Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Critério de Nilpotência para Subgrupos Derivados em Grupos Finitos

por

Josean da Silva Alves

Brasília
2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Critério de Nilpotência para Subgrupos Derivados em Grupos Finitos

por

Josean da Silva Alves

sob orientação do

Prof. Dr. Pavel Shumyatsky

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Critério de Nilpotência para Subgrupos Derivados em Grupos Finitos

por

Josean da Silva Alves

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

Doutor em Matemática

Brasília, 22 Junho de 2021.

Comissão examinadora:

Prof. Dr. Pavel Shumyatsky - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior - MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva - UFG (Membro)

Prof. Dr. Carmine Monetta - University of Salermo (Membro)

Dedicatória

À Deus.

À minha mãe,
Custódia.

Aos meus filhos,
Eduardo e Letícia.

Ao meu avô (in memoriam),
Otávio.

Agradecimentos

Agradeço à Deus pela vida, saúde, capacidade de estudar e por mais essa importante conquista. Ao meu orientador Pavel Shumyatsky, pela orientação, pelos ensinamentos, pela compreensão, pelo comprometimento e pela dedicação a esse trabalho. À minha família por tudo que fizeram por mim. Especialmente a minha mãe Custódia Francisca da Silva, pelo carinho, cuidado, incentivo e por ter acreditado no meu esforço e capacidade de vencer mesmo nas dificuldades da vida acadêmica. Aos meus filhos Eduardo e Letícia pela alegria que trouxeram à minha vida. Ao meu irmão Josinei, pelo amor, carinho e confiança. À minha esposa Janaina Maciel Santos, minha companheira nessa trajetória, pelo amor, pelo carinho e pela presença nos bons e maus momentos compreendendo como ninguém essa fase tão importante na minha vida profissional. À Universidade Federal do Acre e ao Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas pela liberação (institucional) das atividades docentes para realização do doutorado. Aos professores da banca examinadora, Carmine Monetta, Jhone Caldeira e Raimundo Bastos, pelas sugestões e colaborações para a melhoria desta tese. Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB, em especial aos professores Aline Gomes, Cátia Gonçalves, Cristina Acciarri, Igor dos Santos Lima e Martino Garonzi. A todos os professores do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Em especial aos professores José Ivan, José Ronaldo e Sérgio Brazil, pelo estímulo à busca do conhecimento. Aos meus amigos e colegas de doutorado pela amizade, pelas ajudas e pelos momentos vivenciados. Em especial, ao Cleber, Jhon Freddy, Anna Carolina (Carol), Eliana, Quintino, Leonardo (Léo), Fábio, Márcio e Wállef . Enfim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

"...Não existem distâncias

em meu novo mundo."

Alexandre Magno Abrão

Resumo

Sejam G um grupo solúvel finito e $G^{(k)}$ o k-ésimo subgrupo comutador de G. Provamos que $G^{(k)}$ é nilpotente se, e somente se, $|ab| = |a||b|$ para todos δ_k-valores $a, b \in G$ de ordens coprimas. No decorrer da prova, estabelecemos o seguinte resultado de interesse independente: Seja P um p-subgrupo de Sylow de G. Então, $P \cap G^{(k)}$ é gerado pelos δ_k-valores contidos em P. Isso está relacionado ao chamado Teorema do Subgrupo Focal.

Palavras-chave: Nilpotência, Grupo Finito, Série Derivada, Comutadores.

Abstract

Let G be a finite soluble group and $G^{(k)}$ the kth term of the derived series of G. We prove that $G^{(k)}$ is nilpotent if and only if $|ab| = |a||b|$ for any δ_k-values $a, b \in G$ of coprime orders. In the course of the proof we establish the following result of independent interest: If P is a Sylow p-subgroup of G, then $P \cap G^{(k)}$ is generated by δ_k-values contained in P. This is related to the so called Focal Subgroup Theorem.

Keywords: Nilpotence, Finite Group, Derived Series, Commutators.

Lista de Símbolos

G, K, X, Y	grupo, subgrupos, conjuntos, subconjutos.
h, l, m, n	inteiros positivos.
$\pi(G)$	conjunto de números primos que dividem a ordem de G.
a, b, x, y, g	elementos de um grupo/conjunto.
x^y	$y^{-1}xy$.
$\langle X \rangle$	subgrupo gerado pelo subconjunto X.
$\langle X_\lambda; \lambda \in \Lambda \rangle$	subgrupo gerado pelo subconjunto X_λ.
$\|x\|$	ordem do elemento x.
$\|X\|$	ordem (cardinalidade) do conjunto X.
x^G	classe de conjugação de x em G.
X^G	$\{x^g \mid x \in X, g \in G\}$.
w	palavra de grupo.
G_w	conjunto dos w-valores de G.
$w(G)$	subgrupo verbal associado a w em G.
$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$	comutador dos elementos x e y.
$Z(G)$	centro do grupo G.
H^g	$\{y^g \mid y \in H\}$.

H^G	fecho normal de H em G.
H_G	core de H em G.
$C_G(x)$	centralizador do elemento x em G.
$C_G(H)$	centralizador de H em G.
$N_G(H)$	normalizador de H em G.
$[G : H]$	índice do subgrupo H em G.
$N \leq G$	N é um subgrupo do grupo G.
$N < G$	N é um subgrupo próprio do grupo G.
$N \trianglelefteq G$	N é um subgrupo normal do grupo G.
$G_1 \times \ldots \times G_k$	produto cartesiano dos grupos $G_1, \ldots, G_k$.
$N \rtimes H$	produto semidireto de H e N.
$[H, K]$	subgrupo comutador.
G/H	grupo quociente de G pelo subgrupo normal H.
$G' = [G, G]$	subgrupo derivado de G.
$Aut(G)$	grupo de automorfismos de G.
$\gamma_n(G)$	n-ésimo termo da série central inferior de G.
$\gamma_\infty(G)$	o residual nilpotente de um grupo G.
$G^{(n)}$	n-ésimo subgrupo derivado de G.
$Z_n(G)$	n-ésimo centro de G.
$Z_\infty(G)$	hipercentro de G.
$F_i(G)$	i-ésimo termo da série superior de Fitting.
$K_i(G)$	i-ésimo termo da série inferior de Fitting.
$O_p(G)$	p-radical de G.
$F(G)$	subgrupo de Fitting.

Conteúdo

Introdução

Em teoria dos grupos finitos, a nilpotência de um grupo pode ser analizada estudando o comportamento dos seus elementos de ordens coprimas. Baseado nesse conceito, em [5], B. Baumslag e J. Wiegold estabeleceram uma condição suficiente para a nilpotência de um grupo finito G, provando o seguinte resultado:

Teorema 1. *Seja G um grupo finito, tal que, $|ab| = |a||b|$ para todos elementos a e b de ordens coprimas. Então, G é nilpotente.*

Aqui o símbolo $|x|$ representa a ordem do elemento x no grupo G. Nessa tendência, em 2016, uma condição suficiente semelhante foi obtida para o subgrupo comutador G'. R. Bastos e P. Shumyatsky em [2] estabeleceram uma caracterização de grupos finitos cujo subgrupo comutador é nilpotente.

Teorema 2. *Seja G um grupo finito, tal que, $|ab| = |a||b|$ para todos comutadores a e b de ordens coprimas. Então, G' é nilpotente.*

O Teorema 2 representa a primeira tentativa bem sucedida de estender o Teorema 1 ao universo das palavras de grupos.

Em ambos os resultados, as condições anteriormente mencionadas são necessárias para a nilpotência de G e G', respectivamente. Neste trabalho, um dos nossos objetivos é obter um critério similar de nilpotência para os termos da série derivada de um grupo finito G. No entanto, nossa motivação para esse estudo é baseada em um problema mais geral sobre subgrupos verbais.

Antes de mencionar tal problema, vamos relembrar algumas notações e alguns conceitos. Lembre-se que uma palavra (ou palavra de grupo) é um elemento não-trivial do grupo livre $F = F(X)$, onde $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ é o conjunto de geradores livres de F. Sejam G um grupo e $w = w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma palavra. Dados $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$, o elemento $w(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ é chamado de w-valor em G. O conjunto de todos os w-valores é denotado por G_w, isto é, $G_w = \{w(g_1, g_2, \ldots, g_n) \mid g_i \in G\}$. Definimos o subgrupo verbal de G associado a w, denotado por $w(G)$, como sendo o subgrupo de G gerado por todos os w-valores, ou seja, $w(G) = \langle G_w \rangle$. A palavra w é chamada **palavra comutador** se $w \in F'$. Essencialmente, w é uma palavra comutador se, e somente se, a soma dos expoentes de cada variável envolvida em w é igual a zero. Os Teoremas 1 e 2 mostram que a nilpotência dos subgrupos verbais G e G' é verificada impondo condições sob as ordens dos w-valores para $w = x$ e $w = [x, y]$, respectivamente. Em razão disto, somos motivados a questionar se um critério de nilpotência semelhante vale para outras palavras comutadores. Nossas discusões estão focadas em fatos relacionados ao problema a seguir, ainda em aberto, sugerido por R. Bastos e P. Shumyatsky em [2].

Problema 3. *Sejam w uma palavra comutador multilinear e G um grupo finito, tal que $|ab| = |a||b|$ para todos w-valores a e b de ordens coprimas em G. Então, o subgrupo verbal $w(G)$ é nilpotente?*

Uma palavra w é um comutador multilinear de peso k quando w possui a forma de um comutador obtido do agrupamento de comutadores simples usando sempre variáveis distintas (um monômio multilinear de Lie em exatamente k variáveis independentes). Lembremos que as famílias mais importantes de palavras comutadores multilineares são as palavras γ_k e δ_k.

A palavra γ_k indica a k-ésima palavra central inferior definida indutivamente da seguinte forma:

$$\gamma_1(g_1) = g_1 \text{ e } \gamma_k(g_1, \ldots, g_k) = [\gamma_{k-1}(g_1, \ldots, g_{k-1}), g_k],$$

onde $g_i \in G$ para todo i. Naturalmente, o subgrupo verbal associado à palavra γ_k é o k-ésimo termo da série central inferior de G.

Já a palavra δ_k indica a k-ésima palavra derivada definida indutivamente da seguinte forma:

$$\delta_0(g_1) = g_1 \text{ e } \delta_k(g_1, \ldots, g_{2^k}) = [\delta_{k-1}(g_1, \ldots, g_{2^{k-1}}), \delta_{k-1}(g_{2^{k-1}+1}, \ldots, g_{2^k})],$$

onde $g_i \in G$ para todo i. Evidentemente, o subgrupo verbal associado à palavra δ_k é o k-ésimo termo da série derivada de G.

É importante observar que a condição mencionada para w, que é uma palavra comutador multilinear no Problema 3, é essencial, pois um problema semelhante para $w = x^n$, que é uma palavra não-comutador, tem resposta negativa (veja detalhes na p. 56).

Ainda a respeito do Problema 3, R. Bastos, C. Monetta e P. Shumyatsky em [3] provaram que a resposta é positiva sempre que w é uma palavra central inferior. Mais especificamente, demonstraram o resultado a seguir:

Teorema 4. *Seja k um inteiro positivo. O k-ésimo termo da série central inferior de um grupo finito G é nilpotente se, e somente se, $|ab| = |a||b|$ para todos γ_k-comutadores $a, b \in G$ de ordens coprimas.*

Mais recentemente, C. Monetta e A. Tortora estenderam o Teorema 4 para uma família de palavras comutadores (ver [16, Teorema 1.1]), provando o seguinte resultado:

Teorema 5. *Seja $w = [x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}]$ uma palavra comutador, onde $i_1 \neq i_j$ para cada $j \in \{2, 3, \dots, n\}$ e $i_j \in \{1, \cdots, k\}$ para cada j. Se G é um grupo finito, então $w(G)$ é nilpotente se, e somente se, $|ab| = |a||b|$ para todos w-valores $a, b \in G_w$ de ordens coprimas.*

Dos principais resultados que apresentamos nesta tese, um deles refere-se a confirmação do Problema 3 quando G é um grupo solúvel finito e os comutadores multilineares são as palavras derivadas. De fato, obtemos o seguinte resultado:

Teorema *A*. *Seja k um inteiro positivo. O k-ésimo termo da série derivada de um grupo sólúvel finito G é nilpotente se, e somente se, $|ab| = |a||b|$ para todos δ_k-valores $a, b \in G$ de ordens coprimas.*

A demonstração do Teorema A foi obtida com o auxílio dos resultados encontrados pelas aplicações de algumas propriedades fundamentais dos normalizadores de sistemas em grupos solúveis finitos [19, pág. 261].

Um resultado relevante que surgiu no decorrer da prova do Teorema A, está relacionado ao chamado Teorema do Subgrupo Focal, ou seja, dados G um grupo finito e P um p-subgrupo de Sylow de G, uma consequência imediata do Teorema do Subgrupo Focal [10, Teorema 7.3], determina que $P \cap G'$ é gerado por comutadores contidos em

P. Um problema em aberto é se essa consequência do Teorema do Subgrupo Focal pode ser generalizada para outras palavras comutadores. Nesse contexto, C. Acciarri, G. A. Fernández-Alcober e P. Shumyatsky propõem em [1] o seguinte problema:

Problema 6. *Seja w uma palavra de grupo. Suponha que P é um p-subgrupo de Sylow de um grupo finito G. É verdade que $P \cap w(G)$ é gerado por w-valores contidos em P, isto é, $P \cap w(G) = \langle P \cap G_w \rangle$?*

Em relação ao Problema 6, obtemos o seguinte avanço:

Teorema *B*. *Seja k um inteiro positivo. Suponha que P é um p-subgrupo de Sylow de um grupo solúvel finito G. Então, $P \cap G^{(k)}$ é gerado por δ_k-valores contidos em P, isto é, $P \cap G^{(k)} = \langle P \cap G_{\delta_k} \rangle$.*

Esta tese está organizada em dois capítulos, o primeiro apresenta alguns resultados básicos e definições da teoria dos grupos. Além de abordar assuntos como palavras de grupos, comutadores, grupos solúveis e algumas de suas propriedades que serão úteis no capítulo final.

O segundo capítulo foi dividido em três seções, onde o objetivo principal é demonstrar os Teoremas A e B. Na primeira seção, trabalhamos com sistemas de Sylow e normalizadores de sistemas, demonstrando alguns resultados que fornecem informações sobre a estrutura dos grupos solúveis finitos. Na segunda seção provamos o Teorema B. Na última seção, apresentamos um critério de nilpotência em grupos finitos expondo alguns dos principais resultados já publicados e provamos o Teorema A.

