Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

UMA CLASSE DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DESCREVENDO SUPERFÍCIES PSEUDO-ESFÉRICAS OU ESFÉRICAS

por

Filipe Kelmer Alves

Orientadora: Profª. Drª. Keti Tenenblat

Brasília

2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

UMA CLASSE DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DESCREVENDO SUPERFÍCIES PSEUDO-ESFÉRICAS OU ESFÉRICAS.

por

Filipe Kelmer Alves*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 24 de junho de 2021.

Comissão Examinadora:

Keti Tenenblat

Profa. Dra. Keti Tenenblat- MAT/UnB (Orientador)

Tarcísio Castro Silva

Prof. Dr. Tarcisio Castro Silva– MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli– UFBA (Membro)

Prof. Dr. Luquésio Petrola de Melo Jorge-– UFC (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

"Let me see, then, what thereat is, and this mystery explore-
Let my heart be still a moment and this mystery explore;-
'Tis the wind and nothing more!"

Edgar Allan Poe

Agradecimentos

Agradeço, principalmente, à Professora Keti pela excelente orientação.

Agradeço à banca pelas sugestões e discussões.

Agradeço a todos do programa de Pós-Graduação da UnB, em particular ao Professor João Paulo, por sua contribuição ímpar na minha formação.

À toda minha família, Carol, meus pais Simone e Geraldo, avôs, padrinhos, tios e primos.

Aos meus queridos amigos que me acompanharam por todo o doutorado, Andrés, Nathália, Marta, Welinton, Fabian e Alancoc. Agradeço também a todos que contribuíram com minha formação como Maria Eugênia e aos amigos de Brasília que torceram por mim, Henrique e João.

À Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Consideramos sistemas de equações diferenciais reais do tipo

$$\begin{cases} u_{xt} = F\left(u, u_x, ..., u_{x^n}, v, v_x, ..., v_{x^m}\right), \\ v_{xt} = G\left(u, u_x, ..., u_{x^n}, v, v_x, ..., v_{x^m}\right), \end{cases}$$

com $n, m \geq 1$, descrevendo superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, isto é, suas soluções genéricas correspondem a métricas, em abertos do plano (x, t), com curvatura $K = -1$ ou $K = 1$. Estes sistemas são também condições de integrabilidade de problemas lineares em $\mathfrak{g}$, com $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$, quando $K = -1$ ou $K = 1$, respectivamente. Obtemos resultados de caracterização e também de classificação. Aplicações destes resultados fornecem novos exemplos e novas famílias contendo sistemas de equações tais como Pohlmeyer-Lund-Regge, Konno-Oono e *short-pulse* vetorial.

Palavras-chave: sistemas de equações diferenciais, superfícies pseudo-esféricas, superfícies esféricas, métricas de curvatura constante.

Abstract

We consider real partial diferential equations of the form

$$\begin{cases} u_{xt} = F\left(u, u_x, ..., u_{x^n}, v, v_x, ..., v_{x^m}\right), \\ v_{xt} = G\left(u, u_x, ..., u_{x^n}, v, v_x, ..., v_{x^m}\right), \end{cases}$$

with $n, m \geq 1$, describing pseudo-spherical or spherical surfaces, meaning that, their generic solutions provide metrics, with coordinates (x, t), on open subsets of the plane, with constant curvature $K = -1$ or $K = 1$. These systems can be described as integrability conditions of $\mathfrak{g}$-valued linear problems, with $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ or $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$, when $K = -1$, $K = 1$, respectively. We obtain characterization and also classification results. Applications of the theory provide new examples and new families which contains systems of equations such as Pohlmeyer-Lund-Regge, Konno-Oono, and vectorial short-pulse.

Keywords: systems of hyperbolic equations, pseudo-spherical surfaces, spherical surfaces, metrics of constant curvature.

Sumário

Introdução

Dizemos que um sistema de equações diferenciais (S) para duas funções reais $u(x,t)$ e $v(x,t)$ *descreve superfícies pseudo-esféricas* (resp. *superfícies esféricas*) se existem seis funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, dependendo de u, v e um número finito de suas derivadas de modo que, as três 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i = 1,2,3$, satisfazem as *equações de estrutura* de uma superfície de curvatura constante $K = -1$ (resp. 1),

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \qquad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \qquad d\omega_3 = \delta\omega_1 \wedge \omega_2,$$

onde $\delta = 1$ (resp. -1) e $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, se, e somente se, u e v é uma solução do sistema (S).

Por exemplo a equação não-linear de Schrödinger, para funções $u(x,t)$ e $v(x,t)$, dada pelo sistema

$$\begin{cases} u_t + v_{xx} - 2(u^2+v^2)v = 0, \\ -v_t + u_{xx} - 2(u^2+v^2)u = 0, \end{cases}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas [13], para as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= 2u, & f_{12} &= -4\eta u - 2v_x, \\ f_{21} &= -2v, & f_{22} &= 4\eta v - 2u_x, \\ f_{31} &= 2\eta, & f_{32} &= -4\eta^2 - 2(u^2+v^2), \end{aligned}$$

onde η é uma constante real.

Um sistema de equações diferenciais que descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) pode ser visto como condição de integrabilidade de um *problema linear*,

$$d\Psi = \Omega\Psi,$$

para $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$, com Ψ_i, $i = 1,2$, funções de (x,t), e

$$\Omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_2 & \omega_1 - \omega_3 \\ \omega_1 + \omega_3 & -\omega_2 \end{pmatrix} \qquad \left(\text{resp.} \quad \Omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\omega_2 & \omega_1 + i\omega_3 \\ -\omega_1 + i\omega_3 & -i\omega_2 \end{pmatrix}\right).$$

De fato, a *condição de integrabilidade* deste problema linear,

$$d\Omega - \Omega \wedge \Omega = 0,$$

é equivalente às equações de estrutura, com $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$). Alternativamente o sistema de equações diferenciais pode ser visto, também, como condição de integrabilidade de um problema linear 3×3 (ver detalhes em Preliminares).

O conceito de sistemas de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) foi introduzido em 2002 por Ding e Tenenblat em [13], como uma adaptação natural da noção de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas. A ideia de equações diferenciais que descreve superfícies pseudo-esféricas foi introduzida na literatura, em 1986, por Chern e Tenenblat em [12].

A definição dada por Chern e Tenenblat foi inspirada pela observação de Sasaki em [32], de que a classe de equações diferenciais que podiam ser resolvidas aplicando o método AKNS de espalhamento inverso [1] estava relacionada com superfícies pseudo-esféricas. Entretanto, a classe de equações que descrevem superfícies pseudo-esféricas é, na verdade, bem maior que a classe das equações AKNS.

Além da noção de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas, Chern e Tenenblat, em [12], introduziram um processo sistemático de caracterização e classificação de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas. Tal processo sistemático vem sendo utilizado para caracterizar e classificar várias classes de equações diferenciais [12, 18, 26, 27, 28, 19, 29, 16, 7, 8, 10].

O fato das equações que descrevem superfícies pseudo-esféricas serem condição de integrabilidade de um problema linear, indica que estas equações podem possuir outras propriedades, por exemplo, transformações de Bäcklund [12, 3] e infinito número de leis de conservação [11]. Além disso, tais equações são candidatas a serem resolvidas pelo método do espalhamento inverso [1, 3].

Outra propriedade notável das equações que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas é a existência teórica de transformações locais entre soluções destas equações. Esta existência local é uma consequência do fato, de que, escolhidos dois pontos de duas variedades Riemannianas, de mesma dimensão e mesma curvatura constante, sempre existe uma isometria entre vizinhanças destes pontos [6]. Kamran e Tenenblat, em [19], exploraram essa propriedade e demonstraram um teorema de existência local, garantindo que, dadas duas equações diferenciais descrevendo superfícies pseudo-esféricas, então, sob certa hipótese técnica, existe localmente, uma aplicação suave levando cada solução genérica de um equação numa solução genérica da outra.

No trabalho de Ding e Tenenblat [13], em 2002, além de introduzirem o conceito de sistemas de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, os autores consideraram resultados de caracterização para sistemas de equações de evolução que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas do tipo

$$\begin{cases} u_t = F(u, u_x, v, v_x), \\ v_t = G(u, u_x, v, v_x), \end{cases}$$

onde F e G são funções suaves, e apresentaram resultados de classificação para sistemas do tipo

$$\begin{cases} u_t = -v_{xx} + H_{11}(u,v)u_x + H_{12}(u,v)v_x + H_{13}(u,v), \\ v_t = u_{xx} + H_{21}(u,v)u_x + H_{22}(u,v)v_x + H_{23}(u,v), \end{cases}$$

onde, F, G, H_{ij}, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$, são funções suaves. Ademais deste trabalho pouco se conhece sobre sistemas de equações diferenciais descrevendo superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Neste trabalho vamos considerar sistemas de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas do tipo, digamos $(S_{n,m})$,

$$(S_{n,m}) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = F\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, ..., \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}, v, \dfrac{\partial v}{\partial x}, ..., \dfrac{\partial^m v}{\partial x^m}\right), \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = G\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, ..., \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}, v, \dfrac{\partial v}{\partial x}, ..., \dfrac{\partial^m v}{\partial x^m}\right), \end{cases}$$

onde n e m são números inteiros maiores ou iguais a 1 e F, G são funções reais suaves.

Apresentaremos, nos Teoremas 1.1, 2.1 e 3.1, resultados de caracterização, isto é, condições necessárias e suficientes, para que estes sistemas descrevam superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Mostraremos no Exemplo 1.1 que o sistema Pholmeyer-Lund-Regge (veja [2]),

$$\begin{cases} u_{xt} = 2uvu_x - u, \\ v_{xt} = -2uvv_x - v, \end{cases}$$

do tipo $S_{1,1}$, descreve superfícies pseudo-esféricas, com

$$\begin{array}{ll} f_{11} = \eta(u_x + v_x), & f_{12} = \frac{1}{\eta}(v - u), \\ f_{21} = \eta^2, & f_{22} = -\frac{1}{\eta^2} - 2uv, \\ f_{31} = \eta(u_x - v_x), & f_{32} = -\frac{1}{\eta}(u + v), \end{array}$$

com f_{21} sendo um parâmetro real. Motivados por este exemplo, vamos classificar nos Teoremas 1.2, 1.3 e 1.4 os sistemas do tipo $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas sob a hipótese de que $f_{i1} = \eta$ é um parâmetro real, para $i = 3$, 2 e 1, respectivamente.

Motivados pelo "Konno-Oono coupled integrable dispersionless system"[21]

$$\begin{cases} u_{xt} = -2vv_x, \\ v_{xt} = 2vu_x, \end{cases}$$

que é um sistema do tipo $(S_{1,1})$ que descreve superfícies pseudo-esféricas com (mais detalhes no Exemplo 1.2),

$$\begin{aligned} f_{11} &= \tfrac{2}{\lambda}v_x, & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \tfrac{2}{\lambda}u_x, & f_{22} &= \lambda, \\ f_{31} &= 0, & f_{32} &= 2v, \end{aligned}$$

exibiremos, na Proposição 1.6, uma família a quatro parâmetros e uma função arbitrária de sistemas descrevendo superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, contendo "Konno-Oono coupled integrable dispersionless system", tal que f_{22} é um parâmetro real.

Como aplicação dos teoremas de classificação, vamos exibir na Seção 1.3 do Capítulo 1, quatro novas famílias, a vários parâmetros, de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, nas quais cada sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares. Por exemplo, mostramos na Proposição 1.4, que dadas três constantes reais não nulas, k_0, k_1, k_2 e uma função não constante, $\psi(v_x)$, que depende diferenciavelmente de v_x, então, o sistema,

$$\begin{cases} u_{xt} = k_1 e^{k_0 u}\psi(v_x), \\ v_{xt} = (\delta k_2^{-2} - k_0^2)\dfrac{u_x k_1 e^{k_0 u}}{\psi'(v_x)}, \end{cases}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, se $\delta = 1$, ou superfícies esféricas se $\delta = -1$.

Apresentaremos na Seção 2.2 uma classificação dos sistemas do tipo $(S_{2,1})$ e $(S_{1,2})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com a hipótese de que f_{i1} é uma constante real não nula para $i = 3$, $i = 2$ e $i = 1$ (ver os Teoremas 2.4, 2.7 e 2.10 respectivamente). Como aplicação desta classificação, apresentaremos na Proposição 2.3 uma família a um parâmetro $k \in \mathbb{R}$ e cinco funções suaves $s_1(u_x), s_2(u_x), s_3(u_x), r(v_x), p(u,v)$ tais que, $s_1' r' s_2 s_3 \neq 0$, $ps_3 \neq kr$, $p_u^2 + p_v^2 \neq 0$, de sistemas do tipo

$$\begin{cases} u_{xt} = \dfrac{1}{r}\left(s_3 p u_{xx} - \dfrac{1}{s_1'}(rk - ps_3)\right), \\ v_{xt} = \dfrac{1}{r'}\left((s_3 p)_x + \dfrac{s_2'}{s_2 s_1'}(rk - ps_3)\right), \end{cases}$$

descrevendo tanto superfícies pseudo-esféricas quanto superfícies esféricas. Observamos que o fato de uma equação descrever simultaneamente superfícies pseudo-esféricas ou esféricas não é uma propriedade inesperada, de fato várias equações, como por exemplo a Sine-Gordon, apresentam esta propriedade.

Nos Teoremas 3.2, 3.3 e 3.4 apresentamos uma classificação dos sistemas do tipo $(S_{n,m})$, com $n, m \geq 2$, que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com a hipótese de que f_{i1} é uma constante real não nula para $i = 3$, $i = 2$ e $i = 1$ respectivamente.

Motivados pelas equações vetoriais do tipo "short-pulse"[24, 25, 31]

$$\begin{cases} u_{xt} = u + \frac{1}{2}\left(uvu_x\right)_x, \\ v_{xt} = v + \frac{1}{2}\left(uvv_x\right)_x, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} u_{xt} = u + \frac{1}{2}\left((u^2+v^2)u_x\right)_x, \\ v_{xt} = v + \frac{1}{2}\left((u^2+v^2)v_x\right)_x, \end{cases}$$

que (ver Exemplos 3.1 e 3.2) descrevem superfícies pseudo-esféricas e superfícies esféricas, respectivamente, apresentaremos no Teorema 3.5, uma classificação dos sistemas quase-lineares de segunda ordem do tipo,

$$\begin{cases} u_{xt} = F_1(u, u_x, v, v_x) + Q(u, v)u_{xx}, \\ v_{xt} = G_1(u, u_x, v, v_x) + Q(u, v)v_{xx}, \end{cases}$$

que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas em que F_1, G_1 e Q são funções suaves, com a hipótese adicional de que $f_{21} = \eta$ é uma constante real não nula. Como aplicação desta classificação exibiremos, na Seção 3.3 do Capítulo 3, três novas famílias a vários parâmetros de sistemas do tipo $(S_{2,2})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, nas quais cada sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro de problemas lineares.

Este trabalho é organizado em um capítulo de preliminares, outros três capítulos e um apêndice. Nos preliminares descrevemos problemas lineares associados aos sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas e apresentamos exemplos.

Os Capítulos 1, 2 e 3 podem ser lidos de forma independente. O Capítulo 1 trata exclusivamente de sistemas do tipo $(S_{1,1})$. O Capítulo 2 trata dos sistemas do tipo $(S_{2,1})$ ou $(S_{1,2})$. O Capítulo 3 trata dos sistemas do tipo $(S_{n,m})$, com $n, m \geq 2$. Cada capítulo é organizado em três seções. Na primeira seção discutimos o conceito de sistemas descreverem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas. Utilizamos a teoria de Cartan-Kähler [17] para obter uma descrição destes sistemas em termos de sistema de diferenciais exteriores e obtemos um teorema de caracterização. Na segunda seção apresentamos resultados de classificação. Por último, cada capítulo é encerrado com uma seção de aplicações, as quais proporcionam novos exemplos e novas famílias de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas e esféricas.

Finalmente, no Apêndice A, consideramos um problema que trata de caracterizar seis funções suaves satisfazendo uma equação e uma condição genérica. Este problema, apresentado no Lema A.1, é usado nas demonstrações dos teoremas de classificação dos Capítulos 1 e 3.

Capítulo 0

Preliminares

Neste capítulo de preliminares apresentamos problemas lineares associados aos sistemas de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas e damos exemplos.

As equações de estrutura de uma superfície com curvatura constante $K = -\delta$, com $\delta = 1$ (resp. -1),

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \qquad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \qquad d\omega_3 = \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{0.1}$$

são equivalentes a *condição de integrabilidade*

$$d\Omega - \Omega \wedge \Omega = 0, \tag{0.2}$$

de um *problema linear* [12],

$$d\Psi = \Omega\Psi, \tag{0.3}$$

para $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$, com Ψ_i, $i = 1, 2$, funções de (x, t), e

$$\Omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_2 & \omega_1 - \omega_3 \\ \omega_1 + \omega_3 & -\omega_2 \end{pmatrix} \qquad \left(\text{resp.} \quad \Omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\omega_2 & \omega_1 + i\omega_3 \\ -\omega_1 + i\omega_3 & -i\omega_2 \end{pmatrix}\right).$$

Equivalentemente em coordenadas locais, considerando $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i = 1, 2, 3$ e $\Omega = Adx + Bdt$, o problema linear (0.3), para $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$, com Ψ_i, $i = 1, 2$, função de (x, t) é expresso por

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi, \tag{0.4}$$

onde

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_{21} & f_{11} - f_{31} \\ f_{11} + f_{31} & -f_{21} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_{22} & f_{12} - f_{32} \\ f_{12} + f_{32} & -f_{22} \end{pmatrix}, \tag{0.5}$$

se $\delta = 1$ ou,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} if_{21} & f_{11} + if_{31} \\ -f_{11} + if_{31} & -if_{21} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} if_{22} & f_{12} + if_{32} \\ -f_{12} + if_{32} & -if_{22} \end{pmatrix}, \tag{0.6}$$

se $\delta = -1$.

Além disso, a condição de integrabilidade do problema linear (0.4), $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}\right)$, equivale a

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial x} + AB - BA = 0. \tag{0.7}$$

Observamos que o problema linear associado a um sistema de equações não é único. De fato, para um dado sistema que descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) a matriz de 1-formas Ω do problema linear (0.3) e a equação de compatibilidade (0.2) são invariantes por uma transformação do tipo *gauge* [32, 14],

$$\begin{aligned} &\Psi \to \Psi^S = S\Psi, \\ &\Omega \to \Omega^S = dSS^{-1} + S\Omega S^{-1}, \\ &d\Omega - \Omega \wedge \Omega \to S\left(d\Omega - \Omega \wedge \Omega\right) S^{-1}, \end{aligned}$$

em que $S \in SL(2,\mathbb{R})$ (resp. $SU(2)$). Neste caso, em coordenadas locais,

$$\begin{aligned} A \to A^S = SAS^{-1} + S_x S^{-1}, \\ B \to B^S = SBS^{-1} + S_t S^{-1}. \end{aligned}$$

Alternativamente, um sistema de equações diferenciais que descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) pode ser visto como condição de integrabilidade outro tipo de problema linear 3×3 [7],

$$d\hat{\Psi} = \hat{\Omega}\hat{\Psi}, \tag{0.8}$$

para $\hat{\Psi} = \left(\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3\right)^T$ e

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \delta\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ \delta\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\delta = 1$ (resp. -1).

Para o problema linear (0.8), a condição de integrabilidade é dada por

$$d\hat{\Omega} - \hat{\Omega} \wedge \hat{\Omega} = 0. \tag{0.9}$$

Em coordenadas locais, com $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i = 1, 2, 3$ e $\hat{\Omega} = \hat{A}dx + \hat{B}dt$, o problema linear (0.8) é expresso por

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi}, \tag{0.10}$$

onde

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & f_{11} & f_{21} \\ \delta f_{11} & 0 & f_{31} \\ \delta f_{21} & -f_{31} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{22} \\ \delta f_{12} & 0 & f_{32} \\ \delta f_{22} & -f_{32} & 0 \end{pmatrix}, \tag{0.11}$$

com $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$).

Além disso, a condição de integrabilidade do problema linear (0.10), $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t}\right)$, equivale a

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{B}}{\partial x} + \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0. \tag{0.12}$$

Observamos que, se $\delta = -1$, então as matrizes $\hat{A}, \hat{B}$ pertencem à álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$, das matrizes 3×3 reais anti-simétricas, geradas pela base

$$\hat{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

satisfazendo as relações de comutação

$$\left[\hat{\xi}_k, \hat{\xi}_l\right] = \hat{\xi}_m, \tag{0.13}$$

onde k, l e m é uma permutação cíclica de $1, 2, 3$.

Por outro lado, as matrizes A, B, do problema linear (0.4) com $\delta = -1$, pertencem à álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ das matrizes complexas 2×2 anti-Hermitianas de traço nulo, gerada pela base

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

satisfazendo as mesmas relações de comutação (0.13),

$$[\xi_k, \xi_l] = \xi_m,$$

onde k, l e m é uma permutação cíclica de $1, 2, 3$. Assim, existe um isomorfismo entre as álgebras de Lie $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{so}(3)$ dado pela transformação $\mathbb{R}$-linear definida pelo mapa $\xi_i \mapsto \hat{\xi}_i$, $i = 1, 2, 3$.

Em particular, as condições de integrablidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10), para $\delta = -1$, estão relacionados por este isomorfismo de álgebras de Lie. Observamos, entretanto, que apesar das álgebras de Lie $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{so}(3)$ serem isomorfas, os correspondentes grupos de

Lie $SU(2)$ e $SO(3)$ não são isomorfos, pois $SU(2)$ é simplesmente conexo, enquanto $SO(3)$ não é simplesmente conexo.

Observamos que se um sistema de equações diferenciais descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas), então as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$,$1 \leq j \leq 2$, não são únicas. De fato, qualquer transformação ortogonal no co-referencial móvel deixa as equações de estrutura invariantes resultando em novas funções f_{ij}. Em particular, a transformação $\bar{\omega}_1 = \omega_2$, $\bar{\omega}_2 = \omega_1$ e $\bar{\omega}_3 = -\omega_3$, permite transferir o estudo de classificação dos sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com a condição de $f_{11} = \eta$ para o caso de $f_{21} = \eta$. Mais especificamente temos a seguinte proposição.

Proposição 0.1. *Um sistema descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções* f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$ *se, e somente se, descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções* $\bar{f}_{ij}$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$ *tais que,*

$$\begin{aligned} \bar{f}_{11} &= f_{21}, & \bar{f}_{12} &= f_{22}, \\ \bar{f}_{21} &= f_{11}, & \bar{f}_{22} &= f_{12}, \\ \bar{f}_{31} &= -f_{31}, & \bar{f}_{32} &= -f_{32}. \end{aligned} \tag{0.14}$$

Demonstração. Basta notar que as equações de estrutura (0.1), são invariantes por uma transformação no co-referencial móvel do tipo $\bar{\omega}_1 = \omega_2$, $\bar{\omega}_2 = \omega_1$ e na forma de conexão $\bar{\omega}_3 = -\omega_3$.

De fato, sejam $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i = 1, 2, 3$, formas diferenciais e considere $\bar{\omega}_1 = f_{21}dx + f_{22}dt$, $\bar{\omega}_2 = f_{11}dx + f_{12}dt$ e $\bar{\omega}_3 = -f_{31}dx - f_{32}dt$, ou seja, $\bar{\omega}_1 = \omega_2$, $\bar{\omega}_2 = \omega_1$ e $\bar{\omega}_3 = -\omega_3$. Note que,

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_3 \wedge \bar{\omega}_2 &= d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_3 &= d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\bar{\omega}_3 - \delta\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 &= -(d\omega_3 - \delta\omega_1 \wedge \omega_2). \end{aligned}$$

Deste modo as formas ω_i, $i = 1, 2, 3$ satisfazem as equações de estrutura (0.1) se, e somente se, as formas $\bar{w}_i$, $i = 1, 2, 3$ também satisfazem. Assim concluímos a demonstração desta proposição. $\square$

Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} u_{xt} = (uv)(u_{xx} + v)v_x^{-1}, \\ v_{xt} = (uv)_x, \end{cases} \tag{0.15}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas com (conforme (2.98)),

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{v_x}{2}\left(u_x^\eta + \frac{1}{u_x^\eta}\right), & f_{12} &= \frac{uv}{2}\left(u_x^\eta + \frac{1}{u_x^\eta}\right),\\
f_{21} &= \eta, & f_{22} &= 0, \qquad (0.16)\\
f_{31} &= \frac{v_x}{2}\left(u_x^\eta - \frac{1}{u_x^\eta}\right), & f_{32} &= \frac{uv}{2}\left(u_x^\eta - \frac{1}{u_x^\eta}\right).
\end{aligned}$$

Também, utilizando transformação (0.14), vemos que este sistema descreve superfícies pseudo-esféricas para as funções associadas f_{ij}, dadas por,

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \eta, & f_{12} &= 0,\\
f_{21} &= \frac{v_x}{2}\left(u_x^\eta + \frac{1}{u_x^\eta}\right), & f_{22} &= \frac{uv}{2}\left(u_x^\eta + \frac{1}{u_x^\eta}\right), \qquad (0.17)\\
f_{31} &= \frac{v_x}{2}\left(\frac{1}{u_x^\eta} - u_x^\eta\right), & f_{32} &= \frac{uv}{2}\left(\frac{1}{u_x^\eta} - u_x^\eta\right).
\end{aligned}$$

Como consequência o sistema (0.15) é condição de integrabilidade de problemas lineares distintos. Por exemplo, é condição de integrabilidade do problema (0.4) com

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta & v_x u_x^{-\eta} \\ v_x u_x^\eta & -\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{uv}{2}\begin{pmatrix} 0 & u_x^{-\eta} \\ u_x^\eta & 0 \end{pmatrix},$$

para as f_{ij} dadas por (0.16) e também com

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} v_x u_x^\eta + \dfrac{v_x}{u_x^\eta} & 2\eta - \dfrac{v_x}{u_x^\eta} + v_x u_x^\eta \\ 2\eta + \dfrac{v_x}{u_x^\eta} - v_x u_x^\eta & -v_x u_x^\eta - \dfrac{v_x}{u_x^\eta} \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{uv}{4}\begin{pmatrix} u_x^\eta + u_x^{-\eta} & u_x^\eta - u_x^{-\eta} \\ u_x^{-\eta} - u_x^\eta & -u_x^\eta - u_x^{-\eta} \end{pmatrix},$$

para as f_{ij} dadas por (0.17).

Encerramos este capítulo preliminar exibindo exemplos de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esférica e seus problemas lineares associados. Outros exemplos e famílias de novos sistemas, obtidos através de resultados gerais de caracterização e classificação, serão incluídos nos próximos capítulos.

O sistema do tipo Pholmeyer-Lund-Regge [2],

$$\begin{cases} u_{xt} = 2uvu_x - u, \\ v_{xt} = -2uvv_x - v. \end{cases}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas (ver o Exemplo 1.1) com funções,

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \eta(u_x + v_x), & f_{12} &= \tfrac{1}{\eta}(v - u),\\
f_{21} &= \eta^2, & f_{22} &= -\tfrac{1}{\eta^2} - 2uv,\\
f_{31} &= \eta(u_x - v_x), & f_{32} &= -\tfrac{1}{\eta}(u + v).
\end{aligned}$$

onde $\eta \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real não nulo. Além disso, esse sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares dos tipos (0.4) e (0.10), com

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} \eta & 2v_x \\ 2u_x & -\eta \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2\eta}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\eta} - 2\eta uv & 2v \\ -2u & \frac{1}{\eta} + 2\eta uv \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = \eta\begin{pmatrix} 0 & u_x + v_x & \eta \\ u_x + v_x & 0 & u_x - v_x \\ \eta & v_x - u_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} 0 & v - u & -\frac{1}{\eta} - 2\eta uv \\ v - u & 0 & -u - v \\ -\frac{1}{\eta} - 2\eta uv & u + v & 0 \end{pmatrix}.$$

O “Konno-Oono coupled integrable dispersionless system”[21],

$$\begin{cases} u_{xt} = -2vv_x, \\ v_{xt} = 2vu_x. \end{cases}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas (veja o Exemplo 1.2), para as funções f_{ij} associadas,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \tfrac{2}{\nu}v_x, & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \tfrac{2}{\nu}u_x, & f_{22} &= \nu, \\ f_{31} &= 0, & f_{32} &= 2v, \end{aligned}$$

em que ν é um parâmetro real não nulo. Além disso, esse sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares dos tipos (0.4) e (0.10), com

$$A = \frac{1}{\nu}\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ v_x & -u_x \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \nu & -2v \\ 2v & -\nu \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = \frac{2}{\nu}\begin{pmatrix} 0 & v_x & u_x \\ v_x & 0 & 0 \\ u_x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 2v \\ \nu & -2v & 0 \end{pmatrix}.$$

A equação (vetorial) do tipo “short-pulse”[24, 25, 31],

$$\begin{cases} u_{xt} = u + \frac{1}{2}\left(uvu_x\right)_x, \\ v_{xt} = v + \frac{1}{2}\left(uvv_x\right)_x, \end{cases}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas (veja o Exemplo 3.1), para as funções f_{ij} associadas,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \tfrac{\eta}{2}(v_x + u_x), & f_{12} &= \tfrac{1}{2}(v - u) + \tfrac{\eta}{4}uv(u_x + v_x), \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= \tfrac{1}{\eta} + \tfrac{\eta}{2}uv, \\ f_{31} &= \tfrac{\eta}{2}(v_x - u_x), & f_{32} &= \tfrac{1}{2}(u + v) + \tfrac{\eta}{4}uv(v_x - u_x), \end{aligned}$$

em que η é um parâmetro real não nulo. Além disso, esse sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares dos tipos (0.4) e (0.10), com

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} 1 & u_x \\ v_x & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}uv & -u + \frac{\eta}{2}uvu_x \\ v + \frac{\eta}{2}uvv_x & -\frac{1}{\eta} - \frac{\eta}{2}uv \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} 0 & v_x + u_x & 2 \\ v_x + u_x & 0 & v_x - u_x \\ 2 & u_x - v_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(v-u) + \frac{\eta}{4}uv(u_x+v_x) & \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}uv \\ \frac{1}{2}(v-u) + \frac{\eta}{4}uv(u_x+v_x) & 0 & \frac{1}{2}(u+v) + \frac{\eta}{4}uv(v_x-u_x) \\ \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}uv & -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{\eta}{4}uv(v_x-u_x) & 0 \end{pmatrix}.$$

A equação (vetorial) do tipo "short-pulse"[24],

$$\begin{cases} u_{xt} = u + \frac{1}{2}\left((u^2+v^2)u_x\right)_x, \\ v_{xt} = v + \frac{1}{2}\left((u^2+v^2)v_x\right)_x, \end{cases}$$

descreve superfícies esféricas (veja o Exemplo 3.2), para as funções f_{ij} associadas,

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\eta v_x, & f_{12} &= -u - \tfrac{\eta}{2}(u^2+v^2)v_x, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= -\tfrac{1}{\eta} + \tfrac{\eta}{2}(u^2+v^2), \\ f_{31} &= \eta u_x, & f_{32} &= -v + \tfrac{\eta}{2}(u^2+v^2)u_x, \end{aligned}$$

em que η é um parâmetro real não nulo. Além disso, esse sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares dos tipos (0.4) e (0.10), com

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} i & -v_x + iu_x \\ v_x + iu_x & -i \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{i}{\eta} + i\frac{\eta}{2}(u^2+v^2) & -u - iv + \frac{\eta}{2}(u^2+v^2)(-v_x+iu_x) \\ u - iv + \frac{\eta}{2}(u^2+v^2)(v_x+iu_x) & \frac{i}{\eta} + i\frac{\eta}{2}(u^2+v^2) \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = \eta\begin{pmatrix} 0 & -v_x & 1 \\ v_x & 0 & u_x \\ -1 & -u_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -u - \frac{\eta}{2}(u^2+v^2)v_x & -\frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}(u^2+v^2) \\ u + \frac{\eta}{2}(u^2+v^2)v_x & 0 & -v + \frac{\eta}{2}(u^2+v^2)u_x \\ \frac{1}{\eta} - \frac{\eta}{2}(u^2+v^2) & v - \frac{\eta}{2}(u^2+v^2)u_x & 0 \end{pmatrix}.$$

O sistema (veja a Proposição 1.4)

$$\begin{cases} u_{xt} = k_1 e^{k_0 u}\psi(v_x), \\ v_{xt} = (\delta k_2^{-2} - k_0^2)\dfrac{u_x k_1 e^{k_0 u}}{\psi'(v_x)}, \end{cases}$$

onde, k_0, k_1, k_2 são constantes não nulas e $\psi(v_x)$ é uma função suave de v_x, descreve superfícies pseudo-esféricas, se $\delta = 1$, ou superfícies esféricas se $\delta = -1$ com

$$\begin{aligned} f_{11} &= k_2^{-1}u_x, & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= -k_1 k_2^{-1} e^{k_0 u}, \\ f_{31} &= \eta k_0 k_2 + \psi(v_x), & f_{32} &= -k_0 k_1 e^{k_0 u}, \end{aligned}$$

onde $\eta \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real. Além disso, esse sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares dos tipos (0.4) e (0.10), com

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta & -\eta k_0 k_2 + \frac{1}{k_2}u_x - \psi \\ \eta k_0 k_2 + \frac{1}{k_2}u_x + \psi & -\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{k_1 e^{k_0 u}}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{k_2} & k_0 \\ -k_0 & \frac{1}{k_2} \end{pmatrix},$$

caso $\delta = 1$,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\eta & \frac{1}{k_2}u_x + i\eta k_0 k_2 + i\psi \\ -\frac{1}{k_2}u_x + i\eta k_0 k_2 + i\psi & -i\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{k_1 e^{k_0 u}}{2}\begin{pmatrix} -i\frac{1}{k_2} & -ik_0 \\ -ik_0 & i\frac{1}{k_2} \end{pmatrix},$$

caso $\delta = -1$, e

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & k_2^{-1}u_x & \eta \\ \delta k_2^{-1}u_x & 0 & \eta k_0 k_2 + \psi \\ \delta\eta & -\eta k_0 k_2 - \psi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_1 k_2^{-1} e^{k_0 u} \\ 0 & 0 & -k_0 k_1 e^{k_0 u} \\ -\delta k_1 k_2^{-1} e^{k_0 u} & k_0 k_1 e^{k_0 u} & 0 \end{pmatrix},$$

com $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$).

O sistema (ver a Proposição 2.3)

$$\begin{cases} u_{xt} = \dfrac{1}{r}\left(s_3 p u_{xx} - \dfrac{1}{s_1'}(rk - ps_3)\right), \\ v_{xt} = \dfrac{1}{r'}\left((s_3 p)_x + \dfrac{s_2'}{s_2 s_1'}(rk - ps_3)\right), \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ e $s_1(u_x), s_2(u_x), s_3(u_x), r(v_x), p(u,v)$ são funções suaves tais que, $s_1' r' s_2 s_3 \neq 0$, $ps_3 \neq kr$, $p_u^2 + p_v^2 \neq 0$, descreve tanto superfícies pseudo-esféricas, para as funções f_{ij}

associadas

$$f_{11} = rs_2 \cosh(\eta s_1), \qquad f_{12} = ps_2 s_3 \cosh(\eta s_1),$$
$$f_{21} = \eta, \qquad f_{22} = \eta k,$$
$$f_{31} = rs_2 \operatorname{senh}(\eta s_1), \qquad f_{32} = ps_2 s_3 \operatorname{senh}(\eta s_1),$$

quanto superfícies esféricas, para as funções f_{ij} associadas,

$$f_{11} = rs_2 \cos(\eta s_1), \qquad f_{12} = ps_2 s_3 \cos(\eta s_1),$$
$$f_{21} = \eta, \qquad f_{22} = \eta k,$$
$$f_{31} = -rs_2 \operatorname{sen}(\eta a), \qquad f_{32} = -ps_2 s_3 \operatorname{sen}(\eta s_1).$$

Além disso, esse sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares dos tipos (0.4) e (0.10), com

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

com $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$, onde A, B pode ser dado por,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta & rs_2 e^{-\eta s_1} \\ rbe^{\eta s_1} & -\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k\eta & ps_2 s_3 e^{-\eta s_1} \\ ps_2 s_3 e^{\eta s_1} & -k\eta \end{pmatrix},$$

ou,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\eta & rs_2 e^{-i\eta s_1} \\ -rs_2 e^{i\eta s_1} & -i\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ik\eta & ps_2 s_3 e^{-i\eta s_1} \\ -ps_2 s_3 e^{i\eta s_1} & -ik\eta \end{pmatrix},$$

e

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & rs_2 C_{-\delta}(\eta s_1) & \eta \\ \delta rs_2 C_{-\delta}(\eta s_1) & 0 & \delta rs_2 S_{-\delta}(\eta s_1) \\ \delta\eta & -\delta rs_2 S_{-\delta}(\eta s_1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & ps_2 s_3 C_{-\delta}(\eta s_1) & \eta k \\ \delta ps_2 s_3 C_{-\delta}(\eta s_1) & 0 & \delta ps_2 s_3 S_{-\delta}(\eta s_1) \\ \delta\eta k & -\delta ps_2 s_3 S_{-\delta}(\eta s_1) & 0 \end{pmatrix},$$

com $\delta = \pm 1$ e $C_{-\delta}, S_{-\delta}$ denotando coseno e seno hiperbólicos (caso $\delta = 1$) ou trigonométricos (caso $\delta = -1$).

Os únicos sistemas do tipo $(S_{n,m})$, $n, m \geq 2$ (de acordo com o Teorema 3.3) que descrevem superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas), tal que $f_{21} = \eta \neq 0$, são dados por,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{xt} & = & \dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(P_{u_{x^i}}h_{v_x} - H_{u_{x^i}}g_{v_x})u_{x^{i+1}} + \dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}(P_{v_{x^j}}h_{v_x} - H_{v_{x^j}}g_{v_x})v_{x^{j+1}} + \\ & & +\frac{q}{2W}(\delta g^2 - h^2)_{v_x} + \frac{\eta}{W}(Hh_{v_x} - \delta P g_{v_x}), \\ v_{xt} & = & -\dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(P_{u_{x^i}}h_{u_x} - H_{u_{x^i}}g_{u_x})u_{x^{i+1}} - \dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}(P_{v_{x^j}}h_{u_x} - H_{v_{x^j}}g_{u_x})v_{x^{j+1}} + \\ & & -\frac{q}{2W}(\delta g^2 - h^2)_{u_x} - \frac{\eta}{W}(Hh_{u_x} - \delta P g_{u_x}), \end{array}\right.$$

em que $\delta = 1$ (resp. -1), $q(u, ..., u_{x^{n-2}}, v, ..., v_{x^{m-2}})$, $g(u_x, v_x)$, $h(u_x, v_x)$, $P(u, ..., u_{x^{n-2}}, v, ..., v_{x^{m-2}})$, $W = g_{z_1}h_{y_1} - g_{y_1}h_{z_1}$ e $H = \frac{1}{g}\left(Ph + \sum_{i=0}^{n-2} q_{u_{x^i}}u_{x^{i+1}} + \sum_{j=0}^{m-2} q_{v_{x^j}}v_{x^{j+1}}\right)$, são funções suaves satisfazendo as seguintes condições genéricas,

$$P \neq \frac{1}{\eta}gq, \qquad W \neq 0, \qquad P_{z_{n-1}}^2 + H_{z_{n-1}}^2 \neq 0, \qquad P_{y_{m-1}}^2 + H_{y_{m-1}}^2 \neq 0.$$

Neste caso,

$$\begin{array}{ll} f_{11} = g, & f_{12} = P, \\ f_{21} = \eta, & f_{22} = q, \\ f_{31} = h, & f_{32} = H. \end{array}$$

Além disso, esse sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares dos tipos (0.4) e (0.10), com

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta & g-h \\ g+h & -\eta \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q & P-H \\ P+H & -q \end{pmatrix},$$

caso $\delta = 1$,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\eta & g+ih \\ -g+ih & -i\eta \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} iq & P+iH \\ -P+iH & -iq \end{pmatrix},$$

caso $\delta = -1$, e

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & g & \eta \\ \delta g & 0 & h \\ \delta\eta & -h & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & P & q \\ \delta P & 0 & H \\ \delta q & -H & 0 \end{pmatrix},$$

com $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$).

A teoria de caracterização e resultados de classificação dos sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas serão apresentadas nos próximos capítulos. Aplicações da teoria fornecem novos exemplos.

Capítulo 1

Sistemas do tipo $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Neste capítulo, consideraremos sistemas de equações diferenciais, sobre duas funções reais u, v definidas sobre um aberto de $U \subset \mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, t), do tipo

$$(S_{1,1}) \begin{cases} u_{xt} = F(u, v, u_x, v_x), \\ v_{xt} = G(u, v, u_x, v_x), \end{cases} \tag{1.1}$$

onde F e G são funções suaves que dependem de u, v e suas derivadas de primeira ordem com respeito a x. Os índices x e t em u, indicam derivada parcial da função u com respeito a x e t respectivamente,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1.2}$$

Estaremos interessados em estudar sistemas do tipo $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas para funções associadas que f_{ij} dependendo das variáveis dependentes u, v e suas derivadas do mesmo modo que F e G, isto é, vamos considerar

$$f_{ij}(u, v, u_x, v_x), \qquad 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3.$$

Neste capítulo adotaremos a seguinte notação,

$$\begin{aligned} u = z, &\quad u_x = z_1, \\ v = y, &\quad v_x = y_1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Com esta notação o sistema (1.1) é escrito como

$$\begin{cases} z_{1,t} = F(z, y, z_1, y_1), \\ y_{1,t} = G(z, y, z_1, y_1). \end{cases} \tag{1.4}$$

Este capítulo é organizado em três seções. Na Seção 1.1 daremos condições necessárias e suficientes para que um sistema do tipo $(S_{1,1})$ descreva superfícies pseudo-esféricas ou esféricas. Em seguida, na Seção 1.2, daremos uma classificação completa de todos os sistemas $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, com a hipótese adicional de uma das funções f_{11}, f_{21} ou f_{31} ser uma constante $\eta \in \mathbb{R}$. Como consequência desta classificação, apresentaremos, na Seção 1.3, novas classes de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

1.1 Caracterização dos sistemas $(S_{1,1})$.

Esta seção será divida em três partes. Na primeira Subseção 1.1.1 usaremos a teoria de Cartan-Kähler para descrever o sistema $(S_{1,1})$ em termos de um sistema de diferenciais exteriores. Em seguida, na Subseção 1.1.2, discutiremos a interpretação geométrica de sistemas $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas. Por último, na Subseção 1.1.3, apresentaremos uma caracterização, Teorema 1.1, dos sistemas $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

1.1.1 Abordagem por sistemas de diferenciais exteriores.

Nesta subseção vamos seguir a referência [17] para mostrar como interpretar o sistema $(S_{1,1})$ como um sistema de diferenciais exteriores.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, t) e $\mathcal{M}^6 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^6$. Consideraremos $\mathcal{M}^6$ como sendo uma variedade diferenciável 6-dimensional com coordenadas $(x, t) \times (z, y) \times (z_1, y_1)$. Deste modo, para um sistema (1.4), as funções F, G podem ser vistas como funções reais suaves, sobre a variedade $\mathcal{M}^6$, que são constantes com respeito as variáveis (x, t).

Dadas duas funções suaves, u, v em U,

$$u, v : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

fica definida uma superfície em $\mathcal{M}^6$ por,

$$\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}^6,$$
$$\Phi(x,t) \mapsto (x, t, u(x,t), v(x,t), u_x(x,t), v_x(x,t)). \tag{1.5}$$

Veremos na Proposição 1.1 como esta aplicação é usada para justificar a notação (1.3) e como relacionar o sistema $(S_{1,1})$ com um sistema de diferenciais exteriores.

Proposição 1.1. *Seja $\mathcal{I}$ o ideal em $\mathcal{M}^6$ gerado pelas 2-formas,*

$$\Pi_1 = dz_1 \wedge dx + F dx \wedge dt, \quad \Pi_2 = dz \wedge dt - z_1 dx \wedge dt,$$
$$\Pi_3 = dy_1 \wedge dx + G dx \wedge dt, \quad \Pi_4 = dy \wedge dt - y_1 dx \wedge dt.$$

Então, $\mathcal{I}$ é fechado por diferenciação exterior, ou seja, $d\mathcal{I} \equiv 0 \quad (mod\mathcal{I})$. Além disso,

A) Se o par de funções suaves $u, v : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma solução do sistema $(S_{1,1})$, então a aplicação Φ, definida por (1.5), é uma superfície integral do ideal $\mathcal{I}$ (isto é, $\Phi^*\Pi_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$);

B) Reciprocamente, dada uma superfície integral do ideal $\mathcal{I}$, $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}^6$, V um aberto de $\mathbb{R}^2$, com Ψ_x e Ψ_t linearmente independentes, então, localmente, as funções projeções de $\Psi(V) \subset \mathcal{M}^6$ sobre $(x,t) \times (z)$ e $(x,t) \times (y)$ formam gráficos de uma solução de $(S_{1,1})$.

Demonstração. Primeiramente, notamos que,

$$d\Pi_2 = -\Pi_1 \wedge dt,$$
$$d\Pi_4 = -\Pi_3 \wedge dt,$$
$$d\Pi_1 = -F_z \Pi_2 \wedge dx - F_y \Pi_4 \wedge dx + F_{z_1} \Pi_1 \wedge dt + F_{y_1} \Pi_3 \wedge dt,$$
$$d\Pi_2 = -G_z \Pi_2 \wedge dx - G_y \Pi_4 \wedge dx + G_{z_1} \Pi_1 \wedge dt + G_{y_1} \Pi_3 \wedge dt,$$

assim, $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Ou seja, o ideal $\mathcal{I}$ é exteriormente fechado, o que prova a primeira parte da proposição.

A) Para o primeiro item, sejam u e v funções suaves, em $U \subset \mathbb{R}^2$, soluções de $(S_{1,1})$. As funções coordenadas da aplicação Φ são suaves, assim Φ é uma aplicação suave em U. Diferenciando Φ com respeito a x e t obtemos, respectivamente,

$$\Phi_x = (1, 0, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}),$$
$$\Phi_t = (0, 1, u_t, v_t, u_{xt}, v_{xt}).$$

Note que Φ_x e Φ_t formam um par de vetores tangentes linearmente independentes em $\mathcal{M}^6$, donde Φ é regular em todo ponto (x,t) de U.

Vamos calcular o "pull back"do ideal $\mathcal{I}$ pela aplicação Φ. Para isso computamos o "pull back"das 1-formas dx, dt, dz, dy, dz_1 e dy_1 em termos da base das 1-formas de U, dx e dt. Primeiramente, como U é parametrizado pelas coordenadas (x,t) temos

$$\Phi^* dx = dx, \quad \Phi^* dt = dt.$$

Para as demais 1-formas da base coordenada das 1-formas em $\mathcal{M}^6$, utilizamos que o "pull back"comuta com a diferencial exterior e que o "pull back"de 0-forma (isto é, uma função suave) é a composição, assim

$$\Phi^*(dz) = d(\Phi^* z) = d(z \circ \Phi) = du = u_x dx + u_t dt.$$

De modo análogo, temos

$$\Phi^* dz = u_x dx + u_t dt, \quad \Phi^* dy = v_x dx + v_t dt,$$
$$\Phi^* dz_1 = u_{xx} dx + u_{xt} dt \quad \Phi^* dy_1 = v_{xx} dx + v_{xt} dt.$$

Utilizando que o "pull back"é linear com respeito a soma de formas e distributivo com respeito ao produto exterior, obtemos

$$\Phi^*\Pi_1 = (-u_{xt} + F \circ \Phi) dx \wedge dt,$$
$$\Phi^*\Pi_2 = (u_x - z_1 \circ \Phi) dx \wedge dt,$$
$$\Phi^*\Pi_3 = (-v_{xt} + G \circ \Phi) dx \wedge dt,$$
$$\Phi^*\Pi_4 = (v_x - y_1 \circ \Phi) dx \wedge dt.$$

Pela definição de Φ, vemos que $\Phi^*\Pi_i = 0$ (para $i = 2, 4$) e já que u e v são soluções de $(S_{1,1})$ nós temos que $\Phi^*\Pi_i = 0$ (para $i = 1, 3$). Assim concluímos a parte A) da proposição.

