Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Transformações de Ribaucour horizontais entre Superfícies mínimas.

por

Welinton de Oliveira Gimarez

Brasília

2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Transformações de Ribaucour horizontais entre Superfícies mínimas.

por

Welinton de Oliveira Gimarez *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidadede Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 17 de novembro de 2021.

Comissão Examinadora:

Pedro Roitman

Prof. Dr. Pedro Roitman - MAT/UnB (Orientador)

João Paulo dos Santos

Prof. Dr. João Paulo dos Santos– MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Ruy Tojeiro – USP São Carlos (Membro)

Prof. Dr. Armando Mauro Vasques Corro- UFG (Membro)

* O autor foi bolsista da CAPES e do CNPq durante a elaboração desta Tese.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

GS237t
Gimarez, Welinton de Oliveira
Transformações de Ribaucour horizontais entre superfícies mínimas / Welinton de Oliveira Gimarez; orientador Pedro Roitman. -- Brasília, 2021.
84 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2021.

1. Superfícies mínimas.. 2. Congruência de círculos.. 3. Transformação de Ribaucour horizontal.. 4. Permutabilidade.. I. Roitman, Pedro, orient. II. Título.

"Um dia sem sorrir é um dia desperdiçado." Charlie Chaplin

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho, e em especial:

- A Deus por me permitir chegar até aqui.

- Aos meus pais, Adhemar e Luiza, pelas orações, apoio e ensinando-me, principalmente, a importância da construção e coerência de meus próprios valores.

- Ao meu irmão, Welton, meu eterno amigo, que soube entender minhas dificuldades e ausências.

- Ao orientador, Professor Dr. Pedro Roitman, pela amizade e constante incentivo, sempre indicando a direção a ser tomada e principalmente pela confiança que depositou em mim. Minha eterna gratidão.

- A todos meus professores, pelos valiosos conhecimentos que me forneceram.

- Aos amigos, pelo prazer de suas amizades, conversas, trocas de conhecimentos, ajuda e conselhos.

- Ao *CNPQ* e à *CAPES* , pelo apoio financeiro à este trabalho.

Resumo

Introduzimos uma transformação geométrica de superfícies nos espaços produto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{H}^2$ denotam, respectivamente, a esfera unitária com a métrica canônica e o plano hiperbólico com curvatura -1. Aplicamos esta transformação para obter novos exemplos de superfícies mínimas nestes espaços a partir de superfícies mínimas conhecidas. Mostramos também um teorema de permutabilidade para estas transformações.

Palavras-Chaves: Superfícies mínimas, congruência de círculos, transformação de Ribaucour horizontal, permutabilidade.

Abstract

We introduce a geometric tranformation for surfaces in the product spaces $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, where $\mathbb{S}^2$ and $\mathbb{H}^2$ denote, respectively, the unit sphere with the standard metric and the hyperbolic plane with curvature -1. We apply this transformation to produce new examples of minimal surfaces in these spaces by starting with some well known minimal surfaces. We also show a permutability theorem for such transformations.

Key-Words: Minimal Surfaces, Congruence of Circles, horizontal Ribaucour transformation, permutability.

Sumário

Introdução

O tema central desta tese é a introdução de uma teoria de transformações de superfícies bem adaptada aos espaços produto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{H}^2$ denotam, respectivamente, a esfera unitária com a métrica canônica e o plano hiperbólico com curvatura -1. Como um caso especial importante, aplicaremos nossa teoria ao caso das superfícies mínimas, gerando novos exemplos de tais superfícies nos espaços produto mencionados acima.

Ao longo das últimas décadas, o interesse pelas superfícies mínimas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é evidente ([1], [2], [3], [10], [13], [14], [16], [18], [22]). Acreditamos que métodos para gerar exemplos explícitos de tais superfícies são bem vindos, tanto do ponto de vista teórico quanto para possivelmente inspirar novos teoremas.

Já o estudo das transformações de superfícies em que certas propriedades geométricas são preservadas é um tema da geometria diferencial clássica, ([5], [11], [12]), mas que tem interessado os geômetras até os dias atuais ([6], [9],[17], [21], [23], [24], [25]). Dentre estas transformações, destacamos as chamadas transformações de Ribaucour, onde, a grosso modo, associa-se a uma superfície Σ imersa no espaço Euclidiano uma outra superfície $\tilde{\Sigma}$, de tal forma que Σ e $\tilde{\Sigma}$ sejam as envoltórias de uma família a dois parâmetros de esferas. A correspondência entre Σ e $\tilde{\Sigma}$ é tal que as linhas de curvatura de Σ são levadas nas linhas de curvatura de $\tilde{\Sigma}$.

Um caso particular importante das transformações de Ribaucour ocorre quando as superfícies Σ e $\tilde{\Sigma}$ são superfícies mínimas. Em termos analíticos, para determinar $\tilde{\Sigma}$ a partir de uma dada superfície mínima Σ, faz-se necessário resolver um sistema integrável de equações diferenciais parciais lineares. Desta maneira, pode-se gerar exemplos novos e interessantes via transformação de Ribaucour.

A simplicidade das esferas geodésicas no espaço Euclidiano possibilita uma teoria relativamente simples para as transformações de Ribaucour neste espaço. Esta simplicidade das esferas, infelizmente, não está presente de maneira clara nos espaços produtos não Euclidianos. No entanto, como os círculos geodésicos de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{H}^2$ são objetos simples, a estrutura de produto nos levou a considerar as envoltórias de famílias a dois parâmetros de círculos horizontais, como um análogo natural das transformações de Ribaucour clássicas.

Uma questão básica que se coloca nessa tentativa de introduzir uma tal transformação em espaços produtos é se iremos exigir que algo semelhante às linhas de curvatura seja preservado por uma tal transformação. Escolhemos estudar o caso em que a correspondência entre as envoltórias de uma família a dois parâmetros de círculos horizontais preserva a malha ortogonal induzida pelas seções horizontais de uma superfície e as suas trajetórias ortogonais. Chamaremos estas transformações de transformações de Ribaucour horizontais.

Localmente, as transformações de Ribaucour horizontais nos conduzem ao estudo de um sistema de equações diferenciais. Veremos que, para o caso especial em que queremos transformar uma superfície mínima em outra superfície mínima, é possível introduzir uma função auxiliar no sistema e chegar assim a um sistema de equações diferenciais integrável no sentido de Frobenius. A integrabilidade deste sistema nos permite produzir novos exemplos explícitos de superfícies via transformação de Ribaucour horizontal.

Na teoria das transformações de Ribaucour, um dos teoremas mais interessantes é o célebre teorema da permutabilidade de Bianchi ([5]). Motivados por esse resultado clássico, obtivemos um teorema de permutabilidade, análogo ao de Bianchi, para as transformações de Ribaucour horizontais entre superfícies mínimas. Notamos que as considerações feitas ao longo da demonstração deste teorema nos permitem obter novas superfícies sem a necessidade de novas integrações do sistema. Este fato é chamado de princípio de superposição não linear na teoria das transformações de superfícies ou na teoria de equações diferenciais parciais integráveis. Exemplos de aplicações do teorema da permutabilidade de Bianchi podem ser encontrados [19].

Esta tese está organizada da seguinte forma. O Capítulo 1 é dedicado à exposição de fatos elementares que serão utilizados no decorrer do texto. Em particular, estabeleceremos alguns resultados sobre superfícies parametrizadas por seções horizontais, isto é, superfícies parametrizadas de tal forma que uma das famílias de curvas coordenadas seja formada por seções horizontais.

O capítulo 2 trata da teoria das transformações de Ribaucour horizontais em $\mathbb{R}^3$. Iniciamos com a teoria geral, associando um sistema de equações diferenciais às transformações (Teorema 2.1.1), e, posteriormente, particularizamos para o caso especial das superfícies mínimas. O principal resultado deste capítulo (Teorema 2.2.3) é a determinação de um sistema integrável de equações diferenciais que permite gerar novas superfícies mínimas a partir de uma dada, via a transformação de Ribaucour horizontal.

O capítulo 3, essencialmente, segue a linha do capítulo anterior, com a diferença de que o espaço ambiente agora é $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Embora a unificação dos três casos para o espaço ambiente seja possível, optamos, na esperança de tornar a apresentação mais palatável, separar os casos. O principal resultado deste capítulo (Teorema 3.2.3) é a determinação de um sistema integrável de equações diferenciais que permite gerar novas superfícies mínimas nos espaços produto a partir de uma dada, via a transformação de Ribaucour horizontal.

No capítulo 4 enunciamos e provamos o teorema da permutabilidade (Teoremas 4.1.2 e 4.2.2) para transformações de Ribaucour horizontais entre superfícies mínimas.

O capítulo 5 é dedicado ao cálculo de alguns exemplos para ilustrar a teoria das transformações. Através da resolução do sistema de equações, obtemos novas superfícies mínimas nos espaços produto e em $\mathbb{R}^3$. Também consideramos um exemplo para ilustrar o teorema de permutabilidade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos introduzir alguns conceitos básicos, fixar a notação utilizada e enunciar alguns resultados para superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ e nos espaços produtos (para mais informações sobre esses espaços ver [15] e [20]).

1.1 Espaços Produtos

Um espaço produto do tipo $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ é formado por uma variedade Riemanniana $(\mathbb{M}^2, g)$, que chamaremos de base, e a reta real com a métrica padrão $(\mathbb{R}, dt^2)$, que chamaremos fibra. Se considerarmos as projeções $\pi_b : \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{M}^2$ sobre a base e $\pi_f : \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sobre a fibra, então é possível induzir sobre a variedade produto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$ da forma

$$\langle , \rangle = \pi_b^*(g) + \pi_f^*(dt^2).$$

Em uma variedade Riemanniana produto $(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}, \langle , \rangle)$, chamaremos de seção horizontal $\mathbb{M}^2 \times \{t\} = \pi_f^{-1}(t)$, a pré imagem por π_f de um ponto t da fibra e seção vertical $\{p\} \times \mathbb{R} = \pi_b^{-1}(p)$ a pré imagem por π_b de um ponto p da base.

A geometria da base e da fibra influencia fortemente a geometria do espaço produto. Para ver um pouco dessa dependência, uma ferramenta básica é a noção de campos horizontais e verticais, isto é, a projeção na base e na fibra, respectivamente, de um campo na variedade.

Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$ um campo de vetores, temos que

$$X(p,t) = \Big(X^h(p), X^v(p)\Big) \in T_{(p,t)}\left(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}\right) \equiv T_p\mathbb{M}^2 \times T_t\mathbb{R}$$

onde $X^h = d\pi_b(X) \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2)$ e $X^v = d\pi_f(X) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ são campos "projetáveis". Então, dizemos que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$ é um campo horizontal (respectivamente campo vertical) se $X^v \equiv 0$ (respectivamente $X^h \equiv 0$). Consideraremos um caso particular deste tipo de variedade cuja base é superfície simplesmente conexa com curvatura constante, podemos supor ser ± 1 e 0. Assim, teremos que quando a curvatura da base é 1, nossa base é $\mathbb{S}^2$, quando é -1 a base é $\mathbb{H}^2$ e quando é 0, nossa base é $\mathbb{R}^2$; ou seja,

$$\mathbb{M}^2(\varepsilon) = \begin{cases} \mathbb{S}^2, & \text{se } \varepsilon = 1 \\ \mathbb{H}^2, & \text{se } \varepsilon = -1 \\ \mathbb{R}^2, & \text{se } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

1.1.1 Superfícies em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Nessa seção destacaremos alguns resultados necessários que uma superfície imersa no espaço produto devem satisfazer. Para isso, vamos considerar o espaço homogêneo $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ como a hipersuperfície do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4$, com métrica usual, dada por

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Vamos também denotar $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como a subvariedade Riemanniana do espaço de Lorentz L^4, com métrica induzida $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$ dada por

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1,\ x_3 > 0\}.$$

Seja $f : \Sigma \to \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão. Então consideraremos sobre Σ a métrica induzida (primeira forma fundamental) de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ a qual denotaremos por I. Seja ∇ a conexão de Σ e A o endormofismo de Weingarten associado ao vetor normal unitário η da superfície. Então $II(X,Y) = \left\langle -\overline{\nabla}_X N, Y \right\rangle = \langle AX, Y \rangle$ é a Segunda Forma Fundamental da superfície onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, por ser uma imersão, f é localmente um mergulho. Logo, se $p \in \Sigma$ existe uma vizinhança U de p em Σ tal que $f(U)$ é uma subvariedade de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Assim, se X e Y são campos locais de vetores em Σ, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ então $\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\right)^T$ é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de Σ. Desde que o operador linear A é auto-adjunto, temos que a matriz de A numa base ortonormal é simétrica e consequentemente os autovalores de A são reais, digamos λ_1 e λ_2.

Definição 1.1.1. *A curvatura média $H = H(\eta)$ e a curvatura de Gauss K de Σ são definidas por*

$$H(\eta) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\textit{traço } A}{2}$$

e

$$K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A,$$

respectivamente. Os autovalores de A, λ_1 e λ_2 são chamados de curvaturas principais. O vetor curvatura média é definido por $\vec{H} = H(\eta)\eta$ onde η é o vetor normal unitário.

Observação 1.1.1. *Seja $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ uma parametrização local de uma superfície Σ. Em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais na base $\{X_u, X_v\}$*

associada à parametrização dada, a curvatura média $H(\eta)$ e a curvatura de Gauss K podem ser expressas da seguinte maneira, respectivamente:

$$H(\eta) = \frac{1}{2} traço(A) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

e

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F2}$$

onde $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$, $G = \langle X_v, X_v \rangle$, $e = -\langle \eta_u, X_u \rangle$, $f = -\langle \eta_v, X_u \rangle$ *e* $g = -\langle \eta_v, X_v \rangle$. *Uma imersão* $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ *em que* $H = 0$ *é dita imersão mínima. Note que se uma imersão é conforme* ($E = G$ *e* $F = 0$)*, então tomando* $E = G = \sigma^2$ *temos que*

$$H = \frac{e + g}{2\sigma^2}$$

e

$$K = \frac{eg - f^2}{\sigma^4}$$

Proposição 1.1.1. *Seja* $X : \Omega \to \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ *uma imersão conforme, temos que* $2\sigma^2 \vec{H} = \nabla_{X_u} X_u + \nabla_{X_v} X_v$*, onde u e v são coordenadas de* Ω*.*

Demonstração. Como X é conforme, $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ e $\langle X_u, X_v \rangle = 0$. Derivando, obtemos

$$\langle \nabla_{X_u} X_u, X_u \rangle = \langle \nabla_{X_v} X_u, X_v \rangle = -\langle X_u, \nabla_{X_v} X_v \rangle.$$

Logo

$$\langle \nabla_{X_u} X_u + \nabla_{X_v} X_v, X_u \rangle = 0.$$

Analogamente,

$$\langle \nabla_{X_u} X_u + \nabla_{X_v} X_v, X_v \rangle = 0.$$

Segue que $\nabla_{X_u} X_u + \nabla_{X_v} X_v$ é paralelo a η. Como X é conforme,

$$H = \frac{g + e}{2\sigma^2}.$$

Assim,

$$2\sigma^2 \vec{H} = g + e = \langle \eta, \nabla_{X_u} X_u + \nabla_{X_v} X_v \rangle ;$$

donde

$$\nabla_{X_u} X_u + \nabla_{X_v} X_v = 2\sigma^2 \vec{H}.$$

□

1.1.2 Superfícies do tipo $X(u,v) = (N(u,v),u)$

Nesta seção veremos alguns resultados sobre imersões em $\mathbb{M}(\varepsilon)^2 \times \mathbb{R}$ de superfícies Σ cuja parametrização é da forma $X(u,v) = (N(u,v),u)$. Assumamos Σ orientável e transversal à folheação por seções horizontais nos espaços correspondentes citados acima (geometricamente, observe que as curvas coordenadas $u \mapsto X(u,v)$ são hélices com respeito a e_3). Além disso considere os campos da seguinte forma: $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ e e_2 como sendo a rotação positiva por um ângulo $\frac{\pi}{2}$ do campo e_1 no plano horizontal que denotaremos por $e_2 := ie_1$.

