}} - \frac{n_{13}n_{22}n_{21}}{n_{23}} = 0,$$

  uma contradição. Segue que $n_{23} = n_{24} = 0$.

  Neste caso, $n_{13} = n_{14} = n_{23} = n_{24} = 0$.

- Assuma $\delta_{12}^{34} \neq 0$. Se $n_{11} \neq 0$, então de $\delta_{12}^{24} = \delta_{12}^{13} = 0$ obtemos que
$$n_{24} = \frac{n_{14}n_{21}}{n_{11}} \ , \ \ n_{23} = \frac{n_{13}n_{21}}{n_{11}}.$$
Substituindo as expressões de n_{24} e n_{23} em δ_{12}^{12} temos
$$\delta_{12}^{34} = n_{13}n_{24} - n_{14}n_{23} = \frac{n_{13}n_{14}n_{21}}{n_{11}} - \frac{n_{14}n_{13}n_{21}}{n_{11}} = 0,$$
uma contradição, logo $n_{11} = 0$. Trocando a terceira e quarta colunas da matriz e usando o mesmo argumento, segue que $n_{12} = 0$. Se $n_{21} \neq 0$, então de $\delta_{12}^{14} = \delta_{12}^{13} = 0$ obtemos que
$$n_{14} = \frac{n_{11}n_{24}}{n_{21}} \ , \ \ n_{13} = \frac{n_{11}n_{23}}{n_{21}}.$$
Logo,
$$\delta_{12}^{34} = \frac{n_{11}n_{23}n_{24}}{n_{21}} - \frac{n_{11}n_{24}n_{23}}{n_{21}} = 0,$$
uma contradição. Segue que $n_{21} = n_{22} = 0$. Neste caso, $n_{11} = n_{12} = n_{21} = n_{22} = 0$.

Agora, vamos considerar $[{c_1}^f, {d_1}^f]$ módulo $Z(G)$.
$$1 \equiv [{c_1}^f, {d_1}^f] \equiv [a,c]^{\delta_{13}^{34}}[a,d]^{\delta_{14}^{34}}[b,c]^{\delta_{23}^{34}}[b,d]^{\delta_{24}^{34}} \ mod(Z(G)).$$
Então $\delta_{13}^{34} = \delta_{14}^{34} = \delta_{23}^{34} = \delta_{24}^{34} = 0$. Seguindo o mesmo argumento anterior, temos que δ_{34}^{12} e δ_{34}^{34} não podem ser simultaneamente nulos. Caso $\delta_{34}^{12} \neq 0$, $n_{33} = n_{34} = n_{43} = n_{44} = 0$ e caso $\delta_{34}^{34} \neq 0$, $n_{31} = n_{32} = n_{41} = n_{42} = 0$. Combinando os casos e levando em consideração que $det(N_f) \neq 0$, obtemos que a matriz inicial assume uma das formas
$$N_{f_1} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} & n_{34} \\ 0 & 0 & n_{43} & n_{44} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad N_{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_{13} & n_{14} \\ 0 & 0 & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & 0 & 0 \\ n_{41} & n_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
□

Lema 5.2.3. *Se $det(N_f) \neq 0$ então $N_f = N_1$ e*
$${a_1}^f = a_1u_1, \quad {b_1}^f = b_1u_2, \quad {c_1}^f = c_1u_3 \quad e \quad {d_1}^f = d_1u_4,$$
com $u_1, u_2, u_3, u_4 \in G'$.

Demonstração. Veja demonstração do Lema 3.2 em [27].

□

5.2.2 Não existência de representação autossimilar para $N_{3,4}$

O Lema 5.2.3 significa que o homomorfismo $\overline{f} : KG'/G' \longrightarrow G/G'$, definido por $(xG')^{\overline{f}} = x^f G'$, para todo $x \in K$ age como um IA-homomorfismo: $x^f G' = xG'$.

Proposição 5.2.4. *Seja $G = N_{3,4}$ e considere $f : H \to G$ um endomorfismo virtual de G tal que $det(N_f) \neq 0$. Então $Z(K)^f \leqslant Z(K)$.*

Demonstração. Pelo Lema 5.2.3 $f : H \to G$ é um monomorfismo e portanto $f : K \to K^f$ é um isomorfismo. Logo K^f tem índice finito em G. Assim, G, K e K^f têm completamentos de Malcev isomorfos. O isomorfismo $f : K \longrightarrow K^f$ estende-se a um automorfismo $\widetilde{f} : G^{\#} \to G^{\#}$, onde $G^{\#}$ é o completamento de Malcev de G e $\widetilde{f}\big|_K = f$.