B) Para a recíproca, seja $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}^6$, com V um aberto de $\mathbb{R}^2$, uma superfície em $\mathcal{M}^6$. Sejam $(p,q) \in V$ as coordenadas de V, assim escrevemos

$$\Psi(p,q) = (x(p,q), t(p,q), z(p,q), y(p,q), z_1(p,q), y_1(p,q)).$$

Note que,

$$\Psi^*(dx \wedge dt) = (x_p dp + x_q dq) \wedge (t_p dp + t_q dq) = (x_p t_q - x_q t_p) dp \wedge dq,$$

a hipótese de Ψ_x e Ψ_t serem linearmente independentes implica que $dx \wedge dt \neq 0$. Assim, o determinante Jacobiano $J\left(\frac{(x,t)}{(p,q)}\right) \neq 0$ nunca se anula em V. Deste modo existe localmente um difeomorfismo, digamos h, tal que $(p,q) = h(x,t)$. Definimos $\bar{\Psi}(x,t) = \Psi \circ h(x,t)$ uma reparametrização local da superfície Ψ.

Suponhamos que Ψ seja uma superfície integral de $\mathcal{I}$, assim $\bar{\Psi}$ é uma superfície integral de $\mathcal{I}$ e temos que

$$0 = \bar{\Psi}^*\Pi_2 = \bar{\Psi}^*(dz \wedge dt - z_1 dx \wedge dt) = (z_x - z_1)dx \wedge dt,$$

e por independência linear entre dx e dt temos que $z_x = z_1$ ao longo da superfície $\bar{\Psi}$. De modo análogo, temos que o anulamento do "pull back"de Π_2, Π_4, Π_1 e Π_3, respectivamente, implica que ao longo da superfície $\bar{\Psi}$,

$$z_1 = z_x, \qquad y_1 = y_x, \qquad z_{1,t} = F \circ \bar{\Psi} \qquad \text{e} \qquad y_{1,t} = G \circ \bar{\Psi}. \tag{1.6}$$

Considerando as projeções,

$$\begin{aligned}
&(x,t,z(x,t),y(x,t),z_1(x,t),y_1(x,t)) \mapsto (x,t,z(x,t)),\\
&(x,t,z(x,t),y(x,t),z_1(x,t),y_1(x,t)) \mapsto (x,t,y(x,t)),
\end{aligned}$$

podemos ver que a imagem destas projeções são gráficos de uma solução para $(S_{1,1})$. De fato usando as equações (1.6), temos,

$$\begin{aligned}
z_{xt} &= (z_x)_t = (z_1)_t = z_{1,t} = F \circ \bar{\Psi}(x,t) = F(z,y,z_x,y_x),\\
y_{xt} &= (y_x)_t = (y_1)_t = y_{1,t} = G \circ \bar{\Psi}(x,t) = G(z,y,z_x,y_x),
\end{aligned}$$

que implica que o sistema $(S_{1,1})$ é satisfeito para as funções $z(x,t)$ e $y(x,t)$. O que prova o último item da proposição. $\square$

1.1.2 Interpretação geométrica e exemplos.

Nesta subseção vamos discutir a interpretação geométrica de sistemas $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas e apresentar exemplos.

Definição 1.1. Dizemos que $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto de $\mathbb{R}^2$ munido de uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}$ é uma superfície pseudo-esférica (resp. esférica), se $\mathbf{g}$ tem curvatura Gaussiana constante igual a -1 (resp. 1).

Dada uma superfície U munida de uma métrica com curvatura constante negativa (resp. positiva), podemos supor a menos de renormalização da métrica por um escalar, que U é pseudo-esférica (resp. esférica).

Além disso, U munido de uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}$ é uma superfície pseudo-esférica (resp. esférica) se, e somente se, admite localmente um referencial $\{e_1, e_2\}$, tal que o co-referencial $\{\omega_1,\omega_2\}$ e a forma de conexão, ω_3 (usualmente denotada por ω_{12}) satisfazem as equações de estrutura [33]:

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 = \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \\ \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

onde $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$), ou seja, $\delta = -K$ e K é a curvatura Gaussiana.

Na próxima definição apresentaremos o conceito de um sistema do tipo $(S_{1,1})$ descrever superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Definição 1.2. Sejam F, G funções reais suaves definidas em $\mathcal{M}^6$ e considere o sistema $(S_{1,1})$ para funções u e v. Dizemos que $(S_{1,1})$ descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. descreve superfícies esféricas) se, existem f_{ij}, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$, funções reais suaves em $\mathcal{M}^6$ tais que o ideal $\mathcal{J}$ em $\mathcal{M}^6$, gerado pelas formas

$$\Omega_1 = d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2, \quad \Omega_2 = d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3, \quad \Omega_3 = d\omega_3 - \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{1.8}$$

nas quais $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$ e $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$) e $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ e o ideal $\mathcal{I}$ em $\mathcal{M}^6$ gerado pelas formas

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= dz_1 \wedge dx + F dx \wedge dt, \quad \Pi_2 = dz \wedge dt - z_1 dx \wedge dt, \\ \Pi_3 &= dy_1 \wedge dx + G dx \wedge dt, \quad \Pi_4 = dy \wedge dt - y_1 dx \wedge dt, \end{aligned} \tag{1.9}$$

coincidem, isto é $\mathcal{J} = \mathcal{I}$.

A seguinte proposição justifica a nomenclatura usada na definição acima.

Proposição 1.2. *Suponha que $(S_{1,1})$ descreva superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$. Então, para cada par de soluções $u, v : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de $(S_{1,1})$ a aplicação Φ dada por (1.5), define uma métrica Riemanniana em U, dada por $(\Phi^*\omega_1)^2 + (\Phi^*\omega_2)^2$, com curvatura Gaussiana constante igual -1 (resp. 1).*

Demonstração. Sejam $u(x,t)$ e $v(x,t)$ soluções de $(S_{1,1})$. Considere a imersão de U em $\mathcal{M}^6$ dada por

$$\Phi(x,t) = (x, t, u(x,t), v(x,t), u_x(x,t), v_x(x,t)).$$

Já que u e v são uma solução de $(S_{1,1})$, segue da Proposição 1.1 que, $\Phi^*\Pi_i = 0$, para $i = 1,2,3,4$, em U. Como $(S_{1,1})$ descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas), temos por definição que $\Phi^*\Omega_i = 0$, para $i = 1,2,3$ com $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$).
Por outro lado, $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, o que implica em

$$\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) \neq 0 \qquad \text{em} \quad U.$$

Assim $\Phi^*\omega_i$, para $i = 1,2$ é um co-referencial móvel em U com forma de conexão $\Phi^*\omega_3$, ainda mais, estas 1-formas em U satisfazem as equações de estrutura de uma superfície pseudo-esférica (resp. esférica), logo U é uma superfície pseudo-esférica (resp. esférica). Além disso a métrica em U é definida pelo "pull back"de $\omega_1^2 + \omega_2^2$. □

Por simplicidade, podemos omitir a aplicação Φ e identificar as 1-formas ω_i, em $\mathcal{M}^6$, com $\Phi^*\omega_i$, $i = 1,2,3$, em $U \subset \mathbb{R}^2$. Com esta identificação e usando coordenadas locais $(x,t) \in U$, podemos reescrever a Definição 1.2.

Definição 1.3. Um sistema do tipo $(S_{1,1})$, para variáveis dependentes u, v, descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) se existem seis funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2$, dependendo de u, v e suas derivadas com respeito a x, tais que as 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$ satisfazem as equações de estrutura,

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 &= \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \\ \omega_1 &\wedge \omega_2 \neq 0, \end{aligned}$$

com $\delta = 1$ (resp. -1) se, e somente se, u, v é solução do sistema,

$$\begin{cases} u_{xt} = F(u, v, u_x, v_x), \\ v_{xt} = G(u, v, u_x, v_x). \end{cases}$$

Finalmente, terminaremos esta subseção com dois exemplos.

Exemplo 1.1. Considere o sistema do tipo Pholmeyer-Lund-Regge (veja [2]),

$$\begin{cases} u_{xt} = 2uvu_x - u, \\ v_{xt} = -2uvv_x - v. \end{cases} \tag{1.10}$$

Afirmamos que este sistema descreve superfícies pseudo-esféricas com funções,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta(u_x + v_x), & f_{12} &= \tfrac{1}{\eta}(v - u), \\ f_{21} &= \eta^2, & f_{22} &= -\tfrac{1}{\eta^2} - 2uv, \\ f_{31} &= \eta(u_x - v_x), & f_{32} &= -\tfrac{1}{\eta}(u + v). \end{aligned}$$

De fato, note que as equações de estrutura (1.7), para $\delta = 1$,

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2, \end{cases}$$

são equivalentes a,

$$\begin{cases} d(f_{11}dx + f_{12}dt) = (f_{31}dx + f_{32}dt) \wedge (f_{21}dx + f_{22}dt), \\ d(f_{21}dx + f_{22}dt) = (f_{11}dx + f_{12}dt) \wedge (f_{31}dx + f_{32}dt), \\ d(f_{31}dx + f_{32}dt) = (f_{11}dx + f_{12}dt) \wedge (f_{21}dx + f_{22}dt). \end{cases} \tag{1.11}$$

Calculando a diferencial exterior do lado esquerdo e realizando o produto exterior do lado direito, obtemos,

$$\begin{cases} (-f_{11,t} + f_{12,x})dx \wedge dt = (f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21})dx \wedge dt, \\ (-f_{21,t} + f_{22,x})dx \wedge dt = (f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31})dx \wedge dt, \\ (-f_{31,t} + f_{32,x})dx \wedge dt = (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})dx \wedge dt. \end{cases}$$

Substituindo as f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, dadas e comparando os coeficientes de $dx \wedge dt$, obtemos,

$$\begin{cases} -\eta(u_{xt} + v_{xt}) + \frac{1}{\eta}(v_x - u_x) = \eta(u_x - v_x)\left(-\frac{1}{\eta^2} - 2uv\right) + \frac{1}{\eta}(u + v)\eta^2, \\ -2u_x v - 2uv_x = -\eta(u_x + v_x)\frac{1}{\eta}(u + v) - \frac{1}{\eta}(v - u)\eta(u_x - v_x), \\ -\eta(u_{xt} - v_{xt}) - \frac{1}{\eta}(u_x + v_x) = \eta(u_x + v_x)\left(-\frac{1}{\eta^2} - 2uv\right) - \frac{1}{\eta}(v - u)\eta^2. \end{cases}$$

Notamos que a segunda linha é uma identidade, e a primeira e terceira linhas equivalem a,

$$\begin{cases} -u_{xt} - v_{xt} = -2uv(u_x - v_x) + u + v, \\ -u_{xt} + v_{xt} = -2uv(u_x + v_x) - v + u. \end{cases} \tag{1.12}$$

A soma e a subtração estas expressões equivale a,

$$\begin{cases} u_{xt} = 2uvu_x - u, \\ v_{xt} = -2uvv_x - v, \end{cases} \tag{1.13}$$

o que é equivalente ao sistema (1.10). Mostrando assim que o sistema modificado de Pohlmeyer-Lund-Regge descreve superfícies pseudo-esféricas, para estas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

Exemplo 1.2. (Konno-Oono coupled integrable dispersionless system [21])

$$\begin{cases} u_{xt} = -2vv_x, \\ v_{xt} = 2vu_x. \end{cases} \tag{1.14}$$

Afirmamos que este sistema descreve superfícies pseudo-esféricas.

De fato, seja ν um parâmetro real não nulo e defina

$$\begin{aligned} f_{11} &= \tfrac{2}{\nu}v_x, & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \tfrac{2}{\nu}u_x, & f_{22} &= \nu, \\ f_{31} &= 0, & f_{32} &= 2v. \end{aligned}$$

Note que, para $\delta = 1$, as equações de estrutura (1.7) são equivalentes a

$$\begin{cases} -\frac{2}{\nu}v_{xt} = -\left(2v\right)\left(\frac{2}{\nu}u_x\right), \\ -\frac{2}{\nu}u_{xt} = \left(\frac{2}{\nu}v_x\right)\left(2v\right), \\ 2v_x = \left(\frac{2}{\nu}v_x\right)\nu, \end{cases}$$

note que o fator ν pode ser simplificado das duas primeiras equações e a terceira equação é uma identidade

$$\begin{cases} v_{xt} = 2vu_x, \\ u_{xt} = -2v_xv, \end{cases} \tag{1.15}$$

deste modo, as equações estrutura de uma superfície pseudo-esférica é satisfeita se, e somente se, as funções u e v satisfazem o sistema (1.14). Assim este sistema descreve superfícies pseudo-esféricas para estas f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$,.

1.1.3 Resultado de caracterização.

Nesta subseção apresentaremos um resultado de caracterização dos sistemas do tipo ($S_{1,1}$) descrevendo superfícies esféricas ou pseudo-esféricas.

O seguinte teorema, nos dá uma caracterização dos sistemas ($S_{1,1}$) que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas supondo que as funções associadas f_{ij} dependem de (z, y, z_1, y_1). Em particular, estabelece como deve ser a dependência das funções F, G e f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, com as variáveis (z, y, z_1, y_1).

Teorema 1.1. *Para que o sistema* ($S_{1,1}$),

$$\begin{cases} z_{1,t} = F(z, y, z_1, y_1), \\ y_{1,t} = G(z, y, z_1, y_1), \end{cases} \tag{1.16}$$

descreva superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções $f_{ij}(z, y, z_1, y_1)$, *com* $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, *é necessário e suficiente que,*

$$f_{i1,z} = 0, \quad f_{i1,y} = 0, \quad f_{i2,z_1} = 0, \quad f_{i2,y_1} = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \tag{1.17}$$

$$\begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{21,z_1} & f_{21,y_1} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_{21,z_1} & f_{21,y_1} \\ f_{31,z_1} & f_{31,y_1} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{31,z_1} & f_{31,y_1} \end{vmatrix}^2 \neq 0, \tag{1.18}$$

$$-f_{11,z_1}F - f_{11,y_1}G + f_{12,z}z_1 + f_{12,y}y_1 - f_{31}f_{22} + f_{32}f_{21} = 0, \tag{1.19}$$

$$-f_{21,z_1}F - f_{21,y_1}G + f_{22,z}z_1 + f_{22,y}y_1 - f_{11}f_{32} + f_{12}f_{31} = 0, \tag{1.20}$$

$$-f_{31,z_1}F - f_{31,y_1}G + f_{32,z}z_1 + f_{32,y}y_1 - \delta f_{11}f_{22} + \delta f_{12}f_{21} = 0, \tag{1.21}$$

$$f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} \neq 0, \tag{1.22}$$

onde $\delta = 1$ *(resp.* -1*).*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que estas condições são necessárias. Suponha que o sistema ($S_{1,1}$) descreva superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas). Seja $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i = 1, 2, 3$ e considere o ideal $\mathcal{I}$ com $\delta = 1$ (resp. -1). Então, ao longo da superfície Φ em $\mathcal{M}^6$ definida em (1.5) ambos ideais $\mathcal{I}$, com $\delta = 1$ (resp. -1), e $\mathcal{J}$ se anulam simultaneamente. Ou seja, fazendo o "pull back" das formas Ω_i, $i = 1, 2, 3$ respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \;& f_{11,z}dz \wedge dx + f_{11,y}dy \wedge dx + f_{11,z_1}dz_1 \wedge dx + f_{11,y_1}dy_1 \wedge dx + \\ & + f_{12,z}dz \wedge dt + f_{12,y}dy \wedge dt + f_{12,z_1}dz_1 \wedge dt + f_{12,y_1}dy_1 \wedge dt + \\ & -(f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21})dx \wedge dt, \end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} 0 = \;& f_{21,z}dz \wedge dx + f_{21,y}dy \wedge dx + f_{21,z_1}dz_1 \wedge dx + f_{21,y_1}dy_1 \wedge dx + \\ & + f_{22,z}dz \wedge dt + f_{22,y}dy \wedge dt + f_{22,z_1}dz_1 \wedge dt + f_{22,y_1}dy_1 \wedge dt + \\ & -(f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31})dx \wedge dt, \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned} 0 = \;& f_{31,z}dz \wedge dx + f_{31,y}dy \wedge dx + f_{31,z_1}dz_1 \wedge dx + f_{31,y_1}dy_1 \wedge dx + \\ & + f_{32,z}dz \wedge dt + f_{32,y}dy \wedge dt + f_{32,z_1}dz_1 \wedge dt + f_{32,y_1}dy_1 \wedge dt + \\ & -\delta(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})dx \wedge dt. \end{aligned} \tag{1.25}$$

onde $\delta = 1$ (resp.-1).

Por outro lado, fazendo o "pull back" do ideal gerado por (1.9) teremos que ao longo da superfície vale,

$$dz_1 \wedge dx = -F dx \wedge dt, \quad dz \wedge dt = z_1 dx \wedge dt,$$
$$dy_1 \wedge dx = -G dx \wedge dt, \quad dy \wedge dt = y_1 dx \wedge dt.$$

Usando estas relações nas equações (1.23), (1.24) e (1.25) vemos que devem valer as equações (1.17), (1.19) (1.20) e (1.21).

A equação (1.22) também deve ser satisfeita, pois por definição, requeremos que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. O que é localmente equivalente a $f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} \neq 0$, pois $\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) dx \wedge dt$.

Finalmente a condição genérica (1.18) deve ser satisfeita para que as equações (1.19), (1.20) e (1.21) sejam equivalentes ao sistema (1.16).

Para mostrar que esta condição é suficiente, consideramos as $f_{ij}(z, y, z_1, y_1)$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo as condições (1.17)-(1.21) e definimos localmente $\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt$.

Vamos mostrar a condição de que as equações de estrutura sejam satisfeitas para estas três formas é equivalente ao sistema (1.16). De fato, as equações de estrutura,

$$\begin{cases} d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2 = 0, \\ d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 = 0, \\ d\omega_3 - \delta\omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \end{cases}$$

para $\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt$, são equivalentes a,

$$\begin{cases} d(f_{11}dx + f_{12}dt) - (f_{31}dx + f_{32}dt) \wedge (f_{21}dx + f_{22}dt) = 0, \\ d(f_{21}dx + f_{22}dt) - (f_{11}dx + f_{12}dt) \wedge (f_{31}dx + f_{32}dt) = 0, \\ d(f_{31}dx + f_{32}dt) - \delta(f_{11}dx + f_{12}dt) \wedge (f_{21}dx + f_{22}dt) = 0, \end{cases}$$

Calculando a diferencial exterior e o produto exterior, e utilizando que $f_{i1,z} = f_{i1,y} = f_{i2,z_1} = f_{i2,y_1} = 0$, para todo $i = 1, 2, 3$, temos que estas equações são equivalentes a,

$$\begin{cases} -f_{11,z_1} z_{1,t} - f_{11,y_1} y_{1,t} + f_{12,z} z_1 + f_{12,y} y_1 - f_{31} f_{22} + f_{32} f_{21} = 0, \\ -f_{21,z_1} z_{1,t} - f_{21,y_1} y_{1,t} + f_{22,z} z_1 + f_{22,y} y_1 - f_{11} f_{32} + f_{12} f_{31} = 0, \\ -f_{31,z_1} z_{1,t} - f_{31,y_1} y_{1,t} + f_{32,z} z_1 + f_{32,y} y_1 - \delta f_{11} f_{22} + \delta f_{12} f_{21} = 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Por outro lado, as hipóteses dadas nas equações (1.19), (1.20) e (1.21) implicam que,

$$f_{12,z} z_1 + f_{12,y} y_1 - f_{31} f_{22} + f_{32} f_{21} = f_{11,z_1} F + f_{11,y_1} G,$$
$$f_{22,z} z_1 + f_{22,y} y_1 - f_{11} f_{32} + f_{12} f_{31} = f_{21,z_1} F + f_{21,y_1} G,$$
$$f_{32,z} z_1 + f_{32,y} y_1 - \delta f_{11} f_{22} + \delta f_{12} f_{21} = f_{31,z_1} F + f_{31,y_1} G,$$

respectivamente. Substituindo estas relações nos quatro últimos termos de cada linha da equação (1.26), obtemos que as equações de estrutura são equivalentes a,

$$\begin{cases} f_{11,z_1}(-z_{1,t}+F)+f_{11,y_1}(-y_{1,t}+G)=0, \\ f_{21,z_1}(-z_{1,t}+F)+f_{21,y_1}(-y_{1,t}+G)=0, \\ f_{31,z_1}(-z_{1,t}+F)+f_{31,y_1}(-y_{1,t}+G)=0. \end{cases}$$

A hipótese dada na equação (1.18), garante que as equações acima são equivalentes a,

$$\begin{cases} -z_{1,t}+F=0, \\ -y_{1,t}+G=0, \end{cases}$$

que por sua vez é equivalente ao sistema (1.16).

Por último, a condição (1.22) é suficiente para garantir que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Segue que as condições (1.17)-(1.21) são também suficientes o que conclui a demonstração deste teorema.

□

1.2 Resultados de classificação dos sistemas $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Nesta seção, apresentaremos resultados de classificação de sistemas do tipo $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas impondo a condição de que pelo menos uma das funções f_{11}, f_{21} ou f_{31} seja uma constante, dada por um parâmetro real η.

A primeira classificação, dada no Teorema 1.2, é feita com a hipótese de que $f_{31}=\eta$, enquanto a segunda classificação, dada no Teorema 1.3, leva em conta a hipótese de $f_{21}=\eta$, finalmente no Teorema 1.4 consideramos $f_{11}=\eta$.

Sejam F e G duas funções reais suaves e considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} z_{1,t}=F(z,y,z_1,y_1), \\ y_{1,t}=G(z,y,z_1,y_1). \end{cases} \tag{1.27}$$

Notemos que se, em particular, F e G são funções somente de (z_1,y_1), então por uma mudança de variáveis $\tilde{z}:=z_1$ e $\tilde{y}:=y_1$ o sistema $(S_{1,1})$, é equivalente ao seguinte sistema,

$$\begin{cases} \tilde{z}_t=F(\tilde{z},\tilde{y}), \\ \tilde{y}_t=G(\tilde{z},\tilde{y}). \end{cases} \tag{1.28}$$

Ou seja, se $F_z=F_y=G_z=G_y=0$, então o sistema $(S_{1,1})$ pode ser reduzido, por esta mudança de variáveis, a um sistema de equações de evolução.

Neste trabalho consideraremos sistemas do tipo $S_{1,1}$ que não se reduzem a sistemas de equações de evolução. Pois, como já sabemos os sistemas equações de evolução deste tipo que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas foi considerado por Ding e Tenenblat (2002), ver Teorema 6 em [13]. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 1.4. Dizemos que um sistema $(S_{1,1})$ é irredutível se as funções F e G satisfazem

$$F_z^2 + F_y^2 + G_z^2 + G_y^2 \neq 0,$$

para todos os pontos de seu domínio com exceção de um subconjunto de medida nula.

A seguir vamos considerar sistemas $(S_{1,1})$ irredutíveis que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com uma hipótese adicional de que pelo menos uma das funções f_{31}, f_{21} ou f_{11} seja constante igual a um parâmetro real η.

1.2.1 Com a condição $f_{31} = \eta$.

Nesta subseção vamos caracterizar, no Teorema 1.2, os sistemas irredutíveis $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas sob a condição de $f_{31} = \eta$, em que η é um parâmetro real.

Teorema 1.2. *Um sistema de equações diferenciais $(S_{1,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (1.17)-(1.22), com $f_{31} = \eta \in \mathbb{R}$ se, e somente se, um dois casos abaixo ocorre.*

Caso 1) *Existem constantes $a, b, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, funções reais suaves $g(z_1, y_1)$, $h(z_1, y_1)$ tais que $\mu g - \lambda h = \delta a y_1 + \delta b z_1$, com $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$), $W := g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} \neq 0$ e $\phi(\xi)$, uma função suave real, não constante, aplicada em $\xi = ay + bz$ e*

$$\begin{cases} z_{1,t} = \frac{1}{W}\left[-\delta a(bz_1 + ay_1)\phi''(\xi) - \eta(\mu h_{y_1} + \lambda g_{y_1})\phi'(\xi) + \frac{1}{2}(g^2 + h^2)_{y_1}\phi(\xi)\right], \\ y_{1,t} = \frac{1}{W}\left[\delta b(bz_1 + ay_1)\phi''(\xi) + \eta(\mu h_{z_1} + \lambda g_{z_1})\phi'(\xi) - \frac{1}{2}(g^2 + h^2)_{z_1}\phi(\xi)\right]. \end{cases} \tag{1.29}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= g, & f_{12} &= \lambda\phi'(\xi), \\ f_{21} &= h, & f_{22} &= \mu\phi'(\xi), \\ f_{31} &= \eta, & f_{32} &= \phi(\xi). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Caso 2) *Existem, constantes $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma := a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, e uma função real suave $p(z, y)$, tais que, p_z e p_y não são proporcionais e*

$$\begin{cases} z_{1,t} = -\dfrac{z_1}{\gamma}(\delta p_{zy} - \tau p) + \dfrac{y_1}{\gamma}(-\delta p_{yy} + \beta p) + \dfrac{\delta\eta}{\gamma^2}(-\beta p_z + \tau p_y), \\ y_{1,t} = \dfrac{z_1}{\gamma^2}(\delta p_{zz} - \alpha p) + \dfrac{y_1}{\gamma}(\delta p_{zy} - \tau p) + \dfrac{\delta\eta}{\gamma^2}(\tau p_z - \alpha p_y), \end{cases} \tag{1.31}$$

onde, $\alpha = a_1^2 + a_2^2$, $\beta = b_1^2 + b_2^2$, $\tau = a_1 b_1 + a_2 b_2$ *e* $\delta = 1$ *(resp.* -1*). Neste caso,*

$$\begin{aligned} f_{11} &= a_1 z_1 + b_1 y_1, & f_{12} &= \tfrac{\delta}{\gamma}(b_1 p_z - a_1 p_y), \\ f_{21} &= a_2 z_1 + b_2 y_1, & f_{22} &= \tfrac{\delta}{\gamma}(b_2 p_z - a_2 p_y), \\ f_{31} &= \eta, & f_{32} &= p. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Além disso, em todos os casos, cada sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A,B,$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são definidas pelas respectivas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

Demonstração. Considere $f_{ij} : U \times U_1 \to \mathbb{R}$ funções reais suaves, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$ $U, U_1 \subset \mathbb{R}^2$ subconjuntos abertos e conexos de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas $(z, y) \times (z_1, y_1) \in U \times U_1$ e seja $\delta = 1$ (resp. -1). Suponha que as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfaçam as equações (1.17)-(1.22) do Teorema 1.1.

A condição $f_{31} = \eta \in \mathbb{R}$ implica que a equação (1.18) é equivalente a,

$$W = f_{11,z_1} f_{21,y_1} - f_{11,y_1} f_{21,z_1} \neq 0, \quad \text{em } U_1. \tag{1.33}$$

Podemos ver as equações (1.19) e (1.20) como um sistema linear para F e G. Assim a condição $W \neq 0$ implica que F e G pode ser obtido como uma combinação das funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$,

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} f_{21,y_1} & -f_{11,y_1} \\ -f_{21,z_1} & f_{11,z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{12,z} z_1 + f_{12,y} y_1 - f_{22}\eta + f_{32} f_{21} \\ f_{22,z} z_1 + f_{22,y} y_1 - f_{11} f_{32} + f_{12}\eta \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

Além disso, a equação (1.21) é equivalente a,

$$f_{32,z} z_1 + f_{32,y} y_1 - \delta f_{11} f_{22} + \delta f_{12} f_{21} = 0. \tag{1.35}$$

Denotando $\psi_0 = f_{32}$, $\psi_1 = f_{12}$, $\psi_2 = f_{22}$, $\rho_1 = f_{11}$, $\rho_2 = f_{21}$ e $\epsilon = \delta$, vemos que esta expressão é idêntica a equação (A.1), do Apêndice A. Além disso, a equação (A.2) é equivalente a expressão (1.33). Deste modo, aplicamos o Lema A.1 e temos três casos a considerar, (I), (II) e (III). Primeiramente, mostraremos que a solução do tipo (I) não pode ocorrer e depois mostraremos que as soluções do tipo (II) e (III) correspondem aos casos 1) e 2) do teorema.

Primeiramente, notamos que a solução dada no item (I) do Lema A.1 não pode ocorrer, pois teríamos $f_{12} = f_{22} = 0$ o que implicaria que a equação (1.22) não é satisfeita. Deste modo, podemos supor que as soluções de (1.35) são tipo (II) ou (III).

Caso 1) Suponha que a solução da equação (1.35) é do tipo (II). Então,

$$f_{32} = \phi(\xi), \qquad \xi = ay + bz,$$

para ϕ uma função real suave aplicada em $\xi = ay + bz$ e a, b constantes tais que $a^2 + b^2 \neq 0$,

$$f_{12} = \lambda\phi'(\xi),$$

$$f_{22} = \mu\phi'(\xi),$$

com λ, μ constantes tais que $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$

$$f_{11} = g,$$

$$f_{21} = h,$$

com g, h funções suaves de (z_1, y_1) tais que $g_{z_1}h_{y_1} - g_{y_1}h_{z_1}, \neq 0$ e $\mu g - \lambda h = \epsilon a y_1 + \epsilon b z_1$. Com esta notação, a equação (1.22) é equivalente a,

$$\phi'(\xi)(\mu g - \lambda h) \neq 0,$$

como $\phi'(\xi) \neq 0$ e $\mu g - \lambda h = \delta a y_1 + \delta b z_1 \neq 0$, temos que a condição (1.22) é verificada.

Neste caso, para as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$ a equação (1.34) implica no sistema (1.29).

Por último, vamos mostrar que o sistema (1.29) é irredutível. De fato, suponha por contradição que F e G não dependam de z e y. Pela equação (1.34), temos que neste caso,

$$\begin{pmatrix} g_{z_1} & g_{y_1} \\ h_{z_1} & h_{y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b\phi''(\xi)z_1 + a\lambda\phi''(\xi)y_1 - \mu\phi'(\xi)\eta + h\phi(\xi) \\ \mu b\phi''(\xi)z_1 + \mu a\phi''(\xi)y_1 - g\phi(\xi) + \lambda\phi'(\xi)\eta \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

Diferenciando a primeira linha desta matriz por z e y, respectivamente, obtemos,

$$b\left(b\lambda\phi'''(\xi)z_1 + a\lambda\phi'''(\xi)y_1 - \mu\phi''(\xi)\eta + h\phi'(\xi)\right) = 0,$$
$$a\left(b\lambda\phi'''(\xi)z_1 + a\lambda\phi'''(\xi)y_1 - \mu\phi''(\xi)\eta + h\phi'(\xi)\right) = 0.$$

Como $a^2 + b^2 \neq 0$, obtemos,

$$\lambda(bz_1 + ay_1)\phi'''(\xi) - \eta\mu\phi''(\xi) + \phi'(\xi)h = 0.$$

Analogamente, para a segunda linha da equação (1.36), obtemos

$$\mu(bz_1 + ay_1)\phi'''(\xi) - g\phi'(\xi) + \lambda\phi''(\xi)\eta = 0.$$

Das duas últimas equações, segue que,

$$\eta(\mu^2+\lambda^2)\phi''(\xi)-\mu\phi'(\xi)h-\lambda\phi'(\xi)g=0.$$

Diferenciando esta última expressão com respeito a z_1 e y_1 obtemos a seguinte relação,

$$\begin{pmatrix} h_{z_1} & g_{z_1} \\ h_{y_1} & g_{y_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi'(\xi)\mu \\ \phi'(\xi)\lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo $h_{z_1}g_{y_1}-g_{z_1}h_{y_1}\neq 0$, a relação acima implica que $\phi'(\xi)\mu=\phi'(\xi)\lambda=0$, um absurdo, pois $\phi'(\xi)\neq 0$ e $\lambda^2+\mu^2\neq 0$. Assim o sistema é irredutível.

Caso 2) Suponha que a solução da equação (1.35), com a condição (1.34) é do tipo (III). Então,

$$f_{i1}=a_iz_1+b_iy_1, \qquad i=1,2,$$

com a_i, b_i constantes reais, $i=1,2$, tais que $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$,

$$f_{32}=p,$$

com p função suave de (z,y) tal que p_z e p_y são linearmente independentes e

$$f_{i2}=\frac{\delta}{a_1b_2-a_2b_1}(b_ip_z-a_ip_y), \qquad i=1,2.$$

A equação (1.22) é equivalente a

$$\delta p_zz_1+\delta p_yy_1,$$

que é satisfeita, pois p_z e p_y são linearmente independentes. Neste caso, a equação (1.34) é equivalente ao sistema (1.31), com a notação,

$$\alpha=a_1^2+a_2^2, \quad \beta=b_1^2+b_2^2 \quad \text{e} \quad \tau=b_1a_1+a_2b_2.$$

Assim demonstramos que as condições do Caso 2) são, de fato, necessárias.

Por último vamos mostrar que o sistema (1.31) é irredutível. De fato, vamos mostrar que este sistema satisfaz uma condição mais forte, $F_z^2+G_y^2\neq 0$, em que F e G são dadas pelo sistema (1.31),

$$\begin{aligned} F &= -\frac{z_1}{\gamma}(\delta p_{zy}-\tau p)+\frac{y_1}{\gamma}(-\delta p_{yy}+\beta p)+\frac{\delta\eta}{\gamma^2}(-\beta p_z+\tau p_y), \\ G &= \frac{z_1}{\gamma}(\delta p_{zz}-\alpha p)+\frac{y_1}{\gamma}(\delta p_{zy}-\tau p)+\frac{\delta\eta}{\gamma^2}(\tau p_z-\alpha p_y). \end{aligned}$$

Suponhamos por contradição que F não dependa de z e G não dependa de y. Diferenciando F com respeito a z e G com respeito a y e usando a independência funcional entre z_1 e y_1 obtemos,

$$\delta p_{zzy} - \tau p_z = 0, \qquad -\delta p_{zyy} + \beta p_z = 0,$$
$$\delta p_{zzy} - \alpha p_y = 0, \qquad \delta p_{zyy} - \tau p_y = 0.$$

Eliminando os termos de terceira ordem em p por soma e diferença destas expressões, obtemos

$$\begin{pmatrix} -\tau & \alpha \\ \beta & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_z \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que, de acordo com a definição de α, β, τ e γ, o determinante desta matriz é $\tau^2 - \alpha\beta = \gamma^2$. Como $\gamma \neq 0$, segue que a matriz acima é inversível e obtemos que $p_z = p_y = 0$, um absurdo, assim o sistema satisfaz $F_z^2 + G_y^2 \neq 0$ e em particular é irredutível.

Deste modo mostramos que as condições dos Caso 1) e 2) são, de fato, necessárias e que os respectivos sistemas são irredutíveis.

Vamos mostrar que as condições dos Caso 1) e 2) são também suficientes. De fato, vamos considerar cada caso separadamente.

Caso 1) Seja $\delta = 1$ (resp. -1) e considere

$$\begin{aligned} f_{11} &= g, & f_{12} &= \lambda\phi'(\xi), \\ f_{21} &= h, & f_{22} &= \mu\phi'(\xi), \\ f_{31} &= \eta, & f_{32} &= \phi(\xi), \end{aligned}$$

onde g e h são funções de (z_1, y_1), tais que $g_{z_1}h_{y_1} - g_{y_1}h_{z_1} \neq 0$, $\mu g - \lambda h = \delta a y_1 + \delta b z_1$, em que a, b, μ e λ são constantes tais que $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ e $a^2 + b^2 \neq 0$, ϕ é uma função real suave não constante e $\xi = a y_1 + b z_1$. Vamos mostrar que o sistema (1.29) descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com estas f_{ij},$1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$. De fato, defina $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i = 1, 2, 3$, e note que,

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \big(\lambda\phi''(\xi)(ay_1 + bz_1) - g_{z_1}z_{1,t} - g_{y_1}y_{1,t}\big)\, dx \wedge dt, \\ d\omega_2 &= \big(\mu\phi''(\xi)(ay_1 + bz_1) - h_{z_1}z_{1,t} - h_{y_1}y_{1,t}\big)\, dx \wedge dt, \\ d\omega_3 &= \phi'(\xi)(ay_1 + bz_1) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Comparando, respectivamente, com

$$\begin{aligned}
\omega_3 \wedge \omega_2 &= (\eta dx + \phi(\xi)dt) \wedge (hdx + \mu\phi'(\xi)dt) = (\eta\mu\phi'(\xi) - h\phi(\xi))dx \wedge dt, \\
\omega_1 \wedge \omega_3 &= \big(gdx + \lambda\phi'(\xi)dt) \wedge (\eta dx + \phi(\xi)dt\big) = (g\phi(\xi) - \eta\lambda\phi'(\xi))dx \wedge dt, \\
\delta\omega_1 \wedge \omega_2 &= \delta(gdx + \lambda\phi'(\xi)dt) \wedge (hdx + \mu\phi'(\xi)dt) = \delta(g\mu\phi'(\xi) - h\lambda\phi'(\xi))dx \wedge dt,
\end{aligned}$$

obtemos que a terceira linha é equivalente a identidade,

$$\mu g - \lambda h = \delta a y_1 + \delta b z_1.$$

As duas primeiras equações, expressas em termos matriciais, são equivalentes a,

$$\begin{pmatrix} g_{z_1} & g_{y_1} \\ h_{z_1} & h_{y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\phi''(\xi)(ay_1 + bz_1) - \eta\mu\phi'(\xi) + h\phi(\xi) \\ \mu\phi''(\xi)(ay_1 + bz_1) + \eta\lambda\phi'(\xi) - g\phi(\xi) \end{pmatrix}.$$

Como $W := g_{z_1}h_{y_1} - g_{y_1}h_{z_1} \neq 0$ podemos inverter esta relação,

$$\begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} h_{y_1} & -g_{y_1} \\ -h_{z_1} & g_{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\phi''(\xi)(ay_1 + bz_1) - \eta\mu\phi'(\xi) + h\phi(\xi) \\ \mu\phi''(\xi)(ay_1 + bz_1) + \eta\lambda\phi'(\xi) - g\phi(\xi) \end{pmatrix}.$$

Agrupado os termos em derivadas de ϕ e utilizando $\lambda h_{y_1} - \mu g_{y_1} = -\delta a$ e $-\lambda h_{z_1} + \mu g_{z_1} = \delta b$ obtemos as equações (1.29).

Assim, mostramos que as condições do Caso 1) são, de fato, suficientes.

Caso 2) Considere, $\delta = 1$ (resp. -1) e defina

$$\begin{aligned}
f_{11} &= a_1 z_1 + b_1 y_1, & f_{12} &= \tfrac{\delta}{\gamma}(b_1 p_z - a_1 p_y), \\
f_{21} &= a_2 z_1 + b_2 y_2, & f_{22} &= \tfrac{\delta}{\gamma}(b_2 p_z - a_2 p_y), \\
f_{31} &= \eta, & f_{32} &= p,
\end{aligned}$$

onde p é uma função suave de (z, y), tal que p_z e p_y são linearmente independentes, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ são constantes, para $i = 1, 2$, tais que $\gamma = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Vamos mostrar que o sistema (1.31) descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com estas f_{ij},$1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

De fato, definimos $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i = 1, 2, 3$, e comparamos as três seguintes expressões,

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= \left(\frac{\delta}{\gamma}(b_1p_{zz}z_1 + b_1p_{zy}y_1 - a_1p_{yz}z_1 - a_1p_{yy}y_1) - a_1z_{1,t} - b_1y_{1,t}\right) dx \wedge dt, \\
d\omega_2 &= \left(\frac{\delta}{\gamma}(b_2p_{zz}z_1 + b_2p_{zy}y_1 - a_2p_{yz}z_1 - a_2p_{yy}y_1) - a_2z_{1,t} - b_2y_{1,t}\right) dx \wedge dt, \\
d\omega_3 &= (p_z z_1 + p_y y_1) dx \wedge dt,
\end{aligned}$$

respectivamente, com

$$\begin{aligned}
\omega_3\wedge\omega_2 &= \left(\delta\frac{\eta}{\gamma}(b_2p_z-a_2p_y)-p(a_2z_1+b_2y_1)\right)dx\wedge dt,\\
\omega_1\wedge\omega_3 &= \left(p(a_1z_1+b_1y_1)-\delta\frac{\eta}{\gamma}(b_1p_z-a_1p_y)\right)dx\wedge dt,\\
\delta\omega_1\wedge\omega_2 &= \left(\frac{1}{\gamma}(a_1z_1+b_1y_1)(b_2p_z-a_2p_y)-\frac{1}{\gamma}(b_1p_z-a_1p_y)(a_2z_1+b_2y_1)\right)dx\wedge dt\\
&= (p_zz_1+p_yy_1)dx\wedge dt.
\end{aligned}$$

Podemos ver que $d\omega_3=\delta\omega_1\wedge\omega_2$ equivale a uma identidade e as duas equações de estrutura restantes podem ser expressas de forma matricial como,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{1,t}\\ y_{1,t}\end{pmatrix} &= z_1\begin{pmatrix}\frac{\delta}{\gamma}b_1p_{zz}-\frac{\delta}{\gamma}a_1p_{yz}+a_2p\\ \frac{\delta}{\gamma}b_2p_{zz}-\frac{\delta}{\gamma}a_2p_{yz}+a_1p\end{pmatrix}+\\
&+y_1\begin{pmatrix}\frac{\delta}{\gamma}b_1p_{yz}-\frac{\delta}{\gamma}a_1p_{yy}+b_2p\\ \frac{\delta}{\gamma}b_2p_{yz}-\frac{\delta}{\gamma}a_2p_{yy}-b_1p\end{pmatrix}+\\
&+\delta\frac{\eta}{\gamma}\begin{pmatrix}-(b_2p_z-a_2p_y)\\ (b_1p_z-a_1p_y)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como o determinante da matriz do lado direito é igual a $\gamma=a_1b_2-b_1a_2$ que é diferente de zero, podemos inverter esta relação e obter,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_{1,t}\\ y_{1,t}\end{pmatrix} &= \frac{z_1}{\gamma}\begin{pmatrix}-\frac{\delta}{\gamma}(b_2a_1-b_1a_2)p_{yz}+p(b_2a_2+b_1a_1)\\ \frac{\delta}{\gamma}(-a_2b_1+a_1b_2)p_{zz}+p(-a_2^2-a_1^2)\end{pmatrix}+\\
&+\frac{y_1}{\gamma}\begin{pmatrix}-\frac{\delta}{\gamma}(b_2a_1+b_1a_2)p_{yy}+p(b_2^2+b_1^2)\\ \frac{\delta}{\gamma}(-a_2b_1+a_1b_2)p_{zy}+p(-a_2b_2-a_1b_1)\end{pmatrix}+\\
&+\delta\frac{\eta}{\gamma^2}\begin{pmatrix}p_z(-b_2^2-b_1^2)+p_y(b_2a_2+b_1a_1)\\ p_z(a_2b_2+a_1b_1)+p_y(-a_2^2-a_1^2)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Introduzindo $\alpha=a_1^2+a_2^2$, $\beta=b_1^2+b_2^2$ e $\tau=b_1a_1+a_2b_2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_{1,t}\\ y_{1,t}\end{pmatrix} &= \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} z_1(-\delta p_{yz}+\tau p)+y_1(-\delta p_{yy}+\beta p)\\ z_1(\delta p_{zz}-\alpha p)+y_1(\delta p_{zy}-\tau p)\end{pmatrix}+\\
&+\delta\frac{\eta}{\gamma^2}\begin{pmatrix}-\beta p_z+\tau p_y\\ \tau p_z-\alpha p_y\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Qual é equivalente ao sistema (1.31). Assim, mostramos que as condições do Caso 2) são, de fato, suficientes.

Assim, mostramos que os sistemas obtidos nos Casos 1) e 2) são irredutíveis e que as condições dos dois casos são necessárias e suficientes e consequentemente concluímos a demonstração do teorema.

□

Observamos que o sistema de equações dado em (1.14), conhecido como "Konno-Oono coupled integrable dispersionless system", está contido na classe de sistemas (1.31) dado no Teorema 1.2, Caso 1. De fato, seguindo a notação do Teorema 1.2, considere $\delta = 1$, $\eta = 0$, $a = 2$, $b = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = \nu$, $\phi(\xi) = \xi$, $g = \dfrac{2}{\nu} y_1$ e $h = \dfrac{2}{\nu} z_1$, em que ν é um parâmetro real não nulo.

Note que o sistema de equações (1.14) descreve superfícies pseudo-esféricas com $f_{31} = 0$. Isto nos motiva a apresentar um corolário do Teorema 1.2 que nos dá uma classificação de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esférica ou esféricas com a condição $f_{31} = 0$.

Corolário 1.1. *Um sistema diferencial $(S_{1,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (1.17)-(1.22), com $f_{31} = 0$ se, e somente se, um dois casos abaixo ocorre.*

Caso 1) Existem constantes $a, b, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, funções reais suaves $g(z_1, y_1)$, $h(z_1, y_1)$ e $\phi(\xi)$, com $\xi = ay + bz$, tais que, $a^2 + b^2 \neq 0$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, ϕ não é constante, $\mu g - \lambda h = \delta a y_1 + \delta b z_1$, com $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$), $W := g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} \neq 0$ e

$$z_{1,t} = \frac{1}{W}\left(-\delta a(bz_1 + ay_1)\phi''(\xi) + \frac{1}{2}(g^2 + h^2)_{y_1}\phi(\xi)\right), \tag{1.37}$$

$$y_{1,t} = \frac{1}{W}\left(\delta b(bz_1 + ay_1)\phi''(\xi) - \frac{1}{2}(g^2 + h^2)_{z_1}\phi(\xi)\right). \tag{1.38}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= g, & f_{12} &= \lambda\phi'(\xi), \\ f_{21} &= h, & f_{22} &= \mu\phi'(\xi), \\ f_{31} &= 0, & f_{32} &= \phi(\xi). \end{aligned}$$

Caso 2) Existem, constantes $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ e uma função real suave $p(z, y)$, tais que, $\gamma := a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, p_z e p_y não são proporcionais e

$$z_{1,t} = -\frac{z_1}{\gamma}(\delta p_{zy} - \tau p) + \frac{y_1}{\gamma}(-\delta p_{yy} + \beta p), \tag{1.39}$$

$$y_{1,t} = \frac{z_1}{\gamma}(\delta p_{zz} - \alpha p) + \frac{y_1}{\gamma}(\delta p_{zy} - \tau p), \tag{1.40}$$

onde, $\alpha = a_1^2 + a_2^2$, $\beta = b_1^2 + b_2^2$, $\tau = a_1 b_1 + a_2 b_2$. *Neste caso,*

$$\begin{aligned} f_{11} &= a_1 z_1 + b_1 y_1, & f_{12} &= \tfrac{\delta}{\gamma}(b_1 p_z - a_1 p_y), \\ f_{21} &= a_2 z_1 + b_2 y_1, & f_{22} &= \tfrac{\delta}{\gamma}(b_2 p_z - a_2 p_y), \\ f_{31} &= 0, & f_{32} &= p. \end{aligned}$$

1.2.2 Com a condição $f_{21} = \eta$.

Nesta subseção vamos caracterizar os sistemas $(S_{1,1})$ irredutíveis que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas sob a condição de $f_{21} = \eta$, em que η é uma constante real.