Proposição 1.1.2. *Todo ponto de uma superfície regular Σ em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ orientável e transversal à folheação de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ por seções horizontais possui uma vizinhança U que pode ser parametrizada através de uma parametrização ortogonal da forma $X(u,v) = (N(u,v),u)$.*

Demonstração. Tomando e_1 como citado acima e e_2 ortogonal a e_1 e tangente a superfície, dois campos de vetores unitários em um conjunto aberto $U \subset \Sigma$ de algum ponto $p \in U$, existe uma parametrização $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ de uma vizinhança $V \subset U$ de p de tal maneira que para cada $q \in V$ as curvas coordenadas dessa parametrização passando por q são tangentes aos vetores $e_1(q)$ e $e_2(q)$ (Ver [8], Teorema principal da seção 3.4, pág. 216), logo X é uma parametrização ortogonal. Como X_v é tangente ao vetor e_1, segue que $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$, então $z = z(u)$ e assim, $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u))$ tal que $\dfrac{\partial z}{\partial u} \neq 0$ pois Σ é transversal à folheação de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ por seções horizontais. Sendo X um sistema de coordenadas (locais) em p, então existe z^{-1} tal que $z^{-1}(\bar{u}) = u$, onde $\bar{u} := z(u)$. Portanto

$$
\begin{aligned}
X(u,v) = X(z^{-1}(\bar{u}),v) &= (x(z^{-1}(\bar{u}),v), y(z^{-1}(\bar{u}),v), z(z^{-1}(\bar{u}))) \\
&= (x(z^{-1}(\bar{u}),v), y(z^{-1}(\bar{u}),v), \bar{u}) \\
&= (N(\bar{u},v), \bar{u}).
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposição 1.1.3. *Seja Σ imersa em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma superfície orientável mínima e transversal à folheação de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ por planos horizontais tal que $p \in \Sigma$. Então existe uma parametrização local conforme $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ tal que $X(u,v) = (N(u,v),u)$ e $p \in X(U)$.*

Demonstração. Suponha $Y(x,y) = (\tilde{N}(x,y), h(x,y))$ imersão conforme de um aberto $V \to \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ tal que $Y(x_0,y_0) = p$, queremos $X(u,v) = (N(u,v),u)$. Como a imersão Y conforme é mínima, temos que h é harmônica (Ver [4], Proposição (3.3.9), pg. 75). Se W é um aberto simplesmente conexo tal que $W \subset V$ e $(x_0,y_0) \in W$, então existe h^* harmônica conjugada de h definida em W. Defina $S : W \subset \mathbb{R}^2 \to U$ tal que $S(x,y) = (h + ih^*)(x,y) = (h(x,y), h^*(x,y)) = (u,v)$. Note que S é analítica e como $\nabla h(x_0,y_0) \neq 0$ pois Σ é tranversal à folheação por seções horizontais, então pelo Teorema da função Inversa, S é um difeomorfismo local, ou seja, existe um aberto W' em U contendo $S(x_0, y_0)$, e uma função $T : W' \to W$ tal que $T(u, v) = (x, y)$. Logo

$$\begin{aligned} X(u,v) &= Y(T(u,v)) \\ &= Y(x(u,v), y(u,v)) \\ &= (\tilde{N}(x(u,v), y(u,v)), h(x(u,v))) \\ &:= (N(u,v), u) \end{aligned}$$

□

Proposição 1.1. *Seja Σ uma imersão conforme parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ da forma $X(u,v) = (N(u,v), l(u))$ com campos de vetores $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$, $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$ e N_u não nulo. Então Σ é mínima se e somente se $l(u) = au + b$.*

Demonstração. Desde que a parametrização seja conforme, podemos escrever a curvatura média da seguinte forma: $\Delta X = 2\sigma^2 H\eta$ onde Δ é o laplaciano em coordenadas (u, v) e $E = G = \sigma^2$. Note X_u e X_v podem ser escrito como $X_u = e_2|N_u| + l_u e_3$ e $X_v = |N_v|e_1$, onde $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$, $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Fazendo o produto vetorial entre X_u e X_v, temos que

$$X_u \times X_v = |N_u|e_2 + l_u e_3 \times |N_v|e_1 = |N_u||N_v|e_2 \times e_1 + |N_v|l_u e_3 \times e_1 = -|N_u||N_v|e_3 + |N_v|l_u e_2.$$

Então

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{X_u \times X_v}{E} = \frac{-|N_u||N_v|e_3 + |N_v|l_u e_2}{E} \\ &= \frac{-|N_u||N_v|e_3 + |N_v|l_u e_2}{|N_v|^2} = \frac{l_u e_2 - |N_u|e_3}{|N_v|}. \end{aligned}$$

Comparando a última coordenada da igualdade $\Delta X = 2\sigma^2 H\eta$ concluímos que

$$l_{uu} = 2H\sigma^2 \frac{|N_u|}{|N_v|} = 2H|N_v|^2 \frac{|N_u|}{|N_v|} = 2H|N_v||N_u|.$$

Portanto $H = 0$ se só se $l(u) = au + b$. □

Observação 1.1.2. *Se Σ é uma superfície imersa em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ parametrizada da forma $X(u,v) = (N(u,v), u)$, então $X_u = (N_u, 1)$ e $X_v = (N_v, 0)$ Além disso, se X é uma aplicação conforme, temos que $\langle N_u, N_u \rangle + 1 = \langle N_v, N_v \rangle$, isto é, $|N_u|^2 + 1 = |N_v|^2$. Agora supondo que Σ é uma superfície mínima ($\nabla_{N_u} N_u = -\nabla_{N_v} N_v$) e derivando $\langle N_u, N_u \rangle + 1 = \langle N_v, N_v \rangle$ em relação a u e v temos*

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{N_u} N_u, N_u \rangle &= \langle \nabla_{N_v} N_u, N_v \rangle = -\langle \nabla_{N_v} N_v, N_u \rangle \\ \langle \nabla_{N_u} N_v, N_u \rangle &= \langle \nabla_{N_v} N_v, N_v \rangle = -\langle \nabla_{N_u} N_u, N_v \rangle \end{aligned}$$

respectivamente.

Lema 1.1.1. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^2(\varepsilon)\times\mathbb{R}$ a parametrização conforme da superfície Σ de forma $X(u,v) = (N(u,v),u)$ e os campos de vetores ortonormais $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$, $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$ e $|N_u| \neq 0$. Então $|N_u|_v = \theta_1|N_v|$, $|N_u|_u = \theta_2|N_v|$, $|N_v|_u = \theta_2|N_u|$ e $|N_v|_v = \theta_1|N_u|$ onde $\theta_2 := \langle e_{2v}, e_1\rangle$, e $\theta_1 := \langle e_{1u}, e_2\rangle$. Além disso $\theta_{2u} + \theta_{1v} = \varepsilon|N_u||N_v|$.*

Demonstração. Derivando e_i em relação a v e u temos:

$$e_{1v} = \left(\frac{N_v}{|N_v|}\right)_v = \frac{\nabla_{N_v}N_v|N_v| - N_v|N_v|_v}{|N_v|^2} = \frac{\nabla_{N_v}N_v}{|N_v|} - \frac{|N_v|_v}{|N_v|}e_1,$$

$$e_{1u} = \left(\frac{N_v}{|N_v|}\right)_u = \frac{\nabla_{N_v}N_u}{|N_v|} - \frac{|N_v|_u}{|N_v|}e_1$$

$$e_{2v} = \left(\frac{N_u}{|N_u|}\right)_v = \frac{\nabla_{N_u}N_v}{|N_u|} - \frac{|N_u|_v}{|N_u|}e_2,$$

e

$$e_{2u} = \left(\frac{N_u}{|N_u|}\right)_u = \frac{\nabla_{N_u}N_u}{|N_u|} - \frac{|N_u|_u}{|N_u|}e_2.$$

Segue daí que

$$|N_u|_v = \langle N_u, N_u\rangle_v^{\frac{1}{2}} = \frac{\langle \nabla_{N_u}N_v, N_u\rangle}{|N_u|} = \left\langle \frac{\nabla_{N_u}N_v}{|N_v|}, e_2\right\rangle |N_v| = \langle e_{1u}, e_2\rangle\,|N_v| = \theta_1|N_v|,$$

e

$$|N_v|_u = \langle N_v, N_v\rangle_u^{\frac{1}{2}} = \frac{\langle \nabla_{N_v}N_u, N_v\rangle}{|N_v|} = \langle \nabla_{N_v}N_u, e_1\rangle = \langle e_{2v}, e_1\rangle\,|N_u| = \theta_2|N_u|.$$

Como X é conforme, temos que

$$\begin{aligned}
\theta_2|N_v| &= \langle e_{2v}, e_1\rangle\,|N_v| = \left\langle \frac{\nabla_{N_u}N_v}{|N_u|}, e_1\right\rangle |N_v| = \langle \nabla_{N_u}N_v, N_v\rangle \frac{1}{|N_u|}\\
&= \langle \nabla_{N_u}N_u, N_u\rangle \frac{1}{|N_u|} = \langle \nabla_{N_u}N_u, e_2\rangle = |N_u|_u
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta_1|N_u| &= \langle e_{1u}, e_2\rangle\,|N_u| = \left\langle \frac{\nabla_{N_v}N_u}{|N_v|}, e_2\right\rangle |N_u| = \langle \nabla_{N_v}N_u, N_u\rangle \frac{1}{|N_v|}\\
&= \langle \nabla_{N_v}N_v, N_v\rangle \frac{1}{|N_v|} = \langle \nabla_{N_v}N_v, e_1\rangle = |N_v|_v.
\end{aligned}$$

Além disso, como e_1 e e_2 são ortonormais temos que

$$\begin{aligned}\theta_{2u} = \langle e_{2v}, e_1\rangle_u &= \langle e_{2uv}, e_1\rangle + \langle e_{2v}, e_{1u}\rangle \\ &= \langle e_{2u}, e_1\rangle_v - \langle e_{2u}, e_{1v}\rangle + \langle e_{2v}, e_{1u}\rangle \\ &= -\langle e_2, e_{1u}\rangle_v - \langle e_{2u}, e_{1v}\rangle + \langle e_{2v}, e_{1u}\rangle \\ &= -\theta_{1v} - \langle e_{2u}, e_{1v}\rangle + \langle e_{2v}, e_{1u}\rangle.\end{aligned}$$

Novamente usando o fato e_1 e e_2 serem ortonormais podemos escrever $e_{2v} = \theta_2 e_1$, $e_{1u} = \theta_1 e_2$, $e_{2u} = -\langle e_{1u}, e_2\rangle e_1 + |N_u|N$ e $e_{1v} = -\langle e_{2v}, e_1\rangle e_2 + |N_v|N$, daí temos que $\langle e_{2u}, e_{1v}\rangle = \varepsilon|N_u||N_v|$ e $\langle e_{2v}, e_{1u}\rangle = 0$. Portanto $\theta_{2u} + \theta_{1v} = \varepsilon|N_u||N_v|$.

$\square$

Observação 1.1.3. *Em $\mathbb{R}^3$, θ_1 e θ_2 definidos como no Lema anterior são (a menos de sinal) as curvaturas geodésicas das curvas $u \mapsto N(u,v)$ e $v \mapsto N(u,v)$ (consequência Lema 2, pg 254, [8]) e $\theta_{2u} + \theta_{1v} = 0$ é a condição para que a rede formada pelas curvas u e v seja isotérmica [7].*

Capítulo 2

Transformações de Ribaucour Horizontais em $\mathbb{R}^3$ e Superfícies Mínimas

Neste capítulo, primeiramente, iremos definir as transformações de Ribaucour horizontais e determinar um sistema de equações diferenciais associado a elas. Estas transformações são definidas a partir de um difeomorfismo entre uma superfície Σ imersa em $\mathbb{R}^3$, transversal à folheação de $\mathbb{R}^3$ por planos horizontais, e uma nova superfície $\tilde{\Sigma}$ imersa em $\mathbb{R}^3$, também transversal à folheação, de maneira que as seções horizontais de Σ e de $\tilde{\Sigma}$ sejam as envoltórias de uma congruência de círculos a 1 parâmetro. Além disso, iremos impor que o difeomorfismo ligando Σ e $\tilde{\Sigma}$ leve curvas de nível horizontais de Σ em curvas de nível de $\tilde{\Sigma}$, e curvas ortogonais às curvas de nível de Σ em curvas ortogonais às curvas de nível de $\tilde{\Sigma}$.

Tais transformações assemelham-se às transformações de Ribaucour clássicas, onde, grosso modo, as superfícies em questão são envoltórias de uma congruência de esferas, e famílias de linhas de curvatura ortogonais são levadas em famílias de linhas curvatura ortogonais via correspondência entre as superfícies. Um dos aspectos interessantes das transformações de Ribaucour é a possibilidade de gerar novas superfícies mínimas a partir de uma superfície mínima inicial ([5], [25]). Na sequência deste capítulo, tentaremos estender este aspecto interessante das transformações de Ribaucour clássicas para as transformações de Ribaucour horizontais, determinando um sistema de equações integrável cujas soluções permitem começar com uma superfície mínima inicial e gerar famílias de novas superfícies mínimas.

Ao longo deste capítulo, as nossas considerações serão essencialmente locais, e faremos uso constante de parametrizações convenientes para estudar a geometria das transformações em questão. Salvo menção em contrário, todas as superfícies mencionadas nete capítulo estão imersas em $\mathbb{R}^3$ e todos os objetos são diferenciáveis.

2.1 Transformação de Ribaucour Horizontal e o Sistema de Equações Associado

Vamos começar a nossa discussão com uma definição fundamental.