Seja $\phi = \widetilde{f}\big|_G : G \to G^*$. Se $g \in G$, existe um inteiro positivo t tal que $g^t \in K$. Assim:

$$(g^t)^f G' = g^t G' = (gG')^t.$$

Por outro lado,

$$(g^t)^f G' = (g^t)^\phi G' = (g^\phi G')^t.$$

Portanto, $(gG')^t = (g^\phi G')^t$ e como G/G' é livre de torção, $gG' = g^\phi G'$. Logo, $g^\phi = gz$, com $z \in G'$, i.e., $G^\phi \leqslant G$ e $\phi \in End(G)$. Na verdade, ϕ é um IA-automorfismo de G; de fato, pelo Lema 2.4 [28], IA-endomorfismos de grupos nilpotentes são IA-automorfismos. Assim, $\phi \in IA(G)$.

No grupo $Hol(G) = G \rtimes Aut(G)$, o *holomorfo* de G, é conhecido que $[\gamma_i(G), \gamma_j(IA(G)] \leqslant \gamma_{i+j}(G)$, para quaisquer i, j naturais (veja, o Teorema 7.13 em [4]). Com esse fato, temos que $[\gamma_3(G), IA(G)] = 1$.

Como $[G : K]$ é finito, então $Z(K) = K \cap Z(G)$. Agora $\gamma_3(G) = Z(G)$ implica que $[.Z(G), IA(G)] = 1$. Seja $x \in Z(K)$, então $[x, \phi] = 1$, então $x^\phi = x$. Agora, como $x \in K$, $x^f = x^\phi = x$. Portanto, $Z(K)^f \leqslant Z(K)$. □

A seguinte Proposição é uma releitura do Lema 3.3 em [27].

Proposição 5.2.5. *Seja $f : H \to N_{3,4}$ um endomorfismo virtual tal que $det(N_f) = 0$, então existe um subgrupo $W \neq \{e\}$ normal em $N_{3,4}$ com $W \leqslant Ker(f)$.*

Demonstração. Por simplicidade de notação, vamos denotar o grupo $N_{3,4}$ por G. Considere W o grupo gerado por

$$\{[a_1, b_1], [c_1, d_1], [a_1, [a_1, d_1]], [a_1, [b_1, c_1]], [a_1, [b_1, d_1]]\}.$$

Como $\{[a,b],[c,d],[a,[a,d]],[a,[b,c]],[a,[b,d]]\}$ é base para $Z(G)$, então $W \leqslant Z(G) \cap K$ e portanto, W é um subgrupo normal de G.

Como as linhas da matriz N_f são linearmente dependentes, seguem que existem inteiros, nem todos nulos, t_1, t_2, t_3 e t_4 tais que

$$a_1{}^{t_1 f} b_1{}^{t_2 f} c_1{}^{t_3 f} d_1{}^{t_4 f} U = 1,$$

onde $U \in G' = Z(G)$.
Assim,

$$[[a_1{}^{t_1 f} b_1{}^{t_2 f} c_1{}^{t_3 f} d_1{}^{t_4 f} U, x^f], y^f] = [a_1, x, y]^{t_1 f} [b_1, x, y]^{t_2 f} [c_1, x, y]^{t_3 f} [d_1, x, y]^{t_4 f} = 1.$$

Para pares de geradores de K segue que:

(1) $x = a_1$ $y = a_1$

$$[c,d]^{m^2 k t_3 f} [a_1, [a_1, d_1]]^{t_4 f} = 1 \tag{5.16}$$

(2) $x = a_1$ $y = b_1$

$$[a,[b,c]]^{-mnkt_3 f} [a,[b,c]]^{-mnjt_4 f} = 1 \tag{5.17}$$

(3) $x = b_1$ $y = b_1$

$$[c,d]^{t_4 n^2 j f} = 1 \tag{5.18}$$

(4) $x = a_1$ $y = c_1$

$$[a,b]^{-mk^2 t_3 f} [a,[b,c]]^{-mkjt_4 f} = 1 \tag{5.19}$$

(5) $x = c_1$ $y = a_1$

$$[c,d]^{-m^2 k t_1 f} [a_1, [b_1, c_1]]^{t_2 f} = 1 \tag{5.20}$$

(6) $x = c_1$ $y = c_1$

$$[a,b]^{mk^2 t_1 f} [a,[a,d]]^{nk^2 t_2 f} = 1 \tag{5.21}$$

(7) $x = b_1$ $y = c_1$

$$[a,[a,d]]^{-nk^2 t_3 f} [a,b]^{-nkjt_4 f} = 1 \tag{5.22}$$

(8) $x = c_1$ $y = b_1$

$$[[a_1, [b_1, c_1]]^{mnkt_1 f} = 1 \tag{5.23}$$

(9) $x = a_1$ $y = d_1$

$$[a_1, [b_1, d_1]]^{t_3 f} = 1 \tag{5.24}$$

(10) $x = d_1$ $y = a_1$

$$[a_1, [a_1, d_1]]^{t_1 f}[a_1, [b_1, d_1]]^{t_2 f} = 1 \tag{5.25}$$

(11) $x = b_1$ $y = d_1$

$$[c_1, b_1, d_1]^{t_3 f}[a, [b, c]]^{-nj^2 t_4 f} = 1 \tag{5.26}$$

(12) $x = d_1$ $y = b_1$

$$[a, [b, d]]^{mnjt_1 f}[c, d]^{n^2 jt_2 f} = 1 \tag{5.27}$$

(13) $x = d_1$ $y = c_1$

$$[a_1, d_1, c_1]^{t_1 f}[a, b]^{nkjt_2 f} = 1 \tag{5.28}$$

Assuma que $t_1 \neq 0$. De 5.23, 5.20, 5.27, 5.25 e 5.21 obtemos respectivamente que $[a_1, [b_1, c_1]]^f = 1$, $[c_1, d_1]^f = 1$, $[a_1, [b_1, d_1]]^f = 1$, $[a_1, [a_1, d_1]]^f = 1$ e $[a_1, b_1]^f = 1$.

Assuma $t_1 = 0$ e $t_2 \neq 0$. De 5.21, 5.20, 5.25, 5.27 e 5.28, temos que $[a_1, [a_1, d_1]]^f = 1$, $[a_1, [b_1, c_1]]^f = 1$, $[a_1, [b_1, d_1]]^f = 1$, $[c_1, d_1]^f = 1$ e $[a_1, b_1]^f = 1$.

Assuma $t_1 = t_2 = 0$ e $t_3 \neq 0$. De 5.24, 5.17, 5.19, 5.22 e 5.16, obtemos $[a_1, [b_1, d_1]]^f = 1$, $[a_1, [b_1, c_1]]^f = 1$, $[a_1, b_1]^f = 1$, $[a_1, [a_1, d_1]]^f = 1$ e $[c_1, d_1]^f = 1$.

Assuma $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ e $t_4 \neq 0$. De 5.16, 5.18, 5.22, 5.26 e 5.17, obtemos $[a_1, [a_1, d_1]]^f = 1$, $[c_1, d_1]^f = 1$, $[a_1, b_1]^f = 1$, $[a_1, [b_1, c_1]]^f = 1$ e $[a_1, [b_1, d_1]]^f = 1$.

Portanto, os geradores de W pertencem ao núcleo do endomorfismo virtual f. □

Teorema 5.2.6. *O grupo $N_{3,4}$ não admite representação autossimilar fiel em $\mathcal{T}_m$, qualquer que seja m.*

Demonstração. Seja G o grupo $N_{3,4}$. Considere $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ dados para G. Como H_i tem índice finito em G, podemos assumir que $K \leqslant \cap_{i=1}^{s} H_i$.

Suponha que exista $f_i \in \mathbf{F}$ tal que $det(N_{f_i}) = 0$; então, pela Proposição 5.2.5, existe um subgrupo $W \neq \{e\}$ normal em G com $W \leqslant Ker(f_i)$. Assim, $Z(K) \cap W$ é um subgrupo não trivial de $\cap_{i=1}^{s} H_i$, normal em G e f_i-invariante para todos $i = 1, \ldots, s$.

Agora, se cada $f_i \in \mathbf{F}$ é tal que $det(N_{f_i}) \neq 0$, então pela Proposição 5.2.4 $Z(K)$ é um subgrupo não trivial de $\cap_{i=1}^{s} H_i$, normal em G e f_i-invariante para todos $i = 1, \ldots, s$. Em ambos os casos, G não tem representação autossimilar fiel. □

Referências Bibliográficas

[1] A. Berlatto and S. N. Sidki, *Virtual endomorphisms of nilpotent groups*, Groups, Geometry and Dynamics, **1** (2007), 21-46.