Teorema 1.3. *Um sistema diferencial* $(S_{1,1})$ *irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves* f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, *satisfazendo (1.17)-(1.22) com* $f_{21} = \eta \in \mathbb{R}$ *se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:*

Caso 1)

$$\begin{cases} z_{1,t} = \frac{1}{W}\left[-(abz_1 + a^2 y_1)\phi''(\xi) + \eta(\mu h_{y_1} - \delta\lambda g_{y_1})\phi'(\xi) - \frac{1}{2}(h^2 - \delta g^2)_{y_1}\phi(\xi)\right], \\ y_{1,t} = \frac{1}{W}\left[(b^2 z_1 + aby_1)\phi''(\xi) - \eta(\mu h_{z_1} - \delta\lambda g_{z_1})\phi'(\xi) + \frac{1}{2}(h^2 - \delta g^2)_{z_1}\phi(\xi)\right], \end{cases} \tag{1.41}$$

em que, $\delta = 1$ *(resp.* -1*),* $a, b, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ *são constantes,* $g(z_1, y_1), h(z_1, y_1)$ *e* $\phi(\xi)$*, com* $\xi = ay + bz$*, são funções suaves tais que,*

$$\begin{gathered} a^2 + b^2 \neq 0, \qquad \mu^2 + \lambda^2 \neq 0, \\ \phi'(\xi) \neq 0, \\ \mu g - \lambda h = ay_1 + bz_1, \\ W = g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} \neq 0, \\ g \neq \lambda\eta\tfrac{\phi'(\xi)}{\phi(\xi)}. \end{gathered} \tag{1.42}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= g, & f_{12} &= \lambda\phi'(\xi), \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= \phi(\xi), \\ f_{31} &= h, & f_{32} &= \mu\phi'(\xi). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Caso 2)

$$\begin{cases} z_{1,t} = -\dfrac{z_1}{\gamma}(p_{zy} + \tau p) - \dfrac{y_1}{\gamma}(p_{yy} + \beta p) + \dfrac{\eta}{\gamma^2}(\beta p_z - \tau p_y), \\ y_{1,t} = \dfrac{z_1}{\gamma}(p_{zz} + \alpha p) + \dfrac{y_1}{\gamma}(p_{zy} + \tau p) - \dfrac{\eta}{\gamma^2}(\tau p_z - \alpha p_y), \end{cases} \tag{1.44}$$

em que $a_1, b_1, a_3, b_3 \in \mathbb{R}$ são constantes, $p(z,y)$ é uma função real suave, e

$$a_1 b_3 - b_1 a_3 \neq 0,$$

$$p_z \quad e \quad p_y \text{ não são proporcionais},$$

$$\gamma = a_1 b_3 - b_1 a_3, \quad \alpha = a_3^2 - \delta a_1^2, \quad \beta = b_3^2 - \delta b_1^2, \quad \tau = a_3 b_3 - \delta a_1 b_1, \tag{1.45}$$

e $\delta = 1$ (resp. -1). Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= a_1 z_1 + b_1 y_1, & f_{12} &= \tfrac{1}{\gamma}(b_1 p_z - a_1 p_y), \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= p, \\ f_{31} &= a_3 z_1 + b_3 y_1, & f_{32} &= \tfrac{1}{\gamma}(b_3 p_z - a_3 p_y). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Além disso, em todos os casos, cada sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A,B,$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são definidas pelas respectivas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

Demonstração. Considere $f_{ij} : U \times U_1 \to \mathbb{R}$ funções reais suaves, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, em $U, U_1 \subset \mathbb{R}^2$ subconjuntos abertos e conexos de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas $(z,y) \times (z_1, y_1) \in U \times U_1$ e seja $\delta = 1$ (resp. -1). Suponha que as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfaçam as equações (1.17)-(1.22) do Teorema 1.1.

A condição $f_{21} = \eta \in \mathbb{R}$ implica que a equação (1.18) é equivalente a,

$$W = f_{11,z_1} f_{31,y_1} - f_{11,y_1} f_{31,z_1} \neq 0, \quad \text{em } U_1. \tag{1.47}$$

Podemos ver as equações (1.19) e (1.21) como um sistema linear para as funções F e G, assim a condição $W \neq 0$ implica que F e G pode ser obtido como uma combinação das funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$,

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} f_{31,y_1} & -f_{11,y_1} \\ -f_{31,z_1} & f_{11,z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{12,z} z_1 + f_{12,y} y_1 - f_{31} f_{22} + f_{32} \eta \\ f_{32,z} z_1 + f_{32,y} y_1 - \delta f_{11} f_{22} + \delta f_{12} \eta \end{pmatrix}. \tag{1.48}$$

Além disso, a equação (1.20) é equivalente a,

$$f_{22,z} z_1 + f_{22,y} y_1 - f_{11} f_{32} + f_{12} f_{31} = 0. \tag{1.49}$$

Note que as equações (1.49) e (1.47) são idênticas as equações (A.1) e (A.2) do Apêndice A considerando $\psi_0 = f_{22}$, $\psi_1 = f_{12}$, $\psi_2 = f_{32}$, $\rho_1 = f_{11}$, $\rho_2 = f_{31}$ e $\epsilon = 1$. Deste modo, aplicamos o Lema A.1 e temos três casos a considerar, (I), (II) e (III). Vamos mostrar que para a solução (I) o sistema (1.34) não é irredutível e portanto não a consideraremos, vamos mostrar também que as soluções (II) e (III) correspondem, respectivamente, aos Casos 1) e 2).

Primeiramente, suponha que a solução de (1.49), com a condição (1.47), é do tipo (I), ou seja, $f_{12} = f_{32} = 0$, $f_{22} = \lambda \in \mathbb{R}$ é constante e f_{11}, f_{31}, são funções arbitrárias tais que $f_{11,z_1} f_{31,y_1} - f_{11,y_1} f_{31,z_1} \neq 0$. Neste caso a equação (1.48) se reduz a

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \frac{1}{f_{11,z_1} f_{31,y_1} - f_{11,y_1} f_{31,z_1}} \begin{pmatrix} f_{31,y_1} & -f_{11,y_1} \\ -f_{31,z_1} & f_{11,z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f_{31}\lambda \\ -\delta f_{11}\lambda \end{pmatrix},$$

assim F e G são funções somente de z_1 e y_1 e o sistema $(S_{1,1})$, para F e G dados acima não é irredutível.

Deste modo devemos considerar somente as soluções (II) e (III).

Caso 1) Suponha que a solução do (1.49), com a condição (1.47), é do tipo (II). Assim, $f_{22} = \phi(\xi)$, onde, ϕ é uma função real suave não constante definida em $\xi = ay + bz$ e a, b são constantes tais que $a^2 + b^2 \neq 0$. $f_{12} = \lambda\phi'(\xi)$, $f_{32} = \mu\phi'(\xi)$, em que ϕ' é a derivada de ϕ aplicada em ξ e λ, μ são constantes tais que $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. $f_{11} = g$, $f_{31} = h$, em que g, h são funções suaves de (z_1, y_1) satisfazendo, $g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} \neq 0$ e $\mu g - \lambda h = ay_1 + bz_1$.

Notemos que a equação (1.22) é equivalente a $g\phi(\xi) - \eta\lambda\phi'(\xi) \neq 0$, o que equivale a

$$g \neq \lambda\eta \frac{\phi'(\xi)}{\phi(\xi)}, \tag{1.50}$$

e assim mostramos que as condições (1.42) são necessárias. Neste caso a equação (1.48) é equivalente ao sistema (1.41), o que demonstra a condição necessária do Caso 1) do teorema.

Para mostrar que estas condições são também suficientes, basta definir as f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, por (1.43) e checar diretamente que as equações (1.17)-(1.22) são satisfeitas. Analogamente ao que foi feito no Caso 1) do Teorema 1.2.

Por último vamos mostrar que o sistema (1.41) é irredutível. De fato, suponha por contradição que F e G não dependem de z e y. Pela equação (1.48), temos que neste caso,

$$\begin{pmatrix} g_{z_1} & g_{y_1} \\ h_{z_1} & h_{y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b\phi''(\xi)z_1 + a\lambda\phi''(\xi)y_1 - h\phi(\xi) + \eta\mu\phi'(\xi) \\ \mu b\phi''(\xi)z_1 + \mu a\phi''(\xi)y_1 - \delta g\phi(\xi) + \delta\eta\lambda\phi'(\xi) \end{pmatrix}. \tag{1.51}$$

Diferenciando a primeira linha desta matriz por z e y, respectivamente, obtemos,

$$b\left(b\lambda\phi'''(\xi)z_1 + a\lambda\phi'''(\xi)y_1 - h\phi'(\xi) + \eta\mu\phi''(\xi)\right) = 0,$$

$$a\left(b\lambda\phi'''(\xi)z_1 + a\lambda\phi'''(\xi)y_1 - h\phi'(\xi) + \eta\mu\phi''(\xi)\right) = 0.$$

Como $a^2 + b^2 \neq 0$, obtemos

$$\lambda(bz_1 + ay_1)\phi'''(\xi) + \eta\mu\phi''(\xi) - \phi'(\xi)h = 0.$$

Analogamente para a segunda linha da equação (1.51), temos que

$$\mu(bz_1 + ay_1)\phi'''(\xi) + \delta\eta\lambda\phi''(\xi) - \delta g\phi'(\xi) = 0.$$

Destas duas últimas expressões, obtemos

$$\eta(\mu^2 - \delta\lambda^2)\phi''(\xi) - \mu\phi'(\xi)h + \delta\lambda g\phi'(\xi) = 0.$$

Diferenciando esta última expressão com respeito a z_1 e y_1 obtemos a seguinte relação,

$$\begin{pmatrix} h_{z_1} & g_{z_1} \\ h_{y_1} & g_{y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu\phi'(\xi) \\ \delta\lambda\phi'(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo $h_{z_1}g_{y_1} - g_{z_1}h_{y_1} \neq 0$, a relação acima implica que $\mu\phi'(\xi) = \lambda\phi'(\xi) = 0$, um absurdo, pois $\phi'(\xi) \neq 0$ e $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. Assim o sistema é, de fato, irredutível.

Caso 2) Suponha que a solução de (1.49), com a condição (1.47) é do tipo (III) do Lema A.1. Assim existem constantes, digamos a_1, a_3, b_1, b_3, tais que $a_1b_3 - b_1a_3 \neq 0$, $f_{1i} = a_iz_i + b_iy_i$, para $i = 1, 3$. $f_{22} = p$, em que p é uma função suave de (z, y) tal que p_z e p_y são linearmente independentes e $f_{i2} = \frac{1}{a_1b_3 - b_1a_3}(b_ip_z - a_ip_y)$, para $i = 1, 3$.

Neste caso, a equação (1.22) e equivalente a

$$a_1(p(a_1b_3 - b_1a_3)z_1 + \eta p_y) + b_1(p(a_1b_3 - b_1a_3)y_1 - \eta p_z) \neq 0, \tag{1.52}$$

o que é válida, a menos de um subconjunto de medida nula. Caso contrário, por independência funcional entre z_1 e y_1 teríamos $(a_1b_3 - b_1a_3)a_1p = (a_1b_3 - b_1a_3)b_1p = 0$ o que é um absurdo, pois $a_1b_3 - b_1a_3 \neq 0$, $p \neq 0$ e a_1, b_1 não se anulam simultaneamente. Assim, temos que (1.22) é satisfeita. Além disso, a equação (1.48) é equivalente ao sistema (1.44), com a notação,

$$\gamma = a_1b_3 - b_1a_3, \quad \alpha = a_3^2 - \delta a_1^2, \quad \beta = b_3^2 - \delta b_1^2 \quad \text{e} \quad \tau = a_3b_3 - \delta a_1b_1.$$

O que demonstra as condições necessárias do Caso 2) do teorema.

Para mostrar que estas condições são também suficientes, basta definir as f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, como dadas em (1.46) e checar diretamente que as equações (1.17)-(1.22) são satisfeitas, de modo análogo ao que foi feito no Caso 2) do Teorema 1.2.

Por último vamos mostrar que o sistema (1.44) é irredutível. De fato, vamos mostrar que este sistema satisfaz uma condição mais forte, $F_z^2 + G_y^2 \neq 0$, em que F e G são dadas pelo sistema (1.44),

$$\begin{aligned} F &= -\frac{z_1}{\gamma}(p_{zy} + \tau p) - \frac{y_1}{\gamma}(p_{yy} + \beta p) + \frac{\eta}{\gamma^2}(\beta p_z - \tau p_y), \\ G &= \frac{z_1}{\gamma}(p_{zz} + \alpha p) + \frac{y_1}{\gamma}(p_{zy} + \tau p) - \frac{\eta}{\gamma^2}(\tau p_z - \alpha p_y). \end{aligned}$$

Suponhamos por contradição que F não dependa de z e G não dependa de y. Diferenciando F com respeito a z e G com respeito a y e usando a independência funcional entre z_1 e y_1 obtemos,

$$p_{zzy} + \tau p_z = 0, \qquad p_{zyy} + \beta p_z = 0,$$

$$p_{zzy} + \alpha p_y = 0, \qquad p_{zyy} + \tau p_y = 0,$$

tomando a diferença destas expressões para eliminar os termos de terceira ordem em p, obtemos

$$\begin{pmatrix} \alpha & \tau \\ \tau & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que, de acordo com a definição de α, β, τ e γ, o determinante desta matriz é $\alpha\beta - \tau^2 = -\delta\gamma^2$. Como $\gamma \neq 0$, segue que a matriz acima é inversível e obtemos que $p_z = p_y = 0$, um absurdo, assim o sistema satisfaz $F_z^2 + G_y^2 \neq 0$ e em particular é irredutível.

Assim, concluímos a demonstração do teorema.

□

Observação 1.1. Observamos que a equação (vetorial) de Pholmeyer-Lund-Regge modificada (1.10) se encontra na classe de sistemas do tipo (1.44) do Teorema 1.3 (Caso 2). De fato, seguindo a notação do teorema, basta considerar $\delta = 1$, $a_1 \to \eta$, $b_1 \to \eta$, $a_3 \to \eta$, $b_3 \to -\eta$, $\eta \to \eta^2$ e $p \to -\eta^{-2} - 2zy$.

1.2.3 Com a condição $f_{11} = \eta$.

Nesta subseção vamos caracterizar, no Teorema 1.4, os sistemas $(S_{1,1})$ irredutíveis que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas sob a condição de $f_{11} = \eta$, em que η é uma constante real.

Conforme observado na introdução, os sistemas de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com a hipótese $f_{11} = \eta$ são exatamente os mesmos sistemas para o caso $f_{21} = \eta$, bastando considerar a transformação (0.14). Deste modo, a classificação dos sistemas do tipo $S_{1,1}$ com $f_{11} = \eta$ pode ser obtida através da classificação dos sistemas do tipo $(S_{1,1})$ com $f_{21} = \eta$. Observamos que, apesar das equações diferenciais serem as mesmas, em geral os problemas lineares associados podem ser diferentes.

Teorema 1.4. *Um sistema $(S_{1,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (1.17)-(1.22) com $f_{11} = \eta \in \mathbb{R}$ se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:*

Caso 1)

$$\begin{cases} z_{1,t} = \dfrac{1}{W}\left[-a(bz_1+ay_1)\phi''(\xi)+\eta(\mu h_{y_1}-\delta\lambda g_{y_1})\phi'(\xi)-\frac{1}{2}(h^2-\delta g^2)_{y_1}\phi(\xi)\right], \\ y_{1,t} = \dfrac{1}{W}\left[b(bz_1+ay_1)\phi''(\xi)-\eta(\mu h_{z_1}-\delta\lambda g_{z_1})\phi'(\xi)+\frac{1}{2}(h^2-\delta g^2)_{z_1}\phi(\xi)\right]. \end{cases} \tag{1.53}$$

Em que, $\delta = 1$ (resp. -1), $a, b, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ são constantes, $g(z_1, y_1), h(z_1, y_1)$ e $\phi(\xi)$, com $\xi = ay + bz$, são funções suaves tais que,

$$\begin{gathered} a^2+b^2 \neq 0, \qquad \mu^2+\lambda^2 \neq 0, \\ \phi'(\xi) \neq 0, \\ \mu g - \lambda h = ay_1 + bz_1, \\ W = g_{z_1}h_{y_1} - g_{y_1}h_{z_1} \neq 0, \\ g \neq \lambda\eta\tfrac{\phi'(\xi)}{\phi(\xi)}. \end{gathered} \tag{1.54}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta, & f_{12} &= \phi(\xi). \\ f_{21} &= g, & f_{22} &= \lambda\phi'(\xi). \\ f_{31} &= -h, & f_{32} &= -\mu\phi'(\xi). \end{aligned} \tag{1.55}$$

Caso 2)

$$\begin{cases} z_{1,t} = -\dfrac{z_1}{\gamma}(p_{zy}+\tau p) - \frac{y_1}{\gamma}(p_{yy}+\beta p) + \frac{\eta}{\gamma^2}(\beta p_z - \tau p_y), \\ y_{1,t} = \dfrac{z_1}{\gamma}(p_{zz}+\alpha p) + \frac{y_1}{\gamma}(p_{zy}+\tau p) - \frac{\eta}{\gamma^2}(\tau p_z - \alpha p_y). \end{cases} \tag{1.56}$$

Em que $a_1, b_1, a_3, b_3 \in \mathbb{R}$ são constantes, $p(z, y)$ é uma função real suave, e

$$\begin{gathered} a_1b_3 - b_1a_3 \neq 0, \\ p_z \quad \textit{e} \quad p_y \textit{ não são proporcionais}, \\ \gamma = a_1b_3 - b_1a_3, \quad \alpha = a_3^2 - \delta a_1^2, \quad \beta = b_3^2 - \delta b_1^2, \quad \tau = a_3b_3 - \delta a_1b_1, \end{gathered} \tag{1.57}$$

e $\delta = 1$ (resp. -1). Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta, & f_{12} &= p, \\ f_{21} &= a_1z_1 + b_1y_1, & f_{22} &= \tfrac{1}{\gamma}(b_1p_z - a_1p_y), \\ f_{31} &= -a_3z_1 - b_3y_1, & f_{32} &= -\tfrac{1}{\gamma}(b_3p_z - a_3p_y). \end{aligned} \tag{1.58}$$

Além disso, em todos os casos, cada sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A,B,$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são definidas pelas respectivas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

1.3 Aplicações: Novas famílias de sistemas do tipo $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Nesta seção vamos considerar os Teoremas 1.2, 1.3, para exibir novas famílias de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, nas quais cada sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro de problemas lineares.

1.3.1 Família de sistemas a sete parâmetros generalizando a equação (vetorial) de Pohlmeyer-Lund-Regge modificada.

Nesta subseção, utilizando o Teorema 1.3 Caso 2), apresentaremos uma família a sete parâmetros de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas que generaliza a equação (vetorial) de Pohlmeyer-Lund-Regge modificada (1.10).

No que segue, utilizaremos a seguinte notação para as funções trigonométricas e trigonométricas hiperbólicas. Sejam $\theta \in \mathbb{R}$ um número real e $\epsilon = \pm 1$, denotamos

$$C_\epsilon(\theta) = \begin{cases} \cos(\theta), & \text{se } \epsilon = 1, \\ \cosh(\theta), & \text{se } \epsilon = -1, \end{cases} \quad \text{e} \quad S_\epsilon(\theta) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\theta), & \text{se } \epsilon = 1, \\ \operatorname{senh}(\theta), & \text{se } \epsilon = -1. \end{cases} \tag{1.59}$$

Observação 1.2. Com a notação introduzida em (1.59) valem as seguintes identidades. Para todo número real, θ, e para $\epsilon = \pm 1$,

$$C_\epsilon^2(\theta) + \epsilon S_\epsilon^2(\theta) = 1, \tag{1.60}$$

$$C_\epsilon^2(\theta/2) - \epsilon S_\epsilon^2(\theta/2) = C_\epsilon(\theta), \tag{1.61}$$

$$2C_\epsilon(\theta/2)S_\epsilon(\theta/2) = S_\epsilon(\theta). \tag{1.62}$$

Proposição 1.3. *Sejam sete constantes k_0, k_1, k_2, k_3, a, b e θ, tais que k_0, a, b são não nulos, e seja $\delta = 1$ (resp. -1). Então, a família a sete parâmetros de sistemas, abaixo, descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas),*

$$\begin{cases} z_{1,t} = \delta ab S_\delta(\theta)(z_1\psi - k_2) - \delta b^2 C_\delta(\theta)(y_1\psi + k_1) + \delta k_0 z, \\ y_{1,t} = -a^2 C_\delta(\theta)(z_1\psi - k_2) - \delta ab S_\delta(\theta)(y_1\psi + k_1) + \delta k_0 y, \end{cases} \tag{1.63}$$

onde ψ é uma função de (z, y) dada por,

$$\psi = k_0 \left(\frac{C_\delta(\theta)}{2ab}(a^2 z^2 - \delta b^2 y^2) + \delta S_\delta(\theta) zy \right) - ab(k_1 z + k_2 y + k_3).$$

Neste caso, as funções f_{ij} associadas são dadas por,

$$\begin{aligned}
&f_{11} = \eta\left(aS_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)z_1 - bC_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)y_1\right), && f_{12} = \tfrac{1}{\eta}(bC_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\psi_z + aS_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\psi_y),\\
&f_{21} = \eta^2, && f_{22} = \tfrac{1}{\eta^2}k_0 - ab\psi,\\
&f_{31} = \eta(aC_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)z_1 + \delta bS_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)y_1), && f_{32} = \tfrac{1}{\eta}(-\delta bS_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\psi_z + aC_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\psi_y),
\end{aligned} \tag{1.64}$$

onde $\eta \neq 0$.

Demonstração. Para mostrar que esta família a sete parâmetros descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas), utilizamos o Teorema 1.3, Caso 2), com a notação do Teorema, basta considerar, $\eta \to \eta^2$ e

$$\begin{gathered}
a_1 = \eta aS_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right), \quad a_3 = \eta aC_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right),\\
b_1 = -\eta bC_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right), \quad b_3 = \eta\delta bS_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right),\\
p = \tfrac{1}{\eta^2}k_0 - ab\psi.
\end{gathered}$$

Com estas escolhas teremos, utilizando as identidades (1.60), (1.61) e (1.62), que

$$\gamma = \eta^2 ab \neq 0,$$

$$\alpha = \eta^2 a^2 C_\delta(\theta), \quad \beta = -\delta\eta^2 b^2 C_\delta(\theta) \quad \text{e} \quad \tau = \delta\eta^2 abS_\delta(\theta).$$

Além disso, p_z e p_y são não proporcionais, pois pela escolha de p, segue que,

$$\begin{pmatrix} p_z \\ p_y \end{pmatrix} = -k_0\begin{pmatrix} a^2C_\delta(\theta) & \delta abS_\delta \\ \delta abS_\delta(\theta) & -\delta b^2C_\delta(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} + a^2b^2\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \tag{1.65}$$

sendo z e y linearmente independentes e o determinante desta matriz igual $-\delta a^2b^2 \neq 0$ segue que p_z e p_y são linearmente independentes. Assim as condições dadas em (1.45) são satisfeitas.

Agora vamos mostrar que o sistema (1.44), com a notação acima, equivale a (1.63). Primeiramente, note que,

$$\begin{aligned}
&p_{zy} = -\delta abk_0S_\delta(\theta), \quad p_{zz} = -k_0a^2C_\delta(\theta), \quad p_{yy} = \delta k_0b^2C_\delta(\theta),\\
&p_{zy} + \tau p = -\delta\eta^2a^2b^2S_\delta(\theta)\psi,\\
&p_{yy} + \beta p = \delta\eta^2ab^3C_\delta(\theta)\psi,\\
&p_{zz} + \alpha p = -\eta^2a^3bC_\delta(\theta)\psi,\\
&\beta p_z - \tau p_y = \delta\eta^2a^2b^2\left(k_0z - b^2C_\delta(\theta)k_1 - abS_\delta(\theta)k_2\right),\\
&\tau p_z - \alpha p_y = -\eta^2a^2b^2\left(\delta k_0y - \delta abS_\delta(\theta)k_1 + a^2C_\delta(\theta)k_2\right).
\end{aligned}$$

Substituindo estas relações no sistema (1.44), obtemos

$$\begin{aligned}
z_{1,t} &= \delta abS_\delta(\theta)(z_1\psi - k_2) - \delta b^2C_\delta(\theta)(y_1\psi + k_1) + \delta k_0z,\\
y_{1,t} &= -a^2C_\delta(\theta)(z_1\psi - k_2) - \delta abS_\delta(\theta)(y_1\psi + k_1) + \delta k_0y,
\end{aligned}$$

de onde segue que o sistema (1.63) descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$). $\square$

Corolário 1.2. *Cada sistema, da seguinte família a sete parâmetros, descreve superfícies pseudo-esféricas,*

$$\begin{cases} z_{1,t} = ab \operatorname{sen}\theta(z_1\psi - k_2) - b^2 \cos\theta(y_1\psi + k_1) + k_0 z, \\ y_{1,t} = -a^2 \cos\theta(z_1\psi - k_2) - ab \operatorname{sen}\theta(y_1\psi + k_1) + k_0 y, \end{cases} \tag{1.66}$$

onde ψ é uma função de (z, y) dada por,

$$\psi = k_0 \left(\frac{\cos\theta}{2ab}(a^2 z^2 - b^2 y^2) + \operatorname{sen}\theta zy \right) - ab(k_1 z + k_2 y + k_3),$$

com $k_0, k_1, k_2, k_3, a, b, \theta$ constantes reais, tais que $k_0 ab \neq 0$. Além disso as f_{ij} associadas são dadas por,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta \left(a \operatorname{sen}\left(\tfrac{\theta}{2}\right) z_1 - b \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) y_1 \right), & f_{12} &= \tfrac{1}{\eta}(b \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \psi_z + a \operatorname{sen}\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \psi_y), \\ f_{21} &= \eta^2, & f_{22} &= \tfrac{1}{\eta^2} k_0 - ab\psi, \\ f_{31} &= \eta(a \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) z_1 + b \operatorname{sen}\left(\tfrac{\theta}{2}\right) y_1), & f_{32} &= \tfrac{1}{\eta}(-b \operatorname{sen}\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \psi_z + a \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \psi_y), \end{aligned}$$

onde $\eta \neq 0$.

Demonstração. É uma consequência da Proposição 1.3 para $\delta = 1$. $\square$

Corolário 1.3. *Cada sistema, da seguinte família a sete parâmetros, descreve superfícies esféricas,*

$$\begin{cases} z_{1,t} = ab \operatorname{senh}\theta(z_1\psi - k_2) - b^2 \cosh\theta(y_1\psi + k_1) + k_0 z, \\ y_{1,t} = -a^2 \cosh\theta(z_1\psi - k_2) - ab \operatorname{senh}\theta(y_1\psi + k_1) + k_0 y, \end{cases} \tag{1.67}$$

onde ψ é uma função de (z, y) dada por,

$$\psi = k_0 \left(\frac{\cosh\theta}{2ab}(a^2 z^2 - b^2 y^2) + \operatorname{senh}\theta zy \right) - ab(k_1 z + k_2 y + k_3),$$

com $k_0, k_1, k_2, k_3, a, b, \theta$ constantes reais, tais que $k_0 ab \neq 0$. Além disso as f_{ij} associadas são dadas por,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta \left(a \operatorname{senh}\left(\tfrac{\theta}{2}\right) z_1 - b \cosh\left(\tfrac{\theta}{2}\right) y_1 \right), & f_{12} &= \tfrac{1}{\eta}(b \cosh\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \psi_z + a \operatorname{senh}\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \psi_y), \\ f_{21} &= \eta^2, & f_{22} &= \tfrac{1}{\eta^2} k_0 - ab\psi, \\ f_{31} &= \eta(a \cosh\left(\tfrac{\theta}{2}\right) z_1 - b \operatorname{senh}\left(\tfrac{\theta}{2}\right) y_1), & f_{32} &= \tfrac{1}{\eta}(b \operatorname{senh}\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \psi_z + a \cosh\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \psi_y), \end{aligned}$$

onde $\eta \neq 0$.

Demonstração. É uma consequência da Proposição 1.3 para $\delta = -1$. $\square$

Encerraremos esta subseção apresentando casos particulares e exemplos dos Corolários (1.2) e (1.3).

Exemplo 1.3. A equação (vetorial) de Pohlmeyer-Lund-Regge modificada (1.10),

$$\begin{cases} z_{1,t} = 2zyz_1 - z, \\ y_{1,t} = -2zyy_1 - y, \end{cases}$$

pertence a família a sete parâmetros de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas descrita no Corolário (1.2). De fato, basta notar que esta equação pode ser obtida através do sistema (1.66) considerando os parâmetros $k_0 = -1$, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Exemplo 1.4. O seguinte sistema é um exemplo de um sistema pseudo-esférico contido na Corolário 1.2.

$$\begin{cases} u_{xt} = (u^2 - v^2 + c)v_x + u, \\ v_{xt} = (u^2 - v^2 + c)u_x + v, \end{cases} \tag{1.68}$$

com $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Neste caso as funções f_{ij} associadas, são dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\eta\sqrt{2}u_x, & f_{12} &= \tfrac{\sqrt{2}}{\eta}v, \\ f_{21} &= \eta^2, & f_{22} &= \tfrac{1}{\eta^2} + u^2 - v^2 + c, \\ f_{31} &= \eta\sqrt{2}v_x, & f_{32} &= -\tfrac{\sqrt{2}}{\eta}u, \end{aligned}$$

onde $\eta \neq 0$. De fato, basta considerar, $\delta = 1$, $k_0 = 1$, $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = \frac{c}{4}$, $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ e $\theta = \pi$ no Corolário 1.2.

Além disso, o sistema (1.68) é condição de integrabilidade da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} \eta & -\sqrt{2}(u_x + v_x) \\ \sqrt{2}(-u_x + v_x) & -\eta \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2\eta}\begin{pmatrix} \frac{1}{\eta} + \eta(u^2 - v^2 + c) & -\sqrt{2}(u + v) \\ \sqrt{2}(u - v) & -\frac{1}{\eta} - \eta(u^2 - v^2 + c) \end{pmatrix}.$$

Alternativamente o sistema (1.68) é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo,

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta\sqrt{2}u_x & \eta^2 \\ -\eta\sqrt{2}u_x & 0 & \eta\sqrt{2}v_x \\ \eta^2 & -\eta\sqrt{2}v_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\eta}v & \frac{1}{\eta^2} + u^2 - v^2 + c \\ \frac{\sqrt{2}}{\eta}v & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\eta}u \\ \frac{1}{\eta^2} + u^2 - v^2 + c & \frac{\sqrt{2}}{\eta}u & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.5. O seguinte sistema é um exemplo de sistema esférico contido no Corolário 1.3,

$$\begin{cases} u_{xt} = (u^2 + v^2 + c)v_x + u, \\ v_{xt} = -(u^2 + v^2 + c)u_x + v, \end{cases} \tag{1.69}$$

com $c \in \mathbb{R}$ uma constante real. Neste caso as funções f_{ij} associadas são dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\eta\sqrt{2}v_x, & f_{12} &= \tfrac{1}{\eta}\sqrt{2}u, \\ f_{21} &= \eta^2, & f_{22} &= -\tfrac{1}{\eta^2} + u^2 + v^2 + c, \\ f_{31} &= -\eta\sqrt{2}u_x, & f_{32} &= -\tfrac{1}{\eta}\sqrt{2}v, \end{aligned}$$

com $\eta \neq 0$. De fato, basta tomar, $\delta = -1$, $k_0 = -1$, $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = \frac{c}{4}$ e $a = -\sqrt{2}$ $b = \sqrt{2}$ e $\theta = 0$ no Corolário 1.3.

Além disso, o sistema (1.69) é condição de integrabilidade da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, dos problemas lineares,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} i\eta & -\sqrt{2}(v_x + iu_x) \\ \sqrt{2}(v_x - iu_x) & -i\eta \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2\eta}\begin{pmatrix} -i\frac{1}{\eta} + i\eta(u^2 + v^2 + c) & \sqrt{2}(u - iv) \\ -\sqrt{2}(u + iv) & i\frac{1}{\eta} - i\eta(u^2 + v^2 + c) \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, o sistema (1.69) é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo,

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta\sqrt{2}v_x & \eta^2 \\ \eta\sqrt{2}v_x & 0 & -\eta\sqrt{2}u_x \\ -\eta^2 & \eta\sqrt{2}u_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.70}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\eta}\sqrt{2}u & -\frac{1}{\eta^2} + u^2 + v^2 + c \\ -\frac{1}{\eta}\sqrt{2}u & 0 & -\frac{1}{\eta}\sqrt{2}v \\ \frac{1}{\eta^2} - u^2 - v^2 - c & \frac{1}{\eta}\sqrt{2}v & 0 \end{pmatrix},$$

1.3.2 Família de sistemas a três parâmetros e uma função arbitrária.

Nesta subseção apresentaremos uma família a três parâmetros e uma função arbitrária, de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas obtidas a partir do Teorema 1.3 Caso 1).

Proposição 1.4. *Sejam k_0, k_1, k_2 constantes não nulas e $\psi(y_1)$ uma função suave arbitrária da variável y_1 tal que $\psi'(y_1) \neq 0$. Então cada um dos sistemas abaixo descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas)*

$$\begin{cases} z_{1,t} = k_1 e^{k_0 z}\psi, \\ y_{1,t} = k_1(\delta k_2^{-2} - k_0^2)e^{k_0 z}\dfrac{z_1}{\psi'}, \end{cases} \tag{1.71}$$

onde $\delta = 1$ (resp.-1). Neste caso, para $\eta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_{11} &= k_2^{-1}z_1, & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= -k_1k_2^{-1}e^{k_0 z}, \\ f_{31} &= \eta k_0 k_2 + \psi, & f_{32} &= -k_0k_1e^{k_0 z}. \end{aligned}$$

Demonstração. É uma consequência do Teorema 1.3 Caso 1). De fato, seguindo a notação estabelecida no Teorema 1.3, considere $a = 0$, $b \neq 0$, $\lambda = 0$, $\mu = k_2 b$, $h = \eta k_0 k_2 + \psi$, $g = k_2^{-1}z_1$, $\phi(\xi) = -k_1k_2^{-1}e^{\frac{k_0}{b}\xi}$, $\xi = bz$ e $\delta = 1$ (resp. -1)). Neste caso, as condições dadas pelas equações (1.42) são todas satisfeitas, pois

$$a^2 + b^2 = b^2 \neq 0, \qquad \lambda^2 + \mu^2 = k_2^2 b^2 \neq 0,$$

$$\phi'(\xi) = -\frac{k_0}{b}\phi(\xi) \neq 0,$$
$$\mu g - \lambda h = k_2 b k_2^{-1} z_1 = b z_1 = a y_1 + b z_1,$$
$$W = g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} = k_2^{-1}\psi' \neq 0,$$
$$k_2^{-1} z_1 \neq 0.$$

Vamos mostrar que com estas escolhas o sistema (1.71) é equivalente a (1.41). Note primeiramente que,

$$\begin{aligned}
&\phi(\xi) = -k_1 k_2^{-1} e^{k_0 z}, \quad \phi'(\xi) = -k_1 k_2^{-1} \tfrac{k_0}{b} e^{k_0 z}, \quad \phi''(\xi) = -k_1 k_2^{-1} \tfrac{k_0^2}{b^2} e^{k_0 z},\\
&a b z_1 + a^2 y_1 = 0, \quad b^2 z_1 + a b y_1 = b^2 z_1,\\
&\mu h_{y_1} - \delta\lambda g_{y_1} = k_2 b \psi', \quad -\mu h_{z_1} + \delta\lambda g_{z_1} = 0,\\
&-h h_{y_1} + \delta g g_{y_1} = -(\eta k_0 k_2 + \psi)\psi', \quad h h_{z_1} - \delta g g_{z_1} = -\delta k_2^{-2} z_1.
\end{aligned}$$

Substituindo estas relações na primeira equação do sistema (1.41), temos

$$\begin{aligned}
z_{1,t} &= \frac{1}{k_2^{-1}\psi'}\left(\eta(k_2 b\psi')\left(-k_1 k_2^{-1}\frac{k_0}{b}e^{k_0 z}\right) - (\eta k_0 k_2 + \psi)\psi'\left(-k_1 k_2^{-1} e^{k_0 z}\right)\right)\\
&= \frac{1}{k_2^{-1}\psi'}\left(-\eta k_0 k_1 \psi' e^{k_0 z} + \eta k_0 k_1 e^{k_0 z}\psi' + k_1 k_2^{-1}\psi\psi' e^{k_0 z}\right)\\
&= k_1 e^{k_0 z}\psi.
\end{aligned}$$

Analogamente para a segunda equação do sistema (1.41),

$$\begin{aligned}
y_{1,t} &= \frac{1}{k_2^{-1}\psi'}\left(b^2 z_1\left(-k_1 k_2^{-1}\frac{k_0^2}{b^2}e^{k_0 z}\right) - \delta k_2^{-2} z_1\left(-k_1 k_2^{-1} e^{k_0 z}\right)\right)\\
&= \frac{1}{k_2^{-1}\psi'}\left(-k_1 k_2^{-1} k_0^2 e^{k_0 z} z_1 + \delta k_1 k_2^{-3} e^{k_0 z} z_1\right)\\
&= k_1\left(-k_0^2 + \delta k_2^{-2}\right)e^{k_0 z}\frac{z_1}{\psi'}. \qquad (1.72)
\end{aligned}$$

Que é equivalente ao sistema (1.71). Ainda, neste caso, temos $f_{11} = k_2^{-1} z_1$, $f_{21} = \eta$, $f_{31} = \eta k_0 k_2 + \psi$, $f_{12} = 0$, $f_{22} = -k_1 k_2^{-1} e^{k_0 z}$ e $f_{32} = -k_0 k_1 e^{k_0 z}$. Assim verificamos que o sistema (1.71) descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas). □

Observação 1.3. O sistema (1.71) é equivalente à condição de integrabilidade (0.7), de uma família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta & -\eta k_0 k_2 + \frac{1}{k_2} z_1 - \psi \\ \eta k_0 k_2 + \frac{1}{k_2} z_1 + \psi & -\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{k_1 e^{k_0 z}}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{k_2} & k_0 \\ -k_0 & \frac{1}{k_2} \end{pmatrix},$$

caso $\delta = 1$, ou,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\eta & \frac{1}{k_2}z_1 + i\eta k_0 k_2 + i\psi \\ -\frac{1}{k_2}z_1 + i\eta k_0 k_2 + i\psi & -i\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{k_1 e^{k_0 z}}{2}\begin{pmatrix} -i\frac{1}{k_2} & -ik_0 \\ -ik_0 & i\frac{1}{k_2} \end{pmatrix},$$

caso $\delta = -1$.

Alternativamente, o sistema (1.71) é equivalente a condição de integrabilidade (0.12), de uma família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & k_2^{-1}z_1 & \eta \\ \delta k_2^{-1}z_1 & 0 & \eta k_0 k_2 + \psi \\ \delta\eta & -\eta k_0 k_2 - \psi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_1 k_2^{-1} e^{k_0 z} \\ 0 & 0 & -k_0 k_1 e^{k_0 z} \\ -\delta k_1 k_2^{-1} e^{k_0 z} & k_0 k_1 e^{k_0 z} & 0 \end{pmatrix},$$

com $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$).

A seguir usaremos a Proposição 1.4, para obter sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Exemplo 1.6. O seguinte sistema descreve superfícies esféricas,

$$\begin{cases} u_{xt} = (av_x + b)e^u, \\ v_{xt} = -\frac{2}{a}e^u u_x, \end{cases} \tag{1.73}$$

em que $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ são constantes. Neste caso, as funções f_{ij} associadas são dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= u_x, & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= -e^u, \\ f_{31} &= \eta + av_x + b, & f_{32} &= -e^u, \end{aligned}$$

onde $\eta \neq 0$. De fato, segue da Proposição (1.4) tomando $\delta = -1$, $k_0 = k_1 = k_2 = 1$ e $\psi = ay_1 + b$, com $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Além disso, o sistema (1.73) é condição de integrabilidade da família a um parâmetro, $\eta \in \mathbb{R}$, de problemas lineares,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\eta & u_x + i(\eta + av_x + b) \\ -u_x + i(\eta + av_x + b) & -i\eta \end{pmatrix}, \qquad B = -\frac{ie^z}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, o sistema (1.73) é condição de integrabilidade da família a um parâmetro, $\eta \in \mathbb{R}$, de problemas lineares do tipo,

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & u_x & \eta \\ -u_x & 0 & \eta + av_x + b \\ -\eta & -\eta - av_x - b & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = e^u \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.7. O seguinte sistema descreve superfícies pseudo-esféricas,

$$\begin{cases} u_{xt} = 2e^{u - v_x}, \\ v_{xt} = u_x e^{u + v_x}, \end{cases} \tag{1.74}$$

com funções,

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}u_x, & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= \sqrt{2}e^u, \\ f_{31} &= -\eta\sqrt{2} + e^{-v_x}, & f_{32} &= -2e^u. \end{aligned}$$

De fato, segundo a Proposição 1.4, basta considerar $\psi = e^{-y_1}$, $k_0 = 1$, $k_1 = 2$, $k_2 = -\sqrt{2}$ e $\delta = 1$.

Além disso, sistema (1.74) é condição de integrabilidade da família a um parâmetro, $\eta \in \mathbb{R}$, de problemas lineares,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta & \eta\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}u_x - e^{-v_x}\psi \\ -\eta\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}u_x + e^{-v_x} & -\eta \end{pmatrix}, \qquad B = e^u \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, o sistema (1.74) é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$ de problemas lineares do tipo,

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}u_x & \eta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}u_x & 0 & -\eta\sqrt{2} + e^{-v_x} \\ \eta & \eta\sqrt{2} - e^{-v_x} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}e^u \\ 0 & 0 & -2e^u \\ \sqrt{2}e^u & 2e^u & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.8. O seguinte sistema descreve superfícies pseudo-esféricas,

$$\begin{cases} u_{xt} = -2v_x e^u, \\ v_{xt} = u_x e^u, \end{cases} \tag{1.75}$$

com funções,

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}u_x, & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= -\sqrt{2}e^u, \\ f_{31} &= -\eta\sqrt{2} + v_x, & f_{32} &= 2e^u, \end{aligned}$$

com $\eta \neq 0$. De fato, segundo a Proposição 1.4, basta considerar $\psi = y_1$, $k_0 = 1$, $k_1 = -2$, $k_2 = -\sqrt{2}$ e $\delta = 1$.

Além disso, o sistema (1.74) é condição de integrabilidade da família a um parâmetro, $\eta \in \mathbb{R}$, de problemas lineares,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta & 2\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}u_x - v_x \\ -\eta\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}u_x + v_x & -\eta \end{pmatrix}, \qquad B = e^u \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, o sistema (1.75) é condição de integrabilidade da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$ de problemas lineares do tipo,

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}u_x & \eta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}u_x & 0 & -\eta\sqrt{2} + v_x \\ \eta & \eta\sqrt{2} - v_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{2}e^u \\ 0 & 0 & 2e^u \\ -\sqrt{2}e^u & -2e^u & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.3 Família de sistemas a quatro parâmetros e uma função arbitrária.

Nesta subseção apresentaremos uma família, a quatro parâmetros e uma função arbitrária, de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas obtidas a partir do Caso 1) do Teorema 1.3.

Proposição 1.5. *Sejam $k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ constantes, tais que $k_0 \neq 0$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, $q(z_1, y_1)$ uma função suave arbitrária das variáveis (z_1, y_1), tal que $k_2 q_{y_1} - k_1 q_{z_1} \neq 0$, e $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$). Então, o sistema abaixo descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas),*

$$\begin{cases} z_{1,t} = \dfrac{k_0}{k_2 q_{y_1} - k_1 q_{z_1}} \left[q_{y_1} + (k_1 y + k_2 z + k_3)\left(\delta k_1 (k_1 y_1 + k_2 z_1) - q q_{y_1}\right)\right], \\ y_{1,t} = \dfrac{-k_0}{k_2 q_{y_1} - k_1 q_{z_1}} \left[q_{z_1} + (k_1 y + k_2 z + k_3)\left(\delta k_2 (k_1 y_1 + k_2 z_1) - q q_{z_1}\right)\right]. \end{cases} \tag{1.76}$$

Neste caso, com η um parâmetro real não nulo,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta(k_1 y_1 + k_2 z_1), & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \eta^2, & f_{22} &= k_0(k_1 y + k_2 z) + k_0 k_3, \\ f_{31} &= \eta q, & f_{32} &= \tfrac{1}{\eta} k_0. \end{aligned}$$

Demonstração. É uma consequência do Teorema 1.3 Caso 1) considerando $\eta \to \eta^2$ e

$$\begin{aligned} a &= k_0 k_1, & b &= k_0 k_2, \\ \lambda &= 0, & \mu &= \tfrac{1}{\eta} k_0, \\ \phi(\xi) &= \xi + k_0 k_3, & \xi &= k_0(k_1 y + k_2 z), \\ h &= \eta q, & g &= \eta(k_1 y_1 + k_2 z_1). \end{aligned}$$

De fato, primeiramente note que as condições (1.42) são satisfeitas,

$$\begin{gathered} a^2 + b^2 = k_0^2(k_1^2 + k_2^2) \neq 0, \\ \mu^2 + \lambda^2 = \tfrac{1}{\eta^2} k_0^2 \neq 0, \\ \phi'(\xi) = 1 \neq 0, \\ \mu g + \lambda h = k_0(k_1 y_1 + k_2 z_1) = a y_1 + b z_1, \\ g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} = \eta^2(k_2 q_{y_1} - k_1 q_{z_1}) \neq 0, \\ g = \eta(k_1 y_1 + k_2 z_1) \neq 0. \end{gathered}$$

Vamos mostrar o sistema (1.41) se reduz ao sistema (1.76). Para isso, vamos calcular cada parcela que aparece no sistema (1.41),

$$\phi(\xi) = k_0(k_1 y + k_2 z) + k_0 k_3,$$

$$\phi'(\xi) = 1,$$

$$\phi''(\xi) = 0,$$

$$\mu h - \delta\lambda g = k_0 q,$$

$$(\mu h - \delta\lambda g)_{y_1} = k_0 q_{y_1},$$

$$(\mu h - \delta\lambda g)_{z_1} = k_0 q_{z_1},$$

$$-hh_{y_1} + \delta g g_{y_1} = -\eta^2 q q_{y_1} + \delta\eta^2 k_1(k_1 y_1 + k_2 z_1),$$

$$hh_{z_1} - \delta g g_{z_1} = \eta^2 q q_{z_1} - \delta\eta^2 k_2(k_1 y_1 + k_2 z_1),$$

$$W = g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} = \eta^2(k_1 q_{z_1} - k_2 q_{y_1}).$$

Substituindo estas identidades em (1.41) obtemos o sistema (1.76). □

Observação 1.4. O sistema (1.76) é equivalente a condição de integrabilidade (0.7), da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} \eta & k_0 y_1 + k_2 z_1 - q \\ k_1 y_1 + k_2 z_1 + q & -\eta \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{k_0}{2}\begin{pmatrix} k_1 y + k_2 z + k_3 & -\frac{1}{\eta} \\ \frac{1}{\eta} & -k_1 y - k_2 z - k_3 \end{pmatrix},$$

caso $\delta = 1$, ou,

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} i\eta & k_1 y_1 + k_2 z_1 + iq \\ -k_1 y_1 - k_2 z_1 + iq & -i\eta \end{pmatrix},$$

$$B = i\frac{k_0}{2}\begin{pmatrix} k_1 y + k_2 z + k_3 & \frac{1}{\eta} \\ \frac{1}{\eta} & -k_1 y - k_2 z - k_3 \end{pmatrix},$$

caso $\delta = -1$.

Alternativamente, o sistema (1.76) é equivalente a condição de integrabilidade (0.12), da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \eta(k_1 y_1 + k_2 z_1) & \eta^2 \\ \delta\eta(k_1 y_1 + k_2 z_1) & 0 & \eta q \\ \delta\eta^2 & -\eta q & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_0(k_1 y + k_2 z) + k_0 k_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\eta}k_0 \\ \delta k_0(k_1 y + k_2 z) + \delta k_0 k_3 & -\frac{1}{\eta}k_0 & 0 \end{pmatrix},$$

com $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$).

Encerraremos esta subseção com um exemplo.