Definição 2.1.1. *i) Uma congruência de círculos a 2-parâmetros em $\mathbb{R}^3$ é uma família a 2-parâmetros de círculos em $\mathbb{R}^3$, tal que o conjunto de centros dos círculos é uma superfície de $\mathbb{R}^3$ com função raio (dos círculos) diferenciável e positiva.*

ii) Uma envoltória de uma congruência círculos a 2-parâmetros é uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, tal que em cada ponto $p \in \Sigma$ a superfície Σ é tangente a um círculo da congruência de círculos.

iii) Dizemos que duas superfícies Σ e $\widetilde{\Sigma}$ de $\mathbb{R}^3$ estão associadas por uma congruência de círculos se existe um difeomorfismo $L : \Sigma \to \widetilde{\Sigma}$ tal que em pontos correspondentes p e $L(p)$ as superfícies são tangentes ao mesmo círculo da congruência de círculos.

Um caso especial do item (*iii*) é quando dL leva 2 campos vetoriais ortogonais de Σ em 2 campos vetoriais ortogonais de $\tilde{\Sigma}$.

Em particular, vamos considerar a situação geométrica em que Σ é orientável e transversal à folheação de $\mathbb{R}^3$ por planos horizontais. Denotaremos de agora em diante por e_1 um campo unitário tangente às curvas de nível de Σ, e por e_2 a rotação positiva de e_1 por um ângulo $\frac{\pi}{2}$ no plano horizontal contendo a curva de nível, onde a orientação de cada plano horizontal é a orientação induzida pela orientação canônica do $\mathbb{R}^3$. Definimos $e_3 = (0, 0, 1)$ e ajustamos a orientação de e_1 para que $\{e_1, e_2, e_3\}$ seja uma base positiva de $\mathbb{R}^3$. Finalmente, consideramos também o campo Je_1, que é a rotação positiva de e_1 por um ângulo $\frac{\pi}{2}$ no fibrado tangente de Σ. Com esta notação, chegamos enfim à definição de transformada de Ribaucour horizontal.

Definição 2.1.2. *Seja Σ uma superfície transversal à folheação de $\mathbb{R}^3$ por planos horizontais. Uma superfície $\tilde{\Sigma}$ está associada a Σ por uma transformação de Ribaucour horizontal com respeito a e_1 e Je_1 se existe uma função diferenciável positiva $h : \Sigma \to \mathbb{R}$, um difeomorfismo $L : \Sigma \to \tilde{\Sigma}$ campos de vetores normais unitários η e $\tilde{\eta}$ às curvas $\Sigma_t = \Sigma \cap \left\{\mathbb{R}^2 \times (t)\right\}$ e $\tilde{\Sigma}_t = \tilde{\Sigma} \cap \left\{\mathbb{R}^2 \times (t)\right\}$ respectivamente, tais que:*

i) $p + h(p)\eta(p) = L(p) + h(p)\tilde{\eta}(L(p)),\ \forall\ p \in \Sigma.$

ii) *O subconjunto $p + h(p)\eta(p)$, onde $p \in \Sigma$, é uma superfície de $\mathbb{R}^3$.*

iii) *L preserva curvas de nível e $dL(e_1)$ e $dL(Je_1)$ são campos ortogonais de $\tilde{\Sigma}$.*

Para associar um sistema de equações diferenciais às transformações de Ribaucour horizontais, vamos impor uma leve restrição sobre a geometria da transformação. Consideremos para cada $p \in \Sigma$, o vetor $p - \tilde{p}$ não seja ortogonal à reta tangente à seção horizontal de Σ por p. Com isso garantimos a existência dos campos da seguinte definição.

Definição 2.1.3. *Uma transformação de Ribaucour horizontal de Σ é não degenerada se os campos de vetores horizontais unitários e_1, e_2, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, com os respectivos pares sendo ortogonais, e funções positivas R_1 e R_2 satisfazem*

$$\forall p \in \Sigma,\ p + R_i(p)e_i(p) = \tilde{p} + R_i(p)\tilde{e}_i(\tilde{p}),\ i = 1, 2,$$

onde $\tilde{p} = L(p)$.

Observamos que a definição acima, no qual ilustramos na figura abaixo nos permitirá concentrar a nossa atenção em aspectos geométricos interessantes, sem corrermos o risco de que uma excessiva complicação técnica em busca de generalidade possa deixar a geometria em segundo plano.

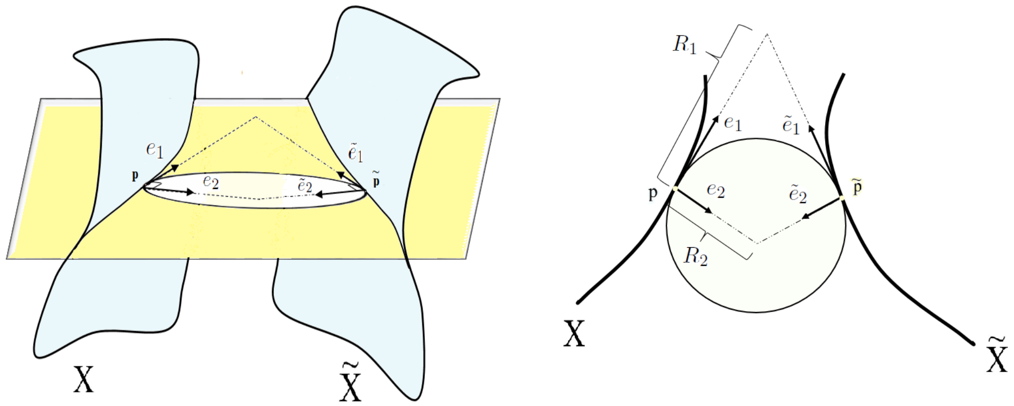


Figura 2.1: Transformação de Ribaucour Horizontal de uma superfície não degenerada vista lateralmente e por cima, respectivamente.

Com o intuito de determinar um sistema de equações diferenciais associado a uma transformação de Ribaucour horizontal não degenerada, vamos a partir de agora assumir a existência de uma tal transformação e utilizar coordenadas locais (u, v) definidas em um domínio simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$, de forma que o difeomorfismo L seja expresso localmente em termos de parametrizações ortogonais de Σ e $\tilde{\Sigma}$ dadas respectivamente pelas expressões abaixo.

$$X(u, v) = (N(u, v), u), \tag{2.1}$$

$$\tilde{X}(u, v) = (\tilde{N}(u, v), u). \tag{2.2}$$

Observa-se que a Proposição 1.1.2 garante a existência destas parametrizações. Esse modo de chegar a um sistema de equações associado a transformações geométricas é inspirado na discussão clássica de Bianchi sobre as transformações de Ribaucour.

Definição 2.1.4. *O par de parametrizações (2.1) e (2.2) (definido em um domínio simplesmente* *conexo) associado localmente a uma transformação de Ribaucour horizontal é chamado uma representação local canônica.*

Lema 2.1.1. *Seja $\tilde{\Sigma}$ uma superfície associada à superfície Σ por uma transformação de Ribaucour horizontal não degenerada. Se $\xi = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $|\xi| = 1$ é um campo unitário horizontal e T é uma função definida em Σ tais que*

$$\tilde{p} = p + T\xi,$$

então

$$R_i = \frac{T}{2\alpha_i},$$

e

$$\tilde{e}_i = e_i - 2\alpha_i \xi. \tag{2.3}$$

Demonstração. Para uma altura t fixada definimos N e $\tilde{N}$ tais que $p = (N, t)$ e $\tilde{p} = (\tilde{N}, t)$. Podemos escrever

$$\left\{ \; N + R_i e_i = \tilde{N} + R_i \tilde{e}_i \right.$$

Segue que

$$\tilde{e}_i = e_i + \frac{1}{R_i}(N - \tilde{N}),\ i = 1, 2. \tag{2.4}$$

Seja ξ um campo horizontal tal que

$$\tilde{N} = N + T\xi.$$

Então substituindo a igualdade acima em (2.4) segue que

$$\tilde{e}_i = e_i - \frac{T\xi}{R_i}.$$

Devemos ter que $|\tilde{e}_i| = 1$. Desde que $|\xi| = 1$ e $\langle \xi, e_i \rangle = \alpha_i$, deduzimos da igualdade anterior que

$$\frac{T}{R_i} = 2\alpha_i,$$

logo

$$\tilde{e}_i = e_i - 2\alpha_i \xi.$$

□

Lema 2.1.2. *Sejam $\tilde{\Sigma}$ e Σ associadas por uma transformação de Ribaucour não degenerada e* *com representação local canônica tais que*

$$e_1 = \frac{N_v}{|N_v|}, e_2 = \frac{N_u}{|N_u|}, \text{ se } N_u \neq 0.$$

Então as funções T, α_1 e α_2 introduzidas no Lema 2.1.1 são soluções do seguinte sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{rcl} T_u & = & \omega_1 T - 2|N_u|\alpha_2 \\ T_v & = & \omega_2 T - 2|N_v|\alpha_1 \\ \alpha_{1u} & = & \alpha_1\omega_1 - \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle \\ \alpha_{2v} & = & \alpha_2\omega_2 - \alpha_1\langle e_2, e_{1v}\rangle \end{array}\right. \tag{2.5}$$

onde ω_1 e ω_2 são dadas por

$$\omega_1 = \frac{\alpha_{1u} + \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle}{\alpha_1},$$

$$\omega_2 = \frac{\alpha_{2v} + \alpha_1\langle e_2, e_{1v}\rangle}{\alpha_2}.$$

Demonstração. A condição de ortogonalidade iii) da Definição 2.1.2 implica:

i) $\langle \tilde{e}_1, \tilde{N}_u\rangle = 0,$

ii) $\langle \tilde{e}_2, \tilde{N}_v\rangle = 0,$

onde $\tilde{e}_1$ e $\tilde{e}_2$ são como no Lema 2.1.1. Pela primeira das equações acima e usando as equações do Lema 2.1.1, temos que:

$$\begin{array}{rcl} \langle \tilde{e}_1, \tilde{N}_u\rangle & = & \langle e_1 - 2\alpha_1\xi, N_u + T_u\xi + T\xi_u\rangle \\ & = & T_u\alpha_1 + T(\alpha_{1u} + \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle) - 2\alpha_1(|N_u|\alpha_2 + T_u) \\ & = & -T_u\alpha_1 + T(\alpha_{1u} + \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle) - 2\alpha_1|N_u|\alpha_2 \\ & = & 0 \end{array}$$

Segue daí que

$$\frac{T_u + 2|N_u|\alpha_2}{T} = \frac{\alpha_{1u} + \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle}{\alpha_1}.$$

De maneira análoga, analisando a equação (*ii*)

$$\frac{T_v + 2|N_v|\alpha_1}{T} = \frac{\alpha_{2v} + \alpha_1\langle e_2, e_{1v}\rangle}{\alpha_2},$$

e, portanto, as equações (2.5) são satisfeitas.

□

As funções ω_1 e ω_2 nos permitem introduzir, via o próximo Lema, uma nova função local que será fundamental em nosso sistema de equações associado a uma transformação de Ribaucour horizontal não degenerada.

Lema 2.1.3. *Nas condições do Lema anterior, a 1-forma local dada por $\omega_1 du + \omega_2 dv$ é fechada.*

Demonstração. Como T é diferenciável, $T_{uv} = T_{vu}$. Veremos que esta igualdade implica que $\omega_{1v} = \omega_{2u}$. De fato, para pontos em que $N_u \neq 0$, e utilizando o sistema (2.5) segue que

$$\begin{cases} (T_u)_v = \omega_{1v}T + \omega_1(\omega_2 T - 2|N_v|\alpha_1) - 2|N_u|_v\alpha_2 - 2|N_u|\alpha_{2v} \\ (T_v)_u = \omega_{2u}T + \omega_2(\omega_1 T - 2|N_u|\alpha_2) - 2|N_v|_u\alpha_1 - 2|N_v|\alpha_{1u} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (T_u)_v - (T_v)_u &= \omega_{1v}T - 2|N_v|(\alpha_{1u} + \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle) - 2|N_u|_v\alpha_2 - 2|N_u|\alpha_{2v} - \omega_{2u}T \\ &\quad +2|N_u|(\alpha_{2v} + \alpha_1\langle e_2, e_{1v}\rangle) + 2|N_v|_u\alpha_1 + 2|N_v|\alpha_{1u} \\ &= \omega_{1v}T - 2\alpha_2\left(|N_v|\langle e_1, e_{2u}\rangle + |N_u|_v\right) - \omega_{2u}T + 2\alpha_1\left(|N_u|\langle e_2, e_{1v}\rangle + |N_v|_u\right). \end{aligned}$$

Logo

$$(T_u)_v = (T_v)_u$$

se e somente se

$$\begin{aligned} \omega_{1v}T - 2|N_v|(\alpha_{1u} + \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle) - 2|N_u|_v\alpha_2 - 2|N_u|\alpha_{2v} &= \omega_{2u}T \\ -2|N_u|(\alpha_{2v} + \alpha_1\langle e_2, e_{1v}\rangle) - 2|N_v|_u\alpha_1 - 2|N_v|\alpha_{1u} & \end{aligned}$$

se e somente se

$$\omega_{1v}T - 2\alpha_2\left(|N_v|\langle e_1, e_{2u}\rangle + |N_u|_v\right) = \omega_{2u}T - 2\alpha_1\left(|N_u|\langle e_2, e_{1v}\rangle + |N_v|_u\right).$$

Resta então mostrar que os termos multiplicando α_1 e α_2 nas expressões acima são ambos nulos. Para isso, basta usar que $|N_u|_v = \langle e_{1u}, e_2\rangle|N_v|$ e $|N_v|_u = \langle e_{2v}, e_1\rangle|N_u|$ (Lema 1.1.1) e que os campos e_1 e e_2 são ortogonais.

Trataremos agora o caso dos pontos em que $N_u = 0$. Se um tal ponto é o limite de alguma sequência de pontos em que $N_u \neq 0$, por continuidade podemos concluir que $\omega_{1v} = \omega_{2u}$.