Terminamos esta introdução mencionando que existem vários resultados recentes relacionados ao Teorema de Baumslag e Wiegold (veja em particular [9, 17, 16, 4, 11, 15]). Os principais resultados apresentados nesta tese foram publicados em [6].

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo estabelecemos alguns conceitos básicos, definições e resultados preliminares da Teoria dos Grupos que serão utilizados no próximo capítulo. Basicamente, os resultados e notações apresentados nesta tese podem ser encontrados em [10], [19], [12], [13] e [21], entre outras referências clássicas.

1.1 Conceitos Básicos da Teoria dos Grupos

Seja X um subconjunto não-vazio de um grupo G. Definimos o subgrupo gerado por X, denotado por $\langle X \rangle$, como sendo o menor subgrupo de G que contém X. Em outras palavras, $\langle X \rangle$ é a interseção de todos os subgrupos em G que contém X. Note que o subgrupo gerado por X é o conjunto de todos os produtos finitos de elementos em X ou X^{-1}, isto é,

$$\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in X \cup X^{-1}\}.$$

Um grupo G é **finitamente gerado** quando $G = \langle X \rangle$ para algum conjunto finito X.

Dados dois subgrupos H e K de um grupo G, o subgrupo gerado por H e K é $\langle H \cup K \rangle$ e usualmente escrevemos $\langle H, K \rangle$. Em geral, $\langle H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$ denota o subgrupo gerado por uma família arbitrária $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subgrupos.

Sejam x e y elementos de um grupo G. O **conjugado de** x **por** y, denotado por x^y, é o elemento

$$x^y = y^{-1} x y.$$

Definição 1.1.1. *Sejam G um grupo e $x, y \in G$. Dizemos que y é um conjugado de x em G se $y = x^g$ para algum $g \in G$.*

É possível verificar que a relação definida acima é uma relação de equivalência. A classe de equivalência de um elemento $x \in G$, sob essa relação, é chamada de **classe de conjugação** de x e é denotada por x^G. É claro que a classe de conjugação x^G é o conjunto de todos os conjugados de x em G.

Sejam X um subconjunto de um grupo G e $x \in G$. O subconjunto

$$X^g = \{x^g \mid x \in X\}$$

é chamado de **conjunto conjugado** de X por g. Em particular, se X é um subgrupo de G o conjunto $X^g = \{x^g \mid x \in X\}$ é um subgrupo de G chamado de **subgrupo conjugado** de X por g.

Vamos definir agora o subgrupo centralizador de um elemento $x \in G$.

Definição 1.1.2. *Sejam G um grupo e $x \in G$. O **centralizador** de x em G é o subgrupo $C_G(x)$ constituído de todos os elementos de G que comutam com x, isto é,*

$$C_G(x) = \{g \in G \mid xg = gx\}.$$

De modo análogo à definição de centralizador de um elemento $g \in G$, podemos definir o centralizador de um subconjunto arbitrário X de G.

Definição 1.1.3. *Seja X um subconjunto não-vazio de um grupo G. O **centralizador** de X em G é o conjunto*

$$C_G(X) = \{g \in G \mid gx = xg, \textit{ para todo } x \in X\}.$$

Note que $C_G(X)$ é um subgrupo de G. Em particular, quando $X = G$, o centralizador de G em G é chamado de **centro** de G e o denotamos por $Z(G)$. Isto é,

$$Z(G) = C_G(G) = \{y \in G \mid yx = xy, \text{ para todo } x \in G\}.$$

Definição 1.1.4. *Um subgrupo H de um grupo G é um **subgrupo normal** em G se, e somente se, $Hg = gH$ para todo $g \in G$. Usaremos a notação $H \trianglelefteq G$.*

Definição 1.1.5. *Um subgrupo normal H de um grupo G é um **subgrupo normal minimal** se $H \neq 1$ e não existe nenhum subgrupo normal K de G com $1 < K < H$.*

Lema 1.1.6. *Seja H um subgrupo de G. Se $H^g \leq H$ para todo $g \in G$, então H é um subgrupo normal de G.*

Demonstração. Como $H^g \leq H$ para todo $g \in G$, temos:

$$H = (H^g)^{g^{-1}} \leq H^{g^{-1}}.$$

Como o resultado acima vale para qualquer $g \in G$, colocando g^{-1} ao invés de g, obtemos:

$$H \leq H^{(g^{-1})^{-1}} = H^g.$$

Portanto, $H = H^g$.

□

Seja H um subgrupo de um grupo G. O **fecho normal** de H em G, denotado por H^G, é o subgrupo

$$H^G = \langle H^g \mid g \in G \rangle.$$

Em outras palavras, H^G é a interseção de todos os subgrupos normais de G que contém H. Note que H^G é o menor subgrupo normal de G contendo H. O **núcleo normal** ou **core** de H em G, denotado por H_G, é o subgrupo gerado pelos subgrupos normais de G contidos em H. Mais especificamente,

$$H_G = \bigcap_{g \in G} H^g.$$

É claro que H_G é o maior subgrupo normal de G contido em H.

Lembremos que uma aplicação φ de um grupo G em um grupo K é um homomorfismo quando $(xy)^\varphi = x^\varphi y^\varphi$ para quaisquer $x, y \in G$. E dizemos que φ é um isomorfismo de grupos se φ é um homomorfismo bijetivo.

Seja G um grupo. Se φ é um isomorfismo de G em G, então φ é chamado de **automorfismo** do grupo G. O conjunto de todos os automorfismos do grupo G, munido da operação **composição**, é o grupo chamado de **grupo de automofismos** de G que denotamos por $Aut(G)$.

Definição 1.1.7. *Um subgrupo H de um grupo G é um **subgrupo característico** em G, se $H^\varphi = H$ para todo automorfismo φ de G.*

Proposição 1.1.8 ([21], Lema 5.20, p. 104). *Sejam H e K subgrupos de um grupo G.*

(i) *Se H é subgrupo característico em K e K é subgrupo normal em G, então H é subgrupo normal em G;*

(ii) *Se H é subgrupo característico em K e K é subgrupo característico em G, então H é subgrupo característico em G;*

(iii) *Se $H \subseteq K$, H é subgrupo característico em G e K/H é subgrupo característico em G/H, então K é subgrupo característico em G.*

Sejam X e Y subconjuntos de um grupo G. O **produto** de X e Y é o conjunto

$$XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Note que mesmo quando X e Y são subgrupos de G, não podemos garantir que o produto XY é um subgrupo de G. Porém, existem condições nas quais XY é um subgrupo de G.

Lema 1.1.9 ([19], 1.3.13, p. 15). *Sejam H e K dois subgrupos de G. Então, HK é subgrupo de G se, e somente se, $HK = KH$.*

O próximo resultado é simples, mas muito útil.

Teorema 1.1.10 (Lei Modular de Dedekind). *Sejam H, K e L subgrupos de um grupo G com $H \leq L$. Então, $HK \cap L = H(K \cap L)$.*

Demonstração. Seja $x \in HK \cap L$. Então, $x = ab$, onde $a \in H$ e $b \in K$. Como $H \leq L$, $a, a^{-1} \in L$ e $a^{-1}x = b \in L$, vale que $b \in K \cap L$, isto é, $x = ab$, onde $a \in H$ e $b \in K \cap L$. Logo, $x \in H(K \cap L)$. Consequentemente, $HK \cap L \subseteq H(K \cap L)$.

Agora, seja $y \in H(K \cap L)$. Então, $y = ax$, onde $a \in H$ e $x \in K \cap L$. Como $H \leq L$ e $a, x \in L$, segue que $y \in L$. E ainda, $a \in H$ e $x \in K$, logo $y = ax \in HK$. Logo, $y \in HK \cap L$ e, portanto $H(K \cap L) \subseteq HK \cap L$.

□

Do Lema 1.1.9, obtemos a seguinte proporsição.

Proposição 1.1.11 ([12], Corolário 2.28, p. 25). *Sejam H e K dois subgrupos de G. Se $H \lhd G$ ou $K \lhd G$, então $HK = KH$ e, portanto, temos que HK é subgrupo de G. Além disso, se ambos H e K são normais em G, então HK é normal em G.*

Quando um subgrupo H não é subgrupo normal em um grupo G, é importante obter algum subgrupo K de G tal que H é subgrupo normal em K. Partindo desta ideia, vamos definir o normalizador de um subconjunto de G.

Definição 1.1.12. *Seja X um subconjunto de um grupo G. O* ***normalizador*** *de X em G é o conjunto*

$$N_G(X) = \{g \in G \mid X^g = X\}.$$

Lema 1.1.13 ([12], Lema 2.29, p. 26)**.** *Seja X um subconjunto de um grupo G. Então:*

(i) *$N_G(X)$ é subgrupo de G;*

(ii) *Se X é um subgrupo de G, então X é subgrupo de $N_G(X)$.*

Corolário 1.1.14 ([12], Corolário 2.30, p. 26)**.** *Seja H um subgrupo de G. Então:*

(i) *H é subgrupo normal de $N_G(H)$;*

(ii) *se $H \leq K \leq G$, então H é subgrupo normal de K se, e somente se, $K \leq N_G(H)$.*

Sabemos que se H é subgrupo normal em G, pela Proposição 1.1.11, $HK = KH$ e portanto HK é subgrupo de G. Uma consequência deste fato é o resultado a seguir.

Corolário 1.1.15 ([12], Corolário 2.31, p. 26)**.** *Sejam H e K dois subgrupos não-triviais de G. Se $H \subseteq N_G(K)$ ou $K \subseteq N_G(H)$, então o produto HK é um subgrupo de G.*

O próximo passo é introduzir os conceitos de comutadores de elementos e comutadores de subconjuntos não-vazios de um grupo e apresentar alguns resultados acerca deste tópico, com o propósito de fornecer informações para compreender alguns conceitos incluídos na próxima seção.

Sejam x e y elementos de um grupo G. Definimos o **comutador** de x e y, denotado por $[x, y]$, como sendo o elemento

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

Partindo do conceito de comutador entre dois elementos de um grupo G, se $k \geq 3$ e $x_1, x_2, \ldots, x_k$ são elementos em G, definimos de maneira indutiva o comutador simples de k elementos por

$$[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] = [[x_1, \ldots, x_{k-1}], x_k].$$

O lema a seguir apresenta algumas propriedades satisfeitas pelos comutadores de elementos em um grupo.

Lema 1.1.16 ([10], p. 18 à 20)**.** *Sejam x, y e z elementos arbitrários de um grupo G. Então:*

(i) $[y, x] = [x, y]^{-1}$*;*

(ii) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$*;*

(iii) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$*;*

(iv) $[x, y^{-l}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$ *(identidade de Hall-Witt).*

Sejam X e Y subconjuntos não-vazios de um grupo G. O **subgrupo comutador** de X e Y, denotado por $[X, Y]$, é definido como o subgrupo de G gerado pelo conjunto $\{[x, y] \mid x \in X, y \in Y\}$, ou seja,

$$[X, Y] = \langle [x, y] \mid x \in X,\ y \in Y\rangle.$$

Por outro lado, se $k \geq 3$ e $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são subconjuntos de G, o subgrupo comutador de k subconjuntos é difinido indutivamente por

$$[X_1, \ldots, X_{k-1}, X_k] = [[X_1, \ldots, X_{k-1}], X_k].$$

Um caso especial do subgrupo comutador é quando admitimos que $X = Y = G$, ou seja, $[G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G\rangle$, este subgrupo é chamado de **subgrupo derivado** ou **subgrupo comutador** de G e é denotado por G'. Note que o grupo G' é gerado por todos os comutadores em G, mas não consiste, necessariamente, apenas de comutadores.

A seguinte proposição é útil em diversas situações sempre que o conceito de subgrupo comutador for usado.

Proposição 1.1.17 ([10], Teorema 2.1, p. 18)**.** *Sejam H e K subgrupos de um grupo G. Então,* $[H, K] = [K, H]$.

Em geral, $[H, K]$ não é igual ao conjunto dos comutadores dos elementos de H com elementos de K, mas é o subgrupo gerado por este conjunto, ou equivalentemente, $[H, K]$ é o menor subgrupo de G que contém todos esses comutadores.

O próximo lema engloba algumas das propriedades de comutadores de subgrupos mais conhecidas.

Lema 1.1.18 ([10], Teorema 2.1, p. 18)**.** *Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G. Então, as seguintes afirmações valem:*

(i) $[H, K] \trianglelefteq \langle H, K\rangle$;

(ii) $[H, K] \leq H$ *se, e somente se,* $K \leq N_G(H)$. *Em particular,* H *é normal em* G *se, e somente se,* $[H, G] \leq H$;

(iii) *Se H e K são subgrupos normais (característicos) de G, então $[H, K]$ é um subgrupo normal (característico) de G;*

(iv) *Se H é um subgrupo normal de G, então G/H é abeliano se, e somente se, $G' \leq H$;*

(v) *Sejam $K \trianglelefteq G$ e $K \leq H \leq G$. Então, $[G, H] \leq K$ se, e somente se, $H/K \leq Z(G/K)$.*

Lema 1.1.19 ([13], Lema 4.2, p. 114)**.** *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Suponha que K e H são subgrupos de G. Escreva $\overline{G} = G/N$. Denotamos por $\overline{M}$ a imagem de um subgrupo M de G em G/N. Então, $[\overline{H}, \overline{K}] = \overline{[H, K]}$. E, em particular, $\overline{H}$ e $\overline{K}$ centralizam um ao outro em $\overline{G}$ se, e somente se, $[H, K] \subseteq N$.*

A propriedade de comutadores de subgrupos mais relevante em nosso trabalho é apresentada a seguir:

Lema 1.1.20 ([7], 7.4, p. 23)**.** *Sejam K,N e H subgrupos de um grupo G. Se $N \leq N_G(K) \cap N_G(H)$, então $[KN, H] = [K, H][N, H]$.*

Demonstração. Como $N \leq N_G(K)$, pela Corolário 1.1.15, segue que

$$KN = \{xz \mid x \in K, z \in N\} \leq G.$$

Além disso,

$$[KN,H] = \langle [xz,y] \mid x \in K, z \in N, y \in H \rangle.$$

Pelo Lema 1.1.18 (i), $[K,H] \trianglelefteq \langle K,H \rangle$. Como $N \leq N_G(H)$, pelo Lema 1.1.18 (ii), $[N,H] \leq H$. Assim,

$$[N,H] \leq H \leq N_G([K,H])$$

e, portanto $[K,H][N,H] \leq G$.