Exemplo 1.9. O seguinte sistema descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas),

$$\begin{cases} u_{xt} = (au + b)\phi(v_x) + 1, \\ v_{xt} = \delta \dfrac{a^2}{\phi'(v_x)} u_x(au + b), \end{cases} \tag{1.77}$$

onde $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$), $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes reais, tal que $a \neq 0$ e ϕ é uma função suave tal que $\phi' \neq 0$. Neste caso as f_{ij} associadas são dadas por,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta a u_x, & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \eta^2, & f_{22} &= a^2 u + ab, \\ f_{31} &= -\eta\phi(v_x), & f_{32} &= \frac{a}{\eta}, \end{aligned}$$

com $\eta \neq 0$ um parâmetro real. De fato, basta considerar na Proposição 1.5, $k_0 = a$, $k_1 = 0$, $k_2 = a$, $k_3 = b$ e $q(z_1, y_1) = -\phi(y_1)$.

Além disso, o sistema (1.77) é equivalente a condição de integrabilidade (0.7), da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} \eta & au_x + \phi(v_x) \\ au_x - \phi(v_x) & -\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} au + b & -\frac{1}{\eta} \\ \frac{1}{\eta} & -au - b \end{pmatrix},$$

caso $\delta = 1$, ou,

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} i\eta & au_x - i\phi(v_x) \\ -au_x - i\phi(v_x) & i\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{ia}{2\eta}\begin{pmatrix} au+b & \frac{1}{\eta} \\ \frac{1}{\eta} & -au-b \end{pmatrix},$$

caso $\delta = -1$.

Alternativamente, o sistema (1.77) é equivalente a condição de integrabilidade (0.12), da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \eta a u_x & \eta^2 \\ \delta\eta a u_x & 0 & -\eta\phi(v_x) \\ \delta\eta^2 & \eta\phi(v_x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2u+ab \\ 0 & 0 & \dfrac{a}{\eta} \\ \delta a^2 u + \delta ab & -\dfrac{a}{\eta} & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.4 Família de sistemas a quatro parâmetros e uma função arbitrária generalizando o "Konno-Oono coupled integrable dispersionless system".

Nesta subseção apresentaremos uma família a quatro parâmetros e uma função arbitrária de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas que generaliza o sistema (1.14).

Em [21] e [22] foi mostrado que o sistema de equações (1.14), conhecido como "Konno-Oono coupled dispersionless system", é integrável por uma generalização do método do espalhamento inverso [34]. Para este sistema, o problema linear associado não é do tipo AKNS e o parâmetro espectral é dado por f_{22}. Além disso, para este sistema temos $f_{31} = 0$. Isto nos motiva a investigar o Corolário 1.1, no qual $f_{31} = 0$, para procurar novos exemplos de sistemas de equações pseudo-esféricas ou esféricas cuja função f_{22} é um parâmetro real, digamos ν e $f_{31} = 0$.

Na seguinte proposição, exibimos uma família a quatro parâmetros e uma função arbitrária de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, que é obtida a partir do Corolário 1.1.

Proposição 1.6. *Sejam, k_0, k_1, k_2, k_3 constantes reais tais que $k_0 > 0$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ e q uma função suave de (z_1, y_1) tal que $k_2 q_{y_1} - k_1 q_{z_1} \neq 0$ e $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$). Então o seguinte* *sistema descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas)*

$$\begin{cases} z_{1,t} = \delta \dfrac{qq_{y_1} + k_0k_1(k_1y_1 + k_2z_1)}{k_2q_{y_1} - k_1q_{z_1}}(k_1y + k_2z + k_3), \\ \\ y_{1,t} = -\delta \dfrac{qq_{z_1} + k_0k_2(k_1y_1 + k_2z_1)}{k_2q_{y_1} - k_1q_{z_1}}(k_1y + k_2z + k_3), \end{cases} \tag{1.78}$$

onde $\delta = 1$ *(resp.*-1*). Neste caso, para* $\nu \neq 0$ *um parâmetro real e* $\sigma = \pm 1$*, as funções associadas são,*

$$\begin{aligned} f_{11} &= \sigma \tfrac{\delta}{\nu}\sqrt{k_0}(k_1y_1 + k_2z_1), & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \tfrac{1}{\nu}q, & f_{22} &= \nu, \\ f_{31} &= 0, & f_{32} &= \sigma\sqrt{k_0}(k_1y + k_2z + k_3). \end{aligned}$$

Demonstração. É uma consequência do Corolário 1.1, com as seguintes escolhas

$$\begin{aligned} a &= k_1, & b &= k_2, \\ \mu &= \sigma\nu\sqrt{k_0}, & \lambda &= 0, \\ h &= \tfrac{1}{\nu}q, & g &= \sigma\sqrt{k_0}\frac{\delta}{\nu}(k_1y_1 + k_2z_1), \\ \phi(\xi) &= \sigma\sqrt{k_0}\xi + \sigma\sqrt{k_0}k_3, & \xi &= k_1y + k_2z. \end{aligned} \tag{1.79}$$

De fato, primeiramente note que as hipóteses do Corolário 1.1 são satisfeitas.

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 = k_1^2 + k_2^2 \neq 0, \\ &\mu^2 + \lambda^2 = k_0^{-1}\nu^2 \neq 0, \\ &\mu g - \lambda h = \delta(k_1y_1 + k_2z_1) = \delta(ay_1 + bz_1), \\ &W = g_{z_1}h_{y_1} - g_{y_1}h_{z_1} = \sigma\sqrt{k_0}\frac{\delta}{\nu^2}(k_2q_{y_1} - k_1q_{z_1}) \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos aplicar o Corolário 1.1. Substituindo as identidades,

$$\begin{aligned} &\phi(\xi) = \sigma\sqrt{k_0}(k_1y + k_2z + 3), \\ &\phi'(\xi) = \sigma\sqrt{k_0}, \\ &\phi''(\xi) = 0, \\ &gg_{y_1} + hh_{y_1} = k_0\nu^{-2}k_1(k_1y_1 + k_2z_1) + \nu^{-2}qq_{y_1}, \\ &gg_{z_1} + hh_{z_1} = k_0\nu^{-2}k_2(k_1y_1 + k_2z_1) + \nu^{-2}qq_{z_1}, \end{aligned}$$

nas equações (1.37) e (1.38), obtemos o sistema (1.78). □

Observação 1.5. O sistema (1.78) é equivalente a condição de integrabilidade (0.7), da família a um parâmetro, $\nu \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$, para

$$A = \frac{1}{2\nu}\begin{pmatrix} q & \sigma\sqrt{k_0}(k_1y_1 + k_2z_1) \\ \sigma\sqrt{k_0}(k_1y_1 + k_2z_1) & -q \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \nu & -\sigma\sqrt{k_0}(k_1y + k_2z + k_3) \\ \sigma\sqrt{k_0}(k_1y + k_2z + k_3) & -\nu \end{pmatrix},$$

caso $\delta = 1$, ou,

$$A = \frac{1}{2\nu}\begin{pmatrix} iq & -\sigma\sqrt{k_0}(k_1y_1 + k_2z_1) \\ \sigma\sqrt{k_0}(k_1y_1 + k_2z_1) & -iq \end{pmatrix},$$

$$B = i\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \nu & \sigma\sqrt{k_0}(k_1y + k_2z + k_3) \\ \sigma\sqrt{k_0}(k_1y + k_2z + k_3) & -\nu \end{pmatrix},$$

caso $\delta = -1$.

Alternativamente, o sistema (1.78) é equivalente a condição de integrabilidade (0.12), da família a um parâmetro, $\nu \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \frac{1}{\nu}\begin{pmatrix} 0 & \sigma\delta\sqrt{k_0}(k_1y_1 + k_2z_1) & q \\ \delta\sigma\delta\sqrt{k_0}(k_1y_1 + k_2z_1) & 0 & 0 \\ \delta q & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \sigma\sqrt{k_0}(k_1y + k_2z + k_3) \\ \delta\nu & -\sigma\sqrt{k_0}(k_1y + k_2z + k_3) & 0 \end{pmatrix},$$

com $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$).

Observação 1.6. Como caso particular da última proposição podemos obter o "Konno-Oono coupled dispersionless system", dado na equação (1.14), utilizando as escolhas $k_0 = 1$, $k_1 = 2$, $k_2 = 0$, $q = 2z_1$ e $\delta = 1$.

Exemplo 1.10. O seguinte sistema descreve superfícies pseudo-esféricas,

$$\begin{cases} u_{xt} = uu_x v_x, \\ v_{xt} = -u(v_x^2 + 1). \end{cases} \tag{1.80}$$

Neste caso, considerando $\sigma = \pm 1$ e $\nu \neq 0$, as funções f_{ij} associadas, são dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= \tfrac{\sigma}{\nu} u_x, & f_{12} &= 0, \\ f_{21} &= \tfrac{1}{\nu} u_x v_x, & f_{22} &= \nu, \\ f_{31} &= 0, & f_{32} &= \sigma u. \end{aligned}$$

De fato, basta considerar, na Proposição 1.6, os parâmetros $k_0 = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$ e $q = z_1 y_1$.

Além disso, o sistema (1.80) é condição de integrabilidade da família a um parâmetro, $\nu \neq 0$, de problemas lineares,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$, e para $\sigma = \pm 1$,

$$A = \frac{u_x}{2\nu}\begin{pmatrix} v_x & \sigma \\ \sigma & -v_x \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \nu & -\sigma u \\ \sigma u & -\nu \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, o sistema (1.80) é equivalente a condição de integrabilidade (0.12),da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares,

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \frac{1}{\nu}\begin{pmatrix} 0 & \sigma u_x & u_x v_x \\ \sigma u_x & 0 & 0 \\ \nu u_x v_x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \sigma u \\ \nu & -\sigma u & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.81}$$

Capítulo 2

Sistemas do tipo $(S_{2,1})$ ou $(S_{1,2})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Neste capítulo consideraremos sistemas de equações diferenciais para duas funções reais u, v definidas sobre um aberto de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, t), dos tipos,

$$(S_{2,1}) \begin{cases} u_{xt} = F(u, u_x, u_{xx}, v, v_x), \\ v_{xt} = G(u, u_x, u_{xx}, v, v_x), \end{cases} \tag{2.1}$$

ou

$$(S_{1,2}) \begin{cases} u_{xt} = F(u, u_x, v, v_x, v_{xx}), \\ v_{xt} = G(u, u_x, v, v_x, v_{xx}), \end{cases} \tag{2.2}$$

onde F e G são funções suaves que dependem de u e v e suas derivadas com respeito a x até a ordem 2 e 1 ou 1 e 2, respectivamente.

Observamos que os sistemas do tipo $(S_{1,2})$ e $(S_{2,1})$ são equivalentes por mudança nas variáveis dependentes u e v por v e u respectivamente. Portanto vamos considerar neste capítulo somente sistemas do tipo $(S_{2,1})$.

Estaremos interessados em estudar sistemas do tipo $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas para funções associadas que f_{ij} dependendo das variáveis dependentes u, v e suas derivadas do mesmo modo que F e G, isto é, vamos considerar

$$f_{ij}(u, u_x, u_{xx}, v, v_x), \qquad 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3.$$

Adotaremos a seguinte notação,

$$\begin{aligned} u = z, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = z_1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = z_2 \\ v = y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y_1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Com esta notação, os sistemas ($S_{2,1}$) é escrito como,

$$\begin{cases} z_{1,t} = F(z, z_1, z_2, y, y_1), \\ y_{1,t} = G(z, z_1, z_2, y, y_1). \end{cases} \tag{2.4}$$

Este capítulo será organizado da seguinte forma. Na Seção 2.1 daremos condições necessárias e suficientes para que um sistema do tipo ($S_{2,1}$) descreva superfícies pseudo-esféricas ou esféricas. Em seguida, na Seção 2.2, apresentaremos uma classificação completa de todos os sistemas ($S_{2,1}$) que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com a hipótese adicional de que pelo menos uma das funções f_{31}, f_{12} ou f_{11} é uma constante $\eta \in \mathbb{R}$. Como consequência desta classificação apresentaremos, na Seção 2.3, uma nova classe de sistemas do tipo ($S_{2,1}$) que descrevem, simultaneamente, superfícies pseudo-esféricas e esféricas.

2.1 Caracterização dos sistemas do tipo ($S_{2,1}$).

Esta seção será divida em três partes. Na primeira Subseção 2.1.1 usaremos a teoria de Cartan-Kähler para descrevermos o sistema (2.1) em termos de um sistema de diferenciais exteriores. Em seguida na Subseção 2.1.2 discutiremos a interpretação geométrica de sistemas (2.1) que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas. Por último na Subseção 2.1.3, apresentaremos no Teorema 2.1 uma caracterização dos sistemas (2.1) que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

2.1.1 Abordagem por sistemas de diferenciais exteriores.

Nesta subseção vamos seguir a referência [17] para mostrar como interpretar o sistema ($S_{2,1}$) como um sistema de diferenciais exteriores.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, t) e $\mathcal{M}^7 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$. Consideraremos $\mathcal{M}^7$ como sendo uma variedade diferenciável 7-dimensional com coordenadas $(x, t) \times (z, z_1, z_2) \times (y, y_1)$. Deste modo, para um sistema (2.4), as funções F, G podem ser vistas como funções reais suaves, sobre a variedade $\mathcal{M}^7$, que são constantes com respeito às variáveis (x, t).

Dadas duas funções suaves, u, v em U,

$$u, v : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

fica definida uma superfície em $\mathcal{M}^7$ por,

$$\begin{aligned} &\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}^7, \\ &\Phi(x,t) \mapsto (x, t, u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), v(x,t), v_x(x,t)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Veremos na Proposição 2.1 como esta aplicação é usada para justificar a notação (2.3) e como, a partir dela, relacionar o sistema $(S_{2,1})$ com um sistema de diferenciais exteriores.

Proposição 2.1. *Seja $\mathcal{I}$ o ideal em $\mathcal{M}^7$ gerado pelas formas,*

$$\begin{aligned} &\Pi_0 = dz \wedge dt - z_1 dx \wedge dt, && \Pi_1 = dz_1 \wedge dt - z_2 dx \wedge dt, \\ &\Pi_2 = dz_2 \wedge dx \wedge dt, && \Lambda_0 = dy \wedge dt - y_1 dx \wedge dt, \\ &\Pi = dz_1 \wedge dx + F dx \wedge dt, && \Lambda = dy_1 \wedge dx + G dx \wedge dt. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Então, $\mathcal{I}$ é fechado por diferenciação exterior. Além disso,

A) Se o par de funções suaves $u, v : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma solução do sistema $(S_{2,1})$, então a aplicação Φ, definida por (2.5) é uma superfície integral do ideal $\mathcal{I}$.

B) Reciprocamente, dada uma superfície integral do ideal $\mathcal{I}$, $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}^7$, V um aberto de $\mathbb{R}^2$, com Ψ_x e Ψ_t linearmente independentes, então, localmente, as funções projeções de $\Psi(V) \subset \mathcal{M}^7$ sobre $(x,t) \times (z)$ e $(x,t) \times (y)$ formam gráficos de uma solução de $(S_{2,1})$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que o ideal $\mathcal{I}$ é fechado por diferenciação exterior. Diferenciando exteriormente as formas Π_0, Π_1, Π_2 e Λ_0 do ideal (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} d\Pi_0 &= -dz_1 \wedge dx \wedge dt = dz_1 \wedge dt \wedge dx = (\Pi_1 + z_2 dx \wedge dt) \wedge dx = \Pi_1 \wedge dx, \\ d\Pi_1 &= -dz_2 \wedge dx \wedge dt = -\Pi_2, \\ d\Pi_2 &= d(dz_2 \wedge dx \wedge dt) = 0, \\ d\Lambda_0 &= -dy_1 \wedge dx \wedge dt = -(\Lambda - G dx \wedge dt) \wedge dt = -\Lambda \wedge dt. \end{aligned}$$

Diferenciando exteriormente a forma Π do ideal (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}
d\Pi &= dF\wedge dx\wedge dt\\
&= (F_z dz + F_{z_1}dz_1 + F_{z_2}dz_2 + F_y dy + F_{y_1}dy_1)\wedge dx\wedge dt\\
&= -F_z dz\wedge dt\wedge dx - F_{z_1}dz_1\wedge dt\wedge dx + F_{z_2}dz_2\wedge dx\wedge dt +\\
&\quad -F_y dy\wedge dt\wedge dx + F_{y_1}dy_1\wedge dx\wedge dt\\
&= -F_z(\Pi_0 + z_1 dx\wedge dt)\wedge dx - F_{z_1}(\Pi_1 + z_2 dx\wedge dt)\wedge dx + F_{z_2}\Pi_2 +\\
&\quad -F_y(\Lambda_0 + y_1 dx\wedge dt)\wedge dx + F_{y_1}(\Lambda - G dx\wedge dt)\wedge dt\\
&= -F_z\Pi_0\wedge dx - F_{z_1}\Pi_1\wedge dx + F_{z_2}\Pi_2 - F_y\Lambda_0\wedge dx + F_{y_1}\Lambda\wedge dt.
\end{aligned}$$

Por último, de modo análogo, diferenciando exteriormente a forma Λ do ideal (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}
d\Lambda &= dG\wedge dx\wedge dt,\\
&= (G_z dz + G_{z_1}dz_1 + G_{z_2}dz_2 + G_y dy + G_{y_1}dy_1)\wedge dx\wedge dt\\
&= -G_z dz\wedge dt\wedge dx - G_{z_1}dz_1\wedge dt\wedge dx + G_{z_2}dz_2\wedge dx\wedge dt +\\
&\quad -G_y dy\wedge dt\wedge dx + G_{y_1}dy_1\wedge dx\wedge dt\\
&= -G_z(\Pi_0 + z_1 dx\wedge dt)\wedge dx - G_{z_1}(\Pi_1 + z_2 dx\wedge dt)\wedge dx + G_{z_2}\Pi_2 +\\
&\quad -G_y(\Lambda_0 + y_1 dx\wedge dt)\wedge dx + G_{y_1}(\Lambda - G dx\wedge dt)\wedge dt\\
&= -G_z\Pi_0\wedge dx - G_{z_1}\Pi_1\wedge dx + G_{z_2}\Pi_2 - F_y\Lambda_0\wedge dx + G_{y_1}\Lambda\wedge dt.
\end{aligned}$$

Deste modo, $d\mathcal{I}\subset\mathcal{I}$, ou seja, o ideal $\mathcal{I}$ é fechado por diferenciação exterior, o que prova a primeira parte da proposição.

A demonstração da equivalência entre A) e B) é análoga a demonstração da Proposição 1.1. □

2.1.2 Interpretação geométrica.

Nesta subseção daremos uma interpretação geométrica do sistemas ($S_{2,1}$) que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

A seguinte definição é análoga a Definição 1.2 apresentada na Subseção 1.1.3.

Definição 2.1. Dizemos que o sistema ($S_{2,1}$) descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) se existem seis funções reais suaves f_{ij}, $1\le i\le 3$, $1\le j\le 2$ em $\mathcal{M}^7$ tais que o ideal $\mathcal{J}$ em $\mathcal{M}^7$, gerado pelas formas

$$\Omega_1 = d\omega_1 - \omega_3\wedge\omega_2,\quad \Omega_2 = d\omega_2 - \omega_1\wedge\omega_3,\quad \Omega_3 = d\omega_3 - \delta\omega_1\wedge\omega_2, \tag{2.7}$$

nas quais $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$ e $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$) e $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ e o ideal $\mathcal{I}$ gerado pelas formas (2.6) coincidem, isto é $\mathcal{J} = \mathcal{I}$.

Observação 2.1. A interpretação geométrica da Definição 2.1 é análoga a interpretação dada pela Proposição 1.2 apresentada na Subseção 1.1.3.

Por simplicidade, podemos omitir a aplicação Φ e identificar as 1-formas ω_i, em $\mathcal{M}^7$, com $\Phi^*\omega_i$, $i = 1, 2, 3$, em $U \subset \mathbb{R}^2$. Com esta identificação e usando coordenadas locais $(x, t) \in U$, podemos reescrever a Definição 2.1.

Definição 2.2. Um sistema do tipo ($S_{2,1}$), para variáveis dependentes u, v, descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) se existem seis funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2$, dependendo de u, v e suas derivadas com respeito a x, tais que as 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$ satisfazem as equações de estrutura,

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 &= \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \\ \omega_1 \wedge \omega_2 &\neq 0, \end{aligned}$$

com $\delta = 1$ (resp. -1) se, e somente se, u, v é solução do sistema,

$$\begin{cases} u_{xt} = F(u, u_x, u_{xx}, v, v_x), \\ v_{xt} = G(u, u_x, u_{xx}, v, v_x). \end{cases}$$

2.1.3 Resultado de caracterização e um resultado de não existência.

Nesta subseção apresentaremos, no Teorema 2.1, uma caracterização dos sistemas do tipo ($S_{2,1}$) que descrevem superfícies esféricas ou pseudo-esféricas. Mostraremos, no Corolário 2.1, que sob certas condições, para que um sistema do tipo ($S_{2,1}$), descreva superfícies pseudo-esféricas ou esféricas é necessário que o sistema seja linear com respeito a u_{xx}.

O seguinte teorema, nos dá uma caracterização dos sistemas ($S_{2,1}$) que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas supondo que as funções associadas f_{ij} dependem de (z, z_1, z_2, y, y_1). Em particular, estabelece como deve ser a dependência das funções F, G e f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, com as variáveis (z, z_1, z_2, y, y_1).

Teorema 2.1. *Para que o sistema* ($S_{2,1}$)*,*

$$\begin{cases} z_{1,t} = F(z, z_1, z_2, y, y_1), \\ y_{1,t} = G(z, z_1, z_2, y, y_1), \end{cases} \tag{2.8}$$

descreva superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções $f_{ij}(z, z_1, z_2, y, y_1)$, *com* $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, *é necessário e suficiente que,*

$$\begin{aligned} f_{i1,z} = f_{i1,z_2} = f_{i1,y} = 0, \\ f_{i2,z_2} = f_{i2,y_1} = 0, \quad i = 1,2,3, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{21,z_1} & f_{21,y_1} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_{21,z_1} & f_{21,y_1} \\ f_{31,z_1} & f_{31,y_1} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{31,z_1} & f_{31,y_1} \end{vmatrix}^2 \neq 0, \tag{2.10}$$

$$-f_{11,z_1}F - f_{11,y_1}G + f_{12,z}z_1 + f_{12,z_1}z_2 + f_{12,y}y_1 - f_{31}f_{22} + f_{32}f_{21} = 0, \tag{2.11}$$

$$-f_{21,z_1}F - f_{21,y_1}G + f_{22,z}z_1 + f_{22,z_1}z_2 + f_{22,y}y_1 - f_{11}f_{32} + f_{12}f_{31} = 0, \tag{2.12}$$

$$-f_{31,z_1}F - f_{31,y_1}G + f_{32,z}z_1 + f_{32,z_1}z_2 + f_{32,y}y_1 - \delta f_{11}f_{22} + \delta f_{12}f_{21} = 0, \tag{2.13}$$

$$f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} \neq 0, \tag{2.14}$$

onde $\delta = 1$ *(resp.* -1*).*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que estas condições são necessárias. Suponha que o sistema ($S_{2,1}$) descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas). Então, o "pull-back"pela superfície Φ em $\mathcal{M}^7$, definida em (2.5), anula os ideais $\mathcal{I}$ (com $\delta = 1$ e $\delta = -1$ respetivamente) e $\mathcal{J}$ simultaneamente. Ou seja, ao longo da superfície Φ,

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} &dz_1 \wedge dx = -F dx \wedge dt, \quad dz \wedge dt = z_1 dx \wedge dt, \quad dz_1 \wedge dt = z_2 dx \wedge dt \\ &dy_1 \wedge dx = -G dx \wedge dt, \quad dy \wedge dt = y_1 dx \wedge dt, \end{aligned} \tag{2.16}$$

Note que, para $i = 1,2,3$,

$$\begin{aligned} d\omega_i &= d(f_{i1}) \wedge dx + d(f_{i2}) \wedge dt \\ &= f_{i1,z}dz \wedge dx + f_{i1,z_1}dz_1 \wedge dx + f_{i1,z_2}dz_2 \wedge dx + \\ &\quad + f_{i1,y}dy \wedge dx + f_{i1,y_1}dy_1 \wedge dx + \\ &\quad + f_{i2,z}dz \wedge dt + f_{i2,z_1}dz_1 \wedge dt + f_{i2,z_2}dz_2 \wedge dt + \\ &\quad + f_{i2,y}dy \wedge dt + f_{i2,y_1}dy_1 \wedge dt. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Usando as relações (2.16), temos para $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}
d\omega_i &= f_{i1,z} dz \wedge dx + f_{i1,z_1}(-F dx \wedge dt) + f_{i1,z_2} dz_2 \wedge dx + \\
&\quad + f_{i1,y} dy \wedge dx + f_{i1,y_1}(-G dx \wedge dt) + \\
&\quad + f_{i2,z}(z_1 dx \wedge dt) + f_{i2,z_1}(z_2 dx \wedge dt) + f_{i2,z_2} dz_2 \wedge dt + \\
&\quad + f_{i2,y}(y_1 dx \wedge dt) + f_{i2,y_1} dy_1 \wedge dt \\
&= (-f_{i1,z_1} F - f_{i1,y_1} G + f_{i2,z} z_1 + f_{i2,z_1} z_2 + f_{i2,y} y_1)\, dx \wedge dt + \\
&\quad + f_{i1,z} dz \wedge dx + f_{i1,z_2} dz_2 \wedge dx + f_{i1,y} dy \wedge dx + f_{i2,z_2} dz_2 \wedge dt + f_{i2,y_1} dy_1 \wedge dt.
\end{aligned}$$

Equacionando os coeficientes de $dx \wedge dt$ na expressão acima, para $i = 1, 2, 3$, com o lado direito de (2.15) obtemos as equações (2.11), (2.12) e (2.13) respectivamente. Os demais termos que não são coeficientes de $dx \wedge dt$ devem se anular, donde temos as relações (2.9).

A equação (1.22) também deve ser satisfeita, pois por definição, requeremos que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. O que é localmente equivalente a $f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} \neq 0$, pois $\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}) dx \wedge dt$.

Finalmente a condição genérica (2.10) deve ser satisfeita para que as equações (2.11), (2.12) e (2.13) sejam equivalentes ao sistema (2.8).

Para mostrar que esta condição é suficiente, consideramos as f_{ij}, $i \leq 1 \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo as condições (2.9)-(2.13) e definimos localmente $\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt$. Assim o sistema com F e G obtida através das equações (2.11), (2.12) e (2.13), descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, consideradas. $\square$

Como consequência do Teorema 2.1, temos que uma condição necessária para um sistema do tipo $(S_{2,1})$ descrever superfícies pseudo-esféricas ou esféricas é que esse sistema dependa linearmente de u_{xx}. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.2. *Considere um sistema do tipo $(S_{2,1})$. Para que este sistema descreva superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (2.9)-(2.13), é necessário que*

$$\begin{cases} u_{xt} = F_1(u, u_x, v, v_x) + F_2(u, u_x, v, v_x) u_{xx}, \\ v_{xt} = G_1(u, u_x, v, v_x) + G_2(u, u_x, v, v_x) u_{xx}, \end{cases}$$

onde F_k, G_k, $k = 1, 2$, são funções suaves de (u, u_x, v, v_x).

Demonstração. Considere um sistema $(S_{2,1})$ e suponha que este sistema descreve superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (2.9)-(2.13).

Diferenciando duas vezes, com respeito a z_2, as equações (2.11)-(2.13), obtemos

$$-f_{11,z_1}F_{z_2,z_2} - f_{11,y_1}G_{z_2,z_2} = 0,$$

$$-f_{21,z_1}F_{z_2,z_2} - f_{21,y_1}G_{z_2,z_2} = 0,$$

$$-f_{31,z_1}F_{z_2,z_2} - f_{31,y_1}G_{z_2,z_2} = 0.$$

Segue da equação (2.10) que $F_{z_2,z_2} = G_{z_2,z_2} = 0$, ou seja, F e G são lineares nos termos z_2, o que demonstra esta proposição. $\square$

Como consequência imediata da última proposição, apresentamos um resultado de não existência.

Corolário 2.1. *Não existe sistema do tipo* $(S_{2,1})$ *descrevendo superfícies pseudo-esféricas ou esféricas para* f_{ij} *associadas, satisfazendo (2.9)-(2.14), que dependa de modo não linear de* u_{xx}.

2.2 Resultados de classificação de sistemas $(S_{2,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Nesta seção, apresentaremos uma classificação dos sistemas do tipo $(S_{2,1})$ descrevendo superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com a condição de que pelo menos uma das funções f_{11}, f_{21} ou f_{31} é constante, igual a um número real η.

Dado um sistema do tipo $(S_{2,1})$, observamos que, se F e G não dependem da variável z_2, ou seja, se $F_{z_2} = G_{z_2} = 0$, então este sistema equivale a um sistema do tipo $(S_{1,1})$, considerado no Capítulo 1. Além disso, se F e G não dependem das variáveis z, y, isto é, $F_z = F_y = G_z = G_y$, então o sistema $(S_{2,1})$ é reduzido, sob uma mudança de variáveis, a um sistema de equações de evolução. Esta observação nos motiva a considerar a seguinte definição.

Definição 2.3. Dizemos que um sistema $(S_{2,1})$ é irredutível se as funções F e G satisfazem

$$F_{z_2}^2 + G_{z_2}^2 \neq 0,$$

e

$$F_z^2 + F_y^2 + G_z^2 + G_y^2 \neq 0,$$

para todos os pontos de seu domínio com exceção de um subconjunto de medida nula.

Deste modo, no que segue, estaremos interessados em sistemas do tipo $(S_{2,1})$ que são irredutíveis.

2.2.1 Com a condição $f_{31} = \eta$

Nesta subseção, daremos uma classificação dos sistemas do tipo $(S_{2,1})$ irredutíveis que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, com a condição adicional que $f_{31} = \eta$ é uma constante real. O resultado de classificação será dividido em duas partes, Teoremas 2.2 e 2.3, onde consideramos duas situações, caso o quociente entre f_{11} e f_{21} dependa ou não da variável y_1, isto é $f_{11}f_{21,y_1} - f_{21}f_{11,y_1} \neq 0$ ou $f_{11}f_{21,y_1} - f_{21}f_{11,y_1} = 0$.

Teorema 2.2. *Um sistema $(S_{2,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (2.9)-(2.14), com $f_{31} = \eta \in \mathbb{R}$ e $f_{11}f_{21,y_1} - f_{21}f_{11,y_1} \neq 0$ se, e somente se,*

Caso I

$$\begin{cases} z_{1,t} = & \dfrac{1}{W}\{(g_2H_{1,z_1} - g_1H_{2,z_1})z_2 + p[y_1(g_1^2+g_2^2) + h_2g_2 + h_1g_1] + \\ & +g_2(H_{1,z}z_1 + H_{1,y}y_1) - g_1(H_{2,z}z_1 + H_{2,y}y_1) - \eta\,(g_2H_2 + g_1H_1)\}\,, \\ y_{1,t} = & \dfrac{1}{W}\{[(g_1'H_{2,z_1} - g_2'H_{1,z_1})y_1 + (h_1'H_{2,z_1} - h_2'H_{1,z_1})]\,z_2 + \\ & -(g_2'y_1 + h_2')(H_{1,z}z_1 + H_{1,y}y_1 - \eta H_2 + (g_2y_1 + h_2)p) + \\ & +(g_1'y_1 + h_1')(H_{2,z}z_1 + H_{2,y}y_1 + \eta H_1 - (g_1y_1 + h_1)p)\}\,, \end{cases} \tag{2.18}$$

onde g_i, h_i, $i = 1,2$, são funções suaves de z_1 satisfazendo

$$W := (g_1'g_2 - g_2'g_1)y_1 + h_1'g_2 - h_2'g_1 \neq 0, \quad V := g_1h_2 - g_2h_1 \neq 0,$$
$$\left(\frac{h_1}{V}\right)^2_{z_1} + \left(\frac{h_2}{V}\right)^2_{z_1} + \left(\frac{z_1g_1}{V}\right)^2_{z_1} + \left(\frac{z_1g_2}{V}\right)^2_{z_1} \neq 0,$$

e $p(z,y)$ é uma função suave das variáveis (z,y) tal que p_z e p_y são linearmente independentes, e

$$H_i = \delta\frac{h_ip_y - g_iz_1p_z}{V}, \qquad i = 1,2,$$

com $\delta = 1$ (resp. -1). Neste caso,

$$f_{11} = g_1y_1 + h_1, \qquad f_{12} = H_1,$$
$$f_{21} = g_2y_1 + h_2, \qquad f_{22} = H_2,$$
$$f_{31} = \eta, \qquad f_{32} = p.$$

Caso II

$$\begin{cases} z_{1,t} = & \dfrac{1}{W}\{\delta\phi'(\xi)(g_1'q_{y_1} - g_2'p_{y_1})z_2 - \delta b(az_1 + by_1)\phi''(\xi) + \\ & -\delta(g_1p_{y_1} + g_2q_{y_1})\eta\phi'(\xi) + (qq_{y_1} + pp_{y_1})\phi(\xi)\}\,, \\ y_{1,t} = & \dfrac{1}{W}\{-\delta\phi'(\xi)(g_1'q_{z_1} - g_2'p_{z_1})z_2 + \delta(az_1 + by_1)\,(g_2p_{z_1} - g_1q_{z_1})\phi''(\xi) + \\ & +\,\delta(g_1p_{z_1} + g_2q_{z_1})\eta\phi'(\xi) - (qq_{z_1} + pp_{z_1})\phi(\xi)\}\,, \end{cases} \tag{2.19}$$

onde, $\delta = 1$ *(resp.* -1*),* g_1, g_2 *são funções suaves de* z_1 *tais que* $(g_1')^2 + (g_2')^2 \neq 0$*,* p *e* q *são funções suaves de* (z_1, y_1) *tais que*

$$pg_2 - qg_1 = az_1 + by_1,$$

$$W = p_{z_1}q_{y_1} - p_{y_1}q_{z_1} \neq 0, \qquad pq_{y_1} - qp_{y_1} \neq 0,$$

e ϕ *é uma função real suave não constante, aplicada em* $\xi = az + by$*, em que* a, b *são constantes reais tais que* $a^2 + b^2 \neq 0$*.*

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= p, & f_{12} &= \delta g_1 \phi'(\xi), \\ f_{21} &= q, & f_{22} &= \delta g_2 \phi'(\xi), \\ f_{31} &= \eta, & f_{32} &= \phi(\xi). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Além disso, nos dois casos, cada sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A,B,$\hat{A}$ *e* $\hat{B}$ *são definidas pelas respectivas funções* f_{ij}*,* $1 \leq i \leq 3$*,* $1 \leq j \leq 2$*.*

Demonstração. A demonstração decorre do Teorema 2.1. Primeiramente, mostraremos que as condições do teorema são necessárias. Suponha que um sistema ($S_{2,1}$) irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções,

$$f_{ij} : U^1 \times U^2 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

onde U^1 e U^2 são subconjuntos abertos e conexos de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente, parametrizados por coordenadas (z, z_1, z_2) e (y, y_1) respectivamente.

Pelo Teorema 2.1, temos que f_{ij} satisfazem as equações (2.9)-(2.14).Pela equação (2.9) temos que, f_{k1} é uma função de (z_1, y_1) e f_{k2} é uma função de (z, z_1, y), para $k = 1, 2, 3$.

Por hipótese, temos que $f_{31} = \eta$, com $\eta \in \mathbb{R}$, e $f_{11}f_{21,y_1} - f_{21}f_{11,y_1} \neq 0$, a menos de um subconjunto de medida nula, em $U^1 \times U^2$. Temos que a equação (2.10) é equivalente a,

$$W = f_{11,z_1}f_{21,y_1} - f_{11,y_1}f_{21,z_1} \neq 0 \qquad \text{em } U^1 \times U^2. \tag{2.21}$$

As equações (2.11) e (2.12) são equivalentes a,

$$\begin{pmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{21,z_1} & f_{21,y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{12,z}z_1 + f_{12,z_1}z_2 + f_{12_y}y_1 - \eta f_{22} + f_{32}f_{21} \\ f_{22,z}z_1 + f_{22,z_1}z_2 + f_{22_y}y_1 - f_{11}f_{32} + f_{12}\eta \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Como $W \neq 0$ é o determinante desta matriz, podemos inverter esta relação para $z_{1,t}$ e $y_{1,t}$, obtendo,

$$\begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} f_{21,y_1} & -f_{11,y_1} \\ -f_{21,z_1} & f_{11,z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{12,z}z_1 + f_{12,z_1}z_2 + f_{12_y}y_1 - \eta f_{22} + f_{32}f_{21} \\ f_{22,z}z_1 + f_{22,z_1}z_2 + f_{22_y}y_1 - f_{11}f_{32} + f_{12}\eta \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

A equação (2.13) equivale a,

$$f_{32,z}z_1 + f_{32,z_1}z_2 + f_{32,y}y_1 - \delta f_{11}f_{22} + \delta f_{12}f_{21} = 0. \tag{2.24}$$

Diferenciando com respeito a z_2 obtemos,

$$f_{32,z_1} = 0, \qquad \text{em } U^1 \times U^2,$$

ou seja, f_{32} é uma função das variáveis z, y.

Assim, a equação (2.24) equivale a,

$$f_{32,z}z_1 + f_{32,y}y_1 - \delta f_{11}f_{22} + \delta f_{12}f_{21} = 0. \tag{2.25}$$

Diferenciando com respeito a y_1, obtemos

$$f_{32,y} - \delta f_{11,y_1}f_{22} + \delta f_{12}f_{21,y_1} = 0. \tag{2.26}$$

As equações (2.25) e (2.26) implicam que,

$$\delta \begin{pmatrix} -f_{21} & f_{11} \\ -f_{21,y_1} & f_{11,y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{32,z}z_1 + f_{32,y}y_1 \\ f_{32,y} \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Por hipótese, o determinante desta matriz

$$V := f_{11}f_{21,y_1} - f_{21}f_{11,y_1} \neq 0,$$

é não nulo, e segue da equação (2.27) que

$$\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix} = \frac{\delta}{V} \begin{pmatrix} f_{11,y_1} & -f_{11} \\ f_{21,y_1} & -f_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{32,z}z_1 + f_{32,y}y_1 \\ f_{32,y} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$f_{i2} = \delta f_{32,z}\frac{z_1 f_{i1,y_1}}{V} + \delta f_{32,y}\frac{f_{i1,y_1}y_1 - f_{i1}}{V}, \qquad i = 1, 2. \tag{2.28}$$

Pela equação (2.9), $f_{i2,y_1} = 0$, para $i = 1, 2$, deste modo a equação (2.28) implica em,

$$f_{32,z}\left(\frac{z_1 f_{i1,y_1}}{V}\right)_{y_1} + f_{32,y}\left(\frac{f_{i1,y_1}y_1 - f_{i1}}{V}\right)_{y_1} = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{2.29}$$

Dividiremos a demonstração em dois casos, dependendo das funções $f_{32,z}$ e $f_{32,z}$ serem linearmente independentes (Caso I) ou linearmente dependentes (Caso II).

Caso I Suponha que $f_{32,z}$ e $f_{32,z}$ sejam linearmente independentes, isto é, $f_{32} = p$ para uma função p, suave, das variáveis (z, y), tal que p_z e p_y são linearmente independentes. Assim, a relação (2.29) implica que,

$$\left(\frac{f_{11,y_1}}{V}\right)_{y_1} = 0, \qquad \left(\frac{f_{11,y_1}y_1 - f_{11}}{V}\right)_{y_1} = 0, \tag{2.30}$$

$$\left(\frac{f_{21,y_1}}{V}\right)_{y_1} = 0, \qquad \left(\frac{f_{21,y_1}y_1 - f_{21}}{V}\right)_{y_1} = 0. \tag{2.31}$$

Afirmamos que estas relações implicam em $f_{11,y_1y_1} = f_{21,y_1y_1} = 0$, a menos de um subconjunto de medida nula, em $U^1 \times U^2$. De fato, primeiramente mostraremos que $f_{11,y_1y_1} = 0$. A primeira relação da equação (2.30) implica que existe uma função suave $l(z_1)$, dependendo somente da variável z_1, tal que $f_{11,y_1} = lV$. Se $l = 0$, então $f_{11,y_1} = 0$, em particular $f_{11,y_1y_1} = 0$, como queríamos. Se $l \neq 0$, temos $V = l^{-1}f_{11,y_1}$, em particular $f_{11,y_1} \neq 0$. Neste caso, da segunda relação da equação (2.30), temos

$$\left(\frac{f_{11,y_1}y_1 - f_{11}}{l^{-1}f_{11,y_1}}\right)_{y_1} = 0,$$

como $l_{y_1} = 0$,

$$\left(\frac{f_{11,y_1}y_1 - f_{11}}{f_{11,y_1}}\right)_{y_1} = 0,$$

isso implica que,

$$\frac{f_{11}f_{11,y_1y_1}}{f_{11,y_1}^2} = 0,$$

como $f_{11} \neq 0$, temos que $f_{11,y_1y_1} = 0$, como queríamos. Analogamente as relações da equação (2.31) implicam em $f_{21,y_1y_1} = 0$ e assim $f_{11,y_1y_1} = f_{21,y_1y_1} = 0$, a menos de um subconjunto de medida nula, em $U^1 \times U^2$. Deste modo, existem quatro funções suaves g_1, g_2, h_1, h_2 da variável z_1, tais que,

$$f_{i1} = g_i y_1 + h_i, \qquad i = 1, 2,$$

e $V = h_1g_2 - g_1h_2 \neq 0$.

Pela equação (2.28), temos que

$$f_{i2} = \delta p_z \frac{z_1 g_i}{V} - \delta p_y \frac{h_i}{V}, \qquad i = 1, 2.$$

Neste caso,

$$W = (g_1'g_2 - g_2'g_1)y_1 + h_1'g_2 - h_2'g_1,$$

e a condição genérica (2.14), $f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21}\neq 0$ equivale a $p_z z_1+p_y y_1\neq 0$ que é satisfeita. Em resumo, neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11}&=g_1y_1+h_1, & f_{12}&=\delta\frac{h_1p_y-g_1z_1p_z}{V},\\ f_{21}&=g_2y_1+h_2, & f_{22}&=\delta\frac{h_2p_y-g_2z_1p_z}{V},\\ f_{31}&=\eta, & f_{32}&=p. \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde p é uma função suave de (z,y) tal que, p_z e p_y são não proporcionais, g_i,h_i, são funções suaves de z_1, para $i=1,2$ tais que $(g_1'g_2-g_2'g_1)y_1+h_1'g_2-h_2'g_1\neq 0$ e $V=g_1h_2-g_2h_1\neq 0$. Substituindo as f_{ij}, dadas acima, na equação (2.23) obtemos o sistema (2.18).

Por último notamos que esse sistema é irredutível, se, e somente se,

$$\left(\frac{h_1}{V}\right)^2_{z_1}+\left(\frac{h_2}{V}\right)^2_{z_1}+\left(\frac{z_1g_1}{V}\right)^2_{z_1}+\left(\frac{z_1g_2}{V}\right)^2_{z_1}\neq 0. \tag{2.33}$$

De fato, diferenciando (2.18) com respeito a z_2, obtemos,

$$\begin{pmatrix} F_{z_2}\\ G_{z_2}\end{pmatrix}=\frac{1}{W}\begin{pmatrix} g_2 & -g_1\\ -g_2'y_1-h_2' & g_1'y_1+h_1'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_{1,z_1}\\ H_{2,z_1}\end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

sendo o determinante desta matriz $W=(g_1'g_2-g_2'g_1)y_1+h_1'g_2-h_2'g_1\neq 0$, segue que $F_{z_2}^2+G_{z_2}^2=0$ se, e somente se, $H_{1,z_1}=H_{2,z_1}=0$. Como

$$H_{i,z_1}=\delta\left(-\frac{z_1g_i}{V}\right)_{z_1}p_z+\delta\left(\frac{h_i}{V}\right)_{z_1}p_y,\qquad i=1,2, \tag{2.35}$$

em que, p_z e p_y são linearmente independentes, segue que $H_{i,z_1}=0$, $i=1,2$, se, e somente se,

$$\left(-\frac{z_1g_i}{V}\right)_{z_1}=\left(\frac{h_i}{V}\right)_{z_1}=0,\qquad i=1,2,$$

donde segue que a condição (2.33) é necessária e suficiente para que $F_{z_2}^2+G_{z_2}^2\neq 0$.

Por último, mostraremos que a condição de irredutibilidade $F_z^2+F_y^2+G_z^2+G_y^2\neq 0$ é satisfeita, automaticamente, para este caso. Suponhamos, por contradição, que $F_z^2+F_y^2+G_z^2+G_y^2=0$ para o sistema do Caso I. Note que, neste caso, o sistema (2.18) é equivalente a,

$$\begin{pmatrix} g_1'y_1+h_1' & g_1\\ g_2'y_1+h_2' & g_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F\\ G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_{1,z}z_1+H_{1,z_1}z_2+H_{1_y}y_1-\eta H_2+(g_2y_1+h_2)p\\ H_{2,z}z_1+H_{2,z_1}z_2+H_{2_y}y_1+\eta H_1-(g_1y_1+h_1)p\end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Diferenciando respeito a z_2 e z e respectivamente com respeito a z_2 e y temos que $H_{i,z_1z}=H_{i,z_1y}=0$, para $i=1,2$. Deste modo, as derivadas de (2.36) com respeito a z implicam em,

$$\begin{aligned} H_{1,zz}z_1+H_{1,yz}y_1-\eta H_{2,z}+(g_2y_1+h_2)p_z&=0,\\ H_{2,zz}z_1+H_{2,yz}y_1+\eta H_{1,z}-(g_1y_1+h_1)p_z&=0, \end{aligned} \tag{2.37}$$

analogamente a derivada de (2.36) com respeito a y implica em,

$$\begin{aligned} H_{1,zy}z_1 + H_{1_{y}y}y_1 - \eta H_{2,y} + (g_2 y_1 + h_2)p_y = 0, \\ H_{2,zy}z_1 + H_{2_{y}y}y_1 + \eta H_{1,y} - (g_1 y_1 + h_1)p_y = 0. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Diferenciando (2.37) com respeito a z_1, obtemos,

$$\begin{aligned} H_{1,yz} + (g_2' y_1 + h_2')p_z = 0, \\ H_{2,yz} - (g_1' y_1 + h_1')p_z = 0, \end{aligned} \tag{2.39}$$

diferenciando (2.39) com respeito a y_1, obtemos $g_2' p_z = g_1' p_z = 0$, como $p_z \neq 0$ temos $g_1' = g_2' = 0$, logo existem constantes c_1 e c_2 tais que $g_i = c_i$. Além disso, diferenciando (2.39) com respeito a z_1, temos que $h_1'' = h_2'' = 0$, donde existem constantes a_i, b_i tais que $h_i = a_i z_1 + b_i$. Ou seja, $g_i = c_i$ e $h_i = a_i y_1 + b_i$, para $i = 1, 2$, neste caso, as derivadas das expressões (2.37) e (2.38) com respeito a y_1 implicam em

$$\begin{aligned} H_{1,yz} + c_2 p_z = 0, \\ H_{2,yz} - c_1 p_z = 0, \\ H_{1,yy} + c_2 p_y = 0, \\ H_{2,yy} - c_1 p_y = 0, \end{aligned} \tag{2.40}$$

em que, para $i = 1, 2$,

$$H_i = \delta \frac{(a_i z_1 + b_i)p_y - c_i z_1 p_z}{V}, \qquad \text{com} \quad V = z_1(c_1 a_2 - c_2 a_1) + c_1 b_2 - c_2 b_1.$$

Podemos reescrever as relações em (2.40), em termos matriciais por

$$\frac{\delta}{V} \begin{pmatrix} a_1 z_1 + b_1 & -c_1 z_1 \\ a_2 z_1 + b_2 & -c_2 z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{yyy} & p_{yyz} \\ p_{zyy} & p_{zzy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 p_y & -c_2 p_z \\ c_1 p_y & c_1 p_z \end{pmatrix}.$$

Como o determinante da primeira matriz do lado esquerdo é igual a $z_1 V \neq 0$, segue que esta matriz é inversível. Assim, multiplicando a esquerda por sua inversa, obtemos,

$$\delta z_1 \begin{pmatrix} p_{yyy} & p_{yyz} \\ p_{zyy} & p_{zzy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 z_1 & c_1 z_1 \\ -a_2 z_1 - b_2 & a_1 z_1 + b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_2 p_y & -c_2 p_z \\ c_1 p_y & c_1 p_z \end{pmatrix}.$$

Diferenciando com respeito a z_1, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \begin{pmatrix} p_{yyy} & p_{yyz} \\ p_{zyy} & p_{zzy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -c_2 & c_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_2 p_y & -c_2 p_z \\ c_1 p_y & c_1 p_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_2^2 + c_1^2)p_y & (c_2^2 + c_1^2)p_z \\ (a_2 c_2 + a_1 c_1)p_y & (a_2 c_2 + a_1 c_1)p_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Note que a matriz do lado esquerdo é simétrica, assim $(c_2^2+c_1^2)p_z-(a_2c_2+a_1c_1)p_y=0$. Como p_z e p_y são linearmente independentes devemos ter $c_2^2+c_1^2=0$, ou seja $c_1=c_2=0$. Isso implica que $V=0$, um absurdo. Logo o sistema (2.18), do Caso I, satisfaz $F_z^2+F_y^2+G_z^2+G_y^2\neq 0$.