Caso o ponto não seja o limite de uma sequência de pontos com $N_u \neq 0$, o ponto está contido em um conjunto aberto em que N_u é identicamente nulo. Assim, neste aberto teremos $T_u = \omega_1 T$ e $T_v = T\omega_2 - 2|N_v|\alpha_1$. Um cálculo simples, análogo ao anterior e utilizando $T_{uv} = T_{vu}$, mostra que $\omega_{1v} = \omega_{2u}$ se, e somente se

$$\alpha_1|N_v|_u - |N_v|\alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle = 0. \tag{2.6}$$

Mas

$$|N_v|_u = \left(\langle N_v, N_v\rangle^{\frac{1}{2}}\right)_u = \frac{1}{|N_v|}\langle N_{uv}, N_v\rangle = 0.$$

Além disso, temos

$$e_{1u} = \left(\frac{N_v}{|N_v|}\right)_u = \frac{1}{|N_v|^2}\left(N_{vu}|N_v| - N_v|N_v|_u\right) = -\frac{N_v}{|N_v|^2}|N_v|_u.$$

Assim, vale a igualdade (2.6) e, portanto, $\omega_{1v} = \omega_{2u}$. □

Utilizando o Lema anterior e o Lema de Poincaré, definimos localmente uma função positiva Ω tal que

$$\begin{cases} \omega_1 = -\dfrac{\Omega_u}{\Omega} \\ \omega_2 = -\dfrac{\Omega_v}{\Omega} \end{cases} \tag{2.7}$$

Utilizando esta nova função Ω e o sistema (2.7), reescrevemos o sistema (2.5) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} (\Omega T)_u &=& -2|N_u|\alpha_2\Omega \\ (\Omega T)_v &=& -2|N_v|\alpha_1\Omega \\ (\alpha_1\Omega)_u &=& \alpha_2\Omega\langle e_{1u}, e_2\rangle \\ (\alpha_2\Omega)_v &=& \alpha_1\Omega\langle e_{2v}, e_1\rangle \end{cases} \tag{2.8}$$

O sistema acima fica um pouco mais elegante se definimos novas funções γ_i e φ por

$$\varphi = -\frac{1}{2}\Omega T,\ \gamma_i = \alpha_i\Omega,\ i = 1, 2. \tag{2.9}$$

Note que, como $|\xi| = 1$, temos que

$$\Omega^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2.$$

Substituindo estas novas funções em (2.8), temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \varphi_u &=& |N_u|\gamma_2 \\ \varphi_v &=& |N_v|\gamma_1 \\ \gamma_{1u} &=& \gamma_2\langle e_{1u}, e_2\rangle \\ \gamma_{2v} &=& \gamma_1\langle e_{2v}, e_1\rangle \end{cases} \tag{2.10}$$

A discussão acima nos leva aos teoremas que essencialmente nos permitem começar com superfícies parametrizadas e obter transformadas de Ribaucour horizontais a partir de soluções de um sistema de equações diferenciais. Por simplicidade, decidimos enunciar dois teoremas, dependendo da geometria da superfície que será transformada. Em um deles restringimos a superfície inicial a não ter nem planos tangentes horizontais nem verticais, e no outro assumimos que o plano tangente sempre é vertical.

Teorema 2.1.1. *Seja* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ *uma superfície parametrizada dada por* $X(u,v) = (N(u,v),u)$ *tal que* $\langle X_u, X_v\rangle = 0$ *e* $N_u \neq 0$. *Sejam* $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$, *e* γ_1, γ_2, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ *uma solução do sistema* (2.10). *Então se a aplicação*

$$\tilde{X} = X - \frac{2\varphi}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) \tag{2.11}$$

é uma imersão, as imagens de X *e* $\tilde{X}$ *estão associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal.*

Demonstração. Assumindo que $\tilde{X}$ seja uma imersão, é imediato verificar que as curvas de nível são levadas em curvas de nível. Resta então verificar que $\tilde{X}$ é uma parametrização ortogonal e que X e $\tilde{X}$ são tangentes a uma congruência de círculos a 2 parâmetros. Tal verificação consiste basicamente em fazer o caminho inverso dos cálculos dos Lemas anteriores, definindo $T = \frac{-2\varphi}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}}$, $\alpha_i = \frac{\gamma_i}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}}$, $i = 1,2$ e $\xi = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.

Assim, $\tilde{N} = N + T\xi$ e teremos

$$\tilde{N}_u = N_u + T_u\xi + T\xi_u,$$

$$\tilde{N}_v = N_v + T_v\xi + T\xi_v.$$

Portanto,

$$\langle \tilde{N}_u, \tilde{N}_v\rangle = T_v\langle N_u,\xi\rangle + T\langle N_u,\xi_v\rangle + T_u\langle N_v,\xi\rangle + T_uT_v + T\langle \xi_u, N_v\rangle + T^2\langle \xi_u,\xi_v\rangle.$$

Como, por hipótese, as funções γ_1, γ_2 e φ constituem uma solução do sistema (2.10), as funções α_1, α_2 e T satisfazem (2.5). Utilizando as equações (2.5), temos

$$\begin{aligned}\langle \tilde{N}_u, \tilde{N}_v\rangle \;&=\; (\omega_2 T - 2|N_v|\alpha_1)|N_u|\alpha_2 + (\omega_1 T - 2|N_u|\alpha_2)|N_v|\alpha_1 + \\ &\quad T(|N_u|\omega_2\alpha_2 + |N_v|\omega_1\alpha_1) + (\omega_2 T - 2|N_v|\alpha_1)(\omega_1 T - 2|N_u|\alpha_2) - \\ &\quad T^2\omega_1\omega_2 = 0.\end{aligned}$$

Os centros dos círculos da congruência de círculos são dado por

$$C = N - \frac{\varphi}{\gamma_2}e_2 = N + \frac{T}{2\alpha_2}e_2.$$

Para mostrar que as seções horizontais de X e $\tilde{X}$ são envoltórias desta congruência de círculos, temos que verificar que $\langle C - N, e_1\rangle = 0$ e $\langle C - \tilde{N}, \tilde{N}_v\rangle = 0$. A primeira igualdade é imediata, a segunda é obtida por um cálculo simples, notando que

$$C - \tilde{N} = \frac{T}{2\alpha_2}e_2 - T\xi,$$

utilizando a expressão acima para $\tilde{N}_v$ e o sistema (2.5). $\square$

O próximo teorema trata da transformação de superfícies que essencialmente são cilindros sobre curvas planas horizontais. Embora este seja um caso degenerado, decidimos estudá-lo pois ele permitirá obter superfícies mínimas interessantes a partir de uma transformação de Ribaucour horizontal de um plano vertical.

Teorema 2.1.2. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ uma superfície parametrizada dada por $X(u,v) = (N(u,v),u)$ tal que $\langle X_u, X_v\rangle = 0$ e $N_u = 0$. Sejam $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$, $e_2 = ie_1$, e sejam γ_1, γ_2, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ uma solução do sistema* (2.10)*. Então, se a aplicação*

$$\tilde{X} = X - \frac{2\varphi}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2)$$

é uma imersão, as imagens de X e $\tilde{X}$ estão associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal.

Demonstração. A demonstração é inteiramente análoga e mais simples do que a anterior. $\square$

2.2 Transformações de Ribaucour Horizontais entre Superfícies Mínimas

Nesta seção apresentaremos um resultado que fornece condições suficientes para que a transformação de Ribaucour horizontal de uma superfície mínima seja também uma superfície mínima.

Vale lembrar que para as transformações de Ribaucour clássicas isso é obtido, grosso modo, ao impormos uma relação algébrica particular envolvendo as funções que constituem a solução do chamado sistema de Ribaucour (ver [25], Teorema 1.7). É natural imaginarmos que algo semelhante aconteça no caso das transformações de Ribaucour horizontais. No entanto, a situação não é inteiramente análoga, e faz-se necessário adicionar uma nova função às que constituem uma solução de (2.10).

Veremos a seguir que, partindo de uma superfície mínima com uma parametrização conforme com representação local canônica, é possível localmente introduzir uma nova função, que denotaremos por ω. Acrescentando ω ao nosso sistema, e considerando uma certa relação algébrica particular entre as funções originais γ_1, γ_2, φ, juntamente com ω, obtemos um sistema integrável, no sentido de Frobenius, cujas soluções genericamente fornecem transformações de Ribaucour horizontais entre superfícies mínimas.

Iniciamos nossa discussão com a seguinte proposição.

Proposição 2.2.1. *Seja $X : U \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima e conforme na forma $X(u,v) = (N(u,v),u)$ e assuma que*

i) $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$ *se* $|N_u| \neq 0$.

ii) $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2 = ie_1$ *se* $|N_u| = 0$.

Seja σ a 1-forma tal que $\sigma = \gamma_2|N_v|du + \gamma_1|N_u|dv$ onde γ_i são funçoes reais satisfazendo (2.10)*. Então $d\sigma = 0$.*

Demonstração. Caso $i)$: Seja

$$\sigma = \gamma_2|N_v|du + \gamma_1|N_u|dv,$$

temos que

$$d\sigma = (\gamma_{2v}|N_v| + \gamma_2|N_v|_v)dv \wedge du - (\gamma_{1u}|N_u| + \gamma_1|N_u|_u)dv \wedge du.$$

Pelo sistema (2.10) e Lema 1.1.1 segue que

$$d\sigma = (\gamma_1\theta_2|N_v| + \gamma_2\theta_1|N_u|)dv \wedge du - (\gamma_2\theta_1|N_u| + \gamma_1\theta_2|N_v|)dv \wedge du.$$

Portanto $d\sigma = 0$.

Caso $ii)$: Nesse caso, note que $\sigma = \gamma_2 du$ pois $N_u = 0$ e a parametrização é conforme. Além disso, $N_{vv} = -N_{uu} = 0$ pois a superfície é mínima, consequentemente $e_{1v} = N_{vv} = 0$. Assim $d\sigma = \gamma_{2v}dv \wedge du$. Segue do sistema (2.10) que $d\sigma = \gamma_1\langle e_{2v}, e_1\rangle dv \wedge du = \gamma_1\langle e_2, e_{1v}\rangle du \wedge dv$. Portanto $d\sigma = 0$.

□

A proposição anterior e o Lema de Poincaré garantem a existência de uma função ω, definida em um domínio simplesmente conexo, tal que $\sigma = d\omega$, isto é, $\omega_u = \gamma_2|N_v|$ e $\omega_v = \gamma_1|N_u|$. Isso naturalmente nos leva a considerar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \varphi_u &= |N_u|\gamma_2 \\ \varphi_v &= |N_v|\gamma_1 \\ \gamma_{1u} &= \gamma_2\langle e_{1u}, e_2\rangle \\ \gamma_{2v} &= \gamma_1\langle e_{2v}, e_1\rangle \\ \omega_u &= \gamma_2|N_v| \\ \omega_v &= \gamma_1|N_u| \end{cases} \tag{2.12}$$

Observação 2.2.1. *No caso em que $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ e $e_2 = ie_1$ se $|N_u| = 0$, as funções φ_u, γ_{1u} e ω_v do sistema anterior são nulas.*

Em um primeiro momento, não parece vantajoso considerar o sistema (2.12), no entanto, veremos a seguir que as soluções de um tal sistema tais que

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = m(\omega^2 - \varphi^2),$$

onde m é uma constante não nula, podem ser associadas a transformações de Ribaucour horizontais entre superfícies mínimas.

Teorema 2.2.1. *Seja* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *uma imersão mínima conforme na forma* $X(u,v) = (N(u,v),u)$ *tal que* $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$ *se* $|N_u| \neq 0$. *Então o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_u & = & |N_u|\gamma_2 \\ \varphi_v & = & |N_v|\gamma_1 \\ \gamma_{1u} & = & \gamma_2\theta_1 \\ \gamma_{2v} & = & \gamma_1\theta_2 \\ \omega_u & = & \gamma_2|N_v| \\ \omega_v & = & \gamma_1|N_u| \\ \gamma_{1v} & = & m(\omega|N_u| - \varphi|N_v|) - \gamma_2\theta_2 \\ \gamma_{2u} & = & m(\omega|N_v| - \varphi|N_u|) - \gamma_1\theta_1 \end{array}\right. \tag{2.13}$$

onde $\theta_1 := \langle e_{1u}, e_2\rangle$ *e* $\theta_2 := \langle e_{2v}, e_1\rangle$, *é integrável.*

Demonstração. Devemos verificar a comutatividade das derivadas parciais com relação a u e v, isto é:

i) $(\varphi_u)_v = (\varphi_v)_u$

ii) $(\gamma_{1u})_v = (\gamma_{1v})_u$

iii) $(\gamma_{2v})_u = (\gamma_{2u})_v$

iv) $(\omega_u)_v = (\omega_v)_u$

Vamos provar o item i): Note que

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_u)_v - (\varphi_v)_u & = & (\gamma_2|N_u|)_v - (\gamma_1|N_v|)_u \\ & = & \gamma_{2v}|N_u| + \gamma_2|N_u|_v - \gamma_{1u}|N_v| - \gamma_1|N_u|_u \\ & = & \gamma_1\theta_2|N_u| + \gamma_2|N_u|_v - \gamma_2\theta_1|N_v| - \gamma_1|N_v|_u \\ & = & 0 \end{array}$$

pois pelo Lema 1.1.1 temos $|N_u|_v = \theta_1|N_v|$ e $|N_v|_u = \theta_2|N_u|$. Analogo mostrar-se o item (iv)

Para mostrar o item (ii) vamos definir por conveniência, $\tau_1 = m(\omega|N_u| - \varphi|N_v|)$ e $\tau_2 = m(\omega|N_v| - \varphi|N_u|)$. Novamente utilizando o Lema 1.1.1, observe que

$$\begin{array}{rcl} \tau_{1u} & = & m(\omega_u|N_u| + \omega|N_u|_u - \varphi_u|N_v| - \varphi|N_v|_u) \\ & = & m(\gamma_2|N_u||N_v| + \omega\theta_2|N_v| - \gamma_2|N_u||N_v| - \varphi\theta_2|N_u|) \\ & = & m(\omega|N_v| - \varphi|N_u|)\theta_2 \\ & = & \tau_2\theta_2, \end{array}$$

e analogamente

$$\tau_{2v} = \tau_1\theta_1.$$

Assim

$$\begin{aligned}
(\gamma_{1u})_v - (\gamma_{1v})_u &= (\gamma_2\theta_1)_v - (\tau_1 - \gamma_2\theta_2)_u \\
&= \gamma_{2v}\theta_1 + \gamma_2\theta_{1v} - \tau_{1u} + \gamma_{2u}\theta_2 + \gamma_2\theta_{2u} \\
&= \gamma_1\theta_2\theta_1 + \gamma_2\theta_{1v} - \tau_{1u} + \tau_2\theta_2 - \gamma_1\theta_1\theta_2 + \gamma_2\theta_{2u} \\
&= \gamma_2(\theta_{1v} + \theta_{2u}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $\gamma_{2uv} = \gamma_{2vu}$.

□

No caso das superfícies mínimas com planos tangentes sempre verticais, só temos planos verticais. Esse caso especial nos leva a considerar o teorema abaixo.

Teorema 2.2.2. *O sistema*

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi_u &= 0 \\
\varphi_v &= \gamma_1 \\
\gamma_{1u} &= 0 \\
\gamma_{2v} &= 0 \\
\omega_u &= \gamma_2 \\
\omega_v &= 0 \\
\gamma_{1v} &= -m\varphi \\
\gamma_{2u} &= m\omega
\end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

é integrável.

Demonstração. A verificação da comutatividade das derivadas é imediata.

□

O nosso propósito agora é mostrar que as soluções do sistema (2.12) associadas a uma imersão mínima X com a condição adicional $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = m(\omega^2 - \varphi^2)$, $m \neq 0$, geram, via (2.11) uma nova imersão mínima $\tilde{X}$. Para isso, vamos obter uma expressão para os coeficientes da métrica de $\tilde{X}$.

Lema 2.2.1. *Seja X uma superfície parametrizada dada por $X(u,v) = (N(u,v), u)$ e tal que $\langle X_u, X_v\rangle = 0$. Sejam e_1 e e_2 definidos por:*

i) $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$ *, se* $|N_u| \neq 0$.

ii) $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2 = ie_1$ *, se* $|N_u| = 0$.