Dados $x \in K$, $z \in N$ e $y \in H$, pelo Lema 1.1.16 (ii), temos:

$$[xz,y] = [x,y]^z[z,y] = [x^z,y^z][z,y] \in [K,H][N,H].$$

Logo, $[KN,H] \leq [K,H][N,H]$.

Por outro lado, como $K \leq KN$ e $N \leq KN$, segue que

$$[K,H][N,H] \leq [KN,H],$$

e o resultado está provado.

$\square$

Sejam H e N grupos. Dizemos que H age por automorfismos sobre N se está definido um homomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & H & \longrightarrow & Aut(N) \\ & h & \longmapsto & \varphi_h, \end{array}$$

onde $Aut(N)$ é o grupo formado por todos automorfismos de N. Assim, podemos sempre construir um grupo, unicamente determinado por H, N e o homomorfismo φ, que é o produto semidireto de H e N, que denotamos por $N \rtimes H$. Particularmente, o grupo de automorfismos de um grupo G será considerado como um subgrupo do produto semidireto $G \rtimes Aut(G)$.

Dado um grupo de automorfismos A de um grupo G, podemos apresentar dois subgrupos de G. O **subgrupo dos pontos fixos** de A em G dado por

$$C_G(A) = \{x \in G \mid x^a = x, \text{ para todo } a \in A\}$$

e o **subgrupo comutador** de A e G dado por

$$[G,A] = \langle x^{-1}x^a \mid x \in G \text{ e } a \in A \rangle.$$

Observação 1.1.21.

(a) $[G, A]$ *é um subgrupo normal de* G*, uma vez que no produto semidireto* $G \rtimes A$*, temos* $[G, A] \trianglelefteq \langle G, A \rangle$*;*

(b) $[G, A]$ *é* A*-invariante, pois* $[x, a]^b = [x^b, a^b] \in [G, A]$ *para todo* $b \in A$ *e para todo* $[x, a] \in [G, A]$ *e, assim, o subgrupo* $[[G, A], A]$ *de* $[G, A]$ *está bem definido;*

(c) $C_G(A)$ *é* A*-invariante, isto é,* $g^a \in C_G(A)$ *para todo* $g \in C_G(A)$ *e todo* $a \in A$*;*

(d) A *age trivialmente sobre* G *se, e somente se,* $[G, A] = 1$*.*

Nosso interesse em comutadores que surgem quando A age via automorfismos sobre G está concentrado em ações comprimas.

Definição 1.1.22. *Seja* A *um grupo de automorfismos de um grupo finito* G*. Dizemos que a ação de* A *sobre* G *é coprima quando* $(|G|, |A|) = 1$*.*

Lema 1.1.23 ([13], Lema 4.28, p. 138)**.** *Seja* A *um grupo de automorfismo de um grupo finito* G *e suponha que* A *ou* G *é solúvel e* $(|G|, |A|) = 1$*. Então,*

$$G = C_G(A)[G, A].$$

Lema 1.1.24 ([13], Lema 4.29, p. 138)**.** *Seja* A *um grupo finito agindo sobre um grupo finito* G *e suponha que* $(|G|, |A|) = 1$*. Então,*

$$[G, A, A] = [G, A].$$

1.2 Grupos Solúveis

Iniciamos esta seção apresentando o conceito de série e, em seguida, definimos alguns tipos de séries muito conhecidas na Teoria dos Grupos. E, por fim, introduzimos duas classes bem conhecidas de grupos e algumas propriedades importantes dos mesmos, assim como, as séries centrais e derivada de um grupo G.

Seja G um grupo. Uma **série** de G é uma sequência

$$\{1\} = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G \tag{1.1}$$

de subgrupos de G, onde cada H_i é um subgrupo de H_{i+1}.

Os subgrupos H_i desta série são chamados de **termos**.

Uma série é chamada **própria** se dois termos não são iguais, isto é, $H_i < H_{i+1}$ para todo $i = 0, \ldots, n-1$.

Se $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$, então o grupo quociente H_{i+1}/H_i é chamado de **grupo fator** (ou simplesmente fator) da série.

Uma segunda série

$$\{1\} = K_0 \leq K_1 \leq \cdots \leq K_m = G \tag{1.2}$$

é um **refinamento** da série (1.1) se cada termo H_i em (1.1) também ocorre em (1.2), ou seja, a nova série é simplesmente obtida pela inserção de subgrupos em (1.1), não necessariamente distintos. O refinamento (1.2) é **próprio** se ele possui no mínimo um novo termo, isto é, se subgrupos novos forem acrescentados.

Exibiremos agora três tipos especiais de séries.

Definição 1.2.1. *Uma **série subnormal** de um grupo G é uma sequência*

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G,$$

tal que $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ para todo i.

Definição 1.2.2. *Uma **série normal** de um grupo G é uma sequência*

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G,$$

tal que $G_i \trianglelefteq G$ para todo i.

Definição 1.2.3. *Uma série normal própria de G é chamada de **série principal** se para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tem-se G_i/G_{i-1} é normal minimal em G/G_{i-1}. Neste caso, os grupos quocientes G_i/G_{i-1} são chamados **fatores principais**.*

Observação 1.2.4. *Como a normalidade não é transitiva podemos notar que a propriedade dada na Definição 1.2.2 é mais forte do que a dada na Definição 1.2.1.*

Dedicamos agora um pouco desta seção para exibir duas clases de grupos classificadas pela propriedade dos grupos quocientes.

Definição 1.2.5. *Um grupo G é* ***nilpotente*** *quando possui uma série normal*

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G,$$

onde cada quociente G_{i+1}/G_i está contido em $Z(G/G_i)$, ou equivalentemente, $[G_{i+1}, G] \leq G_i$ para todo i. Uma série que satisfaz essa propriedade é chamada de ***série central****.*

Observação 1.2.6.

(a) *Grupos abelianos são nilpotentes;*

(b) *Todo p-grupo finito é nilpotente.*

Na Seção 1.1 definimos o subgrupo comutador G' e o centro $Z(G)$ de um grupo G. Ampliando essas noções podemos definir de maneira indutiva importantes subgrupos característicos de G e construir duas séries centrais úteis para verificarmos quando um dado grupo G é nilpotente.

Seja G um grupo. O subgrupo característico $Z_i(G)$ de G é definido indutivamente por

$$Z_0(G) = 1 \quad e \quad Z_{i+1}(G) = \{z \in G \mid [z, g] \in Z_i(G), \quad para \quad todo \quad g \in G\} \tag{1.3}$$

para todo i.

Por outro lado, o subgrupo característico $\gamma_i(G)$ de G é definido indutivamente por

$$\gamma_1(G) = G \quad e \quad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \tag{1.4}$$

para todo i.

Observação 1.2.7.

(a) *$Z_1(G)$ é o centro de G, isto é, $Z_1(G) = Z(G)$;*

(b) *Se G é um grupo abeliano, então $Z_i(G) = G$ para todo i;*

(c) *$\gamma_2(G)$ é o subgrupo derivado de G, isto é, $\gamma_2(G) = G'$;*

(d) *Se $G = G'$, então $\gamma_i(G) = G$ para todo i. Neste caso, dizemos que G é um grupo perfeito.*

Com base em (1.3) e (1.4), construímos a seguir duas séries bastante conhecidas.

Definição 1.2.8. *Seja G um grupo. As cadeias de subgrupos*

$$G = \gamma_1(G) \trianglerighteq \gamma_2(G) \trianglerighteq \gamma_3(G) \dots$$

e

$$1 = Z_0(G) \trianglelefteq Z_1(G) \trianglelefteq Z_2(G) \dots$$

são chamadas de ***série central inferior*** *e* ***série central superior*** *de G, respectivamente.*

Observação 1.2.9. *A série central superior não atinge o grupo G necessariamente, mas se G é finito a série se estabiliza em um subgrupo chamado de* ***hipercentro*** *de G, denotado por $Z_\infty(G)$.*

Teorema 1.2.10. *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Então, $\gamma_i(G/N) = \gamma_i(G)N/N$ para todo $i \geq 1$.*

Demonstração. Argumentamos por indução sobre i. Quando $i = 1$ segue o resultado. Supondo que o resultado vale para i, temos que:

$$\gamma_{i+1}(G/N) = [\gamma_i(G/N), G/N] = [\gamma_i(G)N/N, G/N].$$

Do Lema 1.1.19, segue que:

$$[\gamma_i(G)N/N, G/N] = [\gamma_i(G), G]N/N = \gamma_{i+1}(G)N/N.$$

Isto conclui a indução e o resultado segue. □

Definição 1.2.11. *Seja G um grupo. O* ***residual nilpotente*** *de G é o subgrupo*

$$\gamma_\infty(G) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G),$$

onde o subgrupo $\gamma_i(G)$ é o i-ésimo termo da série central inferior de G.

Se G é um grupo finito, então o residual nilpotente de G é igual a $\gamma_n(G)$ para todos os n suficientemente grandes.

Teorema 1.2.12 ([19], Teorema 5.1.9, p. 125)**.** *Seja* $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$ *uma série central de um grupo nilpotente* G*. Então:*

(i) $\gamma_i(G) \leq G_{n-i+1}$*;*

(ii) $G_i \leq \zeta_i(G)$*.*

Uma relação bastante interessante que podemos observar entre a série central inferior e a série central superior é apresentada no próximo resultado.

Teorema 1.2.13 ([21], Teorema 5.31, p. 113)**.** *Sejam* G *um grupo e* n *um inteiro positivo. Então,* $Z_n(G) = G$ *se, e somente se,* $\gamma_{n+1}(G) = 1$*. Neste caso,* $\gamma_{i+1}(G) \leq Z_{n-i}(G)$ *para todo* i*.*

Esse teorema mostra que, quando G é um grupo nilpotente, as suas séries centrais superior e inferior são séries normais de mesmo comprimento, cujo número de termos não-triviais determina exatamente a classe de nilpotência de G.

Definição 1.2.14. *Um grupo* G *é* ***nilpotente de classe*** n*, quando* n *é o menor número inteiro positivo, tal que* $\gamma_{n+1}(G) = 1$*.*

Lema 1.2.15. *Sejam* G *um grupo finito e* N *um subgrupo normal de* G*. Se* G/N *é nilpotente, então* $\gamma_\infty(G) \subseteq N$*.*

Demonstração. De fato, se G/N é nilpotente, segue que existe um inteiro positivo n, tal que, $\gamma_{n+1}(G/N) = 1$. Pelo Teorema 1.2.10, temos $\gamma_{n+1}(G/N) = \gamma_{n+1}(G)N/N = 1$. Portanto, $\gamma_{n+1}(G) \leq N$ e, logo $\gamma_\infty(G) \leq N$. □

Descreveremos a seguir algumas das propriedades básicas de grupos nilpotentes, cujas demonstrações podem ser encontradas em [10, Teorema 2.3.3, p. 22].

Teorema 1.2.16. *Seja* G *um grupo.*

(i) *Se* G *é nilpotente e* H *é um subgrupo de* G*, então* H *é nilpotente;*

(ii) *Se* G *é nilpotente e* $K \trianglelefteq G$*, então* G/K *é nilpotente.*

Teorema 1.2.17. *Se* G *e* H *são grupos nilpotentes, então* $G \times H$ *é nilpotente. Em geral, o produto cartesiano de uma família finita de grupos nilpotentes é nilpotente.*

Vamos agora descrever alguns fatos elementares de grupos nilpotentes finitos que são usadas constantemente.

Teorema 1.2.18 ([19], 5.2.4., p. 23)**.** *Seja G um grupo finito. Então, as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) *G é nilpotente;*

(ii) *Todo subgrupo de G é subnormal;*

(iii) *Todo subgrupo maximal de G é normal;*

(iv) *G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.*

Nos próximos enunciados mencionamos algumas condições suficientes para determinar quando um grupo é nilpotente.

Teorema 1.2.19. *Seja G um grupo. Se $N \leq Z(G)$ e G/N é nilpotente, então G é nilpotente.*

Teorema 1.2.20 (P. Hall, [19], 5.2.10, p. 134)**.** *Sejam G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Se N e G/N' são nilpotentes, então G é nilpotente.*

Apresentamos agora uma condição necessária e suficiente que garante a nilpotência de um grupo.

Proposição 1.2.21. *Sejam G um grupo e $n \geq 1$. Então,*

$$\gamma_n(G) = \langle [g_1, g_2, \ldots, g_n] \mid g_1, g_2, \ldots, g_n \in G \rangle.$$

Demonstração. Argumentamos por indução sobre n. O caso $n = 1$ é trivial. Assuma por indução que $\gamma_n(G)$ é gerado pelo conjunto $X = \{[g_1, \ldots, g_n] \mid g_1, \ldots, g_n \in G\}$. Por definição,

$$\gamma_{n+1}(G) = \langle [x, g] \mid x \in \gamma_n(G), g \in G \rangle.$$

Então, pela hipótese de indução, um elemento gerador em $\gamma_{n+1}(G)$ pode ser escrito como $[c_1 \cdots c_k, g]$, com $g \in G$ e $c_1, \ldots, c_k \in X \cap X^{-1}$. Pelo Lema 1.1.16 (ii), temos que

$$[c_1 \cdots c_k, g] = [c_1, g]^{a_1} \cdots [c_k, g]^{a_k}$$

com $a_1, \ldots, a_k \in G$. Por um lado, se $c_i \in X$, então $[c_i, g]^{a_i} = [c_i^{a_i}, g^{a_i}]$ é um comutador em $\gamma_{n+1}(G)$, pois $c_i^{a_i} \in X$. Por outro lado, se $c_i \in X^{-1}$, então $c_i = d_i^{-1}$, onde $d_i \in X$. Logo,

$$[c_i, g]^{a_i} = [d_i^{-1}, g]^{a_i} = (([d_i, g]^{-1})^{d_i^{-1}})^{a_i} = ([d_i, g]^{-1})^{d_i^{-1}a_i} = [d_i^{(d_i^{-1}a_i)}, g^{(d_i^{-1}a_i)}]^{-1}. \quad (1.5)$$

Assim, $[c_i, g]^{a_i}$ é o inverso de um comutador em $\gamma_{n+1}(G)$, pois $d_i^{(d_i^{-1}a_i)} \in X$. Portanto, os fatores do produto em (1.5) são comutadores ou inversos de comutadores em $\gamma_{n+1}(G)$, isto é,

$$\gamma_{n+1}(G) = \langle [g_1, \ldots, g_{n+1}] \mid g_1, \ldots, g_{n+1} \in G \rangle.$$

Como queríamos provar.