[2] A. C. Dantas and S. N. Sidki, *On state-closed representations of restricted wreath product of groups of type $G_{p,d} = C_p \wr C^d$* , J. Algebra, **500** (2018), 335 - 361.

[3] A. C. Dantas and S. N. Sidki, *On self-similarity of wreath products of abelian groups*, Groups, Geometry and Dynamics, **12** (2018), 1061–1068.

[4] A. E. Clement et al, *The Theory of Nilpotent Groups*, Birkhauser, 2017.

[5] A. M. Brunner and S. N. Sidki, *Abelian state-closed subgroups of automorphisms of m-ary trees*, Groups, Geometry, and Dynamics, **3** (2010) 455 - 472.

[6] A. M. Brunner and S. N. Sidki, *On the Automorphism group of the one-rooted binary tree*, Jornal of Algebra, **195** (1997) 455 - 486.

[7] A. M. Brunner and S. N. Sidki, *Wreath operations in the group of automorphisms of the binary tree*, Jounal of Algebra, **257** (2002), 51- 64.

[8] A. Kaloujnine and M. Krasner, *Le produit complet des groupes de permutations et le problème d'extension des groupes*. C. R. Acad. Sci. Paris, **227**, (1948), 806-808 (French).

[9] A. Woryna, *The concept of self-similar automata over a changing alphabet and lamplighter groups generated by such automata ,* Theoretical Computer Science, **482** (2013), 96-110.

[10] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, New York, (2000).

[11] D. Segal, *Polycyclic Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[12] J. Dyer, *A nilpotent Lie group with nilpotent automorphism group*, Bulletin of the American Mathematical Society. **76** (1970), 52-56.

[13] K. W. Gruenberg, *Residual properties of infinite soluble groups*, Preceedings of the London Mathematical Society, **s3-7(1)** (1957), 29-62.

[14] L. Bartholdi and S. N. Sidki. *Self-similar products of groups,* Groups, Geometry, and Dynamics, **14** (2020), 107–115.

[15] L. Bartholdi and Z. Sunik, *Some solvable automata groups*, Contemp. Math., **394**, (2006), 11 - 30.

[16] L. Ribes and P. Zalesski, *Profinite Groups*, Springer-Verlag, Berlim, 1996.

[17] M. F. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumamm Algebras*, Société Mathématic de France, (1976) 43-72.

[18] N. Gupta and S. Sidki, *On the Burnside problem for periodic groups*, Math Z., **182** (1983), 385-388.

[19] O. Mathieu, *Which Nilpotent Groups are Self-Similar?* arXiv:2101.11291 [math.GR] (2021).

[20] P. Silva, B. Steinberg, *On a class of automata groups generalizing Lamplighter groups*, Int. J. Algebra Comut., **15**, (2005) 1213-1234.

[21] P. W. Gawron, V. V. Nekrashevych and V. I. Sushchansky, *Conjugation in tree automorphism groups*, International Journal of Algebra and Computation, 547. **11**, (2001) 529-547.

[22] R. I. Grigorchuk, *On the Burnside problem for periodic groups*, Functional Anal. Appl., **14** (1980), 41-43.

[23] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, Vol. A, Academia Prees, New York, (1974).

[24] S. N. Sidki, *Regular trees and their automorphisms*, Monografias de Matemática, vol 56, Instituto de Matemátuca Pura e Aplicada, **15**, (1998).

[25] S. N. Sidki, *Tree wreathing applied to the generation of groups by finite automata*, International Journal of Algebra and Computation, **15**. (2005) 1-8.

[26] S. N. Sidki, *Self-similar groups: old and new results*, Conference paper: Trees, Dynamics and Locally Compact Groups, Dusseldorf. ResearchGate, (2018).

[27] V. V. Bludov and B. V. Gusev, *Geometric Equivalence of Groups*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (2007), Suppl. 1, S61–S82.

[28] V.V. Bludov, *On residually torsion-free-nilpotent groups*, J. Group Theory **12**, (2009), 579-590.

[29] V. Nekrashevych, *Self-similar groups*, Math. Surveys and Monographs, 117, American Mathematical Society, Providence, RI, (2005).

[30] V. Nekrachevych and S. N. Sidki, *Automorphisms of the binary tree: state-closed subgroups and dynamics of 1/2 endomorphisms*, In: Groups: London Mathematical Lecture Notes Series, Topological, Combinatorial and Arithmetic Aspects, Muller, T. W., (Ed.) **311**, (2004) 375-404.

[31] Y. Benoist, *Une nilvariete non-affine*, J. Differential Geometry **41**, (1995) 21-52.