Assim concluímos que o sistema do Caso I é irredutível se, e somente se, a condição (2.33) é satisfeita.

Casos II Suponha que $f_{32,z}$ e $f_{32,y}$ são linearmente dependentes, isto é, existem constantes reais, $a,b\in\mathbb{R}$, tais que $a^2+b^2\neq 0$, cuja combinação linear com $f_{32,z}$ e $f_{32,y}$ se anula em $U^1\times U^2$. Ou seja, existe uma função real suave ϕ tal que $f_{32}=\phi(\xi)$, com $\xi=az+by$.

Pela equação (2.29), temos que

$$\phi'(\xi)a\left(\frac{z_1f_{i1,y_1}}{V}\right)_{y_1}+\phi'(\xi)b\left(\frac{f_{i1,y_1}y_1-f_{i1}}{V}\right)_{y_1}=0,\qquad i=1,2. \tag{2.42}$$

a menos de um subconjunto de medida nula em $U^1\times U^2$. Afirmamos que $\phi'(\xi)\neq 0$, caso contrário, pela equação (2.28), teríamos $f_{12}=f_{22}=0$, o que é uma contradição com a equação (2.14). Assim, $\phi'(\xi)\neq 0$ e pela equação (2.42) temos que

$$\left(\frac{(az_1+by_1)f_{i1,y_1}-bf_{i1}}{V}\right)_{y_1}=0,\qquad i=1,2.$$

Isso implica que existem duas funções suaves, g_i, $i=1,2$, dependendo somente da variável z_1, tais que,

$$\frac{(az_1+by_1)f_{i1,y_1}-bf_{i1}}{V}=g_i,\qquad i=1,2,$$

logo, pela equação (2.28), f_{12} e f_{22} são dados por,

$$f_{i2}=\delta\phi'(\xi)g_i,\qquad i=1,2,$$

e f_{11} e f_{21} satisfazem

$$\frac{1}{V}\begin{pmatrix} f_{11,y_1} & -f_{11}\\ f_{21,y_1} & -f_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} az_1+by_1\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_1\\ g_2\end{pmatrix}.$$

Como o determinante desta matriz é igual a $V\neq 0$, podemos inverter essa relação e obter,

$$\begin{pmatrix} az_1+by_1\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f_{21} & f_{11}\\ -f_{21,y_1} & f_{11,y_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1\\ g_2\end{pmatrix}.$$

Temos que $g_1^2+g_2^2\neq 0$ e $f_{11}g_2-f_{21}g_1=az_1+by_1$. Logo é necessário que $f_{11}=p$ e $f_{21}=q$ para p,q, funções suaves de (z_1,y_1), satisfazendo,

$$W=p_{z_1}q_{y_1}-p_{y_1}q_{z_1}\neq 0,$$

$$V=pq_{y_1}-qp_{y_1}\neq 0,$$

$$pg_2-qg_1=az_1+by_1.$$

Neste caso, a condição (2.14) é satisfeita, pois, equivale a $\phi'(\xi)(az_1 + by_1) \neq 0$.

Em resumo, neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= p, \quad f_{12} = \delta g_1 \phi'(\xi), \\ f_{21} &= q, \quad f_{22} = \delta g_2 \phi'(\xi), \\ f_{31} &= \eta, \quad f_{32} = \phi(\xi), \end{aligned} \tag{2.43}$$

onde g_1, g_2 são funções suaves de z_1 tais que, $g_1^2 + g_2^2 \neq 0$, p, q são funções suaves das variáveis (z_1, y_1) tais que $p_{z_1} q_{y_1} - p_{y_1} q_{z_1} \neq 0$, $pq_{y_1} - qp_{y_1} \neq 0$, $pg_2 - qg_1 = az_1 + by_1$, $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes reais tais que $a^2 + b^2 \neq 0$ e ϕ é uma função real suave, aplicada em $\xi = az + by$ tal que $\phi' \neq 0$.

Substituindo as funções, f_{ij}, dadas acima na equação (2.23) obtemos a expressão (2.19).

Por último vamos mostrar que o sistema (2.19) é irredutível se, e somente se,

$$(g_1')^2 + (g_2')^2 \neq 0.$$

De fato, pela expressão (2.19), temos $F_{z_2}^2 + G_{z_2}^2 \neq 0$, se, e somente se, $(g_1')^2 + (g_2')^2 \neq 0$. Por último notamos que a segunda condição de irredutibilidade, $F_z^2 + F_y^2 + G_z^2 + G_y^2 \neq 0$ é automaticamente satisfeita. Suponha por contradição que F e G, dadas por (2.19) não dependam de (z, y), isto é, $F_z = F_y = G_z = G_y = 0$. Isto implica que $F_\xi = G_\xi = 0$. Diferenciando (2.19) com respeito a z_2, ξ, obtemos que $g_1' \phi''(\xi) = g_2' \phi''(\xi) = 0$, como $(g_1')^2 + (g_2')^2 \neq 0$, devemos ter $\phi''(\xi) = 0$, ou seja $\phi(\xi) = k\xi + k_0$ com $k, k_0 \in \mathbb{R}$ constantes reais tais que $k \neq 0$.

Diferenciando (2.19) com respeito a ξ, temos

$$\begin{aligned} (qq_{y_1} + pp_{y_1})k_0 &= 0, \\ (qq_{z_1} + pp_{z_1})k_0 &= 0, \end{aligned}$$

como $k_0 \neq 0$, segue que

$$\begin{pmatrix} p_{z_1} & q_{z_1} \\ p_{y_1} & q_{y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica em $p = q = 0$, um absurdo. Logo $F_z^2 + F_y^2 + G_z^2 + G_y^2 \neq 0$ e assim concluímos que para o Caso II, o sistema é irredutível se, e somente se, $(g')^2 + (h')^2 \neq 0$.

Assim temos que as condições do Caso II são, de fato, necessárias.

Para a recíproca, defina as f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, como consideradas em cada caso e verifique diretamente que satisfazem as equações (2.9)-(2.14).

$\square$

Teorema 2.3. *Um sistema $(S_{2,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (2.9)-(2.14), com $f_{31} = \eta \in \mathbb{R}$ e $f_{11}f_{21,y_1} - f_{21}f_{11,y_1} = 0$ se, e somente se,*

$$\begin{cases} z_{1,t} = & \dfrac{1}{W}\left\{g_1(H_z z_1 + H_y y_1 + H_{z_1} z_2)+\right. \\ & \left.-g_2(P_z z_1 + P_y y_1 + P_{z_1} z_2) + \phi(\xi)(cz_1 + y_1)(g_1^2 + g_2^2) - \eta(g_1 H + g_2 P)\right\}, \\ y_{1,t} = & \dfrac{(cz_1 + y_1)g_1' + cg_1}{W}(P_z z_1 + P_{z_1} z_2 + P_y y_1 - g_1(cz_1 + y_1)\phi(\xi) + \eta H)+ \\ & -\dfrac{(cz_1 + y_1)g_2' + cg_2}{(g_1'g_2 - g_2'g_1)(cz_1 + y_1)}(H_z z_1 + H_{z_1} z_2 + H_y y_1 + g_2(cz_1 + y_1)\phi(\xi) - \eta P), \end{cases} \tag{2.44}$$

onde, $\delta = 1$ (resp. -1), g_1, g_2 são funções suaves de z_1 tais que $g_1'g_2 - g_2'g_1 \neq 0$, ϕ é uma função real suave, não constante, aplicada em $\xi = cz + y$, com $c \in \mathbb{R}$ uma constante real e P é uma função suave de (z, z_1, y) satisfazendo a condição genérica,

$$\left(\left(\frac{g_1}{g_2}P\right)_{z_1} - \delta\left(\frac{1}{g_2}\right)'\phi'(\xi)\right)^2 + (P_{z_1})^2 \neq 0,$$

em que $H = \dfrac{g_1}{g_2}P - \delta\dfrac{1}{g_2}\phi'(\xi)$ e $W = (g_1'g_2 - g_2'g_1)(cz_1 + y_1)$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= (y_1 + cz_1)g_1, & f_{12} &= H, \\ f_{21} &= (y_1 + cz_1)g_2, & f_{22} &= P, \\ f_{31} &= \eta, & f_{32} &= \phi(\xi). \end{aligned}$$

Além disso, este sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A,B,$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são definidas pelas respectivas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

Demonstração. A demonstração decorre do Teorema 2.1. De fato, primeiramente mostraremos que as condições do teorema são necessárias. Suponha que um sistema $(S_{2,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções,

$$f_{ij} : U^1 \times U^2 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

onde U^1 e U^2 são subconjuntos abertos e conexos de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente, parametrizados por coordenadas (z, z_1, z_2) e (y, y_1) respectivamente. Pelo Teorema 2.1, temos que f_{ij} satisfazem as equações (2.9)-(2.14).

Pela equação (2.9) temos que, f_{k1} é uma função de (z_1, y_1) e f_{k2} é uma função de (z, z_1, y), para $k = 1, 2, 3$.

Por hipótese, supomos que $f_{31} = \eta$, com $\eta \in \mathbb{R}$, em $U^1 \times U^2$. A equação (2.10) é equivalente a,

$$W = f_{11,z_1}f_{21,y_1} - f_{11,y_1}f_{21,z_1} \neq 0 \qquad \text{em } U^1 \times U^2. \tag{2.45}$$

As equações (2.11) e (2.12) são equivalentes a,

$$\begin{pmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{21,z_1} & f_{21,y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{12,z}z_1 + f_{12,z_1}z_2 + f_{12_y}y_1 - \eta f_{22} + f_{32}f_{21} \\ f_{22,z}z_1 + f_{22,z_1}z_2 + f_{22_y}y_1 - f_{11}f_{32} + f_{12}\eta \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Como $W \neq 0$ é o determinante desta matriz, podemos inverter esta relação para $z_{1,t}$ e $y_{1,t}$, obtendo,

$$\begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} f_{21,y_1} & -f_{11,y_1} \\ -f_{21,z_1} & f_{11,z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{12,z}z_1 + f_{12,z_1}z_2 + f_{12_y}y_1 - \eta f_{22} + f_{32}f_{21} \\ f_{22,z}z_1 + f_{22,z_1}z_2 + f_{22_y}y_1 - f_{11}f_{32} + f_{12}\eta \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

A equação (2.13) equivale a,

$$f_{32,z}z_1 + f_{32,z_1}z_2 + f_{32,y}y_1 - \delta f_{11}f_{22} + \delta f_{12}f_{21} = 0. \quad (2.48)$$

Diferenciando com respeito a z_2 obtemos,

$$f_{32,z_1} = 0, \qquad \text{em } U^1 \times U^2,$$

ou seja, f_{32} é uma função das variáveis z, y.

Assim, a equação (2.24) equivale a,

$$f_{32,z}z_1 + f_{32,y}y_1 - \delta f_{11}f_{22} + \delta f_{12}f_{21} = 0. \quad (2.49)$$

Suponhamos, por hipótese, que $f_{11}f_{21,y_1} - f_{21}f_{11,y_1} = 0$ em $U^1 \times U^2$, ou seja o quociente $\frac{f_{11}}{f_{21}} = \hat{g}$, com $\hat{g}$ uma função suave da variável z_1, logo $f_{11} = \hat{g}l$ e $f_{21} = l$, com l uma função suave das variáveis (z_1, y_1) satisfazendo

$$W = \hat{g}' l l_{y_1} \neq 0. \quad (2.50)$$

A equação (2.49) implica que

$$f_{12} = \hat{g}f_{22} - \frac{\delta}{l}(f_{32,z}z_1 + f_{32,y}y_1). \quad (2.51)$$

Conforme a equação (2.9), $f_{12,y_1} = 0$, assim a equação (2.51) implica que

$$f_{32,z}l_{y_1}z_1 + f_{32,y}(l_{y_1}y_1 - l) = 0. \quad (2.52)$$

Note que $f_{32,y} \neq 0$, pois caso contrário, se $f_{32,y} = 0$, teremos também $f_{32,z} = 0$, assim pela equação (2.51), teríamos $f_{12} - \hat{g}f_{22} = 0$ que implica em $f_{12}l - l\hat{g}f_{22} = 0$, isto é, $f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22} =$

0, o que é uma contradição com a equação (2.14). Logo $f_{32,y} \neq 0$, a menos de um subconjunto de medida nula em $U^1 \times U^2$, assim

$$\frac{f_{32,z}}{f_{32,y}} l_{y_1} z_1 + l_{y_1} y_1 - l = 0, \tag{2.53}$$

diferenciando com respeito a z e y obtemos,

$$\left(\frac{f_{32,z}}{f_{32,y}}\right)_z l_{y_1} = \left(\frac{f_{32,z}}{f_{32,y}}\right)_y l_{y_1} = 0,$$

como $l_{y_1} \neq 0$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_{32,z} = c f_{32,y},$$

isso implica que existe uma função real suave ϕ tal que,

$$f_{32} = \phi(\xi),$$

com $\xi = cz + y$ e $\phi'(\xi) \neq 0$. Neste caso, a equação (2.53), implica que

$$l_{y_1}(cz_1 + y_1) - l = 0,$$

ou seja, o quociente entre l e $cz_1 + y_1$ é uma função somente de z_1. Assim, existe uma função $\hat{h}$ suave da variável z_1 tal que,

$$l = \hat{h}(cz_1 + y_1). \tag{2.54}$$

Introduzindo, por conveniência $g_1 = \hat{g}\hat{h}$ e $g_2 = \hat{h}$, funções suaves de z_1 e considerando P, uma função suave das variáveis (z, z_1, y), temos que

$$\begin{aligned} f_{11} &= (y_1 + cz_1)g_1, & f_{12} &= \frac{g_1}{g_2}P - \frac{\delta}{g_2}\phi'(\xi), \\ f_{21} &= (y_1 + cz_1)g_2, & f_{22} &= P, \\ f_{31} &= \eta, & f_{32} &= \phi(\xi), \end{aligned} \tag{2.55}$$

onde, g_1 e g_2 são funções suaves de z_1, ϕ é uma função real suave, aplicada em $\xi = cz_1 + y_1$, tal que $\phi' \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ é uma constante real e P é uma função suave das variáveis (z, z_1, y). Neste caso,

$$W = (g_1' g_2 - g_2' g_1)(cz_1 + y_1),$$

que equivale a, $g_1' g_2 - g_2' g_1 \neq 0$. A condição (2.14) equivale a $\phi'(\xi)(cz_1 + y_1) \neq 0$, que é automaticamente satisfeita. Neste caso, o sistema (2.44) é dado por (2.47) em que as f_{ij} satisfazem (2.55).

Finalmente, afirmamos que o sistema (2.44) é irredutível se, e somente se,

$$\left(\left(\frac{g_1}{g_2}P\right)_{z_1} - \delta\left(\frac{1}{g_2}\right)'\phi'(\xi)\right)^2 + (P_{z_1})^2 \neq 0. \tag{2.56}$$

Primeiramente vamos mostrar que a condição de irredutibilidade, $F_z^2+F_y^2+G_z^2+G_y^2 \neq 0$ é automaticamente satisfeita. Suponha, por contradição, que $F_z = G_z = F_y = G_y = 0$. Podemos expressar as funções F e G, do sistema (2.44), de modo análogo a equação (2.46), por

$$\begin{pmatrix} cg_1 + (y_1+cz_1)g_1' & g_1 \\ cg_2 + (y_1+cz_1)g_2' & g_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_z z_1 + H_{z_1}z_2 + H_y y_1 - \eta P + (y_1+cz_1)g_2\phi(\xi) \\ P_z z_1 + P_{z_1}z_2 + P_y y_1 + \eta H - (y_1+cz_1)g_1\phi(\xi) \end{pmatrix}.$$

Diferenciando com respeito as variáveis z, z_2 e y, z_2, obtemos que $H_{z_1z} = P_{z_1z} = H_{z_1y} = P_{z_1y} = 0$. Deste modo, as derivadas da última expressão com respeito as variáveis y, z_1, y_1, implica que

$$g_2'\phi'(\xi) = 0,$$
$$g_1'\phi'(\xi) = 0.$$

Como $\phi'(\xi) \neq 0$, segue que $g_1' = g_2' = 0$ e consequentemente $W = 0$, um absurdo. Donde concluímos que a condição $F_z^2 + F_y^2 + G_z^2 + G_y^2 \neq 0$ é satisfeita.

Por último, notamos que a condição (2.56) é equivalente a $F_{z_2}^2 + G_{z_2}^2 \neq 0$, que equivale a $(H_{z_1})^2 + (P_{z_1})^2 \neq 0$, que por sua vez, é equivalente a condição (2.56). Assim demonstramos que as condições são, de fato, necessárias.

Para a recíproca, defina as f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, como consideradas em cada caso e verifique diretamente que satisfazem as equações (2.9)-(2.14). □

Segue imediatamente dos Teoremas 2.2 e 2.3 a classificação completa dos sistemas $(S_{2,1})$ irredutíveis que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com $f_{31} = \eta$.

Teorema 2.4. *Um sistema $(S_{2,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas), com $f_{31} = \eta \in \mathbb{R}$, se, e somente se, $(S_{2,1})$ é do tipo (2.18), (2.19) ou (2.44).*

2.2.2 Com a condição $f_{21} = \eta$

Nesta subseção, daremos uma classificação dos sistemas do tipo $(S_{2,1})$ irredutíveis que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, com a condição adicional que $f_{21} = \eta$ é uma constante real. O resultado de classificação será dividido em duas partes, Teoremas 2.5

e 2.6, onde considerarmos duas situações, caso o quociente entre f_{11} e f_{31} dependa ou não da variável y_1, isto é $f_{11}f_{31,y_1} - f_{31}f_{11,y_1} \neq 0$ ou $f_{11}f_{31,y_1} - f_{31}f_{11,y_1} = 0$.

Teorema 2.5. *Um sistema $(S_{2,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (2.9)-(2.14), com $f_{21} = \eta \in \mathbb{R}$ e $f_{11}f_{31,y_1} - f_{31}f_{11,y_1} \neq 0$ se, e somente se,*

Caso I

$$\left\{\begin{aligned} z_{1,t} = &\ \frac{1}{W}\left\{(g_3H_{1,z_1} - g_1H_{3,z_1})z_2 - p[y_1(g_3^2 - \delta g_1^2) + h_3g_3 - \delta h_1g_1] +\right.\\ &\left. + g_3(H_{1,z}z_1 + H_{1,y}y_1) - g_1(H_{3,z}z_1 + H_{3,y}y_1) + \eta\,(g_3H_3 - \delta g_1H_1)\right\},\\ y_{1,t} = &\ \frac{1}{W}\left\{[(g_1'H_{3,z_1} - g_3'H_{1,z_1})y_1 + (h_1'H_{3,z_1} - g_3'H_{1,z_1})]\,z_2 +\right.\\ & - (g_3'y_1 + h_3')(H_{1,z}z_1 + H_{1,y}y_1 + \eta H_3 - (g_3y_1 + h_3)p) +\\ &\left. + (g_1'y_1 + h_1')(H_{3,z}z_1 + H_{3,y}y_1 + \delta\eta H_1 - \delta(g_1y_1 + h_1)p)\right\}, \end{aligned}\right. \tag{2.57}$$

onde g_i, h_i, $i = 1, 3$, são funções suaves de z_1 satisfazendo

$$W := (g_1'g_3 - g_3'g_1)y_1 + h_1'g_3 - h_3'g_1 \neq 0, \qquad V := g_1h_3 - g_3h_1 \neq 0,$$

$$\left(\frac{h_1}{V}\right)^2_{z_1} + \left(\frac{h_3}{V}\right)^2_{z_1} + \left(\frac{z_1g_1}{V}\right)^2_{z_1} + \left(\frac{z_1g_3}{V}\right)^2_{z_1} \neq 0,$$

e $p(z,y)$ é uma função suave das variáveis (z,y) tal que p_z e p_y são linearmente independentes, e

$$H_i = \frac{h_ip_y - g_iz_1p_z}{V}, \qquad i = 1, 3,$$

com $\delta = 1$ (resp. -1). Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= g_1y_1 + h_1, & f_{12} &= \frac{h_1p_y - g_1z_1p_z}{V},\\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= p,\\ f_{31} &= g_3y_1 + h_3, & f_{32} &= \frac{h_3p_y - g_3z_1p_z}{V}. \end{aligned}$$

Caso II

$$\left\{\begin{aligned} z_{1,t} = &\ \frac{1}{W}\left\{\phi'(\xi)(g_1'q_{y_1} - g_3'p_{y_1})z_2 - b(az_1 + by_1)\phi''(\xi) +\right.\\ &\left. + (g_2q_{y_1} - \delta g_1p_{y_1})\eta\phi'(\xi) - (qq_{y_1} - \delta pp_{y_1})\phi(\xi)\right\},\\ y_{1,t} = &\ \frac{1}{W}\left\{\phi'(\xi)(g_3'p_{z_1} - g_1'q_{z_1})z_2 + (az_1 + by_1)\,(g_3p_{z_1} - g_1q_{z_1})\phi''(\xi) +\right.\\ &\left. - (g_3q_{z_1} - \delta g_1p_{z_1})\eta\phi'(\xi) + (qq_{z_1} - \delta pp_{z_1})\phi(\xi)\right\}, \end{aligned}\right. \tag{2.58}$$

onde, $\delta = 1$ *(resp.* -1*),* g_1, g_3 *são funções suaves de* z_1 *tais que* $(g_1')^2 + (g_3')^2 \neq 0$*,* p *e* q *são funções suaves de* (z_1, y_1) *tais que*

$$pg_3 - qg_1 = az_1 + by_1,$$

$$pq_{y_1} - qp_{y_1} \neq 0, \qquad W = p_{z_1}q_{y_1} - p_{y_1}q_{z_1} \neq 0,$$

e ϕ *é uma função real suave não constante, aplicada em* $\xi = az + by$*, em que* a, b *são constantes reais tais que* $a^2 + b^2 \neq 0$*.*

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= p, & f_{12} &= g_1\phi'(\xi), \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= \phi(\xi), \\ f_{31} &= q, & f_{32} &= g_3\phi'(\xi). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Além disso, nos dois casos, cada sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A*,*B*,*$\hat{A}$ *e* $\hat{B}$ *são definidas pelas respectivas funções* f_{ij}*,* $1 \leq i \leq 3$*,* $1 \leq j \leq 2$*.*

Demonstração. A demonstração decorre do Teorema 2.1. Primeiramente, mostraremos que as condições do teorema são necessárias. Suponha que um sistema $(S_{2,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções,

$$f_{ij} : U^1 \times U^2 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

onde U^1 e U^2 são subconjuntos abertos e conexos de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente, parametrizados por coordenadas (z, z_1, z_2) e (y, y_1) respectivamente. Pelo Teorema 2.1, temos que f_{ij} satisfazem as equações (2.9)-(2.14).

Pela equação (2.9) temos que, f_{k1} é uma função de (z_1, y_1) e f_{k2} é uma função de (z, z_1, y), para $k = 1, 2, 3$.

Por hipótese, supomos que $f_{21} = \eta$, com $\eta \in \mathbb{R}$, e $f_{11}f_{31,y_1} - f_{31}f_{11,y_1} \neq 0$, a menos de um subconjunto de medida nula, em $U^1 \times U^2$.

Temos que a equação (2.10) é equivalente a,

$$W = f_{11,z_1}f_{31,y_1} - f_{11,y_1}f_{31,z_1} \neq 0 \qquad \text{em } U^1 \times U^2. \tag{2.60}$$

As equações (2.11) e (2.13) são equivalentes a,

$$\begin{pmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{31,z_1} & f_{31,y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{12,z}z_1 + f_{12,z_1}z_2 + f_{12_y}y_1 - f_{31}f_{22} + f_{32}\eta \\ f_{32,z}z_1 + f_{32,z_1}z_2 + f_{32_y}y_1 - \delta f_{11}f_{22} + \delta f_{12}\eta \end{pmatrix}. \tag{2.61}$$

Como $W \neq 0$ é o determinante desta matriz, podemos inverter esta relação para $z_{1,t}$ e $y_{1,t}$, obtendo,

$$\begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} f_{31,y_1} & -f_{11,y_1} \\ -f_{31,z_1} & f_{11,z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{12,z}z_1 + f_{12,z_1}z_2 + f_{12_y}y_1 - f_{31}f_{22} + \eta f_{32} \\ f_{32,z}z_1 + f_{32,z_1}z_2 + f_{32_y}y_1 - \delta f_{11}f_{22} + \delta\eta f_{12} \end{pmatrix}. \tag{2.62}$$

A equação (2.12) equivale a,

$$f_{22,z}z_1 + f_{22,z_1}z_2 + f_{22,y}y_1 - f_{11}f_{32} + f_{12}f_{31} = 0. \tag{2.63}$$

Diferenciando com respeito a z_2 obtemos,

$$f_{22,z_1} = 0, \qquad \text{em } U^1 \times U^2,$$

ou seja, f_{22} é uma função das variáveis z, y. Assim, a equação (2.24) equivale a,

$$f_{22,z}z_1 + f_{22,y}y_1 - f_{11}f_{32} + f_{12}f_{31} = 0. \tag{2.64}$$

Diferenciando com respeito a y_1, obtemos

$$f_{22,y} - f_{11,y_1}f_{32} + f_{12}f_{31,y_1} = 0. \tag{2.65}$$

As equações (2.64) e (2.65) implicam que,

$$\begin{pmatrix} -f_{31} & f_{11} \\ -f_{31,y_1} & f_{11,y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{22,z}z_1 + f_{22,y}y_1 \\ f_{22,y} \end{pmatrix}. \tag{2.66}$$

Por hipótese, o determinante desta matriz

$$V = f_{11}f_{31,y_1} - f_{31}f_{11,y_1} \neq 0,$$

é não nulo, e segue da equação (2.66) que

$$\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} f_{11,y_1} & -f_{11} \\ f_{31,y_1} & -f_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{22,z}z_1 + f_{22,y}y_1 \\ f_{22,y} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$f_{i2} = f_{22,z}\frac{z_1 f_{i1,y_1}}{V} + f_{22,y}\frac{f_{i1,y_1}y_1 - f_{i1}}{V}, \qquad i = 1, 3. \tag{2.67}$$

Como $f_{i2,y_1} = 0$, para $i = 1, 3$, devemos ter que,

$$f_{22,z}\left(\frac{z_1 f_{i1,y_1}}{d}\right)_{y_1} + f_{22,y}\left(\frac{f_{i1,y_1}y_1 - f_{i1}}{d}\right)_{y_1} = 0, \qquad i = 1, 3. \tag{2.68}$$

Dividiremos a demonstração em dois casos dependendo se as funções $f_{22,z}$ e $f_{22,z}$ são linearmente independentes (Caso I) ou linearmente dependentes (Caso II).

Caso I Suponha que $f_{22,z}$ e $f_{22,z}$ são linearmente independentes, isto é, $f_{22} = p$ para uma função p, suave, das variáveis (z, y), tal que p_z e p_y são linearmente independentes. Neste caso a equação (2.68) implica em,

$$\left(\frac{f_{11,y_1}}{V}\right)_{y_1} = 0, \qquad \left(\frac{f_{11,y_1}y_1 - f_{11}}{V}\right)_{y_1} = 0, \tag{2.69}$$

$$\left(\frac{f_{31,y_1}}{V}\right)_{y_1} = 0, \qquad \left(\frac{f_{31,y_1}y_1 - f_{31}}{V}\right)_{y_1} = 0. \tag{2.70}$$

Afirmamos que estas relações implicam em $f_{11,y_1y_1} = f_{31,y_1y_1} = 0$, a menos de um subconjunto de medida nula, em $U^1 \times U^2$. De fato, primeiramente mostraremos que $f_{11,y_1y_1} = 0$. A primeira relação da equação (2.69) implica que existe uma função suave $l(z_1)$, dependendo somente da variável z_1, tal que $f_{11,y_1} = lV$. Se $l = 0$, então $f_{11,y_1} = 0$, em particular $f_{11,y_1y_1} = 0$, como queríamos. Se $l \neq 0$, temos $V = l^{-1}f_{11,y_1}$, em particular $f_{11,y_1} \neq 0$. Neste caso, da segunda relação da equação (2.69), temos

$$\left(\frac{f_{11,y_1}y_1 - f_{11}}{l^{-1}f_{11,y_1}}\right)_{y_1} = 0,$$

como $l_{y_1} = 0$,

$$\left(\frac{f_{11,y_1}y_1 - f_{11}}{f_{11,y_1}}\right)_{y_1} = 0,$$

isso implica que,

$$\frac{f_{11}f_{11,y_1y_1}}{f_{11,y_1}^2} = 0,$$

como $f_{11} \neq 0$, temos que $f_{11,y_1y_1} = 0$, como queríamos. Analogamente as relações da equação (2.70) implicam em $f_{31,y_1y_1} = 0$ e assim $f_{11,y_1y_1} = f_{31,y_1y_1} = 0$, a menos de um subconjunto de medida nula, em $U^1 \times U^2$. Deste modo, existem quatro funções suaves g_1, g_3, h_1, h_3 da variável z_1, tais que,

$$f_{i1} = g_i y_1 + h_i, \qquad i = 1, 3,$$

com $V = h_1g_3 - g_1h_3 \neq 0$.

Pela equação (2.67), temos que

$$f_{i2} = p_z \frac{z_1 g_i}{h_1g_3 - g_1h_3} - p_y \frac{h_i}{h_1g_3 - g_1h_3}, \qquad i = 1, 2.$$

Neste caso,

$$W = (g_1'g_3 - g_3'g_1)y_1 + h_1'g_3 - h_3'g_1,$$

e a condição genérica (2.14), $f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} \neq 0$ equivale a $p_z z_1 + p_y y_1 \neq 0$ que é satisfeita. Em resumo, neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= g_1 y_1 + h_1, & f_{12} &= \frac{h_1 p_y - g_1 z_1 p_z}{V}, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= p, \\ f_{31} &= g_3 y_1 + h_3, & f_{32} &= \frac{h_3 p_y - g_3 z_1 p_z}{V}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

onde p é uma função suave de (z, y) tal que, p_z e p_y são não proporcionais, g_i, h_i, são funções suaves de z_1, para $i = 1, 3$ tais que $(g_1' g_3 - g_3' g_1) y_1 + h_1' g_3 - h_3' g_1 \neq 0$ e $V = g_1 h_3 - g_3 h_1 \neq 0$. Substituindo as f_{ij}, dadas acima, na equação (2.62) obtemos o sistema (2.57).

Por último esse sistema é irredutível, se, e somente se,

$$\left(\frac{h_1}{V}\right)_{z_1}^2 + \left(\frac{h_3}{V}\right)_{z_1}^2 + \left(\frac{z_1 g_1}{V}\right)_{z_1}^2 + \left(\frac{z_1 g_3}{V}\right)_{z_1}^2 \neq 0. \tag{2.72}$$

A demonstração é análoga a demonstração de que o sistema (2.18) é irredutível se, e somente se a condição (2.33) é atendida.

Casos II Suponha que $f_{22,z}$ e $f_{22,y}$ sejam linearmente dependentes, isto é, existem constantes reais, a, b, tais que $a^2 + b^2 \neq 0$, cuja combinação linear com $f_{22,z}$ e $f_{22,y}$ se anula em $U^1 \times U^2$. Ou seja, existe uma função real suave ϕ tal que $f_{22} = \phi(\xi)$, com $\xi = az + by$. Pela equação (2.68), temos que

$$\phi'(\xi) a \left(\frac{z_1 f_{i1,y_1}}{d}\right)_{y_1} + \phi'(\xi) b \left(\frac{f_{i1,y_1} y_1 - f_{i1}}{d}\right)_{y_1} = 0, \qquad i = 1, 3. \tag{2.73}$$

a menos de um subconjunto de medida nula em $U^1 \times U^2$.

Afirmamos que $\phi'(\xi) \neq 0$. De fato, caso contrário, se ϕ é constante, a equação (2.67) implica que $f_{12} = f_{32} = 0$, deste modo o sistema dado por (2.62) seria tal que $F_{z_2} = G_{z_2} = 0$, o que é uma contradição com a hipótese do sistema ser irredutível. Assim concluímos que $\phi'(\xi) \neq 0$. Neste caso, pela equação (2.73) temos que

$$\left(\frac{(az_1 + by_1) f_{i1,y_1} - b f_{i1}}{d}\right)_{y_1} = 0, \qquad i = 1, 3.$$

Isso implica que existem duas funções suaves, g_i, $i = 1, 3$, dependendo somente da variável z_1 tais que,

$$\frac{(az_1 + by_1) f_{i1,y_1} - b f_{i1}}{d} = g_i, \qquad i = 1, 3,$$

logo, pela equação (2.67), f_{12} e f_{32} são dados por,

$$f_{i2} = \phi'(\xi) g_i, \qquad i = 1, 3,$$

e f_{11} e f_{31} satisfazem

$$\frac{1}{d}\begin{pmatrix} f_{11,y_1} & -f_{11} \\ f_{31,y_1} & -f_{31} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} az_1+by_1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

Como o determinante desta matriz é igual a $d \neq 0$, podemos inverter essa relação e obter,

$$\begin{pmatrix} az_1+by_1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{31} & f_{11} \\ -f_{31,y_1} & f_{11,y_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

Temos que $g_1^2 + g_3^2 \neq 0$ e $f_{11}g_3 - f_{31}g_1 = az_1 + by_1$. Logo é necessário que $f_{11} = p$ e $f_{31} = q$ para p, q, funções suaves de (z_1, y_1), satisfazendo,

$$W = p_{z_1}q_{y_1} - p_{y_1}q_{z_1} \neq 0,$$
$$d = pq_{y_1} - qp_{y_1} \neq 0,$$
$$pg_3 - qg_1 = az_1 + by_1.$$

Neste caso, a condição (2.14) equivale a,

$$p\phi(\xi) - \eta\phi'(\xi)g_1 \neq 0.$$

Em resumo, neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= p, \quad f_{12} = g_1\phi'(\xi), \\ f_{21} &= \eta, \quad f_{22} = \phi(\xi), \\ f_{31} &= q, \quad f_{32} = g_3\phi'(\xi), \end{aligned} \tag{2.74}$$

onde g_1, g_3 são funções suaves de z_1 tais que, $g_1^2 + g_3^2 \neq 0$, p, q são funções suaves das variáveis (z_1, y_1) tais que $p_{z_1}q_{y_1} - p_{y_1}q_{z_1} \neq 0$, $pq_{y_1} - qp_{y_1} \neq 0$, $pg_2 - qg_1 = az_1 + by_1$, $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes reais tais que $a^2 + b^2 \neq 0$ e ϕ é uma função real suave, aplicada em $\xi = az + by$ tal que $\phi' \neq 0$. Substituindo as funções, f_{ij}, dadas acima na equação (2.62) obtemos a expressão (2.58).

Por último, de modo análogo ao mostrado para o sistema (2.19), temos que o sistema (2.58) é irredutível se, e somente se,

$$(g_1')^2 + (g_3')^2 \neq 0.$$

Para a recíproca, defina as f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, como consideradas em cada caso e verifique diretamente que satisfazem as equações (2.9)-(2.14).

□

Teorema 2.6. *Um sistema $(S_{2,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (2.9)-(2.14), com $f_{21} = \eta \in \mathbb{R}$ e $f_{11}f_{31,y_1} - f_{31}f_{11,y_1} = 0$ se, e somente se,*

Caso I

$$\begin{cases} z_{1,t} = & \dfrac{P}{g}z_2 + \dfrac{h^2-\delta}{gh'}\left(gc - \eta P\right), \\ y_{1,t} = & \dfrac{g}{g_{y_1}}\left(\dfrac{P}{g}\right)_{z_1} z_2 - \dfrac{ghh' + g_{z_1}(h^2-\delta)}{gh'g_{y_1}}\left(gc-\eta P\right) + \dfrac{P_z z_1 + P_y y_1}{g_{y_1}}, \end{cases} \tag{2.75}$$

onde $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$), g é uma função suave das variáveis z_1, y_1, h é uma função suave da variável z_1, tal que $h'g_{y_1} \neq 0$, c é uma constante real e $P(z, z_1, y)$ é uma função suave de (z, z_1, y) tais que $\eta P \neq cg$ e $P_z^2 + P_y^2 \neq 0$.

Neste caso,

$$f_{11} = g, \qquad f_{12} = P,$$
$$f_{21} = \eta, \qquad f_{22} = c,$$
$$f_{31} = hg, \qquad f_{32} = hP.$$

Caso II

$$\begin{cases} z_{1,t} = & \dfrac{1}{W}\left\{g_3(H_z z_1 + H_y y_1 + H_{z_1}z_2) + \right. \\ & \left. -g_1(P_z z_1 + P_y y_1 + P_{z_1}z_2) - \phi(\xi)(cz_1+y_1)(g_3^2 - \delta g_1^2) + \eta(g_3 P - \delta g_1 H)\right\}, \\ y_{1,t} = & \dfrac{(cz_1+y_1)g_1' + cg_1}{W}\left(P_z z_1 + P_{z_1}z_2 + P_y y_1 - \delta g_1(cz_1+y_1)\phi(\xi) + \delta\eta H\right) + \\ & -\dfrac{(cz_1+y_1)g_3' + cg_3}{W}\left(H_z z_1 + H_{z_1}z_2 + H_y y_1 - g_3(cz_1+y_1)\phi(\xi) + \eta P\right). \end{cases} \tag{2.76}$$

onde, $\delta = 1$ (resp. -1), g_1, g_3 são funções suaves de z_1 tais que $g_1'g_3 - g_3'g_1 \neq 0$, ϕ é uma função real suave, não constante, aplicada em $\xi = cz + y$, com $c \in \mathbb{R}$ uma constante real e P é uma função suave de (z, z_1, y) satisfazendo a condição genérica,

$$\left(\left(\frac{g_1}{g_3}P\right)_{z_1} - \delta\left(\frac{1}{g_3}\right)'\phi'(\xi)\right)^2 + (P_{z_1})^2 \neq 0,$$

com $H = \dfrac{g_1}{g_3}P - \delta\dfrac{1}{g_3}\phi'(\xi)$ e $W = (g_1'g_3 - g_3'g_1)(cz_1 + y_1)$.

Neste caso,

$$f_{11} = (y_1 + cz_1)g_1, \qquad f_{12} = H,$$
$$f_{21} = \eta, \qquad f_{22} = \phi(\xi),$$
$$f_{31} = (y_1 + cz_1)g_3, \qquad f_{32} = P.$$

Além disso, nos dois casos, cada sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A,B,$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são definidas pelas respectivas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

Demonstração. A demonstração decorre do Teorema 2.1. Primeiramente, mostraremos que as condições do teorema são necessárias. Suponha que um sistema $(S_{2,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções,

$$f_{ij} : U^1 \times U^2 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

onde U^1 e U^2 são subconjuntos abertos e conexos de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente, parametrizados por coordenadas (z, z_1, z_2) e (y, y_1) respectivamente. Pelo Teorema 2.1, temos que f_{ij} satisfazem as equações (2.9)-(2.14).

Pela equação (2.9) temos que, f_{k1} é uma função de (z_1, y_1) e f_{k2} é uma função de (z, z_1, y), para $k = 1, 2, 3$.

Por hipótese, supomos que $f_{21} = \eta$, com $\eta \in \mathbb{R}$, em $U^1 \times U^2$. Temos que a equação (2.10) é equivalente a,

$$W = f_{11,z_1} f_{31,y_1} - f_{11,y_1} f_{31,z_1} \neq 0 \qquad \text{em } U^1 \times U^2. \tag{2.77}$$

As equações (2.11) e (2.13) são equivalentes a,

$$\begin{pmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{31,z_1} & f_{31,y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{12,z} z_1 + f_{12,z_1} z_2 + f_{12_y} y_1 - f_{31} f_{22} + f_{32} \eta \\ f_{32,z} z_1 + f_{32,z_1} z_2 + f_{32_y} y_1 - \delta f_{11} f_{22} + \delta f_{12} \eta \end{pmatrix}. \tag{2.78}$$

Como $W \neq 0$ é o determinante desta matriz, podemos inverter esta relação para $z_{1,t}$ e $y_{1,t}$, obtendo,

$$\begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} f_{31,y_1} & -f_{11,y_1} \\ -f_{31,z_1} & f_{11,z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{12,z} z_1 + f_{12,z_1} z_2 + f_{12_y} y_1 - f_{31} f_{22} + f_{32} \eta \\ f_{32,z} z_1 + f_{32,z_1} z_2 + f_{32_y} y_1 - \delta f_{11} f_{22} + \delta f_{12} \eta \end{pmatrix}. \tag{2.79}$$

A equação (2.12) equivale a,

$$f_{22,z} z_1 + f_{22,z_1} z_2 + f_{22,y} y_1 - f_{11} f_{32} + f_{12} f_{31} = 0. \tag{2.80}$$

Diferenciando com respeito a z_2 obtemos,

$$f_{22,z_1} = 0, \qquad \text{em } U^1 \times U^2,$$

ou seja, f_{22} é uma função das variáveis z, y. Assim, a equação (2.63) equivale a,

$$f_{22,z} z_1 + f_{22,y} y_1 - f_{11} f_{32} + f_{12} f_{31} = 0. \tag{2.81}$$

Vamos dividir a demonstração em dois casos, dependendo se f_{22} é constante ou não.

Caso I Suponhamos que f_{22} é constante em $U^1 \times U^2$, isto é $f_{22} = c$, para uma constante real c. Assim, a equação (2.81) equivale a,

$$-f_{11}f_{32} + f_{12}f_{31} = 0.$$

Note que como $W \neq 0$, a menos de um subconjunto de medida nula em $U^1 \times U^2$, segue que $f_{11} \neq 0$ neste subconjunto. Deste modo, a última equação equivale a,

$$f_{32} = \frac{f_{31}}{f_{11}} f_{12}.$$

Por hipótese, o quociente entre f_{31} e f_{11} é uma função $h(z_1)$ suave, dependendo somente da variável z_1, deste modo

$$f_{31} = hf_{11} \qquad \text{e} \qquad f_{32} = hf_{12}.$$

Deste modo, $f_{11} = g$, onde g é uma função suave de (z_1, y_1), $f_{31} = hg$, $f_{12} = P$, onde P é uma função suave de (z, z_1, y) e $f_{32} = hP$. É necessário que $g_{y_1} \neq 0$ e $h' \neq 0$, de modo que $W = -gg_{y_1}h' \neq 0$. Além disso a condição (2.14) equivale a $cg - \eta P \neq 0$. Deste modo,

$$\begin{aligned} f_{11} &= g, & f_{12} &= P, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= c, \\ f_{31} &= hg, & f_{32} &= hP. \end{aligned}$$

Com esta notação, as condições (2.10) e (2.14) equivalem a

$$\begin{aligned} &h'g_{y_1} \neq 0, \\ &\eta P \neq c, \end{aligned}$$

respectivamente.

Por último, substituindo $f_{12} = P$, $f_{22} = c$, $f_{32} = hP$, $f_{11} = g$ e $f_{31} = gh$ em (2.79), obtemos o sistema (2.75). Além disso, notamos que este sistema é irredutível se, e somente se, $P_z^2 + P_y^2 \neq 0$. Assim, mostramos que as condições do Caso I são necessárias.

Caso II Suponha que f_{22} não é constante.

Temos por hipótese que $f_{11}f_{31,y_1} - f_{31}f_{11,y_1} = 0$ em $U^1 \times U^2$, ou seja o quociente $\frac{f_{11}}{f_{31}} = \hat{g}$, para $\hat{g}$ uma função suave da variável z_1, logo $f_{11} = \hat{g}l$ e $f_{31} = l$, com l uma função suave das variáveis (z_1, y_1) satisfazendo

$$W = \hat{g}' l l_{y_1} \neq 0. \tag{2.82}$$

A equação (2.81) implica que

$$f_{12} = \hat{g} f_{32} - \frac{1}{l}(f_{22,z}z_1 + f_{22,y}y_1). \tag{2.83}$$

Como $f_{12,y_1} = 0$, devemos ter que,

$$f_{22,z}l_{y_1}z_1 + f_{22,y}(l_{y_1}y_1 - l) = 0. \tag{2.84}$$

Note que $f_{22,y} \neq 0$, a menos de um subconjunto de medida nula, em $U^1 \times U^2$ pois caso contrário, se $f_{22,y} = 0$, a equação acima implicaria que $f_{22,z} = 0$, a menos de um subconjunto de medida nula, em $U^1 \times U^2$, pois $l_{y_1} \neq 0$. Sendo $U^1 \times U^2$ conexo, isso implica que f_{22} é constante, o que é um absurdo. Logo $f_{32,y} \neq 0$, a menos de um subconjunto de medida nula em $U^1 \times U^2$, assim

$$\frac{f_{22,z}}{f_{22,y}}l_{y_1}z_1 + l_{y_1}y_1 - l = 0, \tag{2.85}$$

diferenciando com respeito a z e y obtemos,

$$\left(\frac{f_{22,z}}{f_{22,y}}\right)_z l_{y_1} = \left(\frac{f_{22,z}}{f_{22,y}}\right)_y l_{y_1} = 0,$$

como $l_{y_1} \neq 0$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_{22,z} = cf_{22,y},$$

isso implica que existe uma função real suave ϕ tal que,

$$f_{22} = \phi(\xi),$$

com $\xi = cz + y$ e $\phi'(\xi) \neq 0$. Neste caso, a equação (2.85), implica que

$$l_{y_1}(cz_1 + y_1) - l = 0,$$

ou seja, o quociente entre l e $cz_1 + y_1$ é uma função somente de z_1. Assim, existe uma função $\hat{h}$ suave da variável z_1 tal que,

$$l = \hat{h}(cz_1 + y_1). \tag{2.86}$$

Introduzindo, por conveniência $g_1 = \hat{g}\hat{h}$ e $g_3 = \hat{h}$, funções suaves de z_1 e considerando P, uma função suave das variáveis (z, z_1, y), temos que

$$\begin{aligned} f_{11} &= (y_1 + cz_1)g_1, & f_{12} &= \frac{g_1}{g_3}P - \frac{1}{g_3}\phi'(\xi), \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= \phi(\xi), \\ f_{31} &= (y_1 + cz_1)g_2, & f_{32} &= P, \end{aligned} \tag{2.87}$$

onde, g_1 e g_3 são funções suaves de z_1, ϕ é uma função real suave, aplicada em $\xi = cz_1 + y_1$, tal que $\phi' \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ é uma constante real e P é uma função suave das variáveis (z, z_1, y). Neste caso, $W = (g_1'g_3 - g_3'g_1)(cz_1 + y_1)$, que equivale a,

$$g_1'g_3 - g_3'g_1 \neq 0.$$

A condição (2.14) equivale a

$$g_1(cz_1 + y_1)\phi'(\xi) - \eta\left(\frac{g_1}{g_3}P - \frac{1}{g_3}\phi'(\xi)\right) \neq 0, \tag{2.88}$$

que é automaticamente satisfeita, caso contrário, se e expressão acima fosse nula, o coeficiente de y_1 seria nulo, isso implica que $g_1\phi'(\xi) = 0$, o que é um absurdo. Neste caso o sistema (2.76) é dado por (2.79) em que as f_{ij} satisfazem (2.87).