□

Corolário 1.2.22. *Um grupo G é nilpotente de classe no máximo c se, e somente se, $[g_1, \ldots, g_{c+1}] = 1$ para todos $g_1, \ldots, g_{c+1} \in G$.*

A próxima condição de nilpotência diz respeito aos elementos cujas ordens não tem fatores comuns.

Proposição 1.2.23 ([20], Teorema 10.8, p. 215)**.** *Um grupo finito G é nilpotente se, e somente se, dados $a, b \in G$ com $(|a|, |b|) = 1$, tem-se $ab = ba$.*

Iniciamos agora o estudo dos fatos básicos de outra classe importante de grupos. Vamos começar definindo um grupo solúvel com auxílio do conceito elementar de série subnormal.

Definição 1.2.24. *Um grupo G é* ***solúvel*** *se possuir uma série subnormal*

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G,$$

onde cada grupo quociente G_{i+1}/G_i é abeliano para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Observação 1.2.25. *Se G é solúvel, então a série que satisfaz as condições acima é chamada de* ***série solúvel*** *ou* ***série abeliana*** *de G.*

Existe uma maneira consistente de investigar grupos solúveis fundamentada no uso dos subgrupos derivados. Recorde que o subgrupo derivado G' de um grupo G

é, por definição, o menor subgrupo de G gerado por todos os comutadores $[x, y]$ para $x, y \in G$. De maneira geral, o i-ésimo subgrupo derivado $G^{(i)}$ de G é definido da seguinte maneira:

$$G^{(0)} = G,\ G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$$

para todo i.

Definição 1.2.26. *A sequência de subgrupos*

$$G^{(0)} \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq G^{(2)} \trianglerighteq G^{(3)} \trianglerighteq \dots$$

*é chamada de **série derivada** de G.*

Observe que $G^{(i+1)}$ é característico em G.

Evidentemente a série derivada de um grupo G pode não atingir o subgrupo trivial $\{1\}$, a não ser que o grupo seja solúvel, como podemos constatar no próximo teorema. Porém, se G é finito essa sequência também é finita e, portanto estacionária, isto é, existe um inteiro positivo k_0, tal que, $G^{(k_0)} = G^{(k)}$ para todo $k \geq k_0$. Na série derivada, cada grupo quociente $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ é abeliano e o primeiro quociente G/G' é também denotado por G_{ab}.

Definição 1.2.27. *Seja G um grupo solúvel. O **comprimento derivado** de G é o menor inteiro k, tal que o k-ésimo termo da série derivada de G é trivial, ou seja, $G^{(k)} = \{1\}$. Denotamos o comprimento derivado de G por $dl(G)$.*

A série derivada é bastante útel no estudo para determinar a solubilidade de um grupo, pois proporciona uma caracterização para a classe dos grupos solúveis.

Teorema 1.2.28 ([19], 5.1.8., p. 124)**.** *Seja G um grupo solúvel. Se*

$$\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

é uma série abeliana, então $G^{(i)} \leq G_{n-i}$. Em particular, $G^{(n)} = \{1\}$, ou seja, o comprimento derivado de G é igual ao comprimento da série derivada de G.

Definição 1.2.29. *Dizemos que um grupo solúvel com comprimento derivado igual a 2 é metabeliano. Em outras palavras, G é metabeliano se possui um subgrupo normal abeliano cujo quociente é abeliano.*

Observação 1.2.30.

(a) *Um grupo abeliano é solúvel de comprimento derivado igual a 1;*

(b) *Todo grupo nilpotente é solúvel .*

Apresentaremos agora os resultados que indicam a importância da teoria dos grupos solúveis. As demonstrações serão omitidas e podem ser encontradas em [20] e [21].

Teorema 1.2.31 ([20], Teoremas 11.2 e 11.3, p. 231 e 232)**.** *Seja G um grupo.*

(i) *Se G é solúvel e H é um subgrupo de G, então H é solúvel.*

(ii) *Se G é solúvel e $K \trianglelefteq G$, então G/K é solúvel.*

Destacamos a seguir a recíproca do teorema anterior.

Teorema 1.2.32 ([20], Teorema 11.4, p. 232)**.** *Se $K \trianglelefteq G$ e ambos K e G/K são solúveis, então G é solúvel.*

Corolário 1.2.33 ([21], Corolário 5.18, p. 103)**.** *Se H e K são grupos solúveis, então $H \times K$ é solúvel.*

Nenhuma discussão sobre grupos solúveis poderia omitir o celebrado e surpreendente teorema que fornece uma extensa coleção de exemplos de grupos solúveis. Conjecturado por Burnside em 1911, foram necessárias 255 páginas para ser provado.

Teorema 1.2.34 (W. Feit, J.G. Thompson, [8])**.** *Todo grupo de ordem ímpar é solúvel.*

1.3 O Subgrupo de Fitting

Vamos agora considerar subgrupos nilpotentes de um grupo finito, particularmente subgrupos normais nilpotentes. O próximo resultado é a base para o estudo de subgrupos normais nilpotentes, pois garante que o produto de dois subgrupos normais nilpotentes é um subgrupo normal nilpotente.

Teorema 1.3.1 (de Fitting, [19], 5.2.8, p. 133)**.** *Sejam M e N subgrupos normais de um grupo G. Se M e N são nilpotentes de classes de nilpotência m e n respectivamente, então MN é nilpotente de classe de nilpotência no máximo $m+n$.*

Motivados pelo resultado anterior definimos um subgrupo muito importante na teoria dos grupos.

Definição 1.3.2. *Seja G um grupo. O* ***subgrupo de Fitting*** *de G, denotado por $F(G)$, é o subgrupo gerado por todos os subgrupos normais nilpotentes de G, ou seja,*

$$F(G) = \langle N \mid N \trianglelefteq G \text{ e } N \text{ é nilpotente}\rangle.$$

Note que se o grupo G é finito, então $F(G)$ é o único subgrupo normal nilpotente maximal de G. E evidentemente $F(G)$ é um subgrupo característico de G. É claro que dado um grupo G qualquer, $F(G)$ pode ser trivial. Por outro lado, isso não acontece quando G é solúvel, pois nesse caso $F(G)$ contém o menor termo não-trivial da série derivada e, portanto $F(G)$ é não-trivial.

Corolário 1.3.3. *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Então, $N \cap F(G) = F(N)$.*

Demonstração. Certamentemente $F(N)$ é subgrupo característico nilpotente em N. Como $N \trianglelefteq G$, segue que $F(N) \subseteq N \cap F(G)$. Agora, $F(G) \trianglelefteq G$ e, assim, $N \cap F(G) \trianglelefteq N$. Note que $N \cap F(G)$ é subgrupo normal nipotente de N, então $N \cap F(G)$ está contido em $F(N)$.

□

O subgrupo de Fitting é particularmente importante para os grupos solúveis. Desta forma, podemos destacar o seguinte resultado.

Teorema 1.3.4 ([19], 5.4.4, p. 149)**.** *Sejam G um grupo solúvel e $F(G)$ o subgrupo de Fitting de G.*

(i) *Se $1 \neq N \trianglelefteq G$, então N contém um subgrupo normal abeliano não-trivial e $N \cap F(G) \neq 1$;*

(ii) *$C_G(F(G)) = Z(F(G))$.*

Definição 1.3.5. *Sejam p um primo, G um grupo finito e $P_1, \ldots, P_r$ uma lista de todos os p-subgrupos de Sylow de G. Então,*

$$O_p(G) = \bigcap_{i=1}^{r} P_i.$$

O p-subgrupo maximal normal $O_p(G)$ é chamado de p-**radical** de G. Observe que se G tem um único p-subgrupo de Sylow P_1, então $O_p(G) = P_1 \trianglelefteq G$. E mesmo, quando G tem vários p-subgrupos de Sylow, ainda assim, temos $O_p(G) \trianglelefteq G$.

Teorema 1.3.6. *Sejam G um grupo finito e $p_1, \ldots, p_r$ os números primos que dividem $|G|$. Então,*

$$F(G) = O_{p_1}(G) \cdots O_{p_r}(G).$$

Demonstração. Para cada p_i todos os p_i-subgrupos de Sylow de G são conjugados em G e, por isso, $O_{p_i}(G)$ é o núcleo de cada membro desta classe e, portanto, é normal em G. Como p-grupos são nilpotentes, temos $O_{p_i}(G) \leq F(G)$ para cada p_i que divide $|G|$. Portanto,

$$\prod_{i=1}^{r} O_{p_i}(G) \subseteq F(G).$$

Por outro lado, se Q é um p_i-subgrupo de Sylow de $F(G)$, então Q está contido em alguns p_i-subgrupo de Sylow P de G. Como Q é subgrupo normal em $F(G)$ e $F(G)$ é subgrupo característico em G, concluimos que $Q \trianglelefteq G$, daí $Q \subseteq O_{p_i}(G)$ e, assim, $F(G) \subseteq \prod_{i=1}^{r} O_{p_i}(G)$. E o resultado está provado.

□

A seguir vamos dar a definição de elemento Engel em um grupo G.

Definição 1.3.7. *Seja G um grupo. Um elemento g é chamado* ***elemento Engel*** *(direita) se para todo x em G existe um inteiro $n = n(x, g)$, dependendo possivelmente de x e g, tal que,*

$$[g, \underbrace{x, \ldots, x}_{n \ vezes}] = 1.$$

De modo análogo podemos definir elemento Engel à esquerda. Nesta tese vamos considerar elementos Engel à direita e os chamaremos apenas de elementos Engel.

O próximo resultado, devido a Baer, nos oferece uma importante informação sobre os elementos Engel de um grupo finito. Os detalhes da prova podem ser vistos em [19, 12.3].

Teorema 1.3.8. *Sejam G um grupo finito e $F(G)$ o subgrupo de Fitting de G. Se x é um elemento Engel, então $x \in F(G)$.*

Expressaremos agora mais duas séries importantes no estudo de grupos solúveis finitos.

Definição 1.3.9. *Sejam G um grupo finito e n um inteiro positivo. O subgrupo $K_n(G)$ é determinado recursivamente da seguinte forma:*

$$K_0(G) = G \quad e \quad K_{i+1}(G) = \gamma_\infty(K_i(G)).$$

para cada $i \geq 0$.

Diante disso, a sequência de subgrupos

$$G = K_0(G) \geq K_1(G) \geq K_2(G) \geq \dots$$

é chamada de **série inferior de Fitting**.

Note que $K_i(G)/K_{i+1}(G)$ é o maior quociente nilpotente de $K_i(G)$ para todo i. E claramente $K_i(G)$ são subgrupos característicos de G.

Definição 1.3.10. *Sejam G um grupo finito e n um inteiro positivo. O subgrupo $F_n(G)$ é determinado recursivamente da seguinte forma:*

$$F_0(G) = \{1\} \quad e \quad F_i(G)$$

é o único subgrupo normal em G, tal que,

$$F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G))$$

para cada $i \geq 1$.

Diante disso, a sequência de subgrupos

$$\{1\} = F_0(G) \leq F_1(G) \leq F_2(G) \leq \dots$$

é chamada de **série superior de Fitting** ou, como é mais conhecida, **série de Fitting**.

Observe que G é um grupo solúvel finito se, e somente se, $F_n(G) = G$ para algum inteiro positivo n. Em geral, a série de Fitting de um grupo finito que não é solúvel se estabeliza no radical solúvel.

Definição 1.3.11. *Seja G um grupo solúvel finito. O menor número inteiro positivo n, tal que $F_n(G) = G$ é chamado de* ***altura de Fitting*** *de G e o denotamos por $h(G)$.*

O teorema a seguir expressa uma relação entre a altura de Fitting e a série inferior de Fitting.

Teorema 1.3.12 ([23], Teorema 2.6)**.** *Sejam G um grupo finito e h um número inteiro positivo. Então, $K_h(G) = \{1\}$ se, e somente se, G é solúvel de altura de Fitting no máximo h.*

1.4 O Teorema do Subgrupo Focal

O objetivo desta seção é demonstrar um famoso teorema devido a D. Higman sobre os p-subgrupos de Sylow do subgrupo derivado de um grupo finito. Para essa seção, tomamos [19] como referência. Inicialmente vamos definir o homomorfismo transfer e apresentar algumas de suas propriedades.

Sejam G um grupo e H um subgrupo em G de índice finito n. Escolhendo um transversal à direita $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ para H em G, temos

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} Ht_i.$$

Como o conjunto das classes laterais à direita particiona o grupo G, para qualquer elemento $g \in G$, o elemento $t_i g$ pode ser escrito na forma xt_j, para algum $x \in H$. Considerando a ação por multiplicação à direita de $g \in G$ no conjunto das classes laterais de H e uma função ϕ_g que leva i em $(i)g$ de modo que $Ht_i g = Ht_{(i)g}$, temos $t_i g t_{(i)g}^{-1} \in H$, para todo $g \in G$.

Note que ϕ_g é uma permutação do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. De fato, suponha que $\phi_g(i) = \phi_g(j)$, assim $t_i g = xt_k$ e $t_j g = x't_k$. Logo, $g^{-1}t_i^{-1}xt_k = 1 = g^{-1}t_j^{-1}x't_k$ isto implica que $t_j t_i^{-1} = x'x^{-1}$. Como t_i e t_j são elementos de $\mathcal{T}$, segue que $i = j$. Portanto, ϕ_g é uma permutação.

Definição 1.4.1. *Sejam H um subgrupo de índice finito em um grupo G e A um grupo abeliano. Considere um homomorfismo $\theta : H \longrightarrow A$. O* ***transfer*** *de θ é a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \theta^* : & G & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (t_i x t_{(i)x}^{-1})^{\theta}, \end{array}$$

onde $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ é um transversal à direita para H em G.

Claro que não precisamos nos preocupar com a ordem dos fatores no produto, pois A é abeliano.

Nos próximos resultados estamos considerando as ideias estabelecidas anteriormente nesta seção. A seguir, destacamos o lema que garante que a aplicação θ^* é um homomorfismo que não depende da escolha do transversal $\mathcal{T}$.