Se $\tilde{X}$ é uma imersão definida por (2.11), onde γ_1, γ_2, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ é uma solução do sistema (2.10)*, tal que $A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$ nunca se anula, então os campos definidos por* (2.3) *são dados por*

$$\begin{cases} \widetilde{e}_1 &= e_1 - \dfrac{2\gamma_1}{A}(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) \\ \widetilde{e}_2 &= e_2 - \dfrac{2\gamma_2}{A}(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) \end{cases} \tag{2.15}$$

Além disso, os coeficientes $\tilde{g}_{ij}$ da primeira forma fundamental de $\tilde{X}$ são dados por:

$$\widetilde{g}_{11} = g_{11} + \frac{4\varphi\tau_2}{A}\left(\frac{\varphi\tau_2}{A} - |N_u|\right).$$

$$\widetilde{g}_{22} = g_{22} + \frac{4\varphi\tau_1}{A}\left(\frac{\varphi\tau_1}{A} - |N_v|\right)$$

e

$$\widetilde{g}_{12} = 0,$$

onde g_{ij} são os coeficientes da primeira forma fundamental de X, $\tau_1 = \frac{1}{2}\frac{A_v}{\gamma_1}$ e $\tau_2 = \frac{1}{2}\frac{A_u}{\gamma_2}$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.1, $\tilde{X}$ é uma transformada de Ribaucour horizontal de X e pelo Lema 2.1.1, temos $\tilde{e}_i = e_i - 2\alpha_i\xi$, onde α_1, α_2 e ξ estão relacionadas com γ_i e φ por (2.9). Assim

$$\tilde{e}_1 = e_1 - 2\alpha_1\xi = e_1 - 2\alpha_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = e_1 - \frac{2\gamma_1}{\Omega}\left(\frac{\gamma_1}{\Omega}e_1 + \frac{\gamma_2}{\Omega}e_2\right) = e_1 - \frac{2\gamma_1}{\Omega^2}(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2).$$

Da mesma maneira mostra-se para $\tilde{e}_2$ e as equações (2.15) são satisfeitas. Para obter as expressões de $\widetilde{g}_{ij}$, é conveniente introduzir

$$\overline{N} := \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$$

e calcular $\overline{N}_u$ e $\overline{N}_v$.

$$\overline{N}_u = \gamma_{1u} e_1 + \gamma_1 e_{1u} + \gamma_{2u} e_2 + \gamma_2 e_{2u}.$$

Mostraremos o cálculo apenas para o caso i), o caso ii) é obtido de maneira similar. Usando o fato que e_1 e e_2 são ortonormais, temos

$$e_{1u} = \langle e_{1u}, e_2\rangle e_2 \text{ e } e_{2u} = \langle e_{2u}, e_1\rangle e_1 = -\langle e_{1u}, e_2\rangle e_1.$$

Usando o sistema (2.10), segue que

$$\overline{N}_u = \gamma_2\langle e_{1u}, e_2\rangle e_1 + \gamma_1\langle e_{1u}, e_2\rangle e_2 + \gamma_{2u} e_2 - \gamma_2\langle e_{1u}, e_2\rangle e_1.$$

Portanto

$$\overline{N}_u = (\gamma_{2u} + \gamma_1\langle e_{1u}, e_2\rangle)e_2.$$

Analogamente mostra-se

$$\overline{N}_v = (\gamma_{1v} + \gamma_2\langle e_{2v}, e_1\rangle)e_1.$$

Como $A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$, e novamente usando o sistema (2.10), temos que

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\frac{A_u}{\gamma_2} = \gamma_{2u} + \gamma_1 \langle e_{1u}, e_2 \rangle$$

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\frac{A_v}{\gamma_1} = \gamma_{1v} + \gamma_2 \langle e_{2v}, e_1 \rangle.$$

Assim $\overline{N}_u$ e $\overline{N}_v$ podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\overline{N}_u = \tau_2 e_2$$

$$\overline{N}_v = \tau_1 e_1.$$

Estamos agora em condições de calcular $\widetilde{N}_u$ e $\widetilde{N}_v$. Usando a definição de $\overline{N}$ e A temos que

$$\widetilde{N} = N - \frac{2\varphi}{A}\overline{N}.$$

Derivando a igualdade acima em relação a u obtemos,

$$\widetilde{N}_u = N_u - \frac{2(\varphi_u A - A_u \varphi)(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2)}{A^2} - \frac{2\varphi\tau_2 e_2}{A}.$$

Observe que $N_u = |N_u| e_2$, $\varphi_u = |N_u|\gamma_2$, $A_u = 2\tau_2\gamma_2$ e usando (2.15) a igualdade anterior fica assim:

$$\widetilde{N}_u = |N_u| e_2 + \frac{2(|N_u|\gamma_2 A - 2\tau_2\gamma_2\varphi)(\widetilde{e}_2 - e_2)A}{2A^2\gamma_2} - \frac{2\varphi\tau_2 e_2}{A},$$

isto é,

$$\widetilde{N}_u = \left(|N_u| - \frac{2\tau_2\varphi}{A}\right)\widetilde{e}_2,$$

pois os coeficientes de e_2 se anulam. Analogamente

$$\widetilde{N}_v = \left(|N_v| - \frac{2\tau_1\varphi}{A}\right)\widetilde{e}_1.$$

Portanto, os coeficientes $\widetilde{g}_{ij}$ tem as seguintes expressões,

$$\widetilde{g}_{11} \;=\; \langle \widetilde{X}_u, \widetilde{X}_u \rangle = |\widetilde{N}_u|^2 + 1 = \left(|N_u| - \frac{2\tau_2\varphi}{A}\right)^2 + 1 = |N_u|^2 - \frac{4\varphi\tau_2|N_u|}{A} + \frac{4\varphi^2\tau_2^2}{A^2} + 1$$

ou seja,

$$\widetilde{g}_{11} = g_{11} + \frac{4\varphi\tau_2}{A}\left(\frac{\varphi\tau_2}{A} - |N_u|\right).$$

Analogamente,

$$\widetilde{g}_{22} = g_{22} + \frac{4\varphi\tau_1}{A}\left(\frac{\varphi\tau_1}{A} - |N_v|\right)$$

e

$$\widetilde{g}_{12} = 0$$

pois $\widetilde{e}_1$ e $\widetilde{e}_2$ são ortonormais.

□

Teorema 2.2.3. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme na forma $X(u,v) = (N(u,v),u)$. Se $\tilde{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma imersão dada por* (2.11)*, onde*

i) $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$, $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$, $\tilde{e}_1 = \dfrac{\tilde{N}_v}{|\tilde{N}_v|}$ *e* $\tilde{e}_2 = \dfrac{\tilde{N}_u}{|\tilde{N}_u|}$ *se* $|N_u| \neq 0$.

ii) $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$, $e_2 = ie_1$, $\tilde{e}_1 = \dfrac{\tilde{N}_v}{|\tilde{N}_v|}$ *e* $\tilde{e}_2 = i\tilde{e}_1$ *se* $|N_u| = 0$,

e as funções φ, ω e γ_1 e γ_2 são soluções do sistema (2.12) *tais que*

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = m(\omega^2 - \varphi^2)$$

onde $m \neq 0$ é uma constante real, então $\tilde{X}$ é uma imersão mínima conforme.

Demonstração. Novamente mostraremos apenas o primeiro caso. Como $\widetilde{g}_{12} = 0$ resta mostrar que $\widetilde{g}_{11} = \widetilde{g}_{22}$. Note que

$$\widetilde{g}_{11} - \widetilde{g}_{22} = g_{11} - g_{22} + \frac{4\varphi}{A}\left(\frac{\tau_2^2\varphi}{A} - |N_u|\tau_2 - \frac{\tau_1^2\varphi}{A} + |N_v|\tau_1\right)$$

$$= g_{11} - g_{22} + \frac{4\varphi}{A}\left(\frac{\varphi(\tau_2^2 - \tau_1^2)}{A} + |N_v|\tau_1 - |N_u|\tau_2\right).$$

Desde que X é conforme, temos que $g_{11} - g_{22} = 0$. Logo a condição para $\widetilde{X}$ ser mínima é

$$\frac{\varphi(\tau_2^2 - \tau_1^2)}{A} + |N_v|\tau_1 - |N_u|\tau_2 = 0.$$

Para provar essa igualdade vamos utilizar o sistema (2.13). Desde que

$$A := \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = m(\omega^2 - \varphi^2),$$

segue que

$$A_v = 2m(\omega\omega_v - \varphi\varphi_v) = 2m(\omega\gamma_1|N_u| - \varphi\gamma_1|N_v|) = 2m\gamma_1(\omega|N_u| - \varphi|N_v|)$$

e

$$A_u = 2m(\omega\omega_u - \varphi\varphi_u) = 2m(\omega\gamma_2|N_v| - \varphi\gamma_2|N_u|) = 2m\gamma_2(\omega|N_v| - \varphi|N_u|).$$

Por definição

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\frac{A_v}{\gamma_1} \text{ e } \tau_2 = \frac{1}{2}\frac{A_u}{\gamma_2},$$

logo as igualdades acima podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\tau_1 = m(\omega|N_u| - \varphi|N_v|) \text{ e } \tau_2 = m(\omega|N_v| - \varphi|N_u|).$$

Note que

$$\tau_1 + \tau_2 = m(\omega - \varphi)(|N_u| + |N_v|)$$

e

$$\tau_1 - \tau_2 = m(\omega + \varphi)(|N_u| - |N_v|).$$

Assim

$$\frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{A}\varphi = \frac{\varphi m^2(\omega^2 - \varphi^2)(|N_v|^2 - |N_u|^2)}{m(\omega^2 - \varphi^2)} = m\varphi$$

por outro lado,

$$|N_u|\tau_2 - |N_v|\tau_1 = m|N_u|(\omega|N_v| - \varphi|N_u|) - m|N_v|(\omega|N_u| - \varphi|N_v|) = m\varphi(|N_v|^2 - |N_u|^2)) = m\varphi,$$

portanto a condição é satisfeita. □

Capítulo

3

Transformações de Ribaucour Horizontais em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ e Superfícies Mínimas

Neste capítulo trataremos das transformações de Ribaucour horizontais para espaços produto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{M}^2$ pode ser a esfera $\mathbb{S}^2$ com a métrica canônica ou o plano hipérbolico $\mathbb{H}^2$. Para unificar a apresentação destes casos, introduziremos a notação $\mathbb{M}^2(\varepsilon)$, tal que $\varepsilon = \pm 1$, com $\mathbb{M}^2(-1) = \mathbb{H}^2$ e $\mathbb{M}^2(1) = \mathbb{S}^2$.

O resultado principal deste capítulo é a determinação de sistemas integráveis cujas soluções permitem começar com uma imersão mínima em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ e obter novas imersões mínimas. Como os argumentos e a ordem de apresentação dos resultados expostos são similares às do capítulo anterior, iremos abreviar algumas das nossas considerações para não tornar este trabalho excessivamente extenso.

3.1 Transformação de Ribaucour Horizontal e o Sistema de Equações Associado

Começamos com uma definição.

Definição 3.1.1. *i) Uma congruência de círculos horizontais a 2-parâmetros em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ é uma família a 2-parâmetros de círculos geodésicos contidos em seções horizontais de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que o conjunto de centros dos círculos é uma superfície de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ com função raio (dos círculos geodésicos) diferenciável e positiva.*

ii) Uma envoltória de uma congruência círculos a 2-parâmetros é uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que em cada ponto $p \in \Sigma$ a superfície Σ é tangente a um círculo da congruência de círculos horizontais.

iii) Dizemos que duas superfícies Σ *e* $\widetilde{\Sigma}$ *de* $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ *estão associadas por uma congruência de círculos horizontais se existe um difeomorfismo* $L : \Sigma \to \widetilde{\Sigma}$ *tal que em pontos correspondentes* p *e* $L(p)$ *as superfícies são tangentes ao mesmo círculo da congruência de círculos horizontais.*

Como no capítulo anterior, vamos considerar superfícies orientáveis Σ imersas em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ transversais à folheação por seções horizontais. Denotaremos por e_1 um campo unitário tangente às curvas de nível (i.e. seções horizontais) de Σ. Definimos $e_3 = (0, 0, 0, 1)$ e denotamos por Je_1 a rotação positiva por um ângulo $\frac{\pi}{2}$ do campo e_1 no fibrado tangente de Σ.

Definição 3.1.2. *Seja* Σ *uma superfície imersa em* $\mathbb{M}^2(\varepsilon)\times\mathbb{R}$ *e transversal à folheação por seções horizontais. Uma superfície* $\tilde{\Sigma}$ *está associada a* Σ *por uma transformação de Ribaucour horizontal com respeito a* e_1 *e* Je_1 *se existe uma função diferenciável positiva* $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$*, um difeomorfismo* $L : \Sigma \to \tilde{\Sigma}$ *e campos de vetores normais unitários* η *e* $\tilde{\eta}$ *das curvas* $\Sigma_t = \Sigma \cap \left\{\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times (t)\right\}$ *e* $\tilde{\Sigma}_t = \tilde{\Sigma} \cap \left\{\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times (t)\right\}$ *respectivamente, tais que:*

i) $\exp_p(\phi(p)\eta(p)) = \exp_{L(p)}(\phi(p)\tilde{\eta}(p))$, $\forall\ p \in \Sigma$, *onde* $\exp$ *é a aplicação exponencial de* $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

ii) *O subconjunto* $\exp_p(\phi(p)\eta(p))$, $\forall\ p \in \Sigma$, *é uma superfície* $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

iii) *L preserva curvas de nível e* $dL(e_1)$ *e* $dL(Je_1)$ *são campos ortogonais de* $\tilde{\Sigma}$.

Observação 3.1.1. *Considerando* $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ *como* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{L}^4$ *e* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$ *e utilizando as conhecidas expressões para as geodésicas de* $\mathbb{H}^2$ *e* $\mathbb{S}^2$*, por conveniência reescreveremos a condição* (i) *acima da seguinte maneira.*

$$p + h(p)\eta(p) = h(p)\tilde{\eta}(L(p)) \ \ p \in \Sigma,$$

onde

$$h(p) = \begin{cases} \tanh(\phi(p)),\ \phi : \Sigma \to \mathbb{R} & se\ \varepsilon = -1 \\ \tan(\phi(p)),\ \phi : \Sigma \to \left(0, \frac{\pi}{2}\right) & se\ \varepsilon = 1 \end{cases}$$

Também será conveniente utilizar a seguinte notação

$$s_\varepsilon(x) = \begin{cases} senh(x), & se\ \varepsilon = -1 \\ sen(x), & se\ \varepsilon = 1 \end{cases}$$

$$c_\varepsilon(x) = \begin{cases} \cosh(x), & se\ \varepsilon = -1 \\ \cos(x), & se\ \varepsilon = 1 \end{cases}$$

$$t_\varepsilon(x) = \begin{cases} \tanh(x), & se\ \varepsilon = -1 \\ \tan(x), & se\ \varepsilon = 1 \end{cases}$$

Para que possamos direcionar nossa atenção aos aspectos geométricos e não entrar em excessivas complicações técnicas, consideremos para cada $p \in \Sigma$, que $p - \tilde{p}$ não seja ortogonal à reta tangente à seção horizontal de Σ por p. Com isso garantimos a existência dos campos da seguinte definição.