Finalmente, afirmamos que, neste caso, o sistema (2.76) é irredutível se, e somente se,

$$\left(\left(\frac{g_1}{g_3}P\right)_{z_1} - \delta\left(\frac{1}{g_3}\right)'\phi'(\xi)\right)^2 + (P_{z_1})^2 \neq 0. \tag{2.89}$$

Primeiramente vamos mostrar que a condição de irredutibilidade, $F_z^2 + F_y^2 + G_z^2 + G_y^2 \neq 0$ é automaticamente satisfeita. De fato, mostraremos que uma condição mais forte é atendida, $F_y^2 + G_y^2 \neq 0$. Suponha, por contradição, que $F_y = G_y = 0$. Diferenciando a equação (2.78) com respeito a y e z_2, obtemos que

$$f_{12,z_1y} = f_{32,z_1y} = 0.$$

Deste modo, diferenciando a primeira linha da equação (2.78) com respeito a y e y_1, e a segunda linha com respeito a y e z_1, temos

$$f_{31,z_1y_1}f_{22,y} = 0,$$
$$f_{11,y_1z_1}f_{22,y} = 0,$$

respectivamente. Como $f_{22,y} = \phi'(\xi) \neq 0$, $f_{31,z_1y_1} = g_3'$ e $f_{11,y_1z_1} = g_1'$, segue que $g_1' = g_3' = 0$, consequentemente $W = 0$, um absurdo. Donde concluímos que a condição $F_z^2+F_y^2+G_z^2+G_y^2 \neq 0$ é satisfeita.

Note que a condição (2.89) é necessária. De fato, se g_3 é uma constante e $P = 0$ temos uma escolha não trivial, tal que a condição (2.89) não se verifica e $F_{z_2} = G_{z_2} = 0$ para o sistema (2.76). Assim essa condição é, de fato, necessária.

Para mostrar que esta condição é suficiente, note que, pela equação (2.78), a fim de que $F_{z_2}^2 + G_{z_2}^2 \neq 0$ é suficiente que $(f_{12,z_1})^2 + (f_{32,z_1})^2 \neq 0$, que por sua vez, é equivalente a condição (2.89).

Assim demonstramos que as condições são, de fato, necessárias.

Para a recíproca, defina as f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, como consideradas em cada caso e verifique diretamente que satisfazem as equações (2.9)-(2.14). $\square$

Segue imediatamente dos Teoremas 2.5 e 2.6 a classificação completa dos sistemas ($S_{2,1}$) irredutíveis que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com $f_{21} = \eta$.

Teorema 2.7. *Um sistema ($S_{2,1}$) irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas), com $f_{21} = \eta \in \mathbb{R}$, se, e somente se, ($S_{2,1}$) é do tipo (2.57), (2.58), (2.75) ou (2.76).*

2.2.3 Com a condição $f_{11} = \eta$

Nesta subseção, daremos uma classificação dos sistemas do tipo ($S_{2,1}$) irredutíveis que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, com a condição adicional que $f_{11} = \eta$ é uma constante real.

Conforme observado na introdução, os sistemas de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com a hipótese $f_{11} = \eta$ são exatamente os mesmos sistemas para o caso $f_{21} = \eta$, bastando considerar a transformação (0.14). Deste modo, a classificação dos sistemas do tipo $S_{2,1}$ com $f_{11} = \eta$ pode ser obtida através da classificação dos sistemas do tipo ($S_{2,1}$) com f_{21}. Em geral, apesar das equações diferenciais serem as mesmas, observamos que os problemas lineares associados podem ser diferentes.

Analogamente aos Teoremas 2.5 e 2.6, consideraremos duas situações, dependendo do quociente entre f_{21} e f_{31} depender, ou não, da variável y_1.

Teorema 2.8. *Um sistema ($S_{2,1}$) irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (2.9)-(2.14), com $f_{11} = \eta \in \mathbb{R}$ e $f_{31}f_{21,y_1} - f_{21}f_{31,y_1} \neq 0$ se, e somente se,*

Caso I

$$\begin{cases} z_{1,t} = & \dfrac{1}{W}\{(g_3H_{2,z_1} - g_2H_{3,z_1})z_2 - p[y_1(g_3^2 - \delta g_2^2) + h_3g_3 - \delta h_2g_2]+ \\ & +g_3(H_{2,z}z_1 + H_{2,y}y_1) - g_2(H_{3,z}z_1 + H_{3,y}y_1) + \eta\,(g_3H_3 - \delta g_2H_2)\}\,, \\ y_{1,t} = & \dfrac{1}{W}\{[(g_2'H_{3,z_1} - g_3'H_{2,z_1})y_1 + (h_2'H_{3,z_1} - g_3'H_{2,z_1})]\,z_2+ \\ & -(g_3'y_1 + h_3')(H_{2,z}z_1 + H_{2,y}y_1 + \eta H_3 - (g_3y_1 + h_3)p)+ \\ & +(g_2'y_1 + h_2')(H_{3,z}z_1 + H_{3,y}y_1 + \delta\eta H_2 - \delta(g_2y_1 + h_2)p)\}\,, \end{cases} \tag{2.90}$$

onde g_i, h_i, $i = 2, 3$, são funções suaves de z_1 satisfazendo

$$V := g_2h_3 - g_3h_2 \neq 0, \qquad W := (g_2'g_3 - g_3'g_2)y_1 + h_2'g_3 - h_3'g_2 \neq 0,$$

$$\left(\frac{h_2}{V}\right)^2_{z_1} + \left(\frac{h_3}{V}\right)^2_{z_1} + \left(\frac{z_1g_2}{V}\right)^2_{z_1} + \left(\frac{z_1g_3}{V}\right)^2_{z_1} \neq 0,$$

e $p(z,y)$ é uma função suave das variáveis (z,y) tal que p_z e p_y são linearmente independentes, e

$$H_i = \frac{h_i p_y - g_i z_1 p_z}{V}, \qquad i = 2,3,$$

com $\delta = 1$ (resp. -1). Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta, & f_{12} &= p, \\ f_{21} &= g_2 y_1 + h_2 \eta, & f_{22} &= \frac{h_2 p_y - g_2 z_1 p_z}{V}, \\ f_{31} &= -g_3 y_1 - h_3, & f_{32} &= -\frac{h_3 p_y - g_3 z_1 p_z}{V}. \end{aligned}$$

Caso II

$$\left\{ \begin{aligned} z_{1,t} = \; & \frac{1}{W} \{ \phi'(\xi)(g_2' q_{y_1} - g_3' p_{y_1}) z_2 - b(az_1 + by_1)\phi''(\xi) + \\ & +(g_2 q_{y_1} - \delta g_2 p_{y_1})\eta\phi'(\xi) - (q q_{y_1} - \delta p p_{y_1})\phi(\xi) \}, \\ y_{1,t} = \; & \frac{1}{W} \{ \phi'(\xi)(g_3' p_{z_1} - g_2' q_{z_1}) z_2 + (az_1 + by_1)(g_3 p_{z_1} - g_2 q_{z_1})\phi''(\xi) + \\ & -(g_3 q_{z_1} - \delta g_2 p_{z_1})\eta\phi'(\xi) + (q q_{z_1} - \delta p p_{z_1})\phi(\xi) \}, \end{aligned} \right. \tag{2.91}$$

onde, $\delta = 1$ (resp. -1), g_2, g_3 são funções suaves de z_1 tais que $(g_2')^2 + (g_3')^2 \neq 0$, p e q são funções suaves de (z_1, y_1) tais que

$$pg_3 - qg_2 = az_1 + by_1,$$

$$pq_{y_1} - qp_{y_1} \neq 0, \qquad W = p_{z_1} q_{y_1} - p_{y_1} q_{z_1} \neq 0,$$

e ϕ é uma função real suave não constante, aplicada em $\xi = az + by$, em que a, b são constantes reais tais que $a^2 + b^2 \neq 0$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta, & f_{12} &= \phi(\xi), \\ f_{21} &= p, & f_{22} &= g_2 \phi'(\xi), \\ f_{31} &= -q, & f_{32} &= -g_3 \phi'(\xi). \end{aligned}$$

Além disso, nos dois casos, cada sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A,B,$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são definidas pelas respectivas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

Teorema 2.9. *Um sistema $(S_{2,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (2.9)-(2.14), com $f_{11} = \eta \in \mathbb{R}$ e $f_{31} f_{21,y_1} - f_{21} f_{31,y_1} = 0$ se, e somente se,* *Caso I*

$$\begin{cases} z_{1,t} = & \dfrac{P}{g} z_2 + \dfrac{h^2-\delta}{gh'}\left(gc - \eta P\right), \\ y_{1,t} = & -\left(\dfrac{g_{z_1}P - gP_{z_1}}{gg_{y_1}}\right) z_2 - \dfrac{ghh' + g_{z_1}(h^2-\delta)}{gh'g_{y_1}}\left(gc-\eta P\right) + \dfrac{P_z z_1 + P_y y_1}{g_{y_1}}, \end{cases} \tag{2.92}$$

onde $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$), g é uma função suave das variáveis z_1, y_1, h é uma função suave da variável z_1, tal que $h'g_{y_1} \neq 0$, c é uma constante real e $P(z, z_1, y)$ é uma função suave de (z, z_1, y) tais que $\eta P \neq cg$ e $P_z^2 + P_y^2 \neq 0$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta, & f_{12} &= c, \\ f_{21} &= g, & f_{22} &= P, \\ f_{31} &= -hg, & f_{32} &= -hP. \end{aligned}$$

Caso II

$$\begin{cases} z_{1,t} = & \dfrac{1}{W}\{g_3(H_z z_1 + H_y y_1 + H_{z_1} z_2) + \\ & -g_2(P_z z_1 + P_y y_1 + P_{z_1} z_2) - \phi(\xi)(cz_1+y_1)(g_3^2 - \delta g_2^2) + \eta(g_3 P - \delta g_2 H)\}, \\ y_{1,t} = & \dfrac{(cz_1+y_1)g_2' + cg_2}{W}(P_z z_1 + P_{z_1} z_2 + P_y y_1 - \delta g_2(cz_1+y_1)\phi(\xi) + \delta\eta H) + \\ & -\dfrac{(cz_1+y_1)g_3' + cg_3}{W}(H_z z_1 + H_{z_1} z_2 + H_y y_1 - g_3(cz_1+y_1)\phi(\xi) + \eta P). \end{cases} \tag{2.93}$$

onde, $\delta = 1$ (resp. -1), g_2, g_3 são funções suaves de z_1 tais que $g_2'g_3 - g_3'g_2 \neq 0$, ϕ é uma função real suave, não constante, aplicada em $\xi = cz + y$, com $c \in \mathbb{R}$ uma constante real e P é uma função suave de (z, z_1, y) satisfazendo a condição genérica,

$$\left(\left(\frac{g_2}{g_3}P\right)_{z_1} - \delta\left(\frac{1}{g_3}\right)'\phi'(\xi)\right)^2 + (P_{z_1})^2 \neq 0,$$

com $H = \dfrac{g_2}{g_3}P - \delta\dfrac{1}{g_3}\phi'(\xi)$ e $W = (g_2'g_3 - g_2'g_3)(cz_1 + y_1)$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta, & f_{12} &= \phi(\xi), \\ f_{21} &= (y_1 + cz_1)g_2, & f_{22} &= H, \\ f_{31} &= -(y_1 + cz_1)g_3, & f_{32} &= -P. \end{aligned}$$

Segue imediatamente dos Teoremas 2.8 e 2.9 a classificação completa dos sistemas $(S_{2,1})$ irredutíveis que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com $f_{11} = \eta$.

Teorema 2.10. *Um sistema $(S_{2,1})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas), com $f_{11} = \eta \in \mathbb{R}$, se, e somente se, $(S_{2,1})$ é do tipo (2.90), (2.91), (2.92) ou (2.93).*

2.3 Aplicação: Nova família de sistemas $(S_{2,1})$ que descrevem simultaneamente superfícies pseudo-esféricas e esféricas.

Nesta seção aplicaremos o resultado de classificação dado no Teorema 2.6 para obter uma família, um parâmetro e cinco funções arbitrárias, de sistemas do tipo $(S_{2,1})$ descrevendo simultaneamente superfícies pseudo-esféricas e esféricas, com a propriedade de serem condição de integrabilidade de várias famílias a um parâmetro de problemas lineares. Além disso, novos exemplos serão apresentados.

Proposição 2.3. *O sistema descreve simultaneamente superfícies pseudo-esféricas e esféricas,*

$$\begin{cases} u_{xt} = \dfrac{1}{r}\left(s_3 p u_{xx} - \dfrac{1}{s_1'}(rk - ps_3)\right), \\ v_{xt} = \dfrac{1}{r'}\left((s_3 p)_x + \dfrac{s_2'}{s_2 s_1'}(rk - ps_3)\right), \end{cases} \tag{2.94}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ uma constante e $s_1(u_x), s_2(u_x), s_3(u_x), r(v_x), p(u,v)$ cinco funções suaves tais que, $s_1' r' s_2 s_3 \neq 0$, $ps_3 \neq kr$, $p_u^2 + p_v^2 \neq 0$. Neste caso as funções f_{ij} associadas são dadas por,

$$\begin{aligned} f_{11} &= rs_2 C_{-\delta}(\eta s_1), & f_{12} &= ps_2 s_3 C_{-\delta}(\eta s_1), \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= \eta k, \\ f_{31} &= \delta r s_2 S_{-\delta}(\eta s_1), & f_{32} &= \delta p s_2 s_3 S_{-\delta}(\eta s_1), \end{aligned}$$

onde $\delta = 1$ para superfícies pseudo-esféricas, e $\delta = -1$ para superfícies esféricas, $\eta \neq 0$ é um parâmetro real não nulo e $C_{-\delta}, S_{-\delta}$ denotando coseno e seno hiperbólicos ou trigonométricos conforme a notação (1.59).

Demonstração. É uma consequência do Caso I do Teorema 2.6. Com a notação adotada, consideramos $u = z, u_x = z_1, u_{xx} = z_2, v = y, v_x = y_1$. Por hipótese, considere $k \in \mathbb{R}$ uma constante $s_1(z_1), s_2(z_1), s_3(z_1)$, funções suaves de z_1, $r(y_1)$ função suave de y_1 e $p(z,y)$ função suave de (z,y) tais que $s_1' r' s_2 s_3 \neq 0$, $p_z^2 + p_y^2 \neq 0$ e $\eta \neq 0$ um parâmetro real não nulo.

Seguindo a notação do Teorema 2.6, Caso I, considere,

- $g = rs_2 C_{-\delta}(\eta s_1)$,
- $h = \delta \dfrac{S_{-\delta}(\eta s_1)}{C_{-\delta}(\eta s_1)}$,
- $c = k\eta$,
- $P = ps_2 s_3 C_{-\delta}(\eta s_1)$.

Note que as condições do Teorema 2.6, Caso I, para estas escolhas são satisfeitas. De fato,

$$\begin{aligned}
&h'g_{y_1} = \frac{\eta}{\delta C_{-\delta}(\eta\delta s_1)} s_1' r' s_2 \neq 0,\\
&\eta P \neq cg \quad \text{se, e somente se, } ps_3 \neq rk,\\
&P_z^2 + P_y^2 \neq 0 \quad \text{se, e somente se, } s_2^2 s_3^2 C_{-\delta}^2(\eta s_1)(p_z^2 + p_y^2) \neq 0.
\end{aligned}$$

Finalmente vamos mostrar que, com estas escolhas, o sistema dado na equação (2.75) se reduz ao sistema dado na equação (2.94). De fato, note que,

$$\begin{aligned}
&\frac{P}{g} z_2 = \frac{s_3}{r} p u_{xx},\\
&\frac{h^2-\delta}{gh'}(gc - \eta P) = -\frac{1}{rs_1'}(rk - ps_3),\\
&-\frac{g_{z_1}P - gP_{z_1}}{gg_{y_1}} = \frac{s_3'}{r'} p,\\
&-\frac{ghh' + g_{z_1}(h^2-\delta)}{gh'g_{y_1}}(gc - \eta P) = \frac{s_2'}{s_2 s_1' r'}(rk - ps_3),\\
&\frac{P_z z_1 + P_y y_1}{g_{y_1}} = \frac{s_3}{r'}(p_z z_1 + p_y y_1).
\end{aligned}$$

Substituindo as relações acima no sistema (2.75) obtemos o sistema (2.94). □

Observação 2.2. O sistema (2.94) é equivalente a condição de integrabilidade (0.7), das famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

com $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$, onde A, B pode ser dado por,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta & rs_2 e^{-\eta s_1} \\ rbe^{\eta s_1} & -\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k\eta & ps_2 s_3 e^{-\eta s_1} \\ ps_2 s_3 e^{\eta s_1} & -k\eta \end{pmatrix},$$

ou,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\eta & rs_2 e^{-i\eta s_1} \\ -rs_2 e^{i\eta s_1} & -i\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ik\eta & ps_2 s_3 e^{-i\eta s_1} \\ -ps_2 s_3 e^{i\eta s_1} & -ik\eta \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, o sistema (2.94) é equivalente a condição de integrabilidade (0.12), da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & rs_2 C_{-\delta}(\eta s_1) & \eta \\ \delta rs_2 C_{-\delta}(\eta s_1) & 0 & \delta rs_2 S_{-\delta}(\eta s_1) \\ \delta\eta & -\delta rs_2 S_{-\delta}(\eta s_1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & ps_2s_3C_{-\delta}(\eta s_1) & \eta k \\ \delta ps_2s_3C_{-\delta}(\eta s_1) & 0 & \delta ps_2s_3S_{-\delta}(\eta s_1) \\ \delta\eta k & -\delta ps_2s_3S_{-\delta}(\eta s_1) & 0 \end{pmatrix},$$

com $\delta = \pm 1$.

O seguinte corolário é uma consequência da Proposição (2.3) e apresenta uma família a uma função arbitrária de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas,

Corolário 2.2. *Sejam α, β constantes reais tais que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\phi(v)$ uma função suave, não constante. Então o sistema abaixo,*

$$\begin{cases} u_{xt} = \dfrac{\phi(v)}{v_x^2+1}(\alpha u_x + \beta)(u_x + u)_x, \\ v_{xt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\phi(v)}{v_x}\alpha u_{xx} + \dfrac{1}{2}\phi'(v)(\alpha u_x + \beta), \end{cases} \tag{2.95}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, para funções f_{ij} associadas,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{v_x^2+1}{2}\left(u_x^\eta + \frac{1}{u_x^\eta}\right), & f_{12} &= (\alpha u_x + \beta)\frac{\phi(v)}{2}\left(u_x^\eta + \frac{1}{u_x^\eta}\right), \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= 0, \\ f_{31} &= \frac{v_x^2+1}{2}\left(u_x^\eta - \frac{1}{u_x^\eta}\right), & f_{32} &= (\alpha u_x + \beta)\frac{\phi(v)}{2}\left(u_x^\eta - \frac{1}{u_x^\eta}\right), \end{aligned} \tag{2.96}$$

onde $\eta \neq 0$. E também descreve superfícies esféricas para funções f_{ij} associadas,

$$\begin{aligned} f_{11} &= (v_x^2+1)\cos(\eta \ln u_x), & f_{12} &= (\alpha u_x + \beta)\phi(v)\cos(\eta \ln u_x), \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= 0, \\ f_{31} &= -(v_x^2+1)\,\mathrm{sen}(\eta \ln u_x), & f_{32} &= -(\alpha u_x + \beta)\phi(v)\,\mathrm{sen}(\eta \ln u_x), \end{aligned} \tag{2.97}$$

com $\eta \neq 0$.

Demonstração. É uma consequência da Proposição 2.3.

De fato, seguindo a notação da Proposição 2.3, considere, $r = v_x^2 + 1$, $p(u, v) = \phi(v)$, $s_1 = \ln u_x$, $s_2 = 1$, $s_3 = \alpha u_x + \beta$ e $k = 0$. Note que as condições,

$$\begin{aligned} s_1' r' s_2 s_3 &= \frac{2v_x}{u_x}(\alpha u_x + \beta) \neq 0, \\ ps_3 - kr &= \phi(v)(\alpha u_x + \beta) \neq 0, \\ p_u^2 + p_v^2 &= \phi'(v) \neq 0, \end{aligned}$$

são atendidas pela hipótese de ϕ não ser constante e $\alpha u_x + \beta \neq 0$. $\square$

Observação 2.3. *O sistema (2.95) é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares,*

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta & (v_x^2+1)u_x^{-\eta} \\ (v_x^2+1)u_x^{\eta} & -\eta \end{pmatrix}, \qquad B = (\alpha u_x + \beta)\frac{\phi(v)}{2}\begin{pmatrix} 0 & u_x^{-\eta} \\ u_x^{\eta} & 0 \end{pmatrix},$$

ou

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\eta & (v_x^2+1)e^{-i\eta\ln u_x} \\ (v_x^2+1)e^{-i\eta\ln u_x} & -i\eta \end{pmatrix}, \qquad B = (\alpha u_x + \beta)\frac{\phi(v)}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\eta\ln u_x} \\ e^{-i\eta\ln u_x} & 0 \end{pmatrix},$$

Alternativamente, o sistema (2.95) é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_x^2+1}{2}\left(u_x^{\eta} + \frac{1}{u_x^{\eta}}\right) & \eta \\ \frac{v_x^2+1}{2}\left(u_x^{\eta} + \frac{1}{u_x^{\eta}}\right) & 0 & \frac{v_x^2+1}{2}\left(u_x^{\eta} - \frac{1}{u_x^{\eta}}\right) \\ \eta & -\frac{v_x^2+1}{2}\left(u_x^{\eta} - \frac{1}{u_x^{\eta}}\right) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = (\alpha u_x + \beta)\frac{\phi(v)}{2}\begin{pmatrix} 0 & u_x^{\eta} + \frac{1}{u_x^{\eta}} & 0 \\ u_x^{\eta} + \frac{1}{u_x^{\eta}} & 0 & u_x^{\eta} - \frac{1}{u_x^{\eta}} \\ 0 & -u_x^{\eta} + \frac{1}{u_x^{\eta}} & 0 \end{pmatrix},$$

ou,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & (v_x^2+1)\cos(\eta\ln u_x) & \eta \\ -(v_x^2+1)\cos(\eta\ln u_x) & 0 & -(v_x^2+1)\,\mathrm{sen}(\eta\ln u_x) \\ -\eta & (v_x^2+1)\,\mathrm{sen}(\eta\ln u_x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = (\alpha u_x + \beta)\phi(v)\begin{pmatrix} 0 & \cos(\eta\ln u_x) & 0 \\ -\cos(\eta\ln u_x) & 0 & -\,\mathrm{sen}(\eta\ln u_x) \\ 0 & \mathrm{sen}(\eta\ln u_x) & 0 \end{pmatrix}.$$

O próximo exemplo é um sistema descrevendo simultaneamente superfícies pseudo-esféricas e esféricas contida na família a um parâmetro e cinco funções arbitrárias dada na Proposição (2.3).

Exemplo 2.1. O sistema

$$\begin{cases} u_{xt} = (uv)(u_{xx} + v)v_x^{-1}, \\ v_{xt} = (uv)_x, \end{cases} \tag{2.98}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas com,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{v_x}{2}\left(u_x^\eta + \frac{1}{u_x^\eta}\right), & f_{12} &= \frac{uv}{2}\left(u_x^\eta + \frac{1}{u_x^\eta}\right), \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= 0, \\ f_{31} &= \frac{v_x}{2}\left(u_x^\eta - \frac{1}{u_x^\eta}\right), & f_{32} &= \frac{uv}{2}\left(u_x^\eta - \frac{1}{u_x^\eta}\right), \end{aligned}$$

e também descreve superfícies esféricas com,

$$\begin{aligned} f_{11} &= v_x \cos(\eta \ln u_x), & f_{12} &= uv \cos(\eta \ln u_x), \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= 0, \\ f_{31} &= -v_x \operatorname{sen}(\eta \ln u_x), & f_{32} &= -uv \operatorname{sen}(\eta \ln u_x), \end{aligned}$$

onde $\eta \neq 0$.

De fato, segundo a Proposição 2.3, considere $\delta = 1$, $k = 0$, $s_1 = \ln u_x$, $s_2 = s_3 = 1$ constantes iguais a 1, $r = v_x$ e $p = uv$. Note que para estas escolhas as hipóteses da Proposição 2.3 são atendidas,

$$\begin{aligned} & s_1' r' s_2 s_3 = \frac{1}{u_x} \neq 0, \\ & p s_3 - k r = uv \neq 0, \\ & p_u^2 + p_v^2 = v^2 + u^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Além disso, o sistema (2.98) é condição de integrabilidade da família a um parâmetro a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta & v_x u_x^{-\eta} \\ v_x u_x^\eta & -\eta \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{uv}{2}\begin{pmatrix} 0 & u_x^{-\eta} \\ u_x^\eta & 0 \end{pmatrix}.$$

ou,

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\eta & v_x e^{-i\eta\ln u_x}\\ -v_x e^{i\eta\ln u_x} & -i\eta\end{pmatrix},\qquad B=\frac{uv}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\eta\ln u_x}\\ e^{i\eta\ln u_x} & 0\end{pmatrix}.$$

Alternativamente, o sistema (2.98) é equivalente a condição de integrabilidade (0.12), da família a um parâmetro, $\eta\neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi}=\hat{A}\hat{\Psi},\qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}=\hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi}=(\hat{\Psi}_1,\hat{\Psi}_2,\hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{v_x}{2}\left(u_x^\eta+\frac{1}{u_x^\eta}\right) & \eta\\ \frac{v_x}{2}\left(u_x^\eta+\frac{1}{u_x^\eta}\right) & 0 & \frac{v_x}{2}\left(u_x^\eta-\frac{1}{u_x^\eta}\right)\\ \eta & -\frac{v_x}{2}\left(u_x^\eta-\frac{1}{u_x^\eta}\right) & 0\end{pmatrix},$$

$$\hat{B}=\frac{uv}{2}\begin{pmatrix} 0 & u_x^\eta+\frac{1}{u_x^\eta} & 0\\ u_x^\eta+\frac{1}{u_x^\eta} & 0 & u_x^\eta-\frac{1}{u_x^\eta}\\ 0 & -u_x^\eta+\frac{1}{u_x^\eta} & 0\end{pmatrix},$$

ou,

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} 0 & v_x\cos(\eta\ln u_x) & \eta\\ -v_x\cos(\eta\ln u_x) & 0 & -v_x\,\mathrm{sen}(\eta\ln u_x)\\ -\eta & v_x\,\mathrm{sen}(\eta\ln u_x) & 0\end{pmatrix},$$

$$\hat{B}=uv\begin{pmatrix} 0 & \cos(\eta\ln u_x) & 0\\ -\cos(\eta\ln u_x) & 0 & -\mathrm{sen}(\eta\ln u_x)\\ 0 & \mathrm{sen}(\eta\ln u_x) & 0\end{pmatrix}.$$

Capítulo 3

Sistemas do tipo $(S_{n,m})$, com $n, m \geq 2$, que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Neste capítulo, consideraremos sistemas de equações diferenciais para duas funções reais u, v definidas sobre um aberto de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, t), do tipo,

$$(S_{n,m}) \begin{cases} u_{xt} = F(u, u_x, ..., u_{x^n}, v, v_x, ..., v_{x^m}), \\ v_{xt} = G(u, u_x, ..., u_{x^n}, v, v_x, ..., v_{x^m}), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde F e G são funções suaves que dependem de u e v e suas derivadas com respeito a x até a ordem n e m, respectivamente, em que $n, m \in \mathbb{N}$ com $n, m \geq 2$. Os sistemas com $n = m = 1$ o foram considerados no Capítulo 1 e os sistemas com $n = 2, m = 1$ ou $n = 1, m = 2$ foram considerados no Capítulo 2.

Estaremos interessados em estudar sistemas do tipo $(S_{1,1})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas para funções associadas que f_{ij} dependendo das variáveis dependentes u, v e suas derivadas do mesmo modo que F e G, isto é, vamos considerar

$$f_{ij}(u, u_x, ..., u_{x^n}, v, v_x, ..., v_{x^m}), \qquad 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3.$$

Adotaremos a seguinte notação, sejam $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u &= z_0, \qquad \frac{\partial^i u}{\partial x^i} = z_i, \qquad i = 1, ..., n, \\ v &= y_0, \qquad \frac{\partial^j v}{\partial x^j} = y_j, \qquad j = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Em alguns casos, omitiremos o índice 0 e denotaremos $z_0 = z$ e $y_0 = y$. Com esta notação o sistema $(S_{n,m})$ é escrito como,

$$\begin{cases} z_{1,t} = F(z_0, z_1, ..., z_n, y_0, y_1, ..., y_m), \\ y_{1,t} = G(z_0, z_1, ..., z_n, y_0, y_1, ..., y_m). \end{cases} \tag{3.3}$$

Este capítulo é organizado da seguinte forma. Na Seção 3.1 daremos condições necessárias e suficientes para que um sistema do tipo $(S_{n,m})$, $n, m \geq 2$, descreva superfícies pseudo-esféricas ou esféricas. Em seguida, na Seção 3.2, apresentaremos uma classificação completa destes sistemas com a hipótese adicional de que pelo menos uma das funções f_{11}, f_{12} ou f_{31} é uma constante $\eta \in \mathbb{R}$. Como consequência desta classificação apresentaremos, na Seção 3.3, novas classes de tais sistemas do tipo $(S_{2,2})$. Cada sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro de problemas lineares.

3.1 Caracterização dos sistemas do tipo $(S_{n,m})$, com $n, m \geq 2$.

Esta seção será divida em três partes. Na primeira subseção usaremos a teoria de Cartan-Kähler para descrever os sistemas do tipo $(S_{n,m})$, $n, m \geq 2$, em termos de um sistema de diferenciais exteriores. Em seguida na Subseção 3.1.2 discutiremos a interpretação geométrica de sistemas $(S_{n,m})$, $n, m \geq 2$, que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas. Por último na Subseção 3.1.3 apresentaremos, no Teorema 3.1, uma caracterização dos sistemas $(S_{n,m})$, $n, m \geq 2$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

3.1.1 Abordagem por sistemas de diferenciais exteriores.

Nesta subseção vamos interpretar o sistema $(S_{n,m})$, $n, m \geq 2$ como um sistema de diferenciais exteriores.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, t) e $\mathcal{M}^{4+n+m} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$ um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^{4+n+m}$ com $n, m \geq 2$. Consideraremos $\mathcal{M}^{4+n+m}$ como sendo uma variedade diferenciável $(4 + n + m)$-dimensional com coordenadas $(x, t) \times (z_0, ..., z_n) \times (y_0, ..., y_m)$. Deste modo, para um sistema (3.3), as funções F, G podem ser vistas como funções reais suaves, sobre a variedade $\mathcal{M}^{4+n+m}$, que são constantes com respeito às variáveis (x, t).

Dadas duas funções suaves, u, v em U,

$$u, v : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

fica definida uma superfície em $\mathcal{M}^{4+n+m}$ por,

$$\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}^{4+n+m},$$
$$\Phi(x,t) \mapsto (x, t, u(x,t), u_x(x,t), ..., u_{x^n}(x,t), v(x,t), v_x(x,t), ..., v_{x^m}(x,t)). \tag{3.4}$$

Veremos na Proposição 3.1 como esta aplicação é usada para justificar a notação (3.2) e como, a partir dela, relacionar um sistema $(S_{n,m})$, $n, m \geq 2$, com um sistema de diferenciais exteriores.

Proposição 3.1. *Seja $\mathcal{I}$ o ideal em $\mathcal{M}^{4+n+m}$, com $n, m \geq 2$, gerado pelas formas,*

$$\begin{aligned}
&\Pi_i = dz_i \wedge dt - z_{i+1} dx \wedge dt, \qquad 0 \leq i \leq n-1,\\
&\Lambda_j = dy_j \wedge dt - y_{j+1} dx \wedge dt, \qquad 0 \leq j \leq m-1,\\
&\Pi_n = dz_n \wedge dx \wedge dt, \quad \Pi = dz_1 \wedge dx + F dx \wedge dt,\\
&\Lambda_m = dy_m \wedge dx \wedge dt, \quad \Lambda = dy_1 \wedge dx + G dx \wedge dt.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Então, $\mathcal{I}$ é fechado por diferenciação exterior, ou seja $d\mathcal{I} \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}}$. Além disso,

A) Se o par de funções suaves $u, v : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma solução do sistema $(S_{n,m})$, então a aplicação Φ, definida por (3.4) é uma superfície integral do ideal $\mathcal{I}$.

B) Reciprocamente, dada uma superfície integral do ideal $\mathcal{I}$, $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}^{4+n+m}$, com V um aberto de $\mathbb{R}^2$ e Ψ_x e Ψ_t linearmente independentes, então, localmente, as funções projeções de $\Psi(V) \subset \mathcal{M}^{4+n+m}$ sobre $(x,t) \times (z)$ e $(x,t) \times (y)$ formam gráficos de uma solução de $(S_{n,m})$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que o ideal $\mathcal{I}$ é fechado por diferenciação exterior.

Mostraremos que $d\Pi_i \in \mathcal{I}$, para $i = 0, ..., n$. Seja $0 \leq i \leq n-2$,

$$d\Pi_i = -dz_{i+1} \wedge dx \wedge dt = dz_{i+1} \wedge dt \wedge dx = (\Pi_{i+1} + z_{i+2} dx \wedge dt) \wedge dx = \Pi_{i+1} \wedge dx.$$

Para $i = n-1$,

$$d\Pi_{n-1} = -dz_n \wedge dx \wedge dt = -\Pi_n.$$

Considerando $i = n$,

$$d\Pi_n = d(dz_n \wedge dx \wedge dt) = 0.$$

Analogamente, mostramos que $d\Lambda_j \in \mathcal{I}$, para $j = 0, ..., m$. Seja $0 \leq j \leq m-2$,

$$d\Lambda_j = -dy_{j+1} \wedge dx \wedge dt = dy_{i+1} \wedge dt \wedge dx = (\Lambda_{j+1} + y_{j+2} dx \wedge dt) \wedge dx = \Lambda_{j+1} \wedge dx.$$

Se $j = m-1$,

$$d\Lambda_{m-1} = -dy_m \wedge dx \wedge dt = -\Lambda_m.$$

Com $j = m$,

$$d\Lambda_m = d(dy_m \wedge dx \wedge dt) = 0.$$

Por último mostraremos que $d\Pi, d\Lambda \in \mathcal{I}$.

$$\begin{aligned}
d\Pi &= dF \wedge dx \wedge dt, \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} F_{z_i} dz_i + \sum_{j=0}^{m} F_{y_j} dy_j \right) \wedge dx \wedge dt, \\
&= F_{z_n} dz_n \wedge dx \wedge dt + \sum_{i=0}^{n-1} F_{z_i} dz_i \wedge dx \wedge dt + \\
&\quad + F_{y_m} dy_m \wedge dx \wedge dt + \sum_{j=0}^{m-1} F_{y_j} dy_j \wedge dx \wedge dt, \\
&= F_{z_n} \Pi_n + \sum_{i=0}^{n-1} -F_{z_i} \left(\Pi_i + z_{i+1} dx \wedge dt \right) \wedge dx + \\
&\quad + F_{y_m} \Lambda_m + \sum_{j=0}^{m-1} -F_{y_j} \left(\Lambda_j + y_{j+1} dx \wedge dt \right) \wedge dx \\
&= F_{z_n} \Pi_n - \sum_{i=0}^{n-1} F_{z_i} \Pi_i \wedge dx + F_{y_m} \Lambda_m - \sum_{j=0}^{m-1} F_{y_j} \Lambda_j.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$d\Lambda = G_{z_n} \Pi_n - \sum_{i=0}^{n-1} G_{z_i} \Pi_i \wedge dx + G_{y_m} \Lambda_m - \sum_{j=0}^{m-1} G_{y_j} \Lambda_j.$$

Deste modo, $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$, ou seja, o ideal $\mathcal{I}$ é fechado por diferenciação exterior, o que prova a primeira parte da proposição.

A demonstração da equivalência entre A) e B) é análoga a demonstração da Proposição 1.1. $\square$

3.1.2 Interpretação geométrica e exemplos.

Nesta subseção discutiremos a interpretação geométrica de sistemas $(S_{n,m})$, com $n, m \geq 2$, que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas e apresentaremos dois exemplos de sistemas do tipo ($S_{2,2}$), que descrevem superfícies esféricas e pseudo-esféricas.

A seguinte definição é análoga a Definição 1.2 apresentada na Subseção 1.1.3.

Definição 3.1. Dizemos que o sistema ($S_{n,m}$), com $n, m \geq 2$, descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. superfícies esféricas) se, existem seis funções reais suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$ em $\mathcal{M}^{4+n+m}$ tais que o ideal $\mathcal{J}$ em $\mathcal{M}^{4+n+m}$, gerado pelas formas

$$\Omega_1 = d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2, \quad \Omega_2 = d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3, \quad \Omega_3 = d\omega_3 - \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{3.6}$$

nas quais $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$ e $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$) e $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ e o ideal $\mathcal{I}$ em $\mathcal{M}^{4+n+m}$ gerado pelas formas (3.5) coincidem em $\mathcal{M}^{4+n+m}$, isto é $\mathcal{J} = \mathcal{I}$.

Observação 3.1. A interpretação geométrica da Definição 3.1 é análoga a interpretação dada pela Proposição 1.2 apresentada na Subseção 1.1.3.

Por simplicidade, podemos omitir a aplicação Φ e identificar as 1-formas ω_i, em $\mathcal{M}^{4+n+m}$, com $\Phi^*\omega_i$, $i = 1, 2, 3$, no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Com esta identificação e usando coordenadas locais $(x, t) \in U$, podemos reescrever a Definição 3.1.

Definição 3.2. Um sistema do tipo ($S_{n,m}$), $n, m \geq 2$, para variáveis dependentes u, v, descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) se, existem seis funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2$, dependendo de u, v e suas derivadas com respeito a x até a ordem n e m, respectivamente, tais que as 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i = 1, 2, 3$, satisfazem as equações de estrutura,

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 &= \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \\ \omega_1 \wedge \omega_2 &\neq 0, \end{aligned}$$

com $\delta = 1$ (resp. -1) se, e somente se, u, v é solução do sistema,

$$\begin{cases} u_{xt} = F(u, u_x ..., u_{x^n}, v, v_x, ..., v_{x^m}), \\ v_{xt} = G(u, u_x, ..., u_{x^n}, v, v_x ..., v_{x^m}). \end{cases}$$

A seguir apresentaremos dois exemplos de sistemas do tipo ($S_{2,2}$), que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas. O primeiro exemplo descreve superfícies pseudo-esféricas e o segundo descreve superfícies esféricas.

Exemplo 3.1. ("Vector short-pulse equation" tipo I [24],[25], [31])

$$\begin{cases} u_{xt} = u + \frac{1}{2}\left(uvu_x\right)_x, \\ v_{xt} = v + \frac{1}{2}\left(uvv_x\right)_x. \end{cases} \tag{3.7}$$

Considere $\delta = 1$, $\eta \neq 0$ um parâmetro real e defina,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \tfrac{\eta}{2}(v_x + u_x), & f_{12} &= \tfrac{1}{2}(v - u) + \tfrac{\eta}{4}uv(u_x + v_x), \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= \tfrac{1}{\eta} + \tfrac{\eta}{2}uv, \\ f_{31} &= \tfrac{\eta}{2}(v_x - u_x), & f_{32} &= \tfrac{1}{2}(u + v) + \tfrac{\eta}{4}uv(v_x - u_x). \end{aligned}$$

Mostraremos que as equações de estrutura de uma superfície pseudo-esférica são equivalentes ao sistema (3.7). De fato, as equações de estrutura,

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2, \end{cases}$$

expressas em coordenadas locais equivalem a,

$$\begin{cases} -f_{11,t} + f_{12,x} = f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21}, \\ -f_{21,t} + f_{22,x} = f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31}, \\ -f_{31,t} + f_{32,x} = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}, \end{cases}$$

pelas escolhas das funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, vemos que a segunda linha é uma identidade, enquanto a primeira e terceira linhas equivalem a,

$$\begin{cases} -v_{xt} - u_{xt} + \frac{1}{2}((uvu_x)_x + (uvv_x)_x) = -u - v, \\ -v_{xt} + u_{xt} + \frac{1}{2}(-(uvu_x)_x + (uvv_x)_x) = u - v, \end{cases}$$

a soma e a subtração destas expressões é equivalente a,

$$\begin{cases} u_{xt} = u + \frac{1}{2}\left(uvu_x\right)_x, \\ v_{xt} = v + \frac{1}{2}\left(uvv_x\right)_x, \end{cases}$$

que é sistema (3.7).

Observação 3.2. Note que a equação vetorial do tipo "short-pulse"(3.7) se reduz a equação "short-pulse"(veja [30]) sob a condição $u = v$,

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6}(u^3)_{xx}. \tag{3.8}$$

Exemplo 3.2. ("Vetor short-pulse"tipo II [24])

$$\begin{cases} u_{xt} = u + \frac{1}{2}\left((u^2+v^2)u_x\right)_x, \\ v_{xt} = v + \frac{1}{2}\left((u^2+v^2)v_x\right)_x. \end{cases} \tag{3.9}$$

Considere agora $\delta = -1$, $\eta \neq 0$ um parâmetro real e defina,

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\eta v_x, & f_{12} &= -u - \tfrac{\eta}{2}(u^2+v^2)v_x, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= -\tfrac{1}{\eta} + \tfrac{\eta}{2}(u^2+v^2), \\ f_{31} &= \eta u_x, & f_{32} &= -v + \tfrac{\eta}{2}(u^2+v^2)u_x. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Mostraremos que as equações de estrutura de uma superfície esférica são equivalentes ao sistema (3.9), de fato,

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2, \end{cases}$$

é equivalente a,

$$\begin{cases} -f_{11,t} + f_{12,x} = f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21}, \\ -f_{21,t} + f_{22,x} = f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31}, \\ -f_{31,t} + f_{32,x} = -f_{11}f_{22} + f_{12}f_{21}, \end{cases}$$

substituindo as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, vemos que a segunda linha é uma identidade e a primeira e terceira linhas equivalem a,

$$\begin{cases} v_{xt} - \frac{1}{2}((u^2+v^2)v_x)_x = v, \\ -u_{xt} + \frac{1}{2}((u^2+v^2)u_x)_x = -u, \end{cases}$$

que é o sistema (3.9).

3.1.3 Resultado de caracterização e um resultado de não existência.

Nesta subseção apresentaremos, no Teorema 3.1, uma caracterização dos sistemas do tipo $(S_{n,m})$, com $n,m \geq 2$, descrevendo superfícies esféricas ou pseudo-esféricas. Mostraremos, no Corolário 3.1, que sob certas condições, para que um sistema do tipo $(S_{n,m})$, com $n,m \geq 2$, descreva superfícies pseudo-esféricas ou esféricas é necessário que o sistema seja linear nos termos $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ e $\frac{\partial^m v}{\partial x^m}$.

O seguinte teorema, nos dá uma caracterização dos sistemas $(S_{n,m})$, com $n,m \geq 2$, que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas supondo que as funções associadas f_{ij} dependem de $(z_0,...,z_n,y_0,...,y_m)$.

Teorema 3.1. *O sistema diferencial $(S_{n,m})$, com $n, m \geq 2$,*

$$\begin{cases} z_{1,t} = F(z_0, ..., z_n, y_0, ..., y_m), \\ y_{1,t} = G(z_0, ..., z_n, y_0, ..., y_m), \end{cases} \tag{3.11}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções $f_{ij}(z_0, ..., z_n, y_0, ..., y_m)$, com $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, se, e somente se,

$$f_{k1,z_i} = 0, \quad f_{k1,y_j} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad i = 0, 2, 3, ..., n, \quad j = 0, 2, 3, ..., m,$$
$$f_{k2,z_n} = 0, \quad f_{k2,y_m} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \tag{3.12}$$

$$\begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{21,z_1} & f_{21,y_1} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_{21,z_1} & f_{21,y_1} \\ f_{31,z_1} & f_{31,y_1} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{31,z_1} & f_{31,y_1} \end{vmatrix}^2 \neq 0, \tag{3.13}$$

$$-f_{11,z_1}F - f_{11,y_1}G + \sum_{i=0}^{n-1} f_{12,z_i}z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{12,y_j}y_{j+1} - f_{31}f_{22} + f_{32}f_{21} = 0, \tag{3.14}$$

$$-f_{21,z_1}F - f_{21,y_1}G + \sum_{i=0}^{n-1} f_{22,z_i}z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{22,y_j}y_{j+1} - f_{11}f_{32} + f_{12}f_{31} = 0, \tag{3.15}$$

$$-f_{31,z_1}F - f_{31,y_1}G + \sum_{i=0}^{n-1} f_{32,z_i}z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{32,y_j}y_{j+1} - \delta f_{11}f_{22} + \delta f_{12}f_{21} = 0, \tag{3.16}$$

$$f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} \neq 0, \tag{3.17}$$

onde $\delta = 1$ (resp. -1).

Demonstração. Primeiramente mostraremos a condição necessária. Suponha que o sistema $(S_{n,m})$ descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas). Então, o "pullback"pela Φ em $\mathcal{M}^{4+n+m}$, definida em (3.4), anula os ideais $\mathcal{I}$ (com $\delta = 1$ e $\delta = -1$ respetivamente) e $\mathcal{J}$ simultaneamente. Ou seja ao longo da superfície Φ,

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{3.18}$$

$$dz_1 \wedge dx = -F dx \wedge dt, \quad dz_i \wedge dt = z_{i+1} dx \wedge dt, \quad i = 0, ..., n-1,$$
$$dy_1 \wedge dx = -G dx \wedge dt, \quad dy_i \wedge dt = y_{j+1} dx \wedge dt, \quad j = 0, ..., m-1. \tag{3.19}$$

Note que, para $k = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} d\omega_k &= d(f_{k1}) \wedge dx + d(f_{k2}) \wedge dt \\ &= \sum_{i=0}^{n} f_{k1,z_i} dz_i \wedge dx + \sum_{j=0}^{m} f_{k1,y_j} dy_j \wedge dx + \sum_{i=0}^{n} f_{k2,z_i} dz_i \wedge dt + \sum_{j=0}^{m} f_{k2,y_j} dy_j \wedge dt \\ &= f_{k1,z_1} dz_1 \wedge dx + \sum_{i\neq 1}^{n} f_{k1,z_i} dz_i \wedge dx + f_{k1,y_1} dy_1 \wedge dx + \sum_{j\neq 1}^{m} f_{k1,y_j} dy_j \wedge dx + \\ &\quad + f_{k2,z_n} dz_n \wedge dt + \sum_{i=0}^{n-1} f_{k2,z_i} dz_i \wedge dt + f_{k2,y_m} dy_m \wedge dt + \sum_{j=0}^{m-1} f_{k2,y_j} dy_j \wedge dt. \end{aligned}$$

Usando as relações (3.19), temos,

$$\begin{aligned} d\omega_k &= -f_{k1,z_1} F dx \wedge dt + \sum_{i\neq 1}^{n} f_{k1,z_i} dz_i \wedge dx - f_{k1,y_1} G dx \wedge dt + \sum_{j\neq 1}^{m} f_{k1,y_j} dy_j \wedge dx + \\ &\quad + f_{k2,z_n} dz_n \wedge dt + \sum_{i=0}^{n-1} f_{k2,z_i} z_{i+1} dx \wedge dt + f_{k2,y_m} dy_m \wedge dt + \sum_{j=0}^{m-1} f_{k2,y_j} y_{j+1} dx \wedge dt \\ &= \left(-f_{k1,z_1} F - f_{k1,y_1} G + \sum_{i=0}^{n-1} f_{k2,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{k2,y_j} y_{j+1} \right) dx \wedge dt + \\ &\quad + \sum_{i\neq 1}^{n} f_{k1,z_i} dz_i \wedge dx + \sum_{j\neq 1}^{m} f_{k1,y_j} dy_j \wedge dx + f_{k2,z_n} dz_n \wedge dt + f_{k2,y_m} dy_m \wedge dt. \end{aligned}$$

Equacionando os coeficientes de $dx \wedge dt$ na expressão acima, para $k = 1, 2, 3$, com o lado direito de (3.18) obtemos as equações (3.14), (3.15) e (3.16) respectivamente. Os demais termos que não são coeficientes de $dx \wedge dt$ devem se anular, donde temos as relações (3.12).