Lema 1.4.2 ([19], 10.1.1, p. 285)**.** *A função $\theta^* : G \longrightarrow A$ é um homomorfismo de grupos que não depende da escolha do transversal $\mathcal{T}$.*

Observe que o transfer é uma aplicação em um grupo abeliano e, portanto o núcleo dele contém G'. Assim, se G é um grupo perfeito o transfer é sempre trivial.

Com base no lema anterior podemos determinar um outro transversal à direita de H em G a partir de um transversal dado, por meio do seguinte resultado:

Lema 1.4.3 ([19], 10.1.2, p. 287)**.** *Seja $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ um transversal à direita de H em G. Então, para cada elemento x, existem $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{T}$ e inteiros positivos $l_1, l_2, \ldots, l_k$, tais que,*

$$(Hs_i, Hs_i x, \ldots, Hs_i x^{l_i^{-1}}),\ i = 1, 2, \ldots, k$$

são as $\langle x \rangle$-órbitas de um conjunto de classes laterais à direita de H em G, tais que, se $\theta : H \longrightarrow A$ é um homomorfismo de H em um grupo abeliano A, então

$$x^{\theta^*} = \prod_{i=1}^{k} (s_i x^{l_i} s_i^{-1})^{\theta}.$$

O caso mais importante do transfer surge quando θ é o homomorfismo canônico de H em H/H', isto é, $x^{\theta} = H'x$. Neste caso, $\theta^* : G \longrightarrow H/H'$ é chamado de **transfer** de G em H. Um caso especial é quando H é um p-subgrupo de Sylow de G. Se P é um p-subgrupo de Sylow de um grupo finito G e $\tau : G \longrightarrow P/P'$ é o transfer do homomorfismo canônico de P em P/P', então $G/\mathrm{Ker}\ \tau$ é um p-grupo abeliano. Com isso em mente denotamos por $G'(p)$ a interseção de todos subgrupos normais N, tais que, G/N é um p-grupo abeliano. Assim, $G/G'(p)$ é o maior p-quociente abeliano de G. A notação $G'(p)$ nos lembra do subgrupo derivado de G, mas levando em conta que $G/G'(p)$ é um p-grupo abeliano, concluimos que $G' \subseteq G'(p)$. O próximo resultado nos fornece uma maneira de determinar $G'(p)$.

Proposição 1.4.4 ([19], 10.1.5, p. 288)**.** *Seja $\tau : G \longrightarrow P/P'$ o homomorfismo transfer de um grupo finito G em um p-subgrupo de Sylow P. Então, $G'(p)$ é o núcleo de τ e $P \cap G'$ é o núcleo da restrição de τ a P.*

Observação 1.4.5. *Uma consequência imediata da Proposição 1.4.4 é que $Im\ \tau \simeq G/G'(p)$. No entanto, $G/G'(p)$ é isomorfo ao p-subgrupo de Sylow de G/G', isto é,*

$$G/G'(p) \simeq PG'/G' \simeq P/(P \cap G').$$

Logo, $Im\ \tau \simeq P/(P \cap G')$.

Corolário 1.4.6. *Sejam G um grupo e P um p-subgrupo de Sylow de G. Então, $P \cap G'(p) = P \cap G'$ e*

$$G/G'(p) \simeq P/(P \cap G').$$

O subgrupo $P \cap G'$ é o subgrupo focal de P em G.

Teorema 1.4.7 (Teorema do Subgrupo Focal, D. Higman)**.** *Se G é um grupo finito e P um p-subgrupo de Sylow de G, então*

$$P \cap G' = \langle [x,g] \mid x, x^g \in P, g \in G \rangle = \langle x^{-1}y \mid x, y \in P, y = x^g \text{ para algum } g \in G \rangle.$$

Demonstração. Seja $Q = \langle x^{-1}y \mid x, y \in P, y = x^g$ para algum $g \in G\rangle$. Note que $P' \leq Q$ uma vez que Q cotém $[x,g]$ para $x, g \in P$. Em particular, $Q \trianglelefteq P$ e P/Q é abeliano. Além disso, claramente $Q \leq G'$ e, assim $P' \leq Q \leq P \cap G'$.

Sejam $\theta : P \longrightarrow P/Q$ o homomorfismo canônico e τ o transfer de θ. Então, $\tau \in Hom(G, P/Q)$.

Agora, sejam $x \in P$ e $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ um transversal de P em G, onde $n = |G : P|$. Escolha $d \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e os inteiros r_i com $\sum_{i=1}^{d} r_i = n$. Deste modo,

$$x^{\tau} = \prod_{i=1}^{d}(t_i x^{r_i} t_i^{-1})^{\theta} = Q(\prod_{i=1}^{d}(t_i x^{r_i} t_i^{-1}))$$

Como P/Q é abeliano,

$$x^{\tau} = Q(\prod_{i=1}^{d}(t_i x^{r_i} t_i^{-1})) = Q(\prod_{i=1}^{d} x^{r_i})(\prod_{i=1}^{d}(x^{-r_i} t_i x^{r_i} t_i^{-1})).$$

O segundo produto é formado por comutadores $[x^{r_i}, t_i^{-1}]$ que está contido em Q por definição. Logo,

$$Q(\prod_{i=1}^{d} x^{r_i}) = Qx^{\sum_{i=1}^{d} r_i} = Qx^n.$$

Como n e p são coprimos, $Qx^n = Q$ se, e somente se, $x \in Q$. Logo, Ker $\tau \cap P = Q$. Uma vez que $G/\text{Ker } \tau$ é um p-grupo abeliano, segue que $G'(p) \leq \text{Ker } \tau$. Então,

$$P \cap G' = P \cap G'(p) \leq P \cap \text{Ker}\tau = Q.$$

Portanto, $P \cap G' = Q$ e o resultado está provado.

$\square$

1.5 Subgrupos Verbais

Uma palavra de grupo, ou simplesmente palavra, é um elemento não-trivial do grupo livre $F = F(X)$, onde X é um conjunto de geradores livres $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Considere uma palavra $w = w(x_1, x_2, \ldots, x_r)$. Podemos escrever

$$w = x_{i_1}^{n_1} \ldots x_{i_k}^{n_k},$$

onde n_j é um número inteiro e $i_j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Nesta tese, todas as palavras serão consideradas em sua forma reduzida.

Seja G um grupo. Podemos associar a seguinte aplicação de $G \times \ldots \times G$ (r vezes) em G:

$$\begin{array}{rccc} \phi_w : & \overbrace{G \times \ldots \times G}^{(r\ vezes)} & \longrightarrow & G \\ & (g_1, \ldots, g_r) & \longmapsto & w(g_1, \ldots, g_r), \end{array}$$

ou seja, considerando os elementos $g_1, \ldots, g_r \in G$ e uma palavra $w = w(x_1, \ldots, x_r)$, a imagem de $(g_1, \ldots, g_r)$ via ϕ_w é dada por

$$w(g_1, \ldots, g_r) \in G.$$

Definição 1.5.1. *Dizemos que um elemento $g \in G$ é um w-**valor** em G se existem elementos $g_1, \ldots, g_r \in G$ de tal modo que g pode ser escrito como:*

$$g = w(g_1, \ldots, g_r).$$

Denotamos por G_w o conjunto dos w-valores em G, isto é,

$$G_w = \{w(g_1, \ldots, g_r) \mid g_1, \ldots, g_r \in G\}.$$

Definição 1.5.2. *Sejam G um grupo e $w(x_1, \ldots, x_r)$ uma palavra. O **subgrupo verbal** associado à palavra w em G é o subgrupo de G gerado por todos os w-valores em G.*

Denotamos o subgrupo verbal por $w(G)$, ou seja,

$$w(G) = \langle w(g_1, \ldots, g_r) \mid g_1, \ldots, g_r \in G\rangle = \langle G_w \rangle.$$

Proposição 1.5.3. *Sejam G um grupo e w uma palavra de grupo. Então, o subgrupo verbal $w(G)$ é um subgrupo característico de G.*

Uma demonstração desta proposição pode ser encontrada em [19, p. 56].

Exemplo 1.5.4. *Sejam $F = F(X)$ um grupo livre e X um conjunto de geradores livres. São palavras:*

1. *$u = u(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2]x_3^4$, onde $x_1, x_2, x_3 \in X$;*

2. *A k-ésima potência $v = v(x) = x^k$, onde $x \in X$ e k é um inteiro positivo;*

3. *O comutador $w = [x_i, x_j]$ nos geradores x_i e x_j, com $i \neq j$;*

4. *Seja $k \geq 1$. Definimos a k-ésima palavra central inferior γ_k da seguinte forma:*

$$\gamma_1(x_1) = x_1 \text{ e } \gamma_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) = [\gamma_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}), x_k],$$

onde $x_i \in X$ para todo i;

5. *Seja $k \geq 0$. Definimos a k-ésima palavra derivada δ_k da seguinte forma:*

$$\delta_0(x_1) = x_1 \text{ e } \delta_k(x_1, \ldots, x_{2^k}) = [\delta_{k-1}(x_1, \ldots, x_{2^{k-1}}), \delta_{k-1}(x_{2^{k-1}+1}, \ldots, x_{2^k})],$$

onde $x_i \in X$ *para todo* i*;*

6. *Seja* $k \geq 0$*. Consideramos* $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x, y)$ *a* k*-ésima palavra de Engel dada da seguinte forma:*

$$\varepsilon_k = [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{k \text{ vezes}}] =: [x, {}_k y],$$

onde as palavras são definidas indutivamente:

$$\varepsilon_0 = [x, {}_0 y] = x \ \text{ e } \ \varepsilon_k = [x, {}_k y] = [[x, {}_{k-1} y], y]$$

para $x, y \in X$*.*

Definição 1.5.5. *Seja* G *um grupo. Dizemos que uma palavra de grupo* w *é uma* ***palavra comutador*** *se a soma dos expoentes de cada variável envolvida em* w *é zero.*

Nas palavras comutadores existe uma família muito significativa que são os comutadores multilineares.

Definição 1.5.6. *Seja* $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ *um conjunto de geradores livres. Assumimos por comutador multilinear de peso 1, simplesmente as palavras da forma* $w = x_i$*, para algum* i*. Dizemos que uma palavra* w *é um comutador multilinear de peso* $k > 1$*, se ela tem a forma* $w = [w_1, w_2]$*, onde* w_1 *e* w_2 *são comutadores multilineares em variáveis distintas de peso* s *e* r*, respectivamente, com* $s + r = k$*.*

Observação 1.5.7. *Seja* $k \in \mathbb{N}$*.*

(a) δ_k*,* γ_k *e* ε_k *são comutadores;*

(b) γ_k *e* δ_k *são comutadores multilineareas. Enquanto isso* ε_k *não é um comutador multilinear para* $k \geq 2$*;*

(c) *Seja* $k \geq 2$*. Costuma-se escrever* $G^{(k)}$ *para denotar o* k*-ésimo termo da série derivada do grupo* G*. Mas seguindo a notação do Exemplo 1.5.4, deveríamos escrever* $\delta_k(G)$*, no geral essa forma é menos usual.*

Observação 1.5.8. *Para um estudo mais aprofundado e completo sobre subgrupos vebais consulte [18] ou [22].*

Capítulo 2

Resultados Principais

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos envolvendo as palavras derivadas. Como comentamos na introdução, nosso principal interesse é em grupos solúveis finitos e nos termos da série derivada.

Sejam G um grupo finito e P um p-subgrupo de Sylow de G. Recorde que G' é o subgrupo verbal de G gerado por todos os δ_1-valores. Uma consequência imeditata do Teorema do Subgrupo Focal é que $P \cap G'$ é gerado por δ_1- valores contidos em P. Um problema em aberto é se podemos generalizar esse teorema para outras palavras derivadas δ_k para $k \geq 2$ (veja [1]). Neste contexto, ao assumirmos que G é um grupo solúvel finito, obtemos que $P \cap G^{(k)}$ é gerado por δ_k-valores contidos em P. Além disso, obtemos que o k-ésimo termo da série derivada $G^{(k)}$ é nilpotente se, e somente se, $|ab| = |a||b|$ para todo δ_k-valores $a, b \in G$ de ordens coprimas.

A primeira seção deste capítulo, tem o objetivo de listar algumas propriedades do subgrupo chamado de normalizador de sistema. A segunda seção, é dedicada em mostrar uma generalização do Teorema do Subgrupo Focal no caso que G é um grupo solúvel finito. Na última seção, apresentamos um critério de nilpotência em grupos finitos. E, por fim, demonstramos o resultado que estabelece um critério de nilpotência para $G^{(k)}$.

2.1 Sistemas de Sylow e Normalizadores de Sistemas

Dado um primo p que divide a ordem de um grupo finito G, sabemos que um p-subgrupo de Sylow é um p-subgrupo maximal de G.

Iniciamos esta seção estudando os subgrupos de Hall que amplia o conceito apresentado anteriormente. Para isso, vamos estabelecer alguns conceitos estruturais para posteriormente definir os subgrupos de Hall e exibir o teorema de P. Hall que tem papel substancial na caracterização dos grupos solúveis finitos. As referências utilizadas para esta seção são [10], [19] e [7].

Definição 2.1.1. *Seja π um conjunto não-vazio de números primos. Um π-**número** é um inteiro, tal que, todos os seus fatores primos pertencem a π.*

Definição 2.1.2. *Seja π um conjunto não-vazio de números primos. Um grupo G é um π-grupo se todo primo p que divide a ordem de G pertence a π.*

Indicamos o conjunto dos primos que dividem a ordem de G por $\pi(G)$. A partir de agora, π é um subconjunto qualquer de $\pi(G)$ e π' é o complemento de π em $\pi(G)$, ou seja, π' é o conjunto dos primos que não pertencem a π em $\pi(G)$.

Definição 2.1.3. *Seja G um grupo finito. Um π-subgrupo H de G é chamado de π-**subgrupo de Hall** quando $[G : H]$ é um π'-número.*

Lema 2.1.4 ([7], 3.2, p. 216)**.** *Sejam H um π-subgrupo de Hall de G e $M, N \trianglelefteq G$. Então:*

(i) *H^g é um π-subgrupo de Hall de G para todo $g \in G$;*

(ii) *HN/N é um π-subgrupo de Hall de G/N;*

(iii) *$H \cap N$ é um π-subgrupo de Hall de N;*

(iv) *$(H \cap M)(H \cap N) = H \cap MN$ é um π-subgrupo de Hall de MN.*

No geral, os π-subgrupos de Hall nem sempre existem. Por exemplo, considere o grupo $G = A_5$ e o conjunto dos números primos $\pi = \{3, 5\}$. Sabendo que $|A_5| = 2^2.3.5$, se existisse um π-subgrupo de Hall nessas condições tal subgrupo teria índice 4 e ordem 15, porém ele não existe.