Definição 3.1.3. *Uma transformação de Ribaucour horizontal de Σ é não degenerada se os campos de vetores horizontais unitários e_1, e_2, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, com os respectivos pares sendo ortogonais, e funções positivas R_1 e R_2 satisfazem*

$$\forall p \in \Sigma,\ \exp_p(R_i(p)e_i(p)) = \exp_{L(p)}(R_i(p)\tilde{e}_i(\tilde{p})),\ i = 1, 2,$$

onde $\tilde{p} = L(p)$.

Lema 3.1.1. *Seja $\tilde{\Sigma}$ uma superfície associada à superfície Σ por uma transformação de Ribaucour horizontal não degenerada em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Se $\xi = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $|\xi| = 1$ é um campo unitário horizontal e T é uma função definida em Σ tais que*

$$\tilde{p} = c_\varepsilon(T)p + s_\varepsilon(T)\xi,$$

então

$$t_\varepsilon(R_i) = \frac{t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)}{\alpha_i}$$

e

$$\tilde{e}_i = e_i - \alpha_i\left[\xi(1 + c_\varepsilon(T)) - \varepsilon N s_\varepsilon(T)\right]. \tag{3.1}$$

Demonstração. Para uma seção horizontal definida por $t \in \mathbb{R}$, definimos N e $\tilde{N}$ tais que $p = (N, t)$ e $\tilde{p} = (\tilde{N}, t)$. Por hipótese, temos

$$N + t_\varepsilon(R_i)e_i = \tilde{N} + t_\varepsilon(R_i)\tilde{e}_i.$$

Logo,

$$\tilde{e}_i = e_i + \frac{1}{t_\varepsilon(R_i)}(N - \tilde{N}),\ i = 1, 2 \tag{3.2}$$

Agora considerando ξ e T dados por hipótese tal que

$$\tilde{N} = c_\varepsilon(T)N + s_\varepsilon(T)\xi, \tag{3.3}$$

podemos reecrever (3.3) como

$$\tilde{N} = N + (\xi - \tilde{\xi})t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right), \tag{3.4}$$

onde $\tilde{\xi} = \varepsilon N s_\varepsilon(T) - \xi c_\varepsilon(T)$. Agora substituindo (3.4) em (3.2), temos que

$$\tilde{e}_i = e_i - (\xi - \tilde{\xi})t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)t_\varepsilon^{-1}(R_i),$$

ou seja

$$\tilde{e}_i = e_i - t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)t_\varepsilon^{-1}(R_i)\left(\xi(1 + c_\varepsilon(T)) - \varepsilon N s_\varepsilon(T)\right). \tag{3.5}$$

Desde que $\tilde{e}_1$ é unitário, $|\xi| = 1$ e $\langle \xi, e_i\rangle = \alpha_i$ deduzimos da igualdade anterior que

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_i\rangle \\ &= 1 - 2t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)c_\varepsilon(R_i)\left(\alpha_i(1 + c_\varepsilon(T)\right) + t_\varepsilon^2\left(\frac{T}{2}\right)(t_\varepsilon^{-1})^2(R_i)\left((1 + c_\varepsilon(T))^2 + \varepsilon s_\varepsilon^2(T)\right) \\ &= 1 - 2t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)c_\varepsilon(R_i)\left(\alpha_i(1 + c_\varepsilon(T)\right) + 2t_\varepsilon^2\left(\frac{T}{2}\right)(t_\varepsilon^{-1})^2(R_i)(1 + c_\varepsilon(T)). \end{aligned}$$

Fazendo os devidos cancelamentos, podemos concluir que

$$\alpha_i = t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)t_\varepsilon^{-1}(R_i),$$

e substituindo em (3.5) temos que

$$\tilde{e}_i = e_i - \alpha_i(\xi(1 + c_\varepsilon(T)) - \varepsilon N s_\varepsilon(T)).$$

$\square$

Lema 3.1.2. *Sejam $\tilde{\Sigma}$ e Σ associadas por uma transformação de Ribaucour não degenerada em $\mathbb{M}^2(\varepsilon)\times\mathbb{R}$ e com representação local canônica tais que*

$$e_1 = \frac{N_v}{|N_v|}, e_2 = \frac{N_u}{|N_u|},\ \textit{se}\ N_u \neq 0.$$

Então as funções T, α_1 e α_2 introduzidas no Lema 3.1.1 são soluções do seguinte sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{rcl} T_u &=& 2(\omega_1 t_\varepsilon(\frac{T}{2}) - \alpha_2|N_u|)c_\varepsilon^2(\frac{T}{2}) \\ T_v &=& 2(\omega_2 t_\varepsilon(\frac{T}{2}) - \alpha_1|N_v|)c_\varepsilon^2(\frac{T}{2}) \\ \alpha_{1u} &=& \alpha_1\omega_1 - \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle \\ \alpha_{2v} &=& \alpha_2\omega_2 - \alpha_1\langle e_2, e_{1v}\rangle \end{array}\right. \tag{3.6}$$

onde ω_1 e ω_2 são dadas por

$$\omega_1 = \frac{\alpha_{1u} + \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle}{\alpha_1},$$

$$\omega_2 = \frac{\alpha_{2v} + \alpha_1\langle e_2, e_{1v}\rangle}{\alpha_2}.$$

Demonstração. Como Σ e $\tilde{\Sigma}$ estão associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal, a condição (iii) da definição implica nas seguintes igualdades:

i) $\langle \tilde{e}_1, \tilde{N}_u\rangle = 0$

ii) $\langle \tilde{e}_2, \tilde{N}_v\rangle = 0,$

onde $\tilde{e}_i$ são como no Lema 3.1.1. Segue de (i) e da derivada de (3.4) em relação u, que:

$$\langle \tilde{e}_1, \tilde{N}_u\rangle = \langle e_1 - \alpha_1\left[\xi(1 + c_\varepsilon(T)) - \varepsilon N s_\varepsilon(T)\right], N_u + (\xi_u - \tilde{\xi}_u)t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right) + (\xi - \tilde{\xi})\frac{T_u}{2}c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)\rangle,$$

onde $\tilde{\xi} = \varepsilon N s_\varepsilon(T) - \xi c_\varepsilon(T)$. Fazendo a distribuição desse produto, temos que

$$\begin{aligned}\langle \tilde{e}_1, \tilde{N}_u\rangle &= \langle e_1, N_u\rangle + t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)(\langle e_1, \xi_u\rangle - \langle e_1, \tilde{\xi}_u\rangle) + \frac{T_u}{2}c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)(\langle e_1, \xi\rangle - \langle e_1, \tilde{\xi}\rangle)\\ &\quad -\alpha_1(1 + c_\varepsilon(T))\langle \xi, N_u\rangle + \alpha_1(1 + c_\varepsilon(T))t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)\langle \xi, \tilde{\xi}_u\rangle\\ &\quad -\alpha_1(1 + c_\varepsilon(T))\frac{T_u}{2}c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right) + \alpha_1(1 + c_\varepsilon(T))\frac{T_u}{2}c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)\langle \xi, \tilde{\xi}\rangle\\ &\quad +\varepsilon\alpha_1 s_\varepsilon(T)t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)(\langle N, \xi_u\rangle - \langle N, \tilde{\xi}_u\rangle) + \varepsilon\alpha_1\frac{T_u}{2}s_\varepsilon(T)c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)(\langle N, \xi\rangle - \langle N, \tilde{\xi}\rangle).\end{aligned}$$

Seguindo a ordem, vamos analisar os produtos internos. Note que

$$\begin{aligned}&\langle e_1, N_u\rangle = 0, \langle e_1, \xi_u\rangle = \alpha_{1u} + \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle, \langle e_1, \tilde{\xi}_u\rangle = -c_\varepsilon(T)(\alpha_{1u} + \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle) + \varepsilon\alpha_1 T_u s_\varepsilon(T),\\ &\langle e_1, \xi\rangle = \alpha_1, \langle e_1, \tilde{\xi}\rangle = -\alpha_1 c_\varepsilon(T), \langle \xi, N_u\rangle = \alpha_2|N_u|, \langle \xi, \tilde{\xi}_u\rangle = \varepsilon s_\varepsilon(T)(\alpha_2|N_u| + T_u),\\ &\langle \xi, \tilde{\xi}\rangle = -c_\varepsilon(T), \langle N, \xi_u\rangle = -\alpha_2|N_u|, \langle N, \tilde{\xi}_u\rangle = c_\varepsilon(T)(T_u + \alpha_2|N_u|), \langle N, \xi\rangle = 0, \langle N, \tilde{\xi}\rangle = s_\varepsilon(T).\end{aligned}$$

Substituindo essas igualdades em cada respectivo parênteses, temos

$$\begin{aligned}\langle \tilde{e}_1, \tilde{N}_u\rangle &= t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)(\alpha_{1u} + \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle + c_\varepsilon(T)(\alpha_{1u} + \alpha_2\langle e_1, e_{2u}\rangle) - \varepsilon\alpha_1 T_u s_\varepsilon(T))\\ &\quad +\frac{T_u}{2}c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)(\alpha_1 + \alpha_1 c_\varepsilon(T)) - \alpha_1(1 + c_\varepsilon(T))(\alpha_2|N_u|)\\ &\quad +\varepsilon\alpha_1(1 + c_\varepsilon(T))t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)s_\varepsilon(T)(\alpha_2|N_u| + T_u) - \alpha_1(1 + c_\varepsilon(T))\frac{T_u}{2}c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)\\ &\quad -\alpha_1(1 + c_\varepsilon(T))\frac{T_u}{2}c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)c_\varepsilon(T) + \varepsilon\alpha_1 s_\varepsilon(T)t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)(-\alpha_2|N_u| - c_\varepsilon(T)(T_u + \alpha_2|N_u|))\\ &\quad +\varepsilon\alpha_1\frac{T_u}{2}s_\varepsilon^2(T)c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right).\end{aligned}$$

Colocando os termos comum em evidência, segue

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{e}_1, \tilde{N}_u\rangle &= t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)((\alpha_{1u}+\alpha_2\langle e_1,e_{2u}\rangle)(1+c_\varepsilon(T))-\varepsilon\alpha_1 T_u s_\varepsilon(T))\\
&+\alpha_1\frac{T_u}{2}c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)(1+c_\varepsilon(T))-\alpha_1\alpha_2|N_u|(1+c_\varepsilon(T))\\
&+\varepsilon\alpha_1\alpha_2|N_u|t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)s_\varepsilon(T)(1+c_\varepsilon T)+\varepsilon\alpha_1 T_u t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)s_\varepsilon T(1+c_\varepsilon(T))\\
&-\alpha_1\frac{T_u}{2}c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)(1+c_\varepsilon T)-\alpha_1\frac{T_u}{2}c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)c_\varepsilon(T)(1+c_\varepsilon(T))\\
&-\varepsilon\alpha_1\alpha_2|N_u|t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)s_\varepsilon(T)(1+c_\varepsilon T)-\varepsilon\alpha_1 T_u s_\varepsilon(T)c_\varepsilon(T)t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)\\
&-\varepsilon\alpha_1\frac{T_u}{2}s_\varepsilon^2(T)c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right).
\end{aligned}$$

Agora fazendo os devidos cancelamentos, temos

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{e}_1, \tilde{N}_u\rangle &= t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)(1+c_\varepsilon(T))(\alpha_{1u}+\alpha_2\langle e_1,e_{2u}\rangle)-\alpha_1\alpha_2(1+c_\varepsilon(T))|N_u|\\
&-\alpha_1\frac{T_u}{2}c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)(c_\varepsilon(T)+c_\varepsilon^2(T)+\varepsilon s_\varepsilon^2(T))\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Segue daí que

$$\frac{\alpha_{1u}+\alpha_2\langle e_1,e_{2u}\rangle}{\alpha_1}=\frac{2\alpha_2|N_u|+T_u c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)}{2t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)}.$$

De maneira análoga, analisando a equação a (ii) temos que,

$$\frac{\alpha_{2v}+\alpha_1\langle e_2,e_{1v}\rangle}{\alpha_2}=\frac{2\alpha_1|N_v|+T_v c_\varepsilon^{-2}\left(\frac{T}{2}\right)}{2t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)}.$$

Definindo as igualdades acima como ω_1 e ω_2 respectivamente, concluímos que as equações (3.6) são satisfeitas.

□

No próximo Lema, introduziremos uma nova função local que será fundamental em nosso sistema de equações associado a uma transformação de Ribaucour horizontal não degenerada em termos de ω_1 e ω_2.