A equação (3.17) equivale a $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ e garante que métrica seja não degenerada e deve ser satisfeita por definição. Finalmente a condição genérica (3.13) deve ser satisfeita para que as equações (3.14), (3.15) e (3.16) sejam equivalentes ao sistema (3.11).

Para mostrar que esta condição é suficiente, consideramos as f_{ij}, $i \leq 1 \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo as condições (3.12)-(3.16) e definimos localmente $\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt$. Assim o sistema com F e G obtidas através das equações (3.14), (3.15) e (3.16), descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, consideradas. $\square$

Como aplicação do Teorema 3.1, mostraremos que uma condição necessária para um sistema $(S_{n,m})$, com $n, m \geq 2$, descreva superfícies pseudo-esféricas ou esféricas é que este sistema dependa linearmente dos termos $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ e $\frac{\partial^m v}{\partial x^m}$. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.2. *Considere um sistema do tipo $(S_{n,m})$ com $n, m \geq 2$. Para que este sistema descreva superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com funções associadas f_{ij}, satisfazendo (3.12)-(3.17), é necessário que*

$$\begin{cases} z_{1,t} = F_1 + F_2 z_n + F_3 y_m, \\ y_{1,t} = G_1 + G_2 z_n + G_3 y_m, \end{cases} \tag{3.20}$$

onde F_k, G_k, $k = 1, 2, 3$, são funções suaves de $(z_0, ...z_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1})$.

Demonstração. Seja um sistema $(S_{n,m})$, com $n, m \geq 2$ e suponha que este sistema descreve superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$. Pelo Teorema 3.1 valem as equações (3.12)-(3.17).

Diferenciando as equações (3.14)-(3.16) com respeito a z_n e y_m, obtemos

$$-f_{11,z_1} F_{\alpha,\beta} - f_{11,y_1} G_{\alpha,\beta} = 0,$$
$$-f_{21,z_1} F_{\alpha,\beta} - f_{21,y_1} G_{\alpha,\beta} = 0,$$
$$-f_{31,z_1} F_{\alpha,\beta} - f_{31,y_1} G_{\alpha,\beta} = 0,$$

em que $\alpha, \beta \in \{z_n, y_m\}$.

Segue da equação (3.13) que $F_{\alpha,\beta} = G_{\alpha,\beta} = 0$, para todo $\alpha, \beta \in \{z_n, y_m\}$, ou seja, F e G são lineares nos termos z_n e y_m, o que demonstra esta proposição. □

Como consequência imediata da última proposição, apresentamos um resultado de não existência.

Corolário 3.1. *Não existem sistemas do tipo $(S_{n,m})$, com $n, m \geq 2$, descrevendo superfícies pseudo-esféricas ou esféricas para funções associadas f_{ij}, satisfazendo (3.12)-(3.17), que dependa de modo não linear de u_{x^n} ou v_{x^m}.*

3.2 Resultados de classificação para sistemas $(S_{n,m})$, $n, m \geq 2$.

Nesta seção, apresentaremos uma classificação de sistemas do tipo $(S_{n,m})$, $n, m \geq 2$, que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas impondo a condição de que pelo menos uma das funções f_{11}, f_{21} ou f_{31} seja uma constante, dada por um parâmetro real η. Apresentaremos, também, um resultado de classificação para sistemas de equações diferenciais do tipo,

$$\begin{cases} z_{1,t} = F_1(z_0, z_1, y_0, y_1) + Q(z_0, y_0) z_2, \\ y_{1,t} = G_1(z_0, z_1, y_0, y_1) + Q(z_0, y_0) y_2, \end{cases} \tag{3.21}$$

com F_1, G_1 e Q funções suaves, que descreve superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com a condição $f_{21} = \eta$. Notamos que a classe de sistemas (3.21) contém as equações vetoriais do tipo "short-pulse"(3.7) e (3.9).

Dado um sistema do tipo $(S_{2,2})$, observamos que, se F e G não depende da variável z_2 (resp. y_2), ou seja, se $F_{z_2} = G_{z_2} = 0$ (resp. $F_{y_1} = G_{y_2}$), então este sistema equivale a um sistema do tipo $(S_{1,2})$ (resp. $(S_{2,1})$) que foi estudados no Capítulo 2. Em geral, para sistemas $S(n,m)$, $n, m \geq 2$, se F e G não dependem da variável z_n (resp. da variável y_m), ou seja, se $F_{z_n} = G_{z_n} = 0$ (resp. $F_{y_m} = G_{y_m}$), então este sistema equivale a um sistema do tipo sistema $(S_{n-1,m})$ (resp. $(S_{n,m-1})$). Esta observação nos motiva a considerar a seguinte definição.

Definição 3.3. Dizemos que um sistema $(S_{n,m})$, $n, m \geq 2$, é irredutível se, as funções F e G satisfazem

$$(F_{z_n}^2 + G_{z_n}^2)(F_{y_m}^2 + G_{y_m}^2) \neq 0,$$

para todos os pontos de seu domínio com exceção de um subconjunto de medida nula.

Deste modo, no que segue, estaremos interessados em sistemas do tipo $(S_{n,m})$, $n, m \geq 2$ que sejam irredutíveis.

3.2.1 Com a condição $f_{31} = \eta$.

Nesta subseção enunciaremos e demonstraremos um teorema que nos dá uma classificação dos sistemas do tipo $(S_{n,m})$, irredutíveis, para $n, m \geq 2$, que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, com a condição adicional que $f_{31} = \eta$ é uma constante real.

Teorema 3.2. *Um sistema $(S_{n,m})$ irredutível com $n, m \geq 2$, descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (3.12)-(3.17), com $f_{31} = \eta$ se, e somente se, existem*

- *uma função suave $q(z_0, ..., z_{n-2}, y_0, ..., y_{m-2})$ não constante,*
- *funções suaves $g(z_1, y_1)$ e $h(z_1, y_1)$, tais que $W := g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} \neq 0$,*
- *uma função arbitrária $P(z_0, ..., z_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1})$,*

satisfazendo a seguinte condição genérica

$$(P_{z_{n-1}}^2 + H_{z_{n-1}}^2)(P_{y_{m-1}}^2 + H_{y_{m-1}}^2) \neq 0, \tag{3.22}$$

onde

$$H := \frac{1}{g}\left(Ph + \delta\sum_{i=0}^{n-2} q_{z_i} z_{i+1} + \delta\sum_{j=0}^{m-2} q_{y_j} y_{j+1}\right),$$

com $\delta = 1$ *(resp.* $\delta = -1$*) e o sistema* $(S_{n,m})$ *é dado por,*

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_{1,t} & = & \frac{1}{W}\sum_{i=0}^{n-1}(P_{z_i}h_{y_1} - H_{z_i}g_{y_1})z_{i+1} + \frac{1}{W}\sum_{j=0}^{m-1}(P_{y_j}h_{y_1} - H_{y_j}g_{y_1})y_{j+1} + \\ & & +\frac{q}{2W}(g^2+h^2)_{y_1} - \frac{\eta}{W}(Hh_{y_1} + Pg_{y_1}), \\ y_{1,t} & = & -\frac{1}{W}\sum_{i=0}^{n-1}(P_{z_i}h_{z_1} - H_{z_i}g_{z_1})z_{i+1} - \frac{1}{W}\sum_{j=0}^{m-1}(P_{y_j}h_{z_1} - H_{y_j}g_{z_1})y_{j+1} + \\ & & -\frac{q}{2W}(g^2+h^2)_{z_1} + \frac{\delta\eta}{W}(Hh_{z_1} + Pg_{z_1}). \end{array}\right. \tag{3.23}$$

Neste caso,

$$\begin{array}{ll} f_{11} = g, & f_{12} = P, \\ f_{21} = h, & f_{22} = H, \\ f_{31} = \eta, & f_{32} = q. \end{array}$$

Além disso, o sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A,B,$\hat{A}$ *e* $\hat{B}$ *são definidas pelas respectivas funções* f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

Demonstração. A demonstração decorre do Teorema 3.1. Primeiramente, mostraremos que as condições do teorema são necessárias. Suponha que um sistema $(S_{n,m})$, com $n, m \geq 2$, descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções,

$$f_{ij} : U^1 \times U^2 \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

satisfazendo (3.12)-(3.17), onde U^1 e U^2 são subconjuntos abertos e conexos de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{m+1}$, respectivamente, parametrizados por coordenadas $(z_0, ..., z_n)$ e $(y_0, ..., y_m)$ respectivamente.

Pela equação (3.12) temos que, para $k = 1, 2, 3$, f_{k1} é uma função de (z_1, y_1) e f_{k2} é uma função de $(z_0, ..., z_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1})$.

Suponha que $f_{31} = \eta$, com $\eta \in \mathbb{R}$. Temos que a equação (3.13) é equivalente a,

$$W = f_{11,z_1} f_{21,y_1} - f_{11,y_1} f_{21,z_1} \neq 0 \qquad \text{em } U^1 \times U^2. \tag{3.24}$$

As equações (3.14) e (3.15) são equivalentes a,

$$\begin{pmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{21,z_1} & f_{21,y_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} f_{12,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{12,y_j} y_{j+1} - \eta f_{22} + f_{32} f_{21} \\ \sum_{i=0}^{n-1} f_{22,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{22,y_j} y_{j+1} + \eta f_{12} - f_{32} f_{11} \end{pmatrix}.$$

Como $W \neq 0$ é o determinante desta matriz, podemos inverter esta relação para $z_{1,t}$ e $y_{1,t}$, obtendo,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} &= \frac{1}{W}\begin{pmatrix} f_{21,y_1} & -f_{11,y_1} \\ -f_{21,z_1} & f_{11,z_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f_{12,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{12,y_j} y_{j+1} + f_{32} f_{21} - \eta f_{22} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f_{22,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{22,y_j} y_{j+1} - f_{32} f_{11} + \eta f_{12} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{W}\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(f_{21,y_1} f_{12,z_i} - f_{11,y_1} f_{22,z_i}\right) z_{i+1} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(-f_{21,z_1} f_{12,z_i} + f_{11,z_1} f_{22,z_i}\right) z_{i+1} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \frac{1}{W}\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} \left(f_{21,y_1} f_{12,y_j} - f_{11,y_1} f_{22,y_j}\right) y_{j+1} \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} \left(-f_{21,z_1} f_{12,y_j} + f_{11,z_1} f_{22,y_j}\right) y_{j+1} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \frac{1}{W}\begin{pmatrix} f_{32}(f_{21} f_{21,y_1} + f_{11} f_{11,y_1}) - \eta(f_{21,y_1} f_{22} + f_{21,y_1} f_{12}) \\ -f_{32}(f_{21} f_{21,z_1} + f_{11} f_{11,z_1}) + \eta(f_{21,z_1} f_{22} + f_{11,z_1} f_{12}) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

A equação (3.16) equivale a,

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{32,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{32,y_j} y_{j+1} - \delta f_{11} f_{22} + \delta f_{12} f_{21} = 0. \tag{3.26}$$

Diferenciando com respeito a z_n e y_m obtemos, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
f_{32,z_{n-1}} &= 0, \\
f_{32,y_{m-1}} &= 0, \qquad \text{em } U^1 \times U^2,
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

ou seja, f_{32} é uma função das variáveis $z_0, ..., z_{n-2}, y_0, ..., y_{m-2}$. Assim, a equação (3.26) equivale a,

$$\sum_{i=0}^{n-2} f_{32,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-2} f_{32,y_j} y_{j+1} - \delta f_{11} f_{22} + \delta f_{12} f_{21} = 0, \tag{3.28}$$

sendo $f_{11} \neq 0$ em $U^1 \times U^2$ (caso contrário, teríamos $W = 0$, o que é um absurdo) temos que esta última equação é equivalente a,

$$f_{22} = \frac{1}{f_{11}}\left(f_{21} f_{12} + \delta \sum_{i=0}^{n-2} f_{32,z_i} z_{i+1} + \delta \sum_{j=0}^{m-2} f_{32,y_j} y_{j+1}\right).$$

Por último, a equação (3.17) é equivalente a

$$\sum_{i=0}^{n-2} f_{32,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-2} f_{32,y_j} y_{j+1} \neq 0, \qquad \text{em } U^1 \times U^2.$$

Note que o lado esquerdo da expressão acima se anula se, e somente se, f_{32} é constante em $U^1 \times U^2$, de modo que (3.17) é equivalente a f_{32} não ser constante.

Deste modo, é necessário que $f_{11} = g$, $f_{31} = h$, com g e h funções de z_1 e y_1 tais que $g_{z_1}h_{y_1} - g_{y_1}h_{z_1} \neq 0$, $f_{12} = P$, com P uma função arbitrária de $z_0, ..., z_{n-1}, y_0, ...y_{m-1}$, $f_{32} = q$ com q uma função de $z_0, ..., z_{n-2}, y_0, ..., y_{m-2}$, não constante e $f_{22} = H$, em que H é dada por

$$H = \frac{1}{g}\left(Ph + \delta\sum_{i=0}^{n-2} q_{z_i}z_{i+1} + \delta\sum_{j=0}^{m-2} q_{y_j}y_{j+1}\right).$$

Além disso, com esta notação, a equação (3.25) é equivalente o sistema (3.23).

Por último vamos mostrar que o sistema (3.23) é irredutível, se e somente a condição (3.22) é satisfeita. De fato, diferenciando a equação (3.25) com respeito a z_n, temos que $F^2_{z_n} + G^2_{z_n} \neq 0$ se, e somente se, $P^2_{12,z_{n-1}} + H^2_{22,z_{n-1}} \neq 0$. Analogamente diferenciando a equação (3.25) com respeito a y_m, temos que $F^2_{y_m} + G^2_{y_m} \neq 0$ se, e somente se, $P^2_{12,y_{m-1}} + H^2_{22,y_{m-1}} \neq 0$. Assim, temos que o sistema é irredutível se, e somente se, a condição genérica (3.22) é satisfeita.

Assim, mostramos que todas condições são necessárias.

Para a recíproca, defina as f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, como tomadas acima e verifique que satisfazem as equações (3.11)-(3.17). □

3.2.2 Com a condição $f_{21} = \eta$.

Nesta subseção enunciaremos e demonstraremos um teorema que nos dá um classificação dos sistemas diferenciais do tipo $(S_{n,m})$ irredutíveis para $n, m \geq 2$, que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, com a condição adicional que $f_{21} = \eta$ é uma constante real.

Teorema 3.3. *Um sistema diferencial $(S_{n,m})$ irredutível com $n, m \geq 2$, descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, satisfazendo (3.12)-(3.17), com $f_{21} = \eta$ um número real não nulo se, e somente se, existem*

- *uma função suave $q(z_0, ..., z_{n-2}, y_0, ..., y_{m-2})$,*
- *funções suaves $g(z_1, y_1)$ e $h(z_1, y_1)$, tais que $W := g_{z_1}h_{y_1} - g_{y_1}h_{z_1} \neq 0$,*
- *uma função $P(z_0, ..., z_{n-2}, y_0, ..., y_{m-2})$, tal que $P \neq \dfrac{1}{\eta}gq$,*

satisfazendo a seguinte condição genérica,

$$(P^2_{z_{n-1}} + H^2_{z_{n-1}})(P^2_{y_{m-1}} + H^2_{y_{m-1}}) \neq 0, \tag{3.29}$$

onde,

$$H := \frac{1}{g}\left(Ph + \sum_{i=0}^{n-2} q_{z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-2} q_{y_j} y_{j+1}\right),$$

e o sistema $(S_{n,m})$ *é dado por,*

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_{1,t} & = & \dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(P_{z_i}h_{y_1} - H_{z_i}g_{y_1})z_{i+1} + \dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}(P_{y_j}h_{y_1} - H_{y_j}g_{y_1})y_{j+1} + \\ & & +\frac{q}{2W}(\delta g^2 - h^2)_{y_1} + \frac{\eta}{W}(Hh_{y_1} - \delta P g_{y_1}), \\ y_{1,t} & = & -\dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(P_{z_i}h_{z_1} + H_{z_i}g_{z_1})z_{i+1} - \dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}(P_{y_j}h_{z_1} - H_{y_j}g_{z_1})y_{j+1} + \\ & & -\frac{q}{2W}(\delta g^2 - h^2)_{z_1} - \frac{\eta}{W}(Hh_{z_1} - \delta P g_{z_1}), \end{array}\right. \tag{3.30}$$

onde, $\delta = 1$ *(resp.* -1*). Neste caso,*

$$\begin{array}{ll} f_{11} = g, & f_{12} = P, \\ f_{21} = \eta, & f_{22} = q, \\ f_{31} = h, & f_{32} = H. \end{array}$$

Além disso, o sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A,B,$\hat{A}$ *e* $\hat{B}$ *são definidas pelas respectivas funções* f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

Demonstração. A demonstração decorre do Teorema 3.1. Primeiramente, mostraremos que as condições do teorema são necessárias. Suponha que um sistema $(S_{n,m})$, com $n, m \geq 2$, descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com funções,

$$f_{ij} : U^1 \times U^2 \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

satisfazendo (3.12)-(3.17), onde U^1 e U^2 são subconjuntos abertos e conexos de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{m+1}$, respectivamente, parametrizados por coordenadas $(z_0, ..., z_n)$ e $(y_0, ..., y_m)$ respectivamente.

Pela equação (3.12) temos que, para $k = 1, 2, 3$, f_{k1} é uma função de (z_1, y_1) e f_{k2} é uma função de $(z_0, ..., z_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1})$. Suponha que $f_{21} = \eta$, com $\eta \in \mathbb{R}$. Temos que a equação (3.13) é equivalente a,

$$W = f_{11,z_1} f_{31,y_1} - f_{11,y_1} f_{31,z_1} \neq 0 \qquad \text{em } U^1 \times U^2. \tag{3.31}$$

As equações (3.14) e (3.16) são equivalentes a,

$$\begin{pmatrix} f_{11,z_1} & f_{11,y_1} \\ f_{31,z_1} & f_{31,y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f_{12,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{12,y_j} y_{j+1} - f_{22} f_{31} + \eta f_{32} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f_{32,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{32,y_j} y_{j+1} - \delta f_{22} f_{11} + \delta \eta f_{12} \end{pmatrix}.$$

Como $W \neq 0$ é o determinante desta matriz, podemos inverter esta relação para $z_{1,t}$ e $y_{1,t}$, obtendo,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_{1,t} \\ y_{1,t} \end{pmatrix} &= \frac{1}{W}\begin{pmatrix} f_{31,y_1} & -f_{11,y_1} \\ -f_{31,z_1} & f_{11,z_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} f_{12,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{12,y_j} y_{j+1} - f_{22} f_{31} + \eta f_{32} \\ \sum_{i=0}^{n-1} f_{32,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{32,y_j} y_{j+1} - \delta f_{22} f_{11} + \delta\eta f_{12} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{W}\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} (f_{31,y_1} f_{12,z_i} - f_{11,y_1} f_{32,z_i})\, z_{i+1} \\ \sum_{i=0}^{n-1} (-f_{31,z_1} f_{12,z_i} + f_{11,z_1} f_{32,z_i})\, z_{i+1} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \frac{1}{W}\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{m-1} \left(f_{31,y_1} f_{12,y_j} - f_{11,y_1} f_{32,y_j}\right) y_{j+1} \\ \sum_{j=0}^{m-1} \left(-f_{31,z_1} f_{12,y_j} + f_{11,z_1} f_{32,y_j}\right) y_{j+1} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \frac{1}{W}\begin{pmatrix} f_{22}(-f_{31} f_{31,y_1} + \delta f_{11} f_{11,y_1}) + \eta(f_{31,y_1} f_{32} - \delta f_{11,y_1} f_{12}) \\ f_{22}(f_{31} f_{31,z_1} - \delta f_{11} f_{11,z_1}) + \eta(-f_{31,z_1} f_{32} + \delta f_{11,z_1} f_{12}) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

A equação (3.15) equivale a,

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{22,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{22,y_j} y_{j+1} - f_{11} f_{32} + f_{12} f_{31} = 0. \tag{3.33}$$

Diferenciando com respeito a z_n e y_m obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} f_{22,z_{n-1}} &= 0, \\ f_{22,y_{m-1}} &= 0, \qquad \text{em } U^1 \times U^2, \end{aligned} \tag{3.34}$$

ou seja, f_{22} é uma função das variáveis $z_0, ..., z_{n-2}, y_0, ..., y_{m-2}$. Assim, a equação (3.33) equivale a,

$$\sum_{i=0}^{n-2} f_{22,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-2} f_{22,y_j} y_{j+1} - f_{11} f_{32} + f_{12} f_{31} = 0, \tag{3.35}$$

sendo $f_{11} \neq 0$ em $U^1 \times U^2$ (caso contrário, teríamos $W = 0$, o que é um absurdo) temos que esta última equação é equivalente a,

$$f_{32} = \frac{1}{f_{11}}\left(f_{31} f_{12} + \sum_{i=0}^{n-2} f_{22,z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-2} f_{22,y_j} y_{j+1}\right).$$

Por último, a equação (3.17) é equivalente a

$$f_{12} \neq \frac{f_{11} f_{22}}{\eta}.$$

Deste modo, é necessário que $f_{22} = q$, com q uma função de $z_0, ..., z_{n-2}, y_0, ...y_{m-2}$, $f_{11} = g$, $f_{31} = h$, com g e h funções de z_1 e y_1 tais que $g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} \neq 0$, $f_{12} = P$ com P uma função de $z_0, ..., z_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1},$, tal que $P \neq \frac{1}{\eta} gq$, e $f_{32} = H$, em que H é dada por

$$H = \frac{1}{g}\left(Ph + \sum_{i=0}^{n-2} q_{z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-2} q_{y_j} y_{j+1}\right).$$

Além disso, com esta notação, a equação (3.32) é equivalente o sistema (3.30).

Por último vamos mostrar que o sistema (3.30) é irredutível, se e somente a condição (3.29) é satisfeita. De fato, diferenciando a equação (3.32) com respeito a z_n, temos que $F_{z_n}^2 + G_{z_n}^2 \neq 0$ se, e somente se, $P_{12,z_{n-1}}^2 + H_{22,z_{n-1}}^2 \neq 0$. Analogamente diferenciando a equação (3.25) com respeito a y_m, temos que $F_{y_m}^2 + G_{y_m}^2 \neq 0$ se, e somente se, $P_{12,y_{m-1}}^2 + H_{22,y_{m-1}}^2 \neq 0$. Assim, temos que o sistema é irredutível se, e somente se, a condição genérica (3.29) é satisfeita.

Assim, mostramos que todas as condições são necessárias. Para a recíproca, defina as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, como tomadas acima e verifique que satisfazem as equações (3.11)-(3.17). $\square$

Observamos que as Equações (vetoriais) do tipo short-pulse I e II, (3.1) e (3.2), estão contidas na classe de sistemas (3.30) do Teorema 3.3. De fato, para a equação (vetorial) do tipo short-pulse I, considere o Teorema 3.3, com $n = m = 2$, $\delta = 1$, $g = \frac{\eta}{2}(y_1 + z_1)$, $h = \frac{\eta}{2}(y_1 - z_1)$, $q = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} zy$ e $P = \frac{1}{2}(y - z) + \frac{\eta}{4} zy(z_1 + y_1)$. Para a equação (vetorial) do tipo short-pulse II, considere com $n = m = 2$, $\delta = -1$, $g = -\eta y_1$, $h = \eta z_1$, $q = -\frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}(z^2 + y^2)$ e $P = -z - \frac{\eta}{2}(z^2 + y^2) y_1$.

3.2.3 Com a condição $f_{11} = \eta$.

Nesta subseção enunciaremos e demonstraremos um teorema que nos dá um classificação dos sistemas do tipo $(S_{n,m})$ irredutíveis com $n, m \geq 2$, que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, com a condição adicional que $f_{11} = \eta$ é uma constante real.

Conforme observado na introdução, os sistemas de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com a hipótese $f_{11} = \eta$ são exatamente os mesmos sistemas para o caso $f_{21} = \eta$, bastando considerar a transformação (0.14). Deste modo, a classificação dos sistemas do tipo $S_{n,m}$, $n, m \geq 2$, com $f_{11} = \eta$ pode ser obtida através da classificação dos sistemas do tipo $S_{n,m}$, $n, m \geq 2$, com f_{21}. Em geral, apesar das equações diferenciais serem as mesmas, os problemas lineares associados podem ser diferentes.

Teorema 3.4. *Um sistema $(S_{n,m})$ irredutível com $n, m \geq 2$ descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, satisfazendo (3.12)-(3.17), com $f_{11} = \eta$ um número real não nulo, se, e somente se, existem*

- *uma função suave $q(z_0, ..., z_{n-2}, y_0, ..., y_{m-2})$,*
- *funções suaves $g(z_1, y_1)$ e $h(z_1, y_1)$, tais que $W := g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} \neq 0$,*
- *uma função suave $P(z_0, ..., z_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1})$ tal que $P \neq \frac{1}{\eta} gq$,*

satisfazendo a seguinte condição genérica,

$$(P_{z_{n-1}}^2 + H_{z_{n-1}}^2)(P_{y_{m-1}}^2 + H_{y_{m-1}}^2) \neq 0, \tag{3.36}$$

onde,

$$H = \frac{1}{g}\left(Ph + \sum_{i=0}^{n-2} q_{z_i} z_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-2} q_{y_j} y_{j+1}\right).$$

e o sistema $(S_{n,m})$ é dado por,

$$\begin{cases} z_{1,t} &= \dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(P_{z_i} h_{y_1} - H_{z_i} g_{y_1}) z_{i+1} + \dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}(P_{y_j} h_{y_1} - H_{y_j} g_{y_1}) y_{j+1} + \\ & + \frac{q}{2W}(\delta g^2 - h^2)_{y_1} + \frac{\eta}{W}(H h_{y_1} - \delta P g_{y_1}), \\ y_{1,t} &= -\dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(P_{z_i} h_{z_1} + H_{z_i} g_{z_1}) z_{i+1} - \dfrac{1}{W}\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}(P_{y_j} h_{z_1} - H_{y_j} g_{z_1}) y_{j+1} + \\ & - \frac{q}{2W}(\delta g^2 - h^2)_{z_1} - \frac{\eta}{W}(H h_{z_1} - \delta P g_{z_1}), \end{cases} \tag{3.37}$$

onde, $\delta = 1$ (resp. -1). Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta, & f_{12} &= q, \\ f_{21} &= g, & f_{22} &= P, \\ f_{31} &= -h, & f_{32} &= -H. \end{aligned}$$

Além disso, o sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A,B,$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são definidas pelas respectivas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

3.2.4 Uma classe especial de sistemas do tipo $(S_{2,2})$ contendo equações vetoriais do tipo "short-pulse".

Motivados pelos Exemplos 3.1 e 3.2 que apresentam, respectivamente, sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas do tipo

$$\begin{cases} z_{1,t} = F_1(z, z_1, y, y_1) + Q(z, y) z_2, \\ y_{1,t} = G_1(z, z_1, y, y_1) + Q(z, y) y_2, \end{cases} \tag{3.38}$$

para funções suaves F_1, G_1 e Q, vamos apresentar uma classificação de sistemas deste tipo que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com a hipótese de $f_{21} = \eta$.

O seguinte corolário é um caso particular do Teorema 3.3, para $n = m = 2$, e apresenta uma classificação dos sistemas $(S_{2,2})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas com a condição $f_{21} = \eta$.

Corolário 3.2. *Um sistema $(S_{2,2})$ irredutível descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) para funções suaves f_{ij}, satisfazendo (3.12)-(3.17), com $f_{21} = \eta$ um número real não nulo se, e somente se, existem funções suaves, $q(z, y)$, $g(z_1, y_1)$ e $h(z_1, y_1)$ tais que,*

$$W = g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} \neq 0, \tag{3.39}$$

P uma função suave de z, z_1, y, y_1, satisfazendo as condições genéricas,

$$P \neq \frac{1}{\eta} g q, \tag{3.40}$$

$$(P_{z_1}^2 + H_{z_1}^2)(P_{y_1}^2 + H_{y_1}^2) \neq 0, \tag{3.41}$$

onde,

$$H = \frac{1}{g} \left(Ph + q_z z_1 + q_y y_1 \right). \tag{3.42}$$

e o sistema é dado por,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_{1,t} & = & \frac{1}{W}(P_{z_1} h_{y_1} - H_{z_1} g_{y_1}) z_2 + \frac{1}{W}(P_{y_1} h_{y_1} - H_{y_1} g_{y_1}) y_2 + \\ & & + \frac{1}{W}(P_z h_{y_1} - H_z g_{y_1}) z_1 + \frac{1}{W}(P_y h_{y_1} - H_y g_{y_1}) y_1 + \\ & & + \frac{q}{2W}(\delta g^2 - h^2)_{y_1} + \frac{\eta}{W}(H h_{y_1} - \delta P g_{y_1}), \\ y_{1,t} & = & -\frac{1}{W}(P_{z_1} h_{z_1} - H_{z_1} g_{z_1}) z_2 - \frac{1}{W}(P_{y_1} h_{z_1} - H_{y_1} g_{z_1}) y_2 + \\ & & -\frac{1}{W}(P_z h_{z_1} - H_z g_{z_1}) z_1 - \frac{1}{W}(P_y h_{z_1} - H_y g_{z_1}) y_1 + \\ & & -\frac{q}{2W}(\delta g^2 - h^2)_{z_1} - \frac{\eta}{W}(H h_{z_1} - \delta P g_{z_1}), \end{array} \right. \tag{3.43}$$

onde, $\delta = 1$ (resp. -1). Neste caso,

$$\begin{array}{ll} f_{11} = g, & f_{12} = P, \\ f_{21} = \eta, & f_{22} = q, \\ f_{31} = h, & f_{32} = H. \end{array}$$

Demonstração. É um caso particular do Teorema 3.3 para $n = m = 2$. □

A seguir apresentamos um teorema de classificação.

Teorema 3.5. *Sejam F_1, G_1 funções suaves das variáveis z, z_1, y, y_1 e Q uma função suave das variáveis z, y não constante, então o sistema*

$$\begin{cases} z_{1,t} = F_1(z, z_1, y, y_1) + Q(z, y) z_2, \\ y_{1,t} = G_1(z, z_1, y, y_1) + Q(z, y) y_2, \end{cases} \tag{3.44}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com $f_{21} = \eta$ um número real não nulo se, e somente se, um dos três casos ocorre.

Caso I)

$$\begin{aligned} z_{1,t} &= Q z_2 + \frac{1}{W}(g h_{y_1} - h g_{y_1})(Q_z z_1 + Q_y y_1) + \frac{1}{2W}(\eta Q - c)(h^2 - \delta g^2)_{y_1}, \\ y_{1,t} &= Q y_2 - \frac{1}{W}(g h_{z_1} - h g_{z_1})(Q_z z_1 + Q_y y_1) - \frac{1}{2W}(\eta Q - c)(h^2 - \delta g^2)_{z_1}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

onde, $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$),

- *c é uma constante real,*
- *$Q \neq \frac{c}{\eta}$,*
- *g e h são funções de z_1, y_1 tais que $W = g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} \neq 0$.*

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= g, & f_{12} &= Q g, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= c, \\ f_{31} &= h, & f_{32} &= Q h. \end{aligned}$$

Caso II)

$$\begin{aligned} z_{1,t} &= Q z_2 + \frac{1}{W}(g h_{y_1} - h g_{y_1})(Q_z z_1 + Q_y y_1) - \frac{a}{W}(b z_1 + a y_1)\phi''(\xi) + \\ &\quad + \frac{\eta}{W}\phi'(\xi)(\mu h - \delta \lambda g)_{y_1} + \frac{1}{2W}(\eta Q - \phi(\xi))(h^2 - \delta g^2)_{y_1}, \\ y_{1,t} &= Q y_2 - \frac{1}{W}(g h_{z_1} - h g_{z_1})(Q_z z_1 + Q_y y_1) + \frac{b}{W}(b z_1 + a y_1)\phi''(\xi) + \\ &\quad - \frac{\eta}{W}\phi'(\xi)(\mu h - \delta \lambda g)_{z_1} + \frac{1}{2W}(\phi(\xi) - \eta Q)(h^2 - \delta g^2)_{z_1}, \end{aligned} \tag{3.46}$$

onde, $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$),

- *a, b, λ, μ são constantes reais tais que, $a^2 + b^2 \neq 0$ e $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$,*
- *ϕ é uma função suave real, não constante, aplicada em $\xi = ay + bz$,*

- *g e h são funções de z_1, y_1 tais que $W = g_{z_1} h_{y_1} - g_{y_1} h_{z_1} \neq 0$ e $\mu g - \lambda h = a y_1 + b z_1$,*
- $Q \neq \dfrac{1}{\eta}\phi(\xi) - \dfrac{\lambda}{g}\phi'(\xi)$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= g, & f_{12} &= Qg + \lambda\phi'(\xi),\\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= \phi(\xi),\\ f_{31} &= h, & f_{32} &= Qh + \mu\phi'(\xi). \end{aligned}$$

Caso III)

$$\begin{aligned} z_{1,t} &= Qz_2 + (Q_z z_1 + Q_y y_1) z_1 - \frac{z_1}{\gamma}(q_{zy} + \tau(q - \eta Q)) + \\ &\quad -\frac{y_1}{\gamma}(q_{yy} + \beta(q - \eta Q)) + \frac{\eta}{\gamma^2}(\beta q_z - \tau q_y),\\ y_{1,t} &= Qy_2 + (Q_z z_1 + Q_y y_1) y_1 + \frac{z_1}{\gamma}(q_{zz} + \alpha(q - \eta Q)) + \\ &\quad +\frac{y_1}{\gamma}(q_{zy} + \tau(q - \eta Q)) + \frac{\eta}{\gamma^2}(-\tau q_z + \alpha q_y), \end{aligned} \tag{3.47}$$

onde, $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$),

- *$\gamma = a_1 b_3 - a_3 b_1$, $\alpha = a_3^2 - \delta a_1^2$, $\beta = b_3^2 - \delta b_1^2$, $\tau = a_3 b_3 - \delta a_1 b_1$, para a_1, b_1, a_3, b_3 constantes reais tais que $a_1 b_3 - a_3 b_1 \neq 0$,*
- *q é uma função suave das variáveis z, y tal que q_z e q_y são linearmente independentes,*
- $Q \neq \dfrac{1}{\eta} q - \dfrac{(b_1 q_z - a_1 q_y)}{(a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_1 z_1 + b_1 y_1)}$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} f_{11} &= a_1 z_1 + b_1 y_1, & f_{12} &= (a_1 z_1 + b_1 y_1)Q + \frac{1}{\gamma}(b_1 q_z - a_1 q_y),\\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= q,\\ f_{31} &= a_3 z_1 + b_3 y_1, & f_{32} &= (a_3 z_1 + b_3 y_1)Q + \frac{1}{\gamma}(b_3 q_z - a_3 q_y). \end{aligned}$$

Além disso, em todos os casos, cada sistema é condição de integrabilidade dos problemas lineares (0.4) e (0.10) onde A,B,$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são definidas pelas respectivas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

Demonstração. Utilizaremos o Corolário 3.2. Primeiramente mostraremos as condições necessárias. Suponha que o sistema descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas) com a condição $f_{21} = \eta$, para η um parâmetro não nulo. Pelo Corolário 3.2, $F_1 + Qz_2$ e $G_1 + Qy_2$ devem ser dados por (3.43). Equacionando os termos z_2 e y_2 obtemos que,

$$\frac{1}{W}(h_{y_1}P_{z_1} - g_{y_1}H_{z_1}) = Q, \qquad \frac{1}{W}(-h_{z_1}P_{z_1} + g_{z_1}H_{z_1}) = 0, \tag{3.48}$$
$$\frac{1}{W}(h_{y_1}P_{y_1} - g_{y_1}H_{y_1}) = 0, \qquad \frac{1}{W}(-h_{z_1}P_{y_1} + g_{z_1}H_{y_1}) = Q. \tag{3.49}$$

Em termos matriciais, (3.48) e (3.49) podem ser expressos por,

$$\frac{1}{W}\begin{pmatrix} h_{y_1} & -g_{y_1} \\ -h_{z_1} & g_{z_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{z_1} \\ H_{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\frac{1}{W}\begin{pmatrix} h_{y_1} & -g_{y_1} \\ -h_{z_1} & g_{z_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{y_1} \\ H_{y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix}.$$

Como $W \neq 0$ é o determinante destas matrizes, podemos inverter as relações acima e obter,

$$\begin{pmatrix} P_{z_1} \\ H_{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{z_1} & g_{y_1} \\ h_{z_1} & h_{y_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} P_{y_1} \\ H_{y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{z_1} & g_{y_1} \\ h_{z_1} & h_{y_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix},$$

o que implica nas seguintes relações,

$$P_{z_1} = g_{z_1}Q, \qquad H_{z_1} = h_{z_1}Q,$$
$$P_{y_1} = g_{y_1}Q, \qquad H_{y_1} = h_{y_1}Q.$$

Segue que existem funções suaves ψ_1 e ψ_2 das variáveis z, y, tais que

$$P = gQ + \psi_1 \qquad \text{e} \qquad H = hQ + \psi_2.$$

Pelo Corolário (3.2) P e H estão relacionados pela expressão (3.42), segue que,

$$q_z z_1 + q_y y_1 + h\psi_1 - g\psi_2 = 0. \tag{3.50}$$

Temos que esta expressão, juntamente com a condição genérica $g_{z_1}h_{y_1} - g_{y_1}h_{z_1} \neq 0$, é idêntico ao problema considerado no Lema A.1 do Apêndice A, mediante a identificação $q \to \psi_0$, $\psi_1 \to \psi_1$, $\psi_2 \to \psi_2$, $g \to \rho_1$, $h \to \rho_2$ e $\epsilon = 1$ nas equações (A.1) e (A.2). Deste modo aplicamos o Lema A.1 e temos três casos a considerar.

Caso I) Suponha que a solução de (3.50) é do tipo (I) conforme o Lema A.1. Deste modo devemos ter que $q = c$ é uma constante real, $P = gQ$ e $H = hQ$.

A condição dada na equação (3.40) implica que,

$$Q \neq \frac{c}{\eta}.$$

Por último, note que com estas escolhas, o sistema (3.43) se reduz ao sistema (3.45) . O que completa a demonstração do Caso I).

Caso II) Suponha que a solução de (3.50) é do tipo (II) conforme o Lema A.1. Deste modo devemos ter $q = \phi(\xi)$ com ϕ uma função real suave aplicada em $\xi = ay + bz$ em que a, b são constantes satisfazendo $a^2 + b^2 \neq 0$. $P = gQ + \lambda\phi'(\xi)$ e $H = hQ + \mu\phi'(\xi)$ onde λ, μ são constantes satisfazendo $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. g e h satisfazem $\mu g - \lambda h = ay_1 + bz_1$.

A condição dada na equação (3.40) implica que,

$$Q \neq \frac{1}{\eta}\phi(\xi) - \frac{\lambda}{g}\phi'(\xi).$$

Por último, note que com estas escolhas, o sistema (3.43) se reduz ao sistema (3.46) . O que completa a demonstração do Caso II).

Caso III) Suponha que a solução de (3.50) é do tipo (III) conforme o Lema A.1. Deste modo devemos ter $g = a_1z_1 + b_1y_1$ e $h = a_3z_1 + b_3y_1$ para constantes a_1, b_1, a_3, b_3 tais que $a_1b_3 - a_3b_1 \neq 0$. q é uma função suave das variáveis z, y tais que q_z e q_y são não proporcionais. P e H são dados, respectivamente por,

$$\begin{aligned} P &= (a_1z_1 + b_1y_1)Q + \tfrac{1}{a_1b_3 - a_3b_1}(b_1q_z - a_1q_y), \\ H &= (a_3z_1 + b_3y_1)Q + \tfrac{1}{a_1b_3 - a_3b_1}(b_3q_z - a_3q_y). \end{aligned}$$

A condição dada na equação (3.40) implica que,

$$Q \neq \frac{1}{\eta}q - \frac{1}{(a_1b_3 - a_3b_1)}\frac{(b_1q_z - a_1q_y)}{(a_1z_1 + b_1y_1)}.$$

Por último, note que com estas escolhas, o sistema (3.43) se reduz ao sistema (3.47), com a seguinte notação,

$$\begin{aligned} \gamma &= a_1b_3 - a_3b_1, & \tau &= a_3b_3 - \delta a_1b_1, \\ \alpha &= a_3^2 - \delta a_1^2, & \beta &= b_3^2 - \delta b_1^2. \end{aligned}$$

O que completa a demonstração do Caso III).

Para verificarmos que estas condições são também suficientes, basta considerar as f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, dada em cada um dos três caso e verificar diretamente que satisfazem as equações de estrutura.

$\square$

3.3 Aplicações: Novas famílias de sistemas $(S_{2,2})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Nesta seção aplicaremos o resultado de classificação dado no Teorema 3.5 para apresentar famílias, a vários parâmetros, de sistemas do tipo $(S_{2,2})$ descrevendo superfícies pseudo-esféricas ou esféricas. Obteremos três novas famílias de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas, com a propriedade de serem condição de integrabilidade de famílias a um parâmetros, $\eta \neq 0$, de problemas lineares. Além disso, novos exemplos serão apresentados.

3.3.1 Família de sistemas a sete parâmetros e uma função arbitrária.

Nesta subseção apresentaremos uma família, a sete parâmetros e uma função arbitrária, de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas obtidas a partir do item II) do Teorema 3.5, na qual cada sistema é condição de integrabilidade de famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares.

Proposição 3.3. *O sistema abaixo descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas),*

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_{1,t} &=& (k_0(ay+bz)+k_1)z_2 + \dfrac{k_0(1-k_2\psi)}{b\psi_{y_1}-a\psi_{z_1}}\left(\psi_{y_1}(\beta^2-\delta\alpha^2)-a\beta\right) + \\ && +\dfrac{k_0(ay_1+bz_1)}{b\psi_{y_1}-a\psi_{z_1}}\left(\psi_{y_1}(ay_1+bz_1+k_2\beta)-a(\psi+k_2)\right), \\ y_{1,t} &=& (k_0(ay+bz)+k_1)y_2 - \dfrac{k_0(1-k_2\psi)}{b\psi_{y_1}-a\psi_{z_1}}\left(\psi_{z_1}(\beta^2-\delta\alpha^2)-b\beta\right) + \\ && -\dfrac{k_0(ay_1+bz_1)}{b\psi_{y_1}-a\psi_{z_1}}\left(\psi_{z_1}(ay_1+bz_1+k_2\beta)-b(\psi+k_2)\right), \end{array}\right. \tag{3.51}$$

onde $k_0, k_1, k_2, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são constantes, tais que $k_0\alpha(a^2+b^2) \neq 0$, $\psi(z_1, y_1)$ uma função suave das variáveis z_1, y_1 tal que $b\psi_{y_1} - a\psi_{z_1} \neq 0$ e $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$). Neste caso, as funções f_{ij} associadas são dadas por

$$\begin{array}{ll} f_{11} = \eta\psi, & f_{12} = \eta(k_0ay + k_0bz + k_1)\psi + \alpha k_0, \\ f_{21} = \eta, & f_{22} = \eta(k_0ay + k_0bz + k_1) + \alpha k_0 k_2, \\ f_{31} = \dfrac{\eta}{\alpha}(\beta - ay_1 - bz_1), & f_{32} = \dfrac{\eta}{\alpha}(k_0ay + k_0bz + k_1)(\beta - ay_1 - bz_1) + \beta k_0, \end{array}$$

com $\eta \neq 0$, um parâmetro real.

Demonstração. É uma consequência do Caso II) do Teorema 3.5. Sejam $k_0, k_1, k_2, a, b, \alpha, \beta$ e ψ como enunciadas e seja η um parâmetro real não nulo. Seguindo a notação do Teorema 3.5 considere,

- $a \to a$, $b \to b$, $\mu \to \dfrac{\beta}{\eta}$, $\lambda \to \dfrac{\alpha}{\eta}$,
- $\phi(\xi) = \eta(k_0\xi + k_1) + \alpha k_0 k_2$ e $\xi = ay + bz$,
- $g = \eta\psi$ e $h = \eta\frac{\beta}{\alpha}\psi - \frac{\eta}{\alpha}(ay_1 + bz_1)$,
- $Q = k_0(ay + bz) + k_1$.

Note que as condições do Teorema 3.5, item II, sobre estes parâmetros estão satisfeitas. De fato, $a^2 + b^2 \neq 0$, por hipótese sobre a e b.

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{1}{\eta^2}(\alpha^2 + \beta^2) \neq 0,$$

pois $\alpha \neq 0$. As condições sobre h e g também são satisfeitas,

$$W = g_{z_1}h_{y_1} - g_{y_1}h_{z_1} = \frac{\eta^2}{\alpha}(b\psi_{y_1} - a\psi_{z_1}) \neq 0,$$

pois $a\psi_{z_1} - b\psi_{y_1} \neq 0$ e $\eta \neq 0$. A segunda condição sobre g e h também é satisfeita,

$$\mu g - \lambda h = \frac{\beta}{\eta}\eta\psi - \frac{\alpha}{\eta}\left(\eta\frac{\beta}{\alpha}\psi - \frac{\eta}{\alpha}(ay_1 + bz_1)\right) = ay_1 + bz_1.$$

A condição $Q \neq \dfrac{1}{\eta}\phi(\xi) - \dfrac{\lambda}{g}\phi'(\xi)$ equivale a,

$$k_0\xi + k_1 \neq k_0\xi + k_1 + \frac{\alpha k_0 k_2}{\eta} - \frac{\alpha}{\eta}\frac{1}{\eta\psi}\eta k_0,$$

que, por sua vez, equivale a

$$\psi \neq k_2.$$

A última desigualdade sempre se verifica, pois a condição de $W \neq 0$ impede que ψ seja constante.