Como já sabemos os p-subgrupos de Sylow sempre existem e são conjugados entre si. Mas os subgrupos de Hall nem sempre existem, como já vimos anteriormente. Neste momento vamos estabelecer as condições sobre as quais tais subgrupos existem e, quando existem, se são conjugados entre si. O próximo teorema garante que, em grupos solúveis, os π-subgrupos de Hall sempre existem e também são conjugados entre si. A demonstração pode ser encontrada em [19, 9.1.6 e 9.1.7, p. 257].

Teorema 2.1.5 (P. Hall)**.** *Sejam G um grupo solúvel finito e $\pi \subseteq \pi(G)$. Então:*

(i) *G contém um π-subgrupo de Hall para qualquer conjunto de primos π;*

(ii) *Quaisquer dois π-subgrupo de Hall de G são conjugados;*

(iii) *Qualquer π-subgrupo de G está contido em um π-subgrupo de Hall.*

No teorema a seguir veremos que vale a recíproca do resultado apresentado anteriormente. A demonstração pode ser encontrada em [19, 9.1.8, p. 258].

Teorema 2.1.6 (P. Hall)**.** *Se G é um grupo finito que possui um p'-subgrupo de Hall para todo primo $p \in \pi(G)$, então G é solúvel.*

Definição 2.1.7. *Seja K um subgrupo de um grupo G. Dizemos que um subgrupo H de G é complemento de K em G se $K \cap H = 1$ e $G = KH$.*

A seguir apresentamos o resultado que fornece uma caracterização para os grupos solúveis finitos. A demonstração segue imediatamente dos Teoremas de P. Hall (para mais detalhes ver [10, p. 233]).

Teorema 2.1.8. *Um grupo finito G é solúvel se, e somente se, todo p-subgrupo de Sylow de G possui complemento em G.*

Seja G um grupo solúvel finito de ordem

$$|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k},$$

onde $p_1, p_2, \dots, p_k$ são os divisores primos distintos da ordem de G. Pelo Teorema de Hall, G têm um p_i'-subgrupo de Hall Q_i para cada primo divisor de $|G|$. Considere os p_i'-subgrupos de Hall Q_1, Q_2, ..., Q_k. Então,

$$|Q_i| = |G|/p_i^{n_i} \text{ e } |G : Q_i| = p_i^{n_i}.$$

Oberve agora que $Q_1 \cap \dots \cap Q_t$ é um $\{p_{t+1}, \dots, p_k\}$-subgrupo de Hall de G. De fato, isso certamente é verdade quando $t = 1$. Assumindo, por indução, que a interseção $H = Q_1 \cap \dots \cap Q_t$ é um $\{p_{t+1}, \dots, p_k\}$-subgrupo de Hall de G, temos que

$$|H| = p_{t+1}^{n_{t+1}} \dots p_k^{n_k} \text{ e } |G : H| = p_1^{n_1} \dots p_t^{n_t}.$$

Agora, é claro que H e Q_{t+1} têm índices coprimos, logo

$$|G : H \cap Q_{t+1}| = |G : H||G : Q_{t+1}| = p_1^{n_1} \dots p_{t+1}^{n_{t+1}}.$$

Assim, $|H \cap Q_{t+1}| = p_{t+2}^{n_{t+2}} \dots p_k^{n_k}$ e, consequentemente $H \cap Q_{t+1} = Q_1 \cap \dots \cap Q_t \cap Q_{t+1}$ é um $\{p_{t+2}, \dots, p_k\}$-subgrupo de Hall de G. Desta maneira, a afirmação é verdadeira.

Definição 2.1.9. *Sejam G um grupo finito e $p_1, p_2, \dots, p_k$ os divisores primos distintos da ordem de G. Um **sistema de Sylow** é uma coleção de subgrupos Q_1, Q_2, ..., Q_k, tal que, Q_i é um p_i'-subgrupo de Hall para $i = 1, 2, \dots, k$.*

Teorema 2.1.10 ([19], 9.2.1, p. 261)**.** *Seja Q_1, Q_2, ..., Q_k um sistema de Sylow de um grupo solúvel finito G. Então:*

(i) *Se π é um conjunto de primos distintos divisores de $|G|$, então $\bigcap\limits_{p_i \notin \pi} Q_i$ é um π-subgrupo de Hall de G. Em particular, $P_i = \bigcap\limits_{j \neq i} Q_j$ é um p_i-subgrupo de Sylow de G;*

(ii) *Os subgrupos de Sylow P_1, P_2, ..., P_k são permutáveis dois a dois, isto é, $P_iP_j = P_jP_i$.*

Definição 2.1.11. *Sejam G um grupo finito e $p_1, p_2, \dots, p_k$ os divisores primos distintos da ordem de G. Uma **base de Sylow** é uma coleção de subgrupos P_1, P_2, ..., P_k, tal que, P_i é um p_i-subgrupo de Sylow para $i = 1, 2, \dots, k$ e,*

$$P_iP_j = P_jP_i$$

para todo i e j.

Pelo Teorema 2.1.10, se $\mathcal{S} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ é um sistema de Sylow de um grupo solúvel finito G, existe uma base de Sylow correspondente $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$, onde $P_i = \bigcap\limits_{j \neq i} Q_j$. De fato, o próximo teorema revela que um sistema de Sylow determina uma base de Sylow e vice-versa.

Teorema 2.1.12 ([19], 9.2.2, p. 262)**.** *Sejam G um grupo solúvel finito e $p_1, p_2, \dots, p_k$ os divisores primos distintos da ordem de G. Se $\mathcal{S}_i$ é o conjunto dos p_i'-subgrupos de*

Hall de G (para $i = 1, 2, ..., k$) e $\mathcal{B}^*$ é a coleção de todas as bases de Sylow de G, então

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathcal{S}_1 \times \ldots \times \mathcal{S}_k & \longrightarrow & \mathcal{B}^* \\ & (Q_1, \ldots, Q_k) & \longmapsto & (P_1, \ldots, P_k) \end{array}$$

é uma bijeção, onde $P_i = \bigcap_{j \neq i} Q_j$

Teorema 2.1.13 (P. Hall, [19], 9.2.3, p. 262)**.** *Se G é um grupo solúvel finito, então quaisquer dois sistemas de Sylow são conjugados, assim como, quaisquer duas bases de Sylow são conjugadas.*

Notação 2.1.14. *Seja G um grupo finito. Se $\mathcal{P}$ é um família de subgrupos de G e N é um subgrupo normal de G, denotamos por $\mathcal{P}N$ a seguinte família de subgrupos de G:*

$$\mathcal{P}N = \{XN : X \in \mathcal{P}\}$$

e por $\mathcal{P}N/N$ a seguinte família de subgrupos de G/N:

$$\mathcal{P}N/N = \{XN/N : X \in \mathcal{P}\}.$$

Notação 2.1.15. *Seja G um grupo finito. Se $\mathcal{P}$ é uma família de subgrupos de G e L é um subgrupo de G, denotamos por $\mathcal{P} \cap L$ a seguinte família de subgrupos de G:*

$$\mathcal{P} \cap L = \{X \cap L : X \in \mathcal{P}\}.$$

Dados um sistema de Sylow $\mathcal{S}$ e um subgrupo L de G, é fácil ver que, de maneira geral, $\mathcal{S} \cap L$ não é um sistema de Sylow de L. Mas, quando $\mathcal{S} \cap L$ é um sistema de Sylow de L, chamamos $\mathcal{S}$ de uma **extensão** de $\mathcal{S} \cap L$. Naturalmente, podemos aplicar a mesma terminologia à base de Sylow na correspondente situação.

Sejam $\mathcal{S}_L$ um sistema de Sylow de um subgrupo L de um grupo solúvel finito G e $\mathcal{B}_L$ a base de Sylow determinada por $\mathcal{S}_L$. Para cada $p \in \pi(G)$, um p'-subgrupo de Hall $G_{p'}$ de G contém um p'-subgrupo de Hall $L_{p'}$ de $\mathcal{S}_L$. Sejam $\mathcal{S} = \{G_{p'} : p \in \pi(G)\}$ um sistema de Sylow de G e $\mathcal{B} = \{G_p : p \in \pi(G)\}$ uma base de Sylow determinada por $\mathcal{S}$. Assim, $L_{p'}$ contém um p'-subgrupo $G_{p'} \cap L$ e, portanto, $L_{p'} = G_{p'} \cap L$. Deste modo, se G_p é um p-subgrupo de Sylow em $\mathcal{B}$, segue que

$$L \cap G_p = L \cap (\bigcap_{q \neq p} G_{q'}) = \bigcap_{q \neq p} (L \cap G_{q'}) = \bigcap_{q \neq p} L_{q'} = L_p.$$

Então, $\mathcal{B} \cap L = \mathcal{B}_L$ e $\mathcal{B}$ é uma extensão de $\mathcal{B}_L$. Além disso, se $\mathcal{B}'$ é uma base de Sylow de G, temos que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}^g$ e, portanto $\mathcal{B}'$ é uma extensão de $\mathcal{B}' \cap L^g = \mathcal{B}'_{L^g}$. Assim, obtemos o seguinte:

Proposição 2.1.16 ([7], 4.16, p. 226). *Seja L um subgrupo de um grupo solúvel finito G. Então, cada base de Sylow de L pode ser estendida a uma base de Sylow de G.*

Proposição 2.1.17 ([7], 4.17, p. 226). *Seja G um grupo solúvel finito. Suponha que $\mathcal{B}$ é uma base de Sylow de G, L é um subgrupo de G e N é um subgrupo normal de G. Então:*

(i) *Se $\mathcal{B}$ é uma extensão de $\mathcal{B} \cap L$, então $\mathcal{B}N/N$ é uma extensão de $\mathcal{B}N/N \cap LN/N$;*

(ii) *Se $\mathcal{B}N/N$ é uma extensão de $\mathcal{B}N/N \cap LN/N$, então $\mathcal{B}$ é uma extensão de $\mathcal{B} \cap LN$.*

O próximo resultado mostra que a extensão de uma base de Sylow em um subgrupo é determinada pela extensão do sistema de Sylow no mesmo.

Proposição 2.1.18 ([7], 4.18, p. 226). *Sejam $\mathcal{B}$ uma base de Sylow e $\mathcal{S}$ um sistema de Sylow de um grupo finito G. Se L é um subgrupo de G, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{S}$ é uma extensão de $\mathcal{S} \cap L$;*

(ii) *$\mathcal{B}$ é uma extensão de $\mathcal{B} \cap L$.*

Lema 2.1.19 ([7], 4.20, p. 227). *Sejam $\mathcal{S}$ um sistema de Sylow e L um subgrupo de um grupo G.*

(i) *Se $|G : L|$ é uma potência de um primo p, então cada q'-subgrupo de Hall Q de G é uma extensão de $Q \cap L$ para cada $q \neq p$. Em particular, $\mathcal{S}$ é uma extensão de $\mathcal{S} \cap L$ se, e somente se, L contém o p'-subgrupo de Hall de $\mathcal{S}$;*

(ii) *Se $\mathcal{S}$ é uma extensão de $\mathcal{S} \cap L$, então existe uma cadeia maximal de subgrupos*

$$L = L_r < L_{r-1} < \ldots < L_1 < L_0 = G,$$

tal que, $\mathcal{S}$ é uma extensão de $\mathcal{S} \cap L_i$ para $i = 0, 1, \ldots, r$.

Proposição 2.1.20 ([7], 4.21, p. 228)**.** *Seja L um subgrupo de um grupo solúvel finito G. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *L é subnormal em G;*

(ii) *Cada sistema de Sylow de G é uma extensão de um sistema de Sylow de L.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sejam $L = L_r \lhd \cdots \lhd L_1 \lhd L_0 = G$ uma série subnormal e $\mathcal{B}$ uma base de Sylow de G. Como $L_1 \lhd G$, temos que $\mathcal{B}$ é uma extensão de $\mathcal{B} \cap L_1$ e, por indução, podemos concluir que $\mathcal{B}$ é uma extensão de $\mathcal{B} \cap L_r$. Logo, pela Proporsição 2.1.18, $\mathcal{S}$ é uma extensão de $\mathcal{S} \cap L$, como queríamos.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Vamos provar por indução sobre $|G|$. Seja $1 \neq N \trianglelefteq G$. Então, pelas Proporsições 2.1.17 e 2.1.18, um sistema de Sylow $\mathcal{S}N/N$ de G/N é uma extensão de $\mathcal{S}N/N \cap LN/N$. Assim, por indução, LN é subnormal em G. Agora, se LN é um subgrupo próprio de G, então existe um subgrupo normal próprio K de G, tal que, $LN \leq K$. Seja $\mathcal{S}_0$ um sistema de Sylow de K, pelas Proporsições 2.1.17 e 2.1.18, segue que $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \cap K$ para algum sistema de Sylow $\mathcal{S}$ de G. Como $\mathcal{S}$ é uma extensão de $\mathcal{S} \cap L$, temos que $\mathcal{S}_0$ é uma extensão de $\mathcal{S}_0 \cap L$. Logo, por indução, L é subnormal em K e, portanto, L é subnormal em G. Desta forma, podemos supor que $LN = G$.

Suponha que $N = L_G$. Se N é não trivial, então $L = G$ é subnormal em G. Assim, podemos admitir que $L_G = 1$. Neste caso, tome N um subgrupo normal minimal de G e suponha que L é um subgrupo maximal de G, tal que, L é um complemento de N. Deste modo, $|G : L| = |N|$ é uma potência de um primo p. E, pela Proporsição 2.1.19, L contém um subgrupo R gerado por todos os p-subgrupos de Sylow de G. Note que, pelo Teorema 2.1.5, R é um subgrupo normal em G. Como $L_G = 1$, concluimos que $R = 1$ e, assim, G é um p-grupo. Logo, pela Proporsição 1.2.18 (ii), L é subnormal em G.

□

Definição 2.1.21. *Seja $\mathcal{S} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k\}$ um sistema de Sylow de um grupo finito G. O subgrupo*

$$T = \bigcap_{i=1}^{k} N_G(Q_i)$$

*é chamado de **normalizador de sistema** de G.*

Observe que se $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ é a base de Sylow correspodente, então um elemento de G normaliza cada Q_i se, e somente se, normaliza cada P_i. Isso ocorre devida a relação entre Q_i e P_i para todo i. Desta forma,

$$T = \bigcap_{i=1}^{k} N_G(P_i),$$

ou seja, o normalizador de sistema pode ser também obtido a partir da base de Sylow.