Lema 3.1.3. *Nas condições do Lema anterior, a 1-forma local dada por $\omega_1 du+\omega_2 dv$ é fechada.*

Demonstração. Como T é diferenciável, $T_{uv}=T_{vu}$. Notemos que essa igualdade equivale a

$\omega_{1v} = \omega_{2u}$. De fato, para pontos em que $N_u \neq 0$, segue que

$$\begin{cases} (T_v)_u = \varepsilon 2T_u\alpha_1|N_v|s_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)c_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right) + 2\omega_2 T_u c_\varepsilon^2\left(\frac{T}{2}\right) - 2\alpha_{1u}|N_v|c_\varepsilon^2\left(\frac{T}{2}\right) \\ \qquad -2\alpha_1|N_v|_u c_\varepsilon^2\left(\frac{T}{2}\right) + 2\omega_{2u}s_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)c_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right) - \omega_2 T_u \\ (T_u)_v = \varepsilon 2T_v|N_u|\alpha_2 s_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)c_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right) + 2\omega_1 T_v c_\varepsilon^2\left(\frac{T}{2}\right) - 2\alpha_{2v}|N_u|c_\varepsilon^2\left(\frac{T}{2}\right) \\ \qquad -2\alpha_2|N_u|_v c_\varepsilon^2\left(\frac{T}{2}\right) + 2\omega_{1v}s_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)c_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right) - \omega_1 T_v. \end{cases}$$

Combinando,

$$\begin{cases} (T_v)_u = \varepsilon T_u\alpha_1|N_v|s_\varepsilon(T) + \omega_2 T_u c_\varepsilon(T) - \alpha_{1u}|N_v|c_\varepsilon(T) \\ \qquad -\alpha_{1u}|N_v| - \alpha_1|N_v|_u c_\varepsilon(T) - \alpha_1|N_v|_u + \omega_{2u}s_\varepsilon(T) \\ (T_u)_v = \varepsilon T_v\alpha_2|N_u|s_\varepsilon(T) + \omega_1 T_v c_\varepsilon(T) - \alpha_{2v}|N_u|c_\varepsilon(T) \\ \qquad -\alpha_{2v}|N_u| - \alpha_2|N_u|_v c_\varepsilon(T) - \alpha_2|N_u|_v + \omega_{1v}s_\varepsilon(T). \end{cases}$$

Utilizando o sistema (3.6)

$$\begin{aligned} (T_v)_u - (T_u)_v \quad = \quad & \varepsilon T_u\alpha_1|N_v|s_\varepsilon(T) + \omega_2 T_u c_\varepsilon(T) - \alpha_{1u}|N_v|c_\varepsilon(T) - \alpha_{1u}|N_v| - \alpha_1|N_v|_u c_\varepsilon(T) \\ & -\alpha_1|N_v|_u + \omega_{2u}s_\varepsilon(T) - \varepsilon T_v\alpha_2|N_u|s_\varepsilon(T) - \omega_1 T_v c_\varepsilon(T) + \alpha_{2v}|N_u|c_\varepsilon(T) \\ & +\alpha_{2v}|N_u| + \alpha_2|N_u|_v c_\varepsilon(T) + \alpha_2|N_u|_v - \omega_{1v}s_\varepsilon(T). \end{aligned}$$

Usando os fatos que

$$\alpha_{2v} = \alpha_2\omega_2 + \alpha_1\frac{|N_v|_u}{|N_u|} \text{ e } \alpha_{1u} = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\frac{|N_u|_v}{|N_v|},$$

e fazendo os devidos cancelamentos, concluímos que

$$(T_u)_v = (T_v)_u$$

se e somente se

$$(\omega_{2u} - \omega_{1v})s_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right) = 0$$

se e somente se

$$\omega_{1v} = \omega_{2u}.$$

O caso que $N_u = 0$ segue similar ao caso $\mathbb{R}^3$. $\square$

Pelo Lema anterior e o Lema de Poincaré, definimos localmente uma função positiva Ω tal que

$$\begin{cases} \omega_1 = -\dfrac{\Omega_u}{\Omega} \\ \omega_2 = -\dfrac{\Omega_v}{\Omega} \end{cases} \tag{3.7}$$

Utilizando Ω e o sistema (3.7), reescrevemos o sistema (3.6) da seguinte maneira:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left(-\Omega t_\varepsilon\left(\dfrac{T}{2}\right)\right)_u & = & \Omega\alpha_2|N_u| \\ \left(-\Omega t_\varepsilon\left(\dfrac{T}{2}\right)\right)_v & = & \Omega\alpha_1|N_v| \\ (\alpha_1\Omega)_u & = & -\alpha_2\Omega\langle e_1, e_{2u}\rangle \\ (\alpha_2\Omega)_v & = & -\alpha_1\Omega\langle e_2, e_{1v}\rangle \end{array}\right. \tag{3.8}$$

Como fizemos no capítulo anterior, definimos novas funções γ_i e φ por

$$\varphi = -\Omega t_\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right), \ \gamma_i = \alpha_i\Omega, \ i = 1, 2. \tag{3.9}$$

Note que, como $|\xi| = 1$, temos que

$$\Omega^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2.$$

Substituindo estas novas funções em (3.8), temos o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_u & = & |N_u|\gamma_2 \\ \varphi_v & = & |N_v|\gamma_1 \\ \gamma_{1u} & = & \gamma_2\langle e_{1u}, e_2\rangle \\ \gamma_{2v} & = & \gamma_1\langle e_{2v}, e_1\rangle \end{array}\right. \tag{3.10}$$

O próximo Teorema nos permite começar com superfícies parametrizadas e obter transformadas de Ribaucour horizontais a partir de soluções de um sistema de equações diferenciais. Ressaltamos que o seguinte Teorema, a superfície inicial não tem nem planos tangentes horizontais nem verticais, porém é válido para superfície cujo plano tangente sempre é vertical.

Teorema 3.1.1. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma superfície parametrizada dada por $X(u, v) = (N(u, v), u)$ tal que $\langle X_u, X_v\rangle = 0$ e $N_u \neq 0$. Sejam $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ e $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$, e γ_1, γ_2, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ uma solução do sistema* (3.10). *Então, se a aplicação*

$$\tilde{X} = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \varepsilon\varphi^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \varepsilon\varphi^2}X - \frac{2\varphi}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \varepsilon\varphi^2}(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) \tag{3.11}$$

é uma imersão, as imagens de X e $\tilde{X}$ estão associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal.

Demonstração. Como em $\mathbb{R}^3$, fazendo o caminho inverso dos cálculos dos Lemas anteriores, vamos verificar que $\tilde{X}$ é uma parametrização ortogonal e que X e $\tilde{X}$ são tangentes a uma congruência de círculos a 2 parâmetros. Definimos

$$\begin{cases} c_\varepsilon(T) = \dfrac{\Omega^2 - \varepsilon\varphi^2}{\Omega^2 + \varepsilon\varphi^2} \\ s_\varepsilon(T) = -\dfrac{2\varphi\Omega}{\Omega^2 + \varepsilon\varphi^2} \\ \alpha_i = \dfrac{\gamma_i}{\Omega}, i = 1, 2 \\ \xi = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2. \end{cases} \tag{3.12}$$

Assim,

$$\tilde{N} = c_\varepsilon(T)N + s_\varepsilon(T)\xi$$

e teremos

$$\tilde{N}_u = -\varepsilon T_u s_\varepsilon(T)N + c_\varepsilon(T)N_u + T_u c_\varepsilon(T)\xi + s_\varepsilon(T)\xi_u,$$

$$\tilde{N}_v = -\varepsilon T_v s_\varepsilon(T)N + c_\varepsilon(T)N_v + T_v c_\varepsilon(T)\xi + s_\varepsilon(T)\xi_v.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \langle \tilde{N}_u, \tilde{N}_v \rangle &= \varepsilon T_u T_v s_\varepsilon^2(T) - \varepsilon T_u s_\varepsilon^2(T)\langle N, \xi_v\rangle + T_v c_\varepsilon^2(T)\langle N_u, \xi\rangle + c_\varepsilon(T)s_\varepsilon(T)\langle N_u, \xi_v\rangle \\ &+ T_u c_\varepsilon^2(T)\langle \xi, N_v\rangle + T_u T_v c_\varepsilon^2(T) - \varepsilon T_v s_\varepsilon^2(T)\langle \xi_u, N\rangle + s_\varepsilon(T)c_\varepsilon(T)\langle \xi_u, N_v\rangle \\ &+ s_\varepsilon^2(T)\langle \xi_u, \xi_v\rangle. \end{aligned}$$

Como por hipótese, as funções γ_1, γ_2 e φ constituem uma solução do sistema (3.10), as funções α_1, α_2 e T satisfazem (3.6). Juntamente utilizando as equações (3.12), temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{N}_u, \tilde{N}_v \rangle &= T_u T_v + T_u|N_v|\alpha_1 + T_v|N_u|\alpha_2 + c_\varepsilon(T)s_\varepsilon(T)(|N_u|\alpha_2\omega_2 + |N_v|\alpha_1\omega_1) \\ &\quad + s_\varepsilon^2(T)(-\omega_1\omega_2 + \alpha_1\alpha_2|N_u||N_v|) \\ &= \omega_1\omega_2 s_\varepsilon^2(T) - \omega_1\alpha_1|N_v|s_\varepsilon(T) - \omega_1\alpha_1|N_v|s_\varepsilon(T)c_\varepsilon(T) - \omega_2\alpha_2|N_u|s_\varepsilon(T) \\ &\quad - \omega_2\alpha_2|N_v|c_\varepsilon(T)s_\varepsilon(T) + \alpha_1\alpha_2|N_u||N_v|(1 + c_\varepsilon(T))^2 + \alpha_1\omega_1|N_v|s_\varepsilon(T) \\ &\quad - \alpha_1\alpha_2|N_u||N_v|(1 + c_\varepsilon(T)) + \omega_2\alpha_2|N_u|s_\varepsilon(T) - \alpha_1\alpha_2|N_u||N_v|(1 + c_\varepsilon(T)) \\ &\quad + \omega_2\alpha_2|N_u|s_\varepsilon(T)c_\varepsilon(T) + \omega_1\alpha_1|N_v|s_\varepsilon(T)c_\varepsilon(T) - \omega_1\omega_2 s_\varepsilon^2(T) \\ &\quad + \alpha_1\alpha_2|N_u||N_v|s_\varepsilon^2(T) = 0. \end{aligned}$$

Os centros dos círculos da congruência de círculos são dado por

$$C = c_\varepsilon(R_2)N + s_\varepsilon(R_2)e_2.$$

Para mostrar que as seções horizontais de X e $\tilde{X}$ são envoltórias desta congruência de círculos é preciso calcular a velocidade da geodésica partindo de C e chegando em N e $\tilde{N}$. Dessa maneira, temos que verificar que $\langle N_v, e_2\rangle = 0$ e $\langle -e_2 - t_\varepsilon^{-1}(R_2)N, \tilde{N}_v\rangle = 0$. A primeira igualdade é imediata, a segunda é obtida notando que (Lema 3.1.1)

$$t_\varepsilon^{-1}(R_2) = \alpha_2 t_\varepsilon^{-1}\left(\frac{T}{2}\right).$$

Assim

$$\begin{aligned}\langle -e_2 - t_\varepsilon^{-1}(R_2)N, \tilde{N}_v\rangle &= \alpha_2 T_v s_\varepsilon(T) t_\varepsilon^{-1}\left(\frac{T}{2}\right) - \alpha_2 s_\varepsilon(T) t_\varepsilon^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)\langle \xi_v, N\rangle \\ &\quad - T_v c_\varepsilon(T)\alpha_2 - s_\varepsilon(T)\langle e_2, \xi_v\rangle.\end{aligned}$$

Usando o fato que $s_\varepsilon(T)t_\varepsilon^{-1}\left(\frac{T}{2}\right) = c_\varepsilon(T) + 1$, $\langle \xi_v, N\rangle = -|N_v|\alpha_1$ e $\langle e_2, \xi_v\rangle = \alpha_2\omega_2$ temos que

$$\langle -e_2 - t_\varepsilon^{-1}(R_2)N, \tilde{N}_v\rangle = T_v\alpha_2 + |N_v|\alpha_1\alpha_2(\cos(T) + 1) - s_\varepsilon(T\omega_2\alpha_2).$$

Por fim, substituindo T_v por sua expressão de (3.6), concluímos que

$$\langle -e_2 - t_\varepsilon^{-1}(R_2)N, \tilde{N}_v\rangle = 0.$$

□

3.2 Transformações de Ribaucour horizontais entre Superfícies Mínimas em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$

Nesta seção apresentaremos um resultado que fornece condições suficientes para que a transformação de Ribaucour horizontal de uma superfície mínima seja também uma superfície mínima.

De maneira análoga ao que vimos no capítulo anterior, partindo de uma superfície mínima com uma parametrização conforme na forma (2.1), chegaremos a um sistema integrável, no sentido de Frobenius, cujas soluções genericamente fornecem transformações de Ribaucour horizontais entre superfícies mínimas.

Iniciamos nossa discussão com a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *Seja $X : U \to \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão mínima e conforme na forma $X(u,v) = (N(u,v), u)$ e assuma que*

i) $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$ *se* $|N_u| \neq 0$.

ii) $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2 = ie_1$ *se* $|N_u| = 0$.

Seja σ a 1-forma tal que $\sigma = \gamma_2|N_v|du + \gamma_1|N_u|dv$ onde γ_i são funçoes reais satisfazendo (3.10). *Então $d\sigma = 0$.*

Demonstração. A demostração é semelhante à demonstração da Proposição 2.2.1. □

A Proposição anterior e o Lema de Poincaré garantem a existência de uma função ω, definida em um domínio simplesmente conexo, tal que $\sigma = d\omega$, isto é, $\omega_u = \gamma_2|N_v|$ e $\omega_v = \gamma_1|N_u|$. Isso naturalmente nos leva a considerar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \varphi_u &= |N_u|\gamma_2 \\ \varphi_v &= |N_v|\gamma_1 \\ \gamma_{1u} &= \gamma_2\langle e_{1u}, e_2\rangle \\ \gamma_{2v} &= \gamma_1\langle e_{2v}, e_1\rangle \\ \omega_u &= \gamma_2|N_v| \\ \omega_v &= \gamma_1|N_u| \end{cases} \tag{3.13}$$

Observação 3.2.1. *No caso em que* $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2 = ie_1$ *se* $|N_u| = 0$*, as funções* φ_u*,* γ_{1u} *e* ω_v *do sistema anterior são nulas.*

As soluções do sistema (3.13) tais que

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \varepsilon\varphi^2 = m(\omega^2 - \varphi^2),$$

onde m é uma constante não nula, podem ser associadas a transformações de Ribaucour horizontais entre superfícies mínimas.

Teorema 3.2.1. *Seja* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ *uma imersão mínima conforme na forma* $X(u, v) = (N(u, v), u)$ *tal que* $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$ *se* $|N_u| \neq 0$*. Então o sistema*

$$\begin{cases} \varphi_u &= |N_u|\gamma_2 \\ \varphi_v &= |N_v|\gamma_1 \\ \gamma_{1u} &= \gamma_2\theta_1 \\ \gamma_{2v} &= \gamma_1\theta_2 \\ \omega_u &= \gamma_2|N_v| \\ \omega_v &= \gamma_1|N_u| \\ \gamma_{1v} &= m(\omega|N_u| - \varphi|N_v|) - \gamma_2\theta_2 - \varepsilon\varphi|N_v| \\ \gamma_{2u} &= m(\omega|N_v| - \varphi|N_u|) - \gamma_1\theta_1 - \varepsilon\varphi|N_u| \end{cases} \tag{3.14}$$

onde $\theta_1 = \langle e_{1u}, e_2\rangle$ *e* $\theta_2 := \langle e_{2v}, e_1\rangle$*, é integrável.*

Demonstração. As derivadas trocadas de φ e ω são similares as contas em $\mathbb{R}^3$. Usando o sistema (3.13) e lembrando que $\tau_1 = m(\omega|N_u| - \varphi|N_v|)$, $\tau_2 = m(\omega|N_v| - \varphi|N_u|)$, $\theta_1 = \langle e_{1u}, e_2\rangle$, $\theta_2 = \langle e_{2v}, e_1\rangle$, $\tau_{1u} = \tau_2\theta_2$, $|N_v|_u = \theta_2|N_u|$ vamos verificar as derivadas trocadas de γ_1 e γ_2. Note que por um lado

$$(\gamma_{1u})_v = (\gamma_2\theta_1)_v = \gamma_{2v}\theta_1 + \gamma_2\theta_{1v} = \gamma_1\theta_2\theta_1 + \gamma_2\theta_{1v}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\gamma_{1v})_u &= (\tau_1-\gamma_2\theta_2-\varepsilon\varphi|N_v|)_u\\ &= \tau_{1u}-\gamma_{2u}\theta_2-\gamma_2\theta_{2u}-\varepsilon\varphi_u|N_v|-\varepsilon\varphi|N_v|_u\\ &= \gamma_1\theta_1\theta_2-\gamma_2\theta_{2u}-\varepsilon\gamma_2|N_u||N_v|.\end{aligned}$$

Logo,

$$(\gamma_{1u})_v-(\gamma_{1v})_u=\gamma_2\left(\theta_{1v}+\theta_{2u}-\varepsilon|N_u||N_v|\right).$$

Portanto, pelo Lema 1.1.1,

$$(\gamma_{1u})_v-(\gamma_{1v})_u=0.$$

Raciocínio análogo mostra que $\gamma_{2uv}=\gamma_{2vu}$. □

No caso das superfícies mínimas com planos tangentes sempre verticais, só temos planos verticais, isto é, um produto de uma geodésica de $\mathbb{M}^2(\varepsilon)$ com $\mathbb{R}$. Esse caso especial nos leva a considerar o Teorema abaixo.