Finalmente vamos mostrar que, para esta escolha de parâmetros, o sistema dado na equação (3.46) se reduz ao sistema dado na equação (3.51). Primeiramente vamos reescrever cada parcela das somas e produtos da equação (3.46) em termos dos parâmetros escolhidos.

$$\frac{1}{W} = \frac{\alpha}{\eta^2(b\psi_{y_1} - a\psi_{z_1})},$$

$$
\begin{aligned}
gh_{y_1} - hg_{y_1} &= -a\frac{\eta^2}{\alpha}\psi + \frac{\eta^2}{\alpha}(ay_1 + bz_1)\psi_{y_1},\\
hg_{z_1} - gh_{z_1} &= b\frac{\eta^2}{\alpha}\psi - \frac{\eta^2}{\alpha}(ay_1 + bz_1)\psi_{z_1},\\
(\mu h - \delta\lambda g)_{y_1} &= \frac{1}{\alpha}(\beta^2 - \delta\alpha^2)\psi_{y_1} - a\frac{\beta}{\alpha},\\
(\mu h - \delta\lambda g)_{z_1} &= \frac{1}{\alpha}(\beta^2 - \delta\alpha^2)\psi_{z_1} - b\frac{\beta}{\alpha},
\end{aligned}
$$

$$Q_z z_1 - Q_y y_1 = k_0(ay_1 + bz_1),$$

$$\psi'(\xi) = \eta k_0,$$

$$\psi''(\xi) = 0,$$

$$\eta Q - \psi(\xi) = -\alpha k_0 k_2,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(h^2 - \delta g^2)_{z_1} &= hh_{z_1} - \delta g g_{z_1} =\\
&= \eta^2\psi\psi_{z_1}\frac{1}{\alpha^2}(\beta^2 - \delta\alpha^2) - \frac{\eta}{\alpha}(ay_1 + bz_1)\left(\eta\frac{\beta}{\alpha}\psi_{z_1} - b\frac{\eta}{\alpha}\right) - b\eta^2\frac{\beta}{\alpha^2}\psi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(h^2 - \delta g^2)_{y_1} &= hh_{y_1} - \delta g g_{y_1} =\\
&= \eta^2\psi\psi_{y_1}\frac{1}{\alpha^2}(\beta^2 - \delta\alpha^2) - \frac{\eta}{\alpha}(ay_1 + bz_1)\left(\eta\frac{\beta}{\alpha}\psi_{y_1} - a\frac{\eta}{\alpha}\right) - a\eta^2\frac{\beta}{\alpha^2}\psi.
\end{aligned}
$$

Substituindo as relações acima no sistema (3.46) e reordenando os termos obtemos o sistema (3.51). Além disso as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, são obtidas por substituição direta, dos parâmetros escolhidos, nas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, dadas no Teorema 3.5, item II. $\square$

Observação 3.3. O sistema (3.51) é equivalente a condição de integrabilidade (0.7), da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} 1 & \psi + \frac{1}{\alpha}(ay_1 + bz_1 - \beta) \\ \psi + \frac{1}{\alpha}(\beta - ay_1 - bz_1) & -1 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{\eta(k_0ay + k_0bz + k_1)}{2}\begin{pmatrix} 1 & \psi - \frac{1}{\alpha}(\beta - ay_1 - bz_1) \\ \psi + \frac{1}{\alpha}(\beta - ay_1 - bz_1) & -1 \end{pmatrix} +\\
&+ \frac{k_0}{2}\begin{pmatrix} \alpha k_2 & \alpha - \beta \\ \alpha + \beta & -\alpha k_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

caso $\delta = 1$, ou,

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} i & \psi + i\frac{1}{\alpha}(\beta - ay_1 - bz_1) \\ -\psi + i\frac{1}{\alpha}(\beta - ay_1 - bz_1) & -i \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\eta(k_0ay + k_0bz + k_1)}{2}\begin{pmatrix} i & \psi + i\frac{1}{\alpha}(\beta - ay_1 - bz_1) \\ -\psi + i\frac{1}{\alpha}(\beta - ay_1 - bz_1) & -i \end{pmatrix} + \\ &+\frac{k_0}{2}\begin{pmatrix} i\alpha k_2 & \alpha + i\beta \\ -\alpha + i\beta & -i\alpha k_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

caso $\delta = -1$.

Alternativamente, o sistema (3.51) é equivalente a condição de integrabilidade (0.12), da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \eta\psi & \eta \\ \delta\eta\psi & 0 & \frac{\eta}{\alpha}(ay_1 + bz_1 + \beta) \\ \delta\eta & \frac{\eta}{\alpha}(ay_1 + bz_1 + \beta) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & \eta q\psi + \alpha k_0 & \eta q + \alpha k_0 k_2 \\ \delta\eta q\psi + \delta\alpha k_0 & 0 & \frac{\eta}{\alpha}q(ay_1 + bz_1 - \beta) - \beta k_0 \\ \delta\eta q + \delta\alpha k_0 k_2 & \frac{\eta}{\alpha}q(ay_1 + bz_1 - \beta) - \beta k_0 & 0 \end{pmatrix},$$

com $\delta = 1$ (resp. $\delta = -1$) e $q = (k_0ay + k_0bz + k_1)$.

Terminaremos esta seção com um exemplo obtido através da Proposição 3.3.

Exemplo 3.3. O seguinte sistema descreve superfícies pseudo-esféricas,

$$\begin{cases} u_{xt} = uu_{xx} + v_x + u_x^2, \\ v_{xt} = uv_{xx} + u_x(v_x + 2), \end{cases} \tag{3.52}$$

com funções,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta(v_x + 1), & f_{12} &= \eta u(1 + v_x) + 1, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= \eta u + 1, \\ f_{31} &= -\eta u_x, & f_{32} &= -\eta uu_x, \end{aligned}$$

onde $\eta \neq 0$. De fato, basta utilizar a Proposição 3.3 com as escolhas $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $k_0 = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $\delta = 1$ e $\psi = y_1 + 1$.

Além disso, o sistema (3.52) é condição de integrabilidade da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} 1 & u_x + v_x + 1 \\ v_x - u_x + 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta u + 1 & \eta u(u_x + v_x + 1) + 1 \\ \eta u(v_x - u_x + 1) + 1 & -\eta u - 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, o sistema (3.52) é equivalente a condição de integrabilidade (0.12), da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \eta\begin{pmatrix} 0 & (v_x + 1) & \\ (v_x + 1) & 0 & -u_x \\ & u_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & \eta u(1 + v_x) + 1 & \eta u + 1 \\ \eta u(1 + v_x) + 1 & 0 & -\eta u u_x \\ \eta u + 1 & \eta u u_x & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Família a oito parâmetros.

Nesta subseção apresentaremos uma família a oito parâmetros de sistemas de segunda ordem, do tipo ($S_{2,2}$), que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

No que segue, utilizaremos a seguinte notação para as funções trigonométricas e trigonométricas hiperbólicas introduzidas na equação (1.59). Sejam $\theta \in \mathbb{R}$ um número real e $\epsilon = \pm 1$, denotamos

$$C_\epsilon(\theta) = \begin{cases} \cos(\theta), & \text{se } \epsilon = 1, \\ \cosh(\theta), & \text{se } \epsilon = -1, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad S_\epsilon(\theta) = \begin{cases} \text{sen}(\theta), & \text{se } \epsilon = 1, \\ \text{senh}(\theta), & \text{se } \epsilon = -1. \end{cases} \tag{3.53}$$

Recordamos que valem as seguintes identidades. Para todo número real, θ, e para $\epsilon = \pm 1$,

$$C_\epsilon^2(\theta) + \epsilon S_\epsilon^2(\theta) = 1, \tag{3.54}$$

$$C_\epsilon^2(\theta/2) - \epsilon S_\epsilon^2(\theta/2) = C_\epsilon(\theta), \tag{3.55}$$

$$2C_\epsilon(\theta/2)S_\epsilon(\theta/2) = S_\epsilon(\theta). \tag{3.56}$$

Proposição 3.4. *O seguinte sistema descreve superfícies pseudo-esféricas (resp. esféricas),*

$$\begin{cases} z_{1,t} = \delta ab S_\delta(\theta)(z_1\psi - k_2) - \delta b^2 C_\delta(\theta)(y_1\psi + k_1) + \delta k_0 z + Q_0 z_2, \\ y_{1,t} = -a^2 C_\delta(\theta)(z_1\psi - k_2) - \delta ab S_\delta(\theta)(y_1\psi + k_1) + \delta k_0 y + Q_0 y_2, \end{cases} \tag{3.57}$$

onde $Q_0, a, b, \theta, k_0, k_1, k_2, k_3$, *são oito constantes reais tais que* $Q_0 k_0 ab \neq 0$, ψ *é uma função de* (z, y) *dada por,*

$$\psi = k_0\left(\frac{C_\delta(\theta)}{2ab}(a^2z^2 - \delta b^2 y^2) + \delta S_\delta(\theta) zy\right) - ab(k_1 z + k_2 y + k_3),$$

e $\delta = 1$ *(resp.* -1*). Neste caso, as funções* f_{ij} *associadas são dadas por,*

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta\left(aS_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right) z_1 - bC_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right) y_1\right), & f_{12} &= Q_0 f_{11} + \tfrac{1}{\eta}(bC_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\psi_z + aS_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\psi_y), \\ f_{21} &= \eta^2, & f_{22} &= \eta^2 Q_0 + \tfrac{1}{\eta^2}k_0 - ab\psi, \\ f_{31} &= \eta(aC_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right) z_1 + \delta bS_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right) y_1), & f_{32} &= Q_0 f_{31} + \tfrac{1}{\eta}(aC_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\psi_y - \delta bS_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\psi_z), \end{aligned} \tag{3.58}$$

onde $\eta \neq 0$ *é um parâmetro real.*

Demonstração. Considere $Q_0, a, b, \theta, k_0, k_1, k_2, k_3$ oito constantes, ψ função de (z, y) e η um parâmetro real não nulo como enunciados. Aplicaremos o Caso III) do Teorema 3.5, com as escolhas,

$$\eta \to \eta^2,$$
$$Q \to Q_0,$$
$$a_1 \to \eta a S_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right), \quad a_3 \to \eta a C_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right),$$
$$b_1 \to -\eta b C_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right), \quad b_3 \to \eta\delta b S_\delta\left(\tfrac{\theta}{2}\right),$$
$$q \to \eta^2 Q_0 + \tfrac{1}{\eta^2}k_0 - ab\psi.$$

Primeiramente mostraremos que estas escolhas satisfazem as condições do Caso III) do Teorema 3.5, de fato, utilizando a identidade (3.54),

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 = \eta^2 ab \neq 0,$$

pois a, b e η são não nulos.

Notamos também que q_z e q_y são não proporcionais, pois

$$\begin{pmatrix} q_z \\ q_y \end{pmatrix} = -k_0 \begin{pmatrix} a^2 C_\delta(\theta) & \delta ab S_\delta \\ \delta ab S_\delta(\theta) & -\delta b^2 C_\delta(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} + a^2 b^2 \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \tag{3.59}$$

utilizando a identidade (3.54) podemos mostrar que o determinante desta matriz é igual $-\delta a^2 b^2 \neq 0$, sendo z e y linearmente independentes segue que q_z e q_y são linearmente independentes.

Note agora que a última condição do Caso III) do Teorema 3.5 equivale a,

$$Q(a_1z_1 + b_1y_1) - \frac{1}{\eta}(a_1z_1 + b_1y_1)q - \frac{b_1q_z - a_1q_y}{(a_1b_3 - a_3b_1)} \neq 0. \tag{3.60}$$

Vamos mostrar que esta condição é satisfeita. De fato, suponha por contradição que esta expressão é idêntica a zero em um aberto conexo. Derivando esta expressão com respeito a z_1 e y_1 obteremos, respectivamente,

$$a_1Q_0 - \frac{1}{\eta}a_1q = 0,$$
$$b_1Q_0 - \frac{1}{\eta}b_1q = 0.$$

Sendo $a_1 = \eta a S_\delta(\theta/2)$ e $b_1 = -\eta b C_\delta(\theta/2)$ constantes que não se anulam simultaneamente, segue que $q = \eta Q_0$, donde q é constante e $q_z = q_y = 0$ são linearmente dependentes, uma contradição. Assim as escolhas de parâmetros estão nas condições do Caso III) do Teorema 3.5.

Vamos mostrar agora que o sistema (3.57) é obtido a partir do sistema (3.47) através da escolha de parâmetros dado por hipótese. Primeiramente vamos computar, utilizando as identidades (3.54)-(3.56), os termos de cada soma e produto que compõem o sistema (3.47).

$$\gamma = \eta^2 ab, \qquad \alpha = \eta^2 a^2 C_\delta(\theta),$$

$$\beta = -\delta\eta^2 b^2 C_\delta(\theta), \qquad \tau = \delta\eta^2 ab S_\delta(\theta),$$

$$q_z = -k_0a^2C_\delta(\theta)z - \delta abk_0S_\delta(\theta)y + a^2b^2k_1,$$

$$q_y = -\delta k_0abS_\delta(\theta)z + \delta k_0b^2C_\delta(\theta)y + a^2b^2k_2,$$

$$q_{zz} = -k_0a^2C_\delta(\theta), \qquad q_{zy} = -\delta k_0abS_\delta(\theta), \qquad q_{yy} = \delta k_0b^2C_\delta(\theta),$$

$$q - \eta^2Q = \frac{1}{\eta^2}k_0 - ab\psi, \qquad Q_zz_1 + Q_yy_1 = 0,$$

$$q_{zy} + \tau(q - \eta^2Q) = -\delta\eta^2a^2b^2S_\delta(\theta)\psi, \qquad q_{yy} + \beta(q - \eta^2Q) = \delta\eta^2ab^3C_\delta(\theta)\psi,$$

$$q_{zz} + \alpha(q - \eta^2Q) = -\eta^2a^3bC_\delta(\theta)\psi, \qquad q_{zy} + \tau(q - \eta^2Q) = -\delta\eta^2a^2b^2S_\delta(\theta)\psi,$$

$$\beta q_z - \tau q_y = \delta a^2b^2\eta^2\left(k_0z - b^2C_\delta(\theta)k_1 - abS_\delta(\theta)k_2\right),$$

$$-\tau q_z + \alpha q_y = \eta^2a^2b^2\left(\delta k_0y - \delta abS_\delta(\theta)k_1 + a^2C_\delta(\theta)k_2\right).$$

Substituindo as relações acima no sistema (3.47) obtemos o sistema (3.57). Além disso as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, são obtidas por substituição direta, dos parâmetros escolhidos, nas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, dadas no Teorema 3.5, Caso III). $\square$

Observação 3.4. O sistema (3.57) é equivalente à condição de integrabilidade das famílias a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares (0.4) e (0.10) em que as matrizes A, B e $\hat{A}, \hat{B}$, são dadas através das f_{ij} por (3.58)

Corolário 3.3. *O seguinte sistema descreve superfícies pseudo-esféricas*

$$\begin{cases} z_{1,t} = ab\,\mathrm{sen}\,\theta(z_1\psi - k_2) - b^2\cos\theta(y_1\psi + k_1) + k_0 z + Q_0 z_2, \\ y_{1,t} = -a^2\cos\theta(z_1\psi - k_2) - ab\,\mathrm{sen}\,\theta(y_1\psi + k_1) + k_0 y + Q_0 y_2, \end{cases}$$

onde $Q_0, a, b, \theta, k_0, k_1, k_2, k_3$, *são oito constantes reais, tais que* $Q_0 k_0 ab \neq 0$ *e*

$$\psi = k_0\left(\frac{\cos\theta}{2ab}(a^2z^2 - b^2y^2) + \mathrm{sen}\,\theta zy\right) - ab(k_1 z + k_2 y + k_3).$$

Neste caso as funções f_{ij} *associadas são dadas por,*

$$\begin{array}{ll} f_{11} = \eta\left(a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)z_1 - b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y_1\right), & f_{12} = Q_0 f_{11} + \frac{1}{\eta}(b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_z + a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_y), \\ f_{21} = \eta^2, & f_{22} = \eta^2 Q_0 + \frac{1}{\eta^2}k_0 - ab\psi, \\ f_{31} = \eta(a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)z_1 + b\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)y_1), & f_{32} = Q_0 f_{31} + \frac{1}{\eta}(a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_y - b\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_z), \end{array}$$

onde $\eta \neq 0$ *é um parâmetro real.*

Demonstração. Decorre imediatamente da Proposição 3.4 com $\delta = 1$. □

Corolário 3.4. *O sistema descreve superfícies esféricas,*

$$\begin{cases} z_{1,t} = -ab\,\mathrm{senh}\,\theta(z_1\psi - k_2) + b^2\cosh\theta(y_1\psi + k_1) - k_0 z + Q_0 z_2, \\ y_{1,t} = -a^2\cosh\theta(z_1\psi - k_2) + ab\,\mathrm{senh}\,\theta(y_1\psi + k_1) - k_0 y + Q_0 y_2, \end{cases} \tag{3.61}$$

onde $Q_0, a, b, \theta, k_0, k_1, k_2, k_3$, *são oito constantes reais tais que* $Q_0 k_0 ab \neq 0$, ψ *é uma função de* (z, y) *dada por,*

$$\psi = k_0\left(\frac{\cosh\theta}{2ab}(a^2z^2 + b^2y^2) - \mathrm{senh}\,\theta zy\right) - ab(k_1 z + k_2 y + k_3).$$

Neste caso, as funções f_{ij} *associadas são dadas por,*

$$\begin{array}{ll} f_{11} = \eta\left(a\,\mathrm{senh}\left(\frac{\theta}{2}\right)z_1 - b\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)y_1\right), & f_{12} = Q_0 f_{11} + \frac{1}{\eta}(b\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_z + a\,\mathrm{senh}\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_y), \\ f_{21} = \eta^2, & f_{22} = \eta^2 Q_0 + \frac{1}{\eta^2}k_0 - ab\psi, \\ f_{31} = \eta(a\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)z_1 - b\,\mathrm{senh}\left(\frac{\theta}{2}\right)y_1), & f_{32} = Q_0 f_{31} + \frac{1}{\eta}(a\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_y + b\,\mathrm{senh}\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_z), \end{array}$$

onde $\eta \neq 0$ *é um parâmetro real.*

Demonstração. Decorre imediatamente da Proposição 3.4 com $\delta = 1$. □

A seguir apresentaremos um exemplo obtido através do Corolário 3.3.

Exemplo 3.4. O seguinte sistema descreve superfícies pseudo-esféricas,

$$\begin{cases} u_{xt} = u_{xx} + 2uvu_x - u, \\ v_{xt} = v_{xx} - 2uvv_x - v, \end{cases} \tag{3.62}$$

com funções,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \eta(u_x + v_x), & f_{12} &= \eta(u_x + v_x) + \tfrac{1}{\eta}(v - u), \\ f_{21} &= \eta^2, & f_{22} &= \eta^2 - \tfrac{1}{\eta^2} - 2uv, \\ f_{31} &= \eta(u_x - v_x), & f_{32} &= \eta(u_x - v_x) - \tfrac{1}{\eta}(u + v). \end{aligned}$$

De fato, basta utilizar o Corolário 3.3 com as escolhas $Q_0 = 1$, $k_0 = -1$, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Além disso, o sistema (3.62) é condição de integrabilidade da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ e A, B são dados respectivamente por,

$$A = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} \eta & 2v_x \\ 2u_x & -\eta \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2\eta}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\eta} - 2\eta uv & 2v \\ -2u & \frac{1}{\eta} + 2\eta uv \end{pmatrix} + \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} \eta & 2v_x \\ 2u_x & -\eta \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, o sistema (3.62) é equivalente a condição de integrabilidade (0.12), da família a um parâmetro, $\eta \neq 0$, de problemas lineares do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \eta\begin{pmatrix} 0 & u_x + v_x & \eta \\ u_x + v_x & 0 & u_x - v_x \\ \eta & -u_x + v_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & \eta(u_x + v_x) + \frac{1}{\eta}(v - u) & \eta^2 - \frac{1}{\eta^2} - 2uv \\ \eta(u_x + v_x) + \frac{1}{\eta}(v - u) & 0 & \eta(u_x - v_x) - \frac{1}{\eta}(u + v) \\ \eta^2 - \frac{1}{\eta^2} - 2uv & -\eta(u_x - v_x) + \frac{1}{\eta}(u + v) & 0 \end{pmatrix}.$$

Terminaremos esta subseção observando que existe uma relação entre a família de sistemas (3.57) e a família de sistemas estudadas na Proposição 1.3.

Observação 3.5. Tomando o limite $Q_0 \to 0$, na família a oito parâmetros de sistemas (3.57) obteremos um família a sete parâmetros de equações pseudo-esféricas ou esféricas. Observamos que esta família a sete parâmetros, obtida a partir deste limite, coincide com a família dada na Proposição 1.3 no Capítulo 1. Em particular, o sistema obtido no Exemplo 3.4 difere da equação (vetorial) Pohlmeyer-Lund-Regge modificada (1.10) pela adição dos termos de segunda ordem u_{xx} e v_{xx}.

3.3.3 Família a três parâmetros de equações que descrevem superfícies pseudo-esféricas generalizando a equação vetorial "short-pulse".

Nesta subseção apresentaremos uma família, a três parâmetros, de sistemas que descrevem superfícies pseudo-esféricas que contém a equação vetorial "short-pulse"(3.7).

Proposição 3.5. *O sistema abaixo descreve superfícies pseudo-esféricas,*

$$\begin{cases} z_{1,t} = k_0(zyz_2 + yz_1^2 + zz_1y_1) + k_1(zz_2 + z_1^2) + k_2\left(yz_2 + z_1y_1 + \frac{1}{k_0}\right) + k_3z_2 + z, \\ y_{1,t} = k_0\left(zyy_2 + zy_1^2 + yz_1y_1\right) + k_2(yy_2 + y_1^2) + k_1\left(zy_2 + z_1y_1 + \frac{1}{k_0}\right) + k_3y_2 + y, \end{cases} \tag{3.63}$$

onde $k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ são constantes reais , tais que $k_0 \neq 0$. Neste caso, as funções f_{ij} associadas são dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{\eta_1 k_0}{\eta_2\sqrt{2}}z_1 + \frac{\eta_1\eta_2}{\sqrt{2}}y_1, \\
f_{12} &= f_{11}(k_0zy + k_1z + k_2y + k_3) + \frac{1}{\epsilon k_0\sqrt{2}}\left(\eta_2(k_0y + k_1) - \frac{k_0}{\eta_2}(k_0z + k_2)\right), \\
f_{21} &= \eta_1, \\
f_{22} &= \frac{1}{\eta_1} + \eta_1(k_0zy + k_1z + k_2y + k_3), \\
f_{31} &= \frac{\epsilon\eta_1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{k_0}{\eta_2}z_1 + \eta_2y_1\right), \\
f_{32} &= f_{31}(k_0zy + k_1z + k_2y + k_3) + \frac{1}{k_0\sqrt{2}}\left(\eta_2(k_0y + k_1) + \frac{k_0}{\eta_2}(k_0z + k_2)\right),
\end{aligned}$$

onde η_1, η_2, parâmetros reais não nulos, e $\epsilon = \pm 1$.

Demonstração. É uma consequência do Caso III) do Teorema 3.5 considerando $\delta = 1$ e tomando

- $a_1 \to \dfrac{\eta_1 k_0}{\eta_2\sqrt{2}}$, $b_1 \to \dfrac{\eta_1\eta_2}{\sqrt{2}}$,
- $a_3 \to -\epsilon\dfrac{k_0\eta_1}{\eta_2\sqrt{2}}$, $b_3 \to \epsilon\dfrac{\eta_1\eta_2}{\sqrt{2}}$,

- $\eta \to \eta_1$,
- $Q \to k_0 zy + k_1 z + k_2 y + k_3$,
- $q \to \frac{1}{\eta_1} + \eta_1 Q$,

onde, $k_0 \neq 0$, k_1, k_2 e k_3 são constantes, η_1 e η_2 são dois parâmetros reais não nulos e ϵ é igual a ± 1.

Primeiramente, vamos mostrar que as três condições do Caso III) do Teorema 3.5 são satisfeitas para esta escolha de parâmetros. A primeira delas,

$$a_1 b_3 - \delta a_3 b_1 = \epsilon \eta_1^2 k_0 \neq 0,$$

é satisfeita, pois $k_0 \neq 0$ e $\eta_1 \neq 0$. Para a segunda condição, note que

$$q_z = \eta_1(k_0 y + k_1), \qquad q_y = \eta_1(k_0 z + k_2),$$

são linearmente independentes, pois $\eta_1 k_0 \neq 0$ e z, y são linearmente independentes. A última condição, com esta escolha de parâmetros equivale a seguinte desigualdade,

$$\eta_1^2(a_1 z_1 + b_1 y_1) \neq \frac{b_1 q_z - a_1 q_y}{a_1 b_3 - a_3 b_1},$$

o que é verdadeira, pois o lado esquerdo é uma combinação não-trivial das variáveis z_1, y_1 e o lado direito não depende de z_1, y_1. Deste modo, podemos aplicar o Caso III) do Teorema 3.5 para esta escolha de parâmetros.

Vamos mostrar agora que o sistema (3.63) é obtido a partir do sistema (3.47) através da escolha de parâmetros dado por hipótese. Primeiramente vamos computar os termos de cada soma e produto que compõem o sistema (3.47).

$$\gamma = \epsilon \eta_1^2 k_0, \qquad \alpha = 0,$$

$$\beta = 0, \qquad \tau = -k_0 \eta_1^2,$$

$$q_z = \eta_1(k_0 y + k_1), \qquad q_y = \eta_1(k_0 z + k_2),$$

$$q_{zz} = 0, \qquad q_{zy} = \eta_1 k_0, \qquad q_{yy} = 0,$$

$$q - \eta^2 Q = \frac{1}{\eta_1},$$

$$Q_z z_1 + Q_y y_1 = (k_0 y + k_1) z_1 + (k_0 z + k_2) y_1,$$

$$q_{zy} + \tau(q - \eta^2 Q) = 0, \qquad q_{yy} + \beta(q - \eta^2 Q) = 0, \qquad q_{zz} + \alpha(q - \eta^2 Q) = 0,$$

$$\beta q_z - \tau q_y = k_0\eta_1^3(k_0 z + k_2),$$

$$-\tau q_z + \alpha q_y = k_0\eta_1^3(k_0 y + k_1).$$

Substituindo as relações acima no sistema (3.47), considerando $\eta \to \eta_1$ como parâmetro e reordenando os termos obtemos o sistema (3.63). Além disso as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, são obtidas por substituição direta, dos parâmetros escolhidos, nas funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, dadas no Teorema 3.5, Caso III). $\square$

Observação 3.6. O sistema (3.63) é equivalente a condição de integrabilidade (0.7), da família a dois um parâmetro, $\eta_1 \neq 0, \eta_2 \neq 0$, de problemas lineares

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = A\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi,$$

onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$,

$$A = \frac{\eta_1}{2}\begin{pmatrix} 1 & (1+\epsilon)\frac{k_0}{\eta_2\sqrt{2}}z_1 + (1-\epsilon)\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}y_1 \\ (1-\epsilon)\frac{k_0}{\eta_2\sqrt{2}}z_1 + (1+\epsilon)\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}y_1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = (k_0 zy + k_1 z + k_2 y + k_3)A + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\eta_1} & \frac{\eta_2(\epsilon-1)}{k_0\sqrt{2}}(k_0 y + k_1) - \frac{1+\epsilon}{\eta_2\sqrt{2}}(k_0 z + k_2) \\ \frac{\eta_2(1+\epsilon)}{k_0\sqrt{2}}(k_0 y + k_1) + \frac{1-\epsilon}{\eta_2\sqrt{2}}(k_0 z + k_2) & -\frac{1}{\eta_1} \end{pmatrix},$$

com $\epsilon = \pm 1$.

Alternativamente, o sistema (3.63) é equivalente a condição de integrabilidade (0.12), da família a dois parâmetros, $\eta_1 \neq 0, \eta_2 \neq 0$, de problemas lineares

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi} = \hat{A}\hat{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \hat{B}\hat{\Psi},$$

onde $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3)^T$,

$$\hat{A} = \frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \frac{k_0}{\eta_2}z_1 + \eta_2 y_1 & \sqrt{2} \\ \frac{k_0}{\eta_2}z_1 + \eta_2 y_1 & 0 & \epsilon\frac{k_0}{\eta_2}z_1 + \epsilon\eta_2 y_1 \\ \sqrt{2} & -\epsilon\frac{k_0}{\eta_2}z_1 - \epsilon\eta_2 y_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \hat{B} &= (k_0 zy + k_1 z + k_2 y + k_3)\hat{A} + \\ &+\frac{1}{k_0\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \epsilon\eta_2(k_0 y + k_1) - \epsilon\frac{k_0}{\eta_2}(k_0 z + k_2) & \dfrac{k_0\sqrt{2}}{\eta_1} \\ \epsilon\eta_2(k_0 y + k_1) - \epsilon\frac{k_0}{\eta_2}(k_0 z + k_2) & 0 & \epsilon\eta_2(k_0 y + k_1) + \frac{\epsilon k_0}{\eta_2}(k_0 z + k_2) \\ \dfrac{k_0\sqrt{2}}{\eta_1} & -\epsilon\eta_2(k_0 y + k_1) - \frac{\epsilon k_0}{\eta_2}(k_0 z + k_2) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Encerraremos esta seção com um exemplo mostrado que a equação vetorial do tipo “short-pulse” pertence a família a três parâmetros dada na Proposição 3.5.

Exemplo 3.5. A equação vetorial do tipo "short-pulse", ver equação (3.7), pode ser obtida através da Proposição 3.5 sob as escolhas, $k_0 = \frac{1}{2}$ e $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Apêndice A

Um lema técnico.

Neste apêndice estamos interessados em classificar as soluções locais para a seguinte equação,

$$\psi_{0,z}z_1 + \psi_{0,y}y_1 - \epsilon\rho_1\psi_2 + \epsilon\rho_2\psi_1 = 0, \tag{A.1}$$

com funções incógnitas ψ_i, $i = 0, 1, 2$, que dependem de variáveis (z, y) e funções ρ_j, $j = 1, 2$, que dependem das variáveis (z_1, y_1) e $\epsilon = \pm 1$, satisfazendo a seguinte condição genérica,

$$\rho_{1,z_1}\rho_{2,y_1} - \rho_{1,y_1}\rho_{2,z_1} \neq 0. \tag{A.2}$$

A utilidade desta classificação é evidente na demonstração dos Teoremas 1.2 e 1.3.

Lema A.1. *Sejam ψ_i, $i = 0, 1, 2$, funções suaves das variáveis (z, y) e ρ_i, $i = 1, 2$, funções suaves das variáveis (z_1, y_1) definidas em subconjuntos abertos e conexos de $\mathbb{R}^2$ e $\epsilon = \pm 1$ uma constante. Então, estas cinco funções satisfazem a equação (A.1) com a condição genérica (A.2) se, e somente se, um dos três casos ocorre,*

(I) $\psi_0 = c \in \mathbb{R}$ é uma constante, $\psi_1 = \psi_2 = 0$ são nulas e ρ_1 e ρ_2 são funções arbitrárias satisfazendo $\rho_{1,z_1}\rho_{2,y_1} - \rho_{1,y_1}\rho_{2,z_1} \neq 0$;

(II) $\psi_0 = \phi(\xi)$, onde ϕ é uma função suave real, não constante, aplicada em $\xi = ay + bz$ e a, b são constantes reais, tais que $a^2 + b^2 \neq 0$, $\psi_1 = \lambda\phi'(\xi)$, $\psi_2 = \mu\phi'(\xi)$, onde $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ e $\phi'(\xi)$ é a derivada de ϕ aplicada em ξ, $\rho_1 = g$, $\rho_2 = h$ onde g, h são funções de (z_1, y_1) satisfazendo $g_{z_1}hy_1 - gy_1hz_1 \neq 0$ e $\mu g - \lambda h = \epsilon ay_1 + \epsilon bz_1$;

(III) $\rho_i = a_iz_1 + b_iy_1$, $i = 1, 2$ onde a_i, b_i, $i = 1, 2$ são constantes reais tais que $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, $\psi_0 = p$ e p é uma função suave de (z, y) tal que p_z e p_y não são proporcionais e $\psi_i = \dfrac{\epsilon}{a_1b_2 - b_1a_2}(b_ip_z - a_ip_y)$, $i = 1, 2$.

Demonstração. Considere $\epsilon = \pm 1$, $\psi_i : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\rho_j : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções reais suaves, $0 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 2$, funções reais suaves em $U, U_1 \subset \mathbb{R}^2$ subconjuntos abertos e conexos de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas $(z, y) \in U$ e $(z_1, y_1) \in U_1$ respectivamente. A demonstração do lema é feita considerando os casos em que ψ_1 e ψ_2, são ambos nulos ou linearmente dependentes ou linearmente independentes.

Para demonstrar a condição suficiente, basta checar que as funções dadas nos três casos satisfazem as equações (A.1) e (A.2).

Vamos mostrar a condição necessária. Suponha que funções ψ_i, $i = 0, 1, 2$, e ρ_j, $j = 1, 2$, satisfaça a equação (A.1). Diferenciando (A.1) com respeito a z_1 e y_1 obtemos $\psi_{0,z}$ e $\psi_{0,y}$,

$$\begin{pmatrix} \psi_{0,z} \\ \psi_{0,y} \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} -\rho_{2,z_1} & \rho_{1,z_1} \\ -\rho_{2,y_1} & \rho_{1,y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Pela hipótese dada na equação (A.2), o determinante desta matriz $\rho_{1,z_1}\rho_{2,y_1} - \rho_{1,y_1}\rho_{2,z_1} \neq 0$, e assim esta matriz é inversível. Isso nos permite expressar ψ_1 e ψ_2,

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{\rho_{1,z_1}\rho_{2,y_1} - \rho_{1,y_1}\rho_{2,z_1}} \begin{pmatrix} \rho_{1,y_1} & -\rho_{1,z_1} \\ \rho_{2,y_1} & -\rho_{2,z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{0,z} \\ \psi_{0,y} \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Vamos considerar três casos. O primeiro caso será dado considerando que ψ_1 e ψ_2 são identicamente nulas. Os dois últimos casos correspondem a situação em que ψ_1 e ψ_2 são linearmente dependentes ou linearmente independentes.

(I) Note que ψ_1 e ψ_2 serem funções nulas em um aberto de U é equivalente a ψ_0 ser localmente constante neste aberto. Neste caso a equação (A.1) é trivialmente satisfeita para toda ρ_1 e ρ_2 satisfazendo (A.2). O que demonstra a condição necessária do item (I).

Suponhamos sem perda de generalidade que $\psi_1^2 + \psi_2^2 \neq 0$ em U, exceto em um subconjunto de medida nula. Vamos considerar dois casos dependendo se ψ_1 e ψ_2 são linearmente dependentes ou linearmente independentes em U.

(II) Suponha que existem $\hat{A}, \hat{B} \in \mathbb{R}$ constantes reais tais que $\hat{A}^2 + \hat{B}^2 \neq 0$ e $\hat{A}\psi_1 + \hat{B}\psi_2 = 0$ em U, isto é, ψ_1 e ψ_2 são linearmente dependentes.

Afirmamos $\psi_{0,z}$ e $\psi_{0,y}$ são linearmente dependentes, ou seja, existe um par de constantes $\bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{R}$, tais que $\bar{A}^2 + \bar{B}^2 \neq 0$ e $\bar{A}\psi_{0,z} + \bar{B}\psi_{0,y} = 0$ em U. De fato, substituindo ψ_1 e ψ_2, dadas na equação (A.4), na relação $\hat{A}\psi_1 + \hat{B}\psi_2 = 0$ obtemos

$$\psi_{0,z}\left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{y_1} = \psi_{0,y}\left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{z_1}. \tag{A.5}$$

Sabemos que $\psi_{0,z}^2 + \psi_{0,y}^2 \neq 0$ em U, pois, caso contrário, a equação (A.4) implicaria que $\psi_1 = \psi_2 = 0$ em U, o que é uma contradição. Assim, em U, vale sempre uma das duas

$$\frac{\psi_{0,z}}{\psi_{0,y}}\left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{y_1} = \left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{z_1}, \tag{A.6}$$

ou

$$\frac{\psi_{0,y}}{\psi_{0,z}}\left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{z_1} = \left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{y_1}. \tag{A.7}$$

Observe que $\left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{z_1} \neq 0$ ou $\left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{y_1} \neq 0$ em um subconjunto denso de U_1, pois caso contrário, se ambas expressões se anularem em algum subconjunto aberto de U_1, teremos que os vetores $(\rho_{1,z_1}, \rho_{1,y_1})$ e $(\rho_{2,y_1}, \rho_{2,z_1})$ seriam linearmente dependentes neste aberto, assim o determinante da matriz Jacobiana entre ρ_1 e ρ_2 seria nulo neste subconjunto, daí $\rho_{1,z_1}\rho_{2,y_1} - \rho_{1,y_1}\rho_{2,z_1} = 0$, o que é uma contradição com a equação (A.2). Deste modo $\left(\hat{A}f_{11} + \hat{B}f_{21}\right)_{y_1} \neq 0$ na equação (A.6) e, respectivamente, $\left(\hat{A}f_{11} + \hat{B}f_{31}\right)_{z_1} \neq 0$ na equação (A.7), o que implica em

$$\frac{\psi_{0,z}}{\psi_{0,y}} = \frac{\left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{z_1}}{\left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{y_1}}, \tag{A.8}$$

ou

$$\frac{\psi_{0,y}}{\psi_{0,z}} = \frac{\left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{y_1}}{\left(\hat{A}\rho_1 + \hat{B}\rho_2\right)_{z_1}}. \tag{A.9}$$

Em ambos os casos temos então uma separação de variáveis, ou seja, o lado esquerdo depende somente de (z, y) e o lado direito de (z_1, y_1), o que implica que nos ambos lados devem ser constantes. Deste modo, (A.8) e (A.9) restritas a um subconjunto aberto e conexo, implicam que deve existir um par de constantes, $\bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{R}$, tais que $\bar{A}^2 + \bar{B}^2 \neq 0$ e $\bar{A}\psi_{0,z} + \bar{B}\psi_{0,y} = 0$ em um subconjunto conexo denso de U, já que ψ_0 é suave, estas relações devem valer em todo conjunto U, o que demonstra a afirmação feita.

Agora, podemos ver a relação $\bar{A}\psi_{0,z} + \bar{B}\psi_{0,y} = 0$ como uma equação diferencial parcial de primeira ordem para a função ψ_0, cuja solução geral para ψ_0 é do tipo

$$\psi_0 = \phi(\xi), \qquad \xi = ay + bz, \tag{A.10}$$

onde, ϕ é uma função real suave definida em ξ, em que $a = -\bar{A}$ e $b = \bar{B}$. Retomando com ψ_0 na equação (A.4), temos,

$$\psi_1 = \frac{\epsilon\phi'(\xi)}{\rho_{1,z_1}\rho_{2,y_1} - \rho_{1,y_1}\rho_{2,z_1}}\left(b\rho_{1,y_1} - a\rho_{1,z_1}\right), \tag{A.11}$$

$$\psi_2 = \frac{\epsilon\phi'(\xi)}{\rho_{1,z_1}\rho_{2,y_1} - \rho_{1,y_1}\rho_{2,z_1}}\left(b\rho_{2,y_1} - a\rho_{2,z_1}\right). \tag{A.12}$$

Daí vemos que ψ_0 não pode ser constante, isto é, $\phi'(\xi) \neq 0$, caso contrário $\psi_1^2 + \psi_2^2 = 0$, um absurdo. Assim podemos dividir estas expressões por $\phi'(\xi)$ e por separação de variáveis, garantimos que existem constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\psi_1 = \lambda\phi'(\xi), \tag{A.13}$$

$$\psi_2 = \mu\phi'(\xi), \tag{A.14}$$

$$b\rho_{1,y_1} - a\rho_{1,z_1} - \lambda\epsilon(\rho_{1,z_1}\rho_{2,y_1} - \rho_{1,y_1}\rho_{2,z_1}) = 0, \tag{A.15}$$

$$b\rho_{2,y_1} - a\rho_{2,z_1} - \mu\epsilon(\rho_{1,z_1}\rho_{2,y_1} - \rho_{1,y_1}\rho_{2,z_1}) = 0. \tag{A.16}$$

Ainda mais, as equações (A.13) e (A.14) implicam que $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, pois, caso contrário $\psi_1^2 + \psi_2^2 = 0$ e teríamos uma contradição. As equações (A.15) e (A.16) implicam que

$$\begin{pmatrix} \epsilon a \\ \epsilon b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda\rho_{2,y_1} + \mu\rho_{1,y_1} \\ -\lambda\rho_{2,z_1} + \mu\rho_{1,z_1} \end{pmatrix}.$$

Esta última equação implica que esta combinação linear $-\lambda\rho_2 + \mu\rho_1$ deve depender linearmente das variáveis z_1 e y_1, isto é,

$$-\lambda\rho_2 + \mu\rho_1 = \epsilon a y_1 + \epsilon b z_1 + c,$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Mostraremos que a equação (A.1) é equivalente a $c = 0$ na expressão acima. De fato

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_{0,z}z_1 + \psi_{0,y}y_1 - \epsilon\rho_1\psi_2 + \epsilon\psi_1\rho_2 \\ &= \phi'(\xi)bz_1 + \phi'(\xi)ay_1 - \epsilon\rho_1\mu\phi'(\xi) + \epsilon\rho_2\lambda\phi' \\ &= (\epsilon bz_1 + \epsilon ay_1 - \mu\rho_1 + \lambda\rho_2)\,\epsilon\phi'(\xi) \\ &= -c\epsilon\phi'(\xi), \end{aligned} \tag{A.17}$$

como ϕ não é constante devemos ter $c = 0$. Por último considerando $\rho_1 = g$ e $\rho_2 = h$, em que g e h são funções suaves de (z_1, y_1) satisfazendo $g_{z_1}h_{y_1} - g_{y_1}h_{z_1} \neq 0$ e $\mu g - \lambda h = \epsilon a y_1 + \epsilon b z_1$, completamos a prova do item (II).

(III) Supomos que ψ_1 e ψ_2 são linearmente independentes em U.

Tomando derivadas duplas da equação (A.3) com respeito a z_1, y_1 temos que as derivadas duplas de ρ_1 e ρ_2 se anulam. Isto implica que existem constantes reais $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$, tais que,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= a_1z_1 + b_1y_1 + c_1, \\ \rho_2 &= a_2z_1 + b_2y_1 + c_2, \quad \text{em} \quad U_1. \end{aligned}$$

Para ρ_1 e ρ_2 dadas como acima, temos que a equação (A.3) é equivalente a,

$$\begin{pmatrix} \psi_{0,z} \\ \psi_{0,y} \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \tag{A.18}$$

Além disso, a equação (A.1) equivale a,

$$-c_1\psi_2 + c_2\psi_1 = 0. \tag{A.19}$$

Já que, ψ_1 e ψ_2 são linearmente independentes, temos que $c_1 = c_2 = 0$, de modo que a equação (A.1) é satisfeita. Pela equação (A.4) temos que $\psi_i = \frac{\epsilon}{a_1b_3 - b_1a_3}(b_i\psi_{0,z} - a_i\psi_{0,y})$, para $i = 1, 2$. Além disso note que $\psi_{0,z}$ e $\psi_{0,y}$ são linearmente independentes. O que demonstra o item (III). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. Newell, H. Segur, *The inverse scattering transform Fourier analysis for nonlinear problems*, Stud. Appl. Math. 53 (1974), 249-315.

[2] V. E. Adler, A. B. Shabat, R. I. Yamilov. *Symmetry approach to the integrability problem* Theoretical and Mathematical Physics, Vol. 125, No. 3, (2000), 1603-1661.

[3] R. Beals, M. Rabelo, K. Tenenblat, *Bäcklund transformations and inverse scattering for some pseudo-spherical surface equations*, Stud. Appl. Math. 81 (1998) 125-151.

[4] A. G. Bytsko *The Zero-Curvaure Representation for the Nonlinear $o(3)$ Sigma-Model*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 85, No. 1, 1997, 1619-1628. (Translated from Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, Vol. 215 (1994) pp. 100-114.)

[5] F. Calogero and A. Degasperis *Spectral Transform and Solitons: Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations* Studies in Mathematics and Its Applications 13, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1982.

[6] M. P. do Carmo *Geometria Riemanniana* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2a edição, 1988.

[7] T. Castro Silva, K. Tenenblat, *Third order differential equations describing pseudospherical surfaces*, J. Differential Equations 259 (2015) 4897-4923.

[8] D. Catalano Ferraioli, L. A, de Oliveira Silva *Second order evolution equations which describe pseudospherical surfaces*, J. Differential Equations 260 (2016) 8072-8108.

[9] D. Catalano Ferraioli, K. Tenenblat, *Fourth order evolution equations wich describe pseudospherical surfaces*, J. Differential Equations 257 (2014) 3165-3199.

[10] D. Catalano Ferraioli, T. Castro Silva, K. Tenenblat, *A class of quasilinear second order partial differential equations which describe spherical or pseudospherical surfaces*, Journal of Differential Equations, Volume 268, Issue 11, (2020), 7164-7182.

[11] J. Cavalcante, K. Tenenblat *Conservation laws for nonlinear evolution equations*, J. Math. Phys. 29 (1988) 1044-1049.

[12] S. S. Chern, K. Tenenblat *Pseudo-Spherical surfaces and evolution equations*, Stud. Appl. Math. 74 (1986), 55-83.

[13] Q. Ding, K. Tenenblat *On differential systems describing surfaces of constant curvature*, J. Differential Equations 184 (2002), 185-214.

[14] Q. Ding, K. Tenenblat *Gauge equivalence of differential equations describing surfaces of constant Gaussian curvature*, International Journal of Differential Equations and Applications, v. 4, n.3, (2002), 273-284.

[15] A. P. Fordy, J. Gibbons *Integrable Nonlinear Klein-Gordon Equations and Toda Lattices* Commun. Math. Phys. 77 (1980) 21-30.

[16] V. P. Gomes Neto, *Fifth-order evolution equations describing pseudospherical surfaces*, J. Differential Equations 249 (2010) 2822-2865.

[17] T. A. Ivey, J. M. Landsberg, *Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*, Graduate studies in mathematics, v. 61, 2003.

[18] L. Jorge, K. Tenenblat, *Linear problems associated to evolution equations of type* $u_{tt} = F(u, u_x, u_{xx}, u_{ut})$, Stud. Appl. Math. 77 (1987) 103-117.

[19] N. Kamran, K. Tenenblat, *On differential equations describing pseudospherical surfaces*, J. Differential Equations 115 (1995) 71-98.

[20] T. Kikuchi, *Symmetries in third Painlevé equation arising from the modified Pohlmeyer-Lund-Regge hierarchy*, Journal of Mathematical Physics, Vol. 52, 113702 (2011) 1-23.

[21] K. Konno, H. Oono, *New Coupled Integrable Dispersionless Equations*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 63, No. 2, February (1994) 377-378.

[22] K. Konno, H. Kakuhata *Interaction Among Growing, Decaying and Stationary Solitons for Coupled Integrable Dispersionless Equations*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 64, No. 8, August (1995) 2707-2709.

[23] V. P. Kotlyarov *On Equations Gauge Equivalent to the Sine-Gordon and Pohlmeyer-Lund-Regge Equations*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 63, No. 10, October (1997) 3535-3537.

[24] Y. Matsuno *A novel multi-component generalization of the short pulse equation and its multisoliton solutions.* Journal of Mathematical Physics, 52, 123702 (2011) 1-22.

[25] M. Pietrzyk, I. Kanattsikov, U. Bandelow, *On the propagation of vector ultra-short pulses.* Journal of Nonlinear Mathematical Physics Volume 15, Number 2, (2008) 162-170.

[26] M. Rabelo, *On equations which describe pseudo-spherical equations*, Stud. Appl. Math. 81 (1989) 221-248.

[27] M. Rabelo, K. Tenenblat, *On equations of type* $u_{xt} = F(u, u_x)$ *which describe pseudo-spherical surfaces*, J. Math. Phys. 31 (1990) 1400-1407.

[28] M. Rabelo, K. Tenenblat, *A classification of pseudo-spherical surface equations of type* $u_t = u_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx})$, J. Math. Phys. 33 (1992) 537-549.

[29] E. G. Reyes, *Pseudo-spherical surfaces and integrability of evolution equations*, J. Differential Equations 147 (1) (1998) 195-230, Erratum: J. Differential Equations 153 (1) (1999) 223-224.

[30] A. Sakovich, S. Sakovich, *The Short Pulse Equation Is Integrable.* Journal of the Physical Society of Japan, 74 (2005) 239-241.

[31] S. Sakovich, *Integrability of the Vector Short Pulse Equation*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 77, No. 12, December (2008) 123001.

[32] R. Sasaki, *Soliton equations and pseudospherical surfaces*, Nucl. Phys. B, 154, (1979), 343-357.

[33] K. Tenenblat, *Transformations of Manifolds and Applications to Differential Equations* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 93, ISBN 0 582 316197, 1998.

[34] M. Watadi, K. Konno, Y. Ichikawa, *A Generalization of the Inverse Scattering Method*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 46, No. 6, June (1979) 1965-1966.