Veremos agora uma propriedade notável desse subgrupo.

Teorema 2.1.22 ([19], 9.2.4, p. 263)**.** *Se G é um grupo solúvel finito, então os normalizadores de sistemas são nilpotentes e quaisquer dois são conjugados.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{B} = \{P_1, \ldots, P_r\}$ uma base de Sylow e T o normalizador de sistema obtido a partir de $\mathcal{B}$. Note que, $|T : T \cap P_i| = |TP_i : P_i|$ divide $|G : P_i|$, pois $P_i \trianglelefteq TP_i$. Assim, $T \cap P_i$ é um p_i-subgrupo de Sylow de T e $T \cap P_i \trianglelefteq T$ para todo $i = 1, 2, \ldots, r$. Logo, pelo Teorema 1.2.18, T é nilpotente. A conjugação dos normalizadores de sistemas é uma consequência direta da conjugação das bases de Sylow, um vez que, qualquer automorfismo de G meramente permuta suas bases de Sylow.

□

Definição 2.1.23. *Sejam G um grupo, $L \leq G$ e $K \triangleleft H \leq G$.*

- *Dizemos que L **cobre** H/K se $HL = KL$, ou equivalentemente, se $H = K(H \cap L)$;*
- *Dizemos que L **evita** H/K se $H \cap L = K \cap L$, ou equivalentemente, se $H \cap L \leq K$.*

Teorema 2.1.24 ([7], 1.7, p. 4)**.** *Seja L um subgrupo de um grupo finito G.*

(i) *Sejam $H \leq G$ e $K \triangleleft H$. Então, L cobre H/K se, e somente se, $|(L \cap H) : (L \cap K)| = |H : K|$ e L evita H/K se, e somente se, $|(L \cap H) : (L \cap K)| = 1$;*

(ii) *Seja $1 = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_r = G$ uma série subnormal de G com a propriedade que L cobre H_j/H_{j-1} para $j \in J$ e L evita H_j/H_{j-1} para $j \in \{1, 2, \ldots, r\} - J$. Então, $|L| = \prod_{j \in J} |H_j : H_{j-1}|$.*

Teorema 2.1.25 (P. Hall, [19], 9.2.6, p. 26). *Se T é um normalizador de sistema de um grupo solúvel finito G, então T cobre cada fator principal central e evita cada fator principal não-central de G.*

O próximo resultado é uma consequência do Teorema 2.1.24 (ii) e do Teorema 2.1.25.

Teorema 2.1.26 ([7], 5.7, p. 238). *A ordem de um normalizador de sistema de um grupo solúvel finito é o produto das ordens dos fatores principais centrais em uma série principal de G.*

A partir disto, podemos provar a seguir uma importante propriedade dos normalizadores de sistemas.

Teorema 2.1.27 ([7], 5.8, p. 238). *Sejam G um grupo solúvel finito e $\mathcal{B} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ uma base de Sylow de G. Se L é um subgrupo normal e $T = \bigcap_{i=1}^{k} N_G(P_i)$ é o normalizador de sistema de G, então $TL/L = \bigcap_{i=1}^{k} N_{G/L}(P_iL/L)$ é o normalizador de sistema de G/L. Em outras palavras, normalizadores de sistemas são preservados por epimorfismos.*

Demonstração. Observe que $\mathcal{B}L/L = \{PL/L : P \in \mathcal{B}\}$ é uma base de Sylow de G/L. É claro que

$$TL/L \leq \bigcap_{i=1}^{k} N_{G/L}(P_iL/L). \tag{2.1}$$

Por outro lado, se $1 = K_0 \lhd K_1 \lhd \cdots \lhd K_r = G$ é uma série principal de G, pelos Teoremas 2.1.24 e 2.1.25, segue que

$$|T : T \cap L| = \prod_{j \in J} |K_jL/L : K_{j-1}L/L|,$$

onde $(K_jL/L)/(K_{j-1}L/L)$ é um fator principal central de G/L para cada $j \in J$. Portanto, $|T : T \cap L|$ coincide com o produto das ordens dos fatores principais centrais em uma série principal de G/L. Logo, pelo Teorema 2.1.26, $|T : T \cap L|$ tem a ordem de um normalizador de sistema de G/L. Como $|TL/L| = |T : T \cap L|$, segue que a igualdade prevalece em (2.1). □

Aplicando as propriedades de cobrir e evitar de um normalizador de sistema podemos obter o resultado que diz respeito a existência de complemento.

Teorema 2.1.28 (Gaschütz, Schenkman, Carter, [19], 9.2.7, p. 264). *Sejam G um grupo solúvel finito e $\gamma_\infty(G)$ o residual nilpotente de G. Se T é um normalizador de sistema de G, então $G = T\gamma_\infty(G)$. Além disso, se $\gamma_\infty(G)$ é abeliano, então $T \cap \gamma_\infty(G) = \{1\}$ e T é um complemento de $\gamma_\infty(G)$.*

Teorema 2.1.29 ([19], 9.2.8, p. 265). *Sejam G um grupo solúvel finito e T um normalizador de sistema de G. Então, o core de T em G é o hipercentro de G e o fecho normal de T em G é igual a G.*

Como sabemos T^G é gerado por conjugados de T. Deste modo, é possível deduzir do teorema acima o seguinte fato.

Corolário 2.1.30. *Um grupo solúvel finito é gerado pelos seus normalizadores de sistemas.*

2.2 Generalização do Teorema do Subgrupo Focal

Nosso objetivo nesta seção é justamente mostrar que quando G é um grupo solúvel finito, os p-subgrupos de Sylow de $G^{(k)}$ são gerado por δ_k-valores de ordem potência de p em $G^{(k)}$. Para isso, vamos considerar alguns resultados preliminares sobre grupos solúveis finitos, já comentados na seção anterior, e as consequências para a estrutura de tais grupos.

Seja G um grupo solúvel finito. Uma base de Sylow do grupo G consiste de uma família de p-subgrupos de Sylow de G para cada $p \in \pi(G)$. E quaisquer duas base de Sylow de G são conjugadas. Neste sentido, dada uma base de Sylow de G, o normalizador de sistema é o subgrupo $T = \bigcap_i N_G(P_i)$. Particularmente, os normalizadores de sistemas são conjugados, nilpotentes e $G = T\gamma_\infty(G)$, onde $\gamma_\infty(G)$ é o residual nilpotente de G. Além disso, os normalizadores de sistemas são preservados por epimorfismos, isto é, dado $L \trianglelefteq G$ temos que a imagem de T no quociente G/L é um normalizador de sistema de G/L.

Definição 2.2.1. *Seja G um grupo finito. Um subconjunto X de G é chamado de **comutador-fechado** se $[x, y] \in X$ para todo $x, y \in X$.*

O conjunto X é simétrico quando $X = X^{-1}$. Observe que o conjunto de todos os δ_k-valores de um grupo G é comutador-fechado e simétrico.

Lembre ainda que o comprimento de Fitting $h(G)$ de um grupo solúvel finito é o menor número h, tal que G possui uma série normal de comprimento h, onde todos os fatores são nilpotentes.

Lema 2.2.2. *Todo grupo solúvel finito é gerado por um conjunto comutador-fechado, onde todo elemento tem ordem potência de um primo.*

Demonstração. Sejam G um grupo solúvel finito com comprimento de Fitting h, e $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, \ldots\}$ uma base de Sylow de G. Denote, os termos da série inferior de Fitting, por $K_1 = G$, $K_2 = \gamma_\infty(G)$ e $K_{i+1} = \gamma_\infty(K_i)$ para $i = 1, \ldots, h$. Assim, $K_{h+1} = 1$. Agora, considere a base de Sylow $\mathcal{B}_i = \{P_1 \cap K_i, P_2 \cap K_i, \ldots\}$ em K_i e seja $T_i \leq K_i$ o normalizador de sistema correspondente a $\mathcal{B}_i$. Logo, $K_i = T_i K_{i+1}$. A escolha específica das bases de Sylow $\mathcal{B}_i$ garante que T_j normaliza T_k sempre que $j \leq k$. Observe que

$$G = T_1 K_2 = T_1 T_2 K_3 = \cdots = T_1 T_2 \cdots T_h.$$

Assim, G é um produto de h subgrupos nilpotentes T_i de modo que T_j normaliza T_k sempre que $j \leq k$. Para cada $i = 1, \ldots, h$ denote por X_i o conjunto dos elementos de ordem potência de primo contidos em T_i. Seja $X = \bigcup_{i=1}^{h} X_i$. Note que o conjunto X é um conjunto comutador-fechado e G é gerado por X, como querímos provar.

□

Lema 2.2.3. *Seja G um grupo gerado por um conjunto comutador-fechado X. Então, o subgrupo comutador G' é gerado por comutadores $[x_1, x_2]$, onde $x_1, x_2 \in X$.*

Demonstração. Seja $Y = \{[x_1, x_2] | x_1, x_2 \in X\}$ e $H = \langle Y \rangle$. Evidentemente, $H \leq G'$. Deste modo, precisamos somente mostrar que $G' \leq H$. Para isso é suficiente provar que H é normal em G, pois fica claro que G/H é abeliano. Escolha $x \in X$ e vamos mostrar que o elemento x normaliza o subgrupo H. Tome $y \in Y$ um gerador de H e escreva $y^x = y[y, x]$. Note que, como X é comutador-fechado, y e $[y, x]$ pertencem ao conjunto Y. Logo $y^x \in H$. Assim, concluímos que x normaliza H. Como $G = \langle X \rangle$, segue que o subgrupo H é normal em G. O lema está provado.

□

Se X e Y são dois subconjuntos de G e N é um subgrupo normal de G, nem sempre ocorre que $XN \cap YN = (X \cap Y)N$, isto é, usando a notação de barra, $\overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cap Y}$ no quociente $\overline{G} = G/N$.

Os próximos dois lemas foram retirados de [1]. O primeiro determina a situação na qual vale a propriedade mencionada anteriormente. E o segundo é fundamental para provar o Teorema 2.2.7.

Lema 2.2.4 ([1], Lema 2.1). *Sejam G um grupo finito e N um subgrupo normal de G. Se P é um p-subgrupo de Sylow de G e X é um subconjunto normal de G consistindo de p-elementos, então $XN \cap PN = (X \cap P)N$. Em outras palavras, usando a notação de barra $\overline{G} = G/N$, $\overline{X} \cap \overline{P} = \overline{X \cap P}$*

Demonstração. É claro que $\overline{X \cap P} \subseteq \overline{X} \cap \overline{P}$. Assim, precisamos somente provar a inclusão $\overline{X} \cap \overline{P} \subseteq \overline{X \cap P}$. Ou seja, dado um elemento $g \in XN \cap PN$, vamos mostrar que $g \in xN$ com $x \in X \cap P$. Como $g \in XN$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que $g \in X$ e, em particular, g é um p-elemento. E também, como $g \in PN$, existe $z \in P$, tal que, $gN = zN$.

Tome $H = \langle g \rangle N = \langle z \rangle N$ e observe que $H' \leq N$. Uma vez que $P \cap N$ é um p-subgrupo de Sylow de N e $z \in P$, segue que $P \cap H = \langle z \rangle (P \cap N)$ é um p-subgrupo de Sylow de H. Agora, g é um p-elemento de H, então obtemos que $g^a \in P \cap H$ para algum $a \in H$. Se tomarmos $x = g^a$, como X é um subconjunto normal de G, temos que $x \in X \cap P$. Portanto, $g = x^{a^{-1}} = x[x, a^{-1}] \in xH' \subseteq xN$, como queríamos provar. □

Lema 2.2.5 ([1], Lema 2.2). *Sejam G um grupo finito, P um p-subgrupo de Sylow de G, e N, L subgrupos normais de G. Use a notação de barra no grupo quociente G/N e suponha que N é um subgrupo de L. Se X é um subconjunto normal de G consistindo de p-elementos, tal que, $\overline{P} \cap \overline{L} = \langle \overline{P} \cap \overline{X} \rangle$, então $P \cap L = \langle P \cap X, P \cap N \rangle$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.4, segue que $\overline{P} \cap \overline{L} = \langle \overline{P \cap X} \rangle$ e isso implica que

$$PN \cap L = \langle P \cap X \rangle N.$$

Daí,

$$P \cap L = P \cap (PN \cap L) = P \cap \langle P \cap X \rangle N = \langle P \cap X \rangle (P \cap N),$$

onde a última igualdade segue pela Lei de Dedekind. Isto prova o resultado.

□

Sejam G um grupo finito e P um p-subgrupo de Sylow de G. O Teorema do Subgrupo Focal estabelece que $P \cap G'$ é gerado pelo conjunto de comutadores $\{[g,z] \mid g \in G, z \in P, [g,z] \in P\}$. Isto foi provado por Higman em 1953. Uma consequência imediata do Teorema do Subgrupo Focal é que $P \cap G'$ é gerado por comutadores contidos em P. Claro que G' é o subgrupo verbal gerado pelos valores da palavras $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$. E, neste cotexto, é natural fazer a pergunta sobre uma generalização da consequência do Teorema do Subgrupo Focal para subgrupos verbais gerados por outras palavras. Mais especificamente, se w é uma palavra de grupo, G_w o conjunto de w-valores em G e $w(G)$ o subgrupo verbal de w em G, então somos levados ao problema a seguir, surgerido por C. Acciarri, G. A. Fernández-Alcober e P. Shumyatsky em [1].

Problema 2.2.6. *Dado um p-subgrupo de Sylow P de um grupo finito G, é verdade que $P \cap w(G)$ é gerado por w-valores em P, isto é, $P \cap w(G) = \langle P \cap G_w \rangle$?*

Note que se consideramos o caso em que G é um grupo não abeliano de ordem 6, $w = x^3$ e $p = 3$ podemos rapidamente verificar que a resposta ao problema é negativa. Portanto, vamos apenas nos concentrar no caso em que w é uma palavra comutador. Assim, lidamos com a questão de $P \cap w(G)$ ser ou não ser gerado por w-valores sempre que w é uma palavra comutador.

A seguir mostramos que se G é solúvel, então $P \cap G^{(k)}$ é gerado por δ_k-valores contidos em P. Mais precisamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.7. *Sejam k um inteiro positivo e G um grupo solúvel finito. Se P é um p-subgrupo de Sylow de G, então $P \cap G^{(k)}$ é gerado por δ_k-valores contidos em P.*

Demonstração. Como G é um grupo solúvel, pelo Lema 2.2.2, existe um conjunto comutador-fechado X em G, tal que, cada elemento em X tem ordem potência de um primo e G é gerado por X. Para cada i denote por $X^{(i)}$ o conjunto de todos os $x \in X$, onde existem $x_1, \ldots, x_{2^i} \in X$, tais que, $x = \delta_i(x_1, \ldots, x_{2^i})$ e, por $X_p^{(i)}$ o conjunto de todos $x \in X^{(i)}$, tal que, x tem ordem potência de p. Assim, $X_p^{(i)}$ é um conjunto de δ_i-valores cuja ordem é uma potência de p. É claro que $X_p^{(i)} \subseteq X$. Denote por Y_i a união das classes de conjugação dos elementos de $X_p^{(i)}$, isto é, $Y_i = (X_p^{(i)})^G$. Vamos mostrar que $P \cap G^{(i)}$ é gerado por $P \cap Y_i$.

Primeiramente, vamos usar indunção sobre i para mostrar que $G^{(i)}$ é gerado por $X^{(i)}$. Se $i = 0$ é óbvio que segue o resultado. Então, assuma que $i \geq 1$ e $G^{(i-1)}$ é gerado por $X^{(i-1)}$. Considere o conjunto $U = X^{(i-1)}$ e observe que U é um cojunto comutador-fechado que gera $H = G^{(i-1)}$. Agora, pelo Lema 2.2.3, segue que o subgrupo comutador H' é gerado por comutadores $[u_1, u_2]$, onde $u_1, u_2 \in U$. Resta apenas notar que o conjunto dos comutadores $\{[u_1, u_2] | u_1, u_2 \in U\}$ é precisamente o conjunto $X^{(i)}$ e H' é exatamente $G^{(i)}$.

Vamos supor que G é um contra-exemplo minimal no qual a afirmação que $P \cap G^{(i)}$ é gerado por $P \cap Y_i$ é falsa. Se N é um subgrupo normal de G e $\overline{G} = G/N$, pela minimalidade de G, temos que $\overline{P} \cap \overline{G^{(i)}}$ é gerado por $\overline{P} \cap \overline{Y_i}$. Pelo Lema 2.2.5, segue que $P \cap G^{(i)} = \langle P \cap Y_i, P \cap N \rangle$. No caso quando G possui um p'-subgrupo normal não-trivial N, o resultado é imediato, pois $P \cap N = 1$. Logo, podemos assumir que G não possui p'-subgrupos normais não-triviais.

Como G é solúvel, existe um inteiro positivo j, tal que, $G^{(j)}$ é nilpotente. Em virtude das nossas suposições, podemos admitir que $G^{(j)}$ é um p-grupo. Lembre que $G^{(j)}$ é gerado por $X^{(j)}$. Como $G^{(j)}$ é um p-grupo, temos que $X^{(j)} = X_p^{(j)}$. Se $j \leq i$, então $G^{(j)}$ é um p-grupo gerado por $X_p^{(j)} \subseteq Y_i$ e o resultado segue.

Por outro lado, se $i \leq j - 1$, podemos usar a igualdade $P \cap G^{(i)} = \langle P \cap Y_i, P \cap N \rangle$ com $N = G^{(j)}$. Neste caso, $P \cap N$ é gerado por $X_p^{(j)} \subseteq Y_i$ e, novamente, obtemos que $P \cap G^{(i)} = \langle P \cap Y_i \rangle$. E a demonstração está completa.

□

2.3 Um critério de Nilpotência para Subgrupos Derivados

Um conceito muito discutido em teoria dos grupos finitos é a nilpotência e uma das maneiras de analizar este fenômeno é observar o comportamento dos elementos de ordens coprimas. Um fato muito conhecido é que todo grupo nilpotente finito G possui a seguinte propriedade:

Hipótese 2.3.1. *O produto das ordens de dois elementos de ordens coprimas em G é a ordem do produto desses elementos.*

Em 2014, admitindo a hipótese acima, B. Baumslag e J. Wiegold [5] publicaram um artigo demonstrando o seguinte teorema.

Teorema 2.3.2. *Todo grupo finito que satisfaz a Hipótese 2.3.1 é nilpotente.*

Notando que Baumslag e Wiegold tinham estabelecido um critério de nilpotência para grupos finitos, R. Bastos e P. Shumyatsky em [2] estabeleceram um critério de nilpotência similar para o subgrupo comutador G', provando o teorema a seguir:

Teorema 2.3.3. *Seja G um grupo finito, tal que $|ab| = |a||b|$ para todos comutadores $a, b \in G$ de ordens coprimas. Então, G' é nilpotente.*

Em virtude do teorema acima, foram motivados a suspeitar que um fenômeno semelhante poderia ser aplicado ao universo das palavras de grupos.

Sejam w uma palavra e G um grupo finito, tal que $|ab| = |a||b|$ para todos w-valores a e b de ordens coprimas em G. É verdade que o subgrupo verbal $w(G)$ é nilpotente?

No entanto, a resposta para a pergunta acima é negativa. Por exemplo, quando o grupo finito G é simples não-abeliano de expoente e e a palavra é $w = x^n$, onde n é um divisor de e e $\frac{e}{n}$ é primo. Mesmo, no caso geral de palavras comutadores, M.Kassabov e N. Nikolov em [14] mostraram que para cada $n \geq 7$ o grupo alternado A_n admite uma palavra comutador cuja cada valor não-trivial tem ordem 3. Por outro lado, R. Bastos, C. Monetta e P. Shumyatsky em [3] provaram que a resposta é positiva sempre que w é uma palavra central inferior, que posteriormente foi estendido a uma família de palavras comutadores (ver Teorema 5). Mais especificamente, mostraram o resultado a seguir:

Teorema 2.3.4. *Seja k um inteiro positivo. O k-ésimo termo da série central inferior de um grupo finito G é nilpotente se, e somente se, $|ab| = |a||b|$ para todos γ_k-comutadores $a, b \in G$ de ordens coprimas.*

Na prática o Teorema 2.3.4 fornece elementos que podem confirmar a pergunta feita anteriormante se for considerado palavras comutadores multilineares, isto é, o

Teorema 2.3.4 contribui para confirmar o problema a seguir, que ainda permanece em aberto, sugerido por R. Bastos e P. Shumyatsky em [2].

Problema 2.3.5. *Sejam w uma palavra comutador multilinear e G um grupo finito com a propriedade que $|ab| = |a||b|$ para todos w-valores $a, b \in G$ de ordens coprimas. Então, o subgrupo verbal $w(G)$ é nilpotente?*

Foi ainda conjecturado em [3] que um critério semelhante de nilpotência para o k-ésimo termo da série derivada de G é válido. Nosso objetivo, nesta seção, é apresentar uma solução positiva para o Problema 2.3.5 quando a palavra comutador multilinear é uma palavra derivada e o grupo finito G é solúvel. Efetivamente, vamos provar o seguinte resultado:

Teorema 2.3.6. *Seja k um inteiro positivo. O k-ésimo subgrupo comutador de um grupo solúvel finito é nilpotente se, e somente se, $|ab| = |a||b|$ para todos δ_k-valores $a, b \in G$ de ordens coprimas.*

Primeiramente, lembre que um grupo G é metanilpotente se exite um subgrupo normal N, tal que, N e G/N são nilpotentes. Note que todo grupo metanilpotente é solúvel e que subgrupos e quocientes de grupos metanilpotentes são metanilpotentes. Denotamos por $F(K)$ o subgrupo de Fitting de um grupo K e $O_p(K)$ o p-subgrupo normal maximal de K. O seguinte lema é bem conhecido (veja por exemplo [3], Lema 3).

Lema 2.3.7. *Sejam p um primo e G um grupo metanilpotente. Suponha que x é um p-elemento em G, tal que $[O_{p'}(F(G)), x] = 1$. Então, $x \in F(G)$.*

Demonstração. Como todo elemento de Engel de um grupo finito está contido no subgrupo de Fitting, pelo Teorema 1.3.8, é suficiente mostrar que x é um elemento de Engel. Sejam $F = F(G)$ e P um p-subgrupo de Sylow de F. Note que $F = P \times O_{p'}(F)$. Por hipótese, G/F é nilpotente de classe n para algum inteiro positivo n. Logo, deduzimos que $[G,_n x] \leq F$ e, consequentemente, $[G,_{n+1} x] \leq P$. Assim, $\langle [G,_{n+1} x], x \rangle$ está contido em um p-subgrupo de Sylow de G. Portanto, x é um elemento de Engel em G e o lema está provado.

□

Considere agora um grupo solúvel finito G no qual existe $k \geq 1$, tal que $|ab| = |a||b|$ para quaisquer δ_k-valores $a, b \in G$ de ordens coprimas.

Lema 2.3.8. *Sejam x um δ_k-valor em G e N um subgrupo normalizado por x. Se $(|N|, |x|) = 1$, então $[N, x] = 1$.*

Demonstração. Escolha $y \in N$. Note que $[y, x, x] = [x^{-y}, x]^x$ é um δ_k-valor e a ordem do δ_k-valor $[y, x, x]$ tem ordem coprima com a ordem de x. Portanto, $|[y, x, x]x^{-1}| = |[y, x, x]||x|$. No entanto, $[y, x, x]x^{-1} = [x, y]x^{-1}[y, x]$ é um conjugado de x^{-1}, então $[y, x, x] = 1$. Uma vez que y é um elemento arbitrário de N, temos que $[N, x, x] = 1$. E, pelo Lema 1.1.24, deduzimos que $[N, x] = 1$.

□

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema 2.3.6.

A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.3.7. É claro que se $G^{(k)}$ é nilpotente, então $|ab| = |a||b|$ para quaisquer δ_k-valores $a, b \in G$ de ordens coprimas. Assim, precisamos apenas provar que se $|ab| = |a||b|$ para quaisquer δ_k-valores $a, b \in G$ de ordens coprimas, então $G^{(k)}$ é nilpotente. Como os casos $k < 2$ foram considerados em [2] e [5], vamos supor que $k \geq 2$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que G é um contra-exemplo, tal que, $|G^{(k)}|$ é a menor ordem possível. Como $|G^{(k)}| > |G^{(k+1)}|$, concluímos que $G^{(k+1)}$ é nilpotente e, portanto, $G^{(k)}$ é metanilpotente. Seja P um p-subgrupo de Sylow de $G^{(k)}$. Então, pelo Teorema 2.2.7, temos que P é gerado por δ_k-valores. Agora, tome x um δ_k-valor contido em P. Pelo Lema 2.3.8, temos que $[O_{p'}(F(G)), x] = 1$, em particular $[O_{p'}(F(G^{(k)}), x] = 1$. Como $G^{(k)}$ é metanilpotente, pelo Lema 2.3.7, deduzimos que $x \in F(G^{(k)})$, consequentemente, $x \in F(G)$. Uma vez que isso acontece para todo δ_k-valor x contido em P, concluímos que $P \leq F(G)$. Assim, um subgrupo de Sylow arbitrário de $G^{(k)}$ está contido em $F(G)$ e, consequentemente, isso implica que $G^{(k)} \leq F(G)$. Portanto, $G^{(k)}$ é nilpotente.

□

Bibliografia

[1] C. Acciarri, G. A. Fernández-Alcober, and P. Shumyatsky, *A focal subgroup theorem for outer commutator words*, J. Group Theory, 15 (2012), 397-405.

[2] R. Bastos and P. Shumyatsky, *A Sufficient Condition for Nilpotency of the Commutator Subgroup*, Siberian Mathematical Journal, 57 (2016), 762-763.

[3] R. Bastos, C. Monetta, and P. Shumyatsky, *A criterion for metanilpotency of a finite group*, J. Group Theory, 21 (2018), 713-718.

[4] R. Bastos and C. Monetta, *Coprime commutators finite groups*, Comm. Algebra, 47 (2019), 4137-4147.

[5] B. Baumslag and J. Wiegold, *A Sufficient Condition for Nilpotency in a Finite Group*, preprint available at arXiv:1411.2877v1 [math.GR].

[6] J. da Silva Alves and P. Shumyatsky, *On nilpotency of higher commutator subgroups of a finite soluble group*, Arch. Math., 116(2021), 1–6.

[7] K. Doerk and T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter, 1992.

[8] W. Feit and J. G. Thompson, *Solvability of Groups of Odd Order*. Pacific J. Math. 13, 775-1029, 196

[9] A. Freitas de Andrade and A. Carrazedo Dantas, *A sufficient condition for nilpotency of the nilpotent residual of a finite group*, J. Group Theory, 21 (2018), 289-293.

[10] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Chelsea Publishing Company, New York, 1980.

[11] R. M. Guralnick and A. Moretó, *Conjugacy classes, characters and products of elements*, Math. Nachr., 292 (2019), 1315-1320.

[12] I. M. Isaacs, *Algebra: A Graduate Course*, Amer. Math. Soc., Graduate Studies in Mathematics. Volume 100. 2005.

[13] I. M. Isaacs, *Finite Group Theory*, Amer. Math. Soc., Providence (2008).

[14] M. Kassabov and N. Nikolov, *Words with few values in finite simple groups*, Q. J. of Math., 64 (2013), 1161-1166.

[15] V. S. Monakhov, *A metanilpotency criterion for a finite solvable group*, Proc. Steklov Inst. Math., 304 (2019), suppl. 1, 141-143.

[16] C. Monetta and A. Tortora, *A nilpotency criterion for some verbal subgroups*, Bull. Aust. Math. Soc., 100 (2019), 281-289.

[17] A. Moretó and A. Saéz, *Prime divisors of orders of products*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 149 (2019), 1153-1162.

[18] H. Neumann, *Varieties of groups*. Springer-Verlag New York, Inc., NewYork 1967.

[19] D. J. S. Robinson, *A course in the Theory of Groups*, Grad. Texts in Math. 80, Springer, New York, 1993.

[20] H. E. Rose, *A Course on Finite Groups*. Springer, 2009.

[21] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Fourth Edition. Springer-Verlag, New York, 1994.

[22] D. Segal, *Words: notes on verbal widthin groups*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 361. Cambridge University Press,Cambridge, 2009.

[23] P. Shumyatsky, *Commutators of elements of coprime orders in finite groups*, Forum Math., 27 (2015), 575-583.