Teorema 3.2.2. *O sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi_u &=& 0\\ \varphi_v &=& \gamma_1\\ \gamma_{1u} &=& 0\\ \gamma_{2v} &=& 0\\ \omega_u &=& \gamma_2\\ \omega_v &=& 0\\ \gamma_{1v} &=& -(m+\varepsilon)\varphi\\ \gamma_{2u} &=& m\omega\end{array}\right. \tag{3.15}$$

é integrável.

Demonstração. Basta observar que $e_{1u}=e_{2u}=\theta_1=0$ pois $N_u=0$ e $\theta_2=0$ pois a superfície é mínima. □

Para mostrar que as soluções do sistema (3.13) associadas a uma imersão mínima X com a condição adicional $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\varepsilon\varphi^2=m(\omega^2-\varphi^2)$, $m\neq 0$, geram, via (3.11) uma nova imersão mínima $\tilde{X}$, iremos obter uma expressão para os coeficientes da métrica de $\tilde{X}$.

Lema 3.2.1. *Seja X uma superfície parametrizada dada por $X(u,v)=(N(u,v),u)$ tal que $\langle X_u,X_v\rangle=0$. Sejam e_1 e e_2 definidos por:*

i) $e_1=\dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2=\dfrac{N_u}{|N_u|}$ *, se* $|N_u|\neq 0$.

ii) $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$ *e* $e_2 = ie_1$ *, se* $|N_u| = 0$.

Se $\tilde{X}$ é uma imersão definida por (3.10), onde γ_1, γ_2, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ é uma solução do sistema (3.14), tal que $A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \varepsilon\varphi^2$ nunca se anula, então os campos definidos por (3.1) são dados por

$$\widetilde{e}_i \;=\; e_i - \frac{2\gamma_i}{A}(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \varepsilon\varphi N) \tag{3.16}$$

Além disso, os coeficientes $\tilde{g}_{ij}$ da primeira forma fundamental de $\tilde{X}$ são dados por:

$$\widetilde{g}_{11} = g_{11} + \frac{4\varphi\tau_2}{A}\left(\frac{\varphi\tau_2}{\Omega^2} - |N_u|\right).$$

$$\widetilde{g}_{22} = g_{22} + \frac{4\varphi\tau_1}{A}\left(\frac{\varphi\tau_1}{\Omega^2} - |N_v|\right)$$

e

$$\widetilde{g}_{12} = 0,$$

onde g_{ij} são os coeficientes da primeira forma fundamental de X, $\tau_1 = \frac{1}{2}\frac{A_v}{\gamma_1}$ e $\tau_2 = \frac{1}{2}\frac{A_u}{\gamma_2}$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.1, $\tilde{X}$ é uma transformada de Ribaucour horizontal de X e pelo Lema 3.1.1 temos que $\tilde{e}_i = e_i - \alpha_i\left[\xi(1 + c_\varepsilon(T)) - \varepsilon N s_\varepsilon(T)\right]$, onde α_1, α_2 e ξ estão relacionadas com γ_i e φ por (3.9). Assim, como fizemos em $\mathbb{R}^3$, usando as definiçoes de α_1, α_2 e ξ podemos escrever os vetores $\widetilde{e}_1$ e $\widetilde{e}_2$ como (3.16). Além disso, podemos reescrever (3.11) como

$$\tilde{N} = N - \frac{2\varphi}{A}(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \varepsilon\varphi N).$$

Vamos tentar relacionar as métricas $\widetilde{g}_{ij}$ com g_{ij} e as funções γ_1, γ_2 e φ. Faremos o cálculo apenas para o caso (i), pois o caso (ii) é similar. Para isso é conveniente introduzir

$$\overline{N} = \gamma_1 e_1 + \gamma_1 e_2 + \varepsilon\varphi N$$

e calcular $\overline{N}_u$ e $\overline{N}_v$. Seja

$$\overline{N}_u = \gamma_{1u}e_1 + \gamma_1 e_{1u} + \gamma_{2u}e_2 + \gamma_2 e_{2u} + \varepsilon\varphi_u N + \varepsilon\varphi N_u.$$

Então, pelo o sistema (3.10), temos,

$$\overline{N}_u = \gamma_2\langle e_{1u}, e_2\rangle e_1 + \gamma_1\langle e_{1u}, e_2\rangle e_2 + \gamma_{2u}e_2 + \gamma_2(-\langle e_{1u}, e_2\rangle e_1 - \varepsilon|N_u|N) + \varepsilon|N_u|\gamma_2 N + \varepsilon\varphi|N_u|e_2$$

Portanto

$$\overline{N}_u = (\gamma_{2u} + \gamma_1\langle e_{1u}, e_2\rangle + \varepsilon\varphi|N_u|)e_2.$$

Analogamente

$$\overline{N}_v = (\gamma_{1v} + \gamma_2\langle e_{2v}, e_1\rangle + \varepsilon\varphi|N_v|)e_1.$$

Seja $A=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\varepsilon\varphi^2$ e novamente usando o sistema (3.10) temos que

$$\tau_2=\frac{1}{2}\frac{A_u}{\gamma_2}=\frac{2(\gamma_{1u}\gamma_1+\gamma_{2u}\gamma_2+\varepsilon\varphi_u\varphi)}{2\gamma_2}=\gamma_{2u}+\gamma_1\langle e_{1u},e_2\rangle+\varepsilon\varphi|N_u|$$

$$\tau_1=\frac{1}{2}\frac{A_v}{\gamma_1}=\frac{2(\gamma_{1v}\gamma_1+\gamma_{2v}\gamma_2+\varepsilon\varphi_v\varphi)}{2\gamma_1}=\gamma_{1v}+\gamma_2\langle e_{2v},e_1\rangle+\varepsilon\varphi|N_v|.$$

Assim $\overline{N}_u$ e $\overline{N}_v$ podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\overline{N}_u=\tau_2e_2$$

$$\overline{N}_u=\tau_2e_2.$$

Estamos agora em condições de calcular $\widetilde{N}_u$ e $\widetilde{N}_v$. Usando a definição de $\overline{N}$ e A temos que

$$\widetilde{N}=N-\frac{2\varphi}{A}\overline{N}.$$

Derivando a igualdade anterior em relação a u obtemos,

$$\widetilde{N}_u=N_u-\frac{2(\varphi_uA-A_u\varphi)(\gamma_1e_1+\gamma_2e_2)}{A^2}\overline{N}-\frac{2\varphi\tau_2e_2}{A}.$$

Como $N_u=|N_u|e_2$, $\varphi_u=|N_u|\gamma_2$, $A_u=2\tau_2\gamma_2$ e usando (3.16) a igualdade anterior pode ser reescrita como:

$$\widetilde{N}_u=|N_u|e_2+\frac{2(|N_u|\gamma_2A-2\tau_2\gamma_2\varphi)(\widetilde{e}_2-e_2)A}{2A^2\gamma_2}-\frac{2\varphi\tau_2e_2}{A}.$$

Observe que os coeficiente de e_2 se anulam, assim

$$\widetilde{N}_u=\left(|N_u|-\frac{2\tau_2\varphi}{A}\right)\widetilde{e}_2.$$

Analogamente

$$\widetilde{N}_v=\left(|N_v|-\frac{2\tau_1\varphi}{A}\right)\widetilde{e}_1.$$

Portanto, os coeficientes $\tilde{g}_{ij}$ tem as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_{11}&=\langle\widetilde{X}_u,\widetilde{X}_u\rangle=|\widetilde{N}_u|^2+1=(|N_u|-\frac{2\tau_2\varphi}{A})^2+1=|N_u|^2-\frac{4\varphi\tau_2|N_u|}{A}+\frac{4\varphi^2\tau_2^2}{A^2}+1\\&=g_{11}+\frac{4\varphi\tau_2}{A}(\frac{\varphi\tau_2}{A}-|N_u|).\end{aligned}$$

Da mesma maneira,

$$\widetilde{g}_{22}=g_{22}+\frac{4\varphi\tau_1}{A}(\frac{\varphi\tau_1}{A}-|N_v|)$$

e

$$\widetilde{g}_{12} = 0$$

pois $\widetilde{e}_1$ e $\widetilde{e}_2$ são ortonormais. □

Teorema 3.2.3. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão mínima conforme na forma $X(u,v) = (N(u,v), u)$. Se $\tilde{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ é uma imersão dada por (3.11), onde*

i) $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$, $e_2 = \dfrac{N_u}{|N_u|}$, $\tilde{e}_1 = \dfrac{\tilde{N}_v}{|\tilde{N}_v|}$ *e* $\tilde{e}_2 = \dfrac{\tilde{N}_u}{|\tilde{N}_u|}$ *se* $|N_u| \neq 0$.

ii) $e_1 = \dfrac{N_v}{|N_v|}$, $e_2 = ie_1$, $\tilde{e}_1 = \dfrac{\tilde{N}_v}{|\tilde{N}_v|}$ *e* $\tilde{e}_2 = i\tilde{e}_1$ *se* $|N_u| = 0$,

e as funções φ, ω e γ_1 e γ_2 são soluções do sistema (3.13) tais que

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \varepsilon\varphi^2 = m(\omega^2 - \varphi^2),$$

onde $m \neq 0$ é uma constante real, então $\tilde{X}$ é uma imersão mínima conforme.

Demonstração. Novamente mostraremos apenas o primeiro caso. Como $\widetilde{g}_{12} = 0$ resta mostrar que $\widetilde{g}_{11} = \widetilde{g}_{22}$. Note que

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_{11} - \widetilde{g}_{22} &= g_{11} - g_{22} + \frac{4\varphi}{A}\left(\frac{\tau_2^2\varphi}{A} - |N_u|\tau_2 - \frac{\tau_1^2\varphi}{A} + |N_v|\tau_1\right) \\ &= g_{11} - g_{22} + \frac{4\varphi}{A}\left(\frac{\varphi(\tau_2^2 - \tau_1^2)}{A} + |N_v|\tau_1 - |N_u|\tau_2\right). \end{aligned}$$

Desde que X é conforme, temos que $g_{11} - g_{22} = 0$. Logo a condição para $\widetilde{X}$ ser mínima é

$$\frac{\varphi(\tau_2^2 - \tau_1^2)}{A} + |N_v|\tau_1 - |N_u|\tau_2 = 0.$$

Para provar essa igualdade vamos utilizar o sistema (3.13). Desde de que

$$A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \varepsilon\varphi^2 = m(\omega^2 - \varphi^2),$$

segue que

$$A_v = 2m(\omega\omega_v - \varphi\varphi_v) = 2m(\omega\gamma_1|N_u| - \varphi\gamma_1|N_v|) = 2m\gamma_1(\omega|N_u| - \varphi|N_v|)$$

$$A_u = 2m(\omega\omega_u - \varphi\varphi_u) = 2m(\omega\gamma_2|N_v| - \varphi\gamma_2|N_u|) = 2m\gamma_2(\omega|N_v| - \varphi|N_u|).$$

Por definição

$$\tau_1 = \tfrac{1}{2}\tfrac{A_v}{\gamma_1} \text{ e } \tau_2 = \tfrac{1}{2}\tfrac{A_u}{\gamma_2},$$

logo podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\tau_1 = m(\omega|N_u| - \varphi|N_v|) \text{ e } \tau_2 = m(\omega|N_v| - \varphi|N_u|).$$

Note que

$$\tau_1 + \tau_2 = m(\omega - \varphi)(|N_u| + |N_v|)$$

e

$$\tau_1 - \tau_2 = m(\omega + \varphi)(|N_u| - |N_v|).$$

Assim

$$\frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{A}\varphi = \frac{\varphi m^2(\omega^2 - \varphi^2)(|N_v|^2 - |N_u|^2)}{m(\omega^2 - \varphi^2)} = m\varphi.$$

Por outro lado,

$$|N_u|\tau_2 - |N_v|\tau_1 = m|N_u|(\omega|N_v| - \varphi|N_u|) - m|N_v|(\omega|N_u| - \varphi|N_v|) = m\varphi(|N_v|^2 - |N_u|^2)) = m\varphi,$$

logo a condição é satisfeita. □

Capítulo

4

Permutabilidade

Neste capítulo estabeleceremos um resultado análogo ao clássico Teorema de permutabilidade de Bianchi para transformações de Ribaucour . Embora provavelmente seja possível estabelecer um teorema geral de permutabilidade envolvendo as transformações de Ribaucour horizontais, iremos nos limitar ao caso em que as transformações envolvem exclusivamente superfícies mínimas.

A situação geométrica que iremos abordar é basicamente a seguinte. Dada uma imersão mínima conforme com representação local canônica em $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, consideramos duas transformadas de Ribaucour horizontais de X obtidas a partir dos Teoremas 2.2.3 e 3.2.3, $\tilde{X}$ e $\hat{X}$, escolhendo, respectivamente, constantes distintas m_1 e m_2. Mostraremos que é possível obter uma imersão mínima $\overset{\star}{X}$, que é, simultaneamente, uma transformada de Ribaucour horizontal de $\tilde{X}$, para a constante m_1, e de $\hat{X}$, para a constante m_2.

Um dos aspectos interessantes do caso especial das supefícies mínimas, é que a imersão $\overset{\star}{X}$ pode ser obtida a partir das soluções dos sistemas (2.13) e (3.14) que geram $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ de maneira puramente algébrica, sem a necessidade de resolver equações diferenciais.

Para que os cálculos fiquem mais claros, decidimos tratar primeiramente o caso em que o espaço ambiente é $\mathbb{R}^3$ e, posteriormente, o caso em que o espaço ambiente é $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

4.1 Permutabilidade Envolvendo Superfícies Mínimas em $\mathbb{R}^3$

Sejam X, $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ imersões mínimas em $\mathbb{R}^3$ tais que $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ estejam associadas a X por uma transformação de Ribaucour horizontal via o Teorema 2.2.3. Sejam $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\varphi}$, respectivamente, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\omega}$ e $\hat{\varphi}$ as soluções do sistema (2.12) associadas a $\tilde{X}$ e $\hat{X}$, com respectivas constantes m_1 e m_2.

O nosso objetivo é definir uma imersão $\overset{\star}{X}$ que seja, simultaneamente, uma transformada de Ribaucour horizontal de $\tilde{X}$, para a constante m_1, e de $\hat{X}$, para a constante m_2. Com o auxílio da ilustração seguinte, faremos isso usando como inspiração a demonstração de Bianchi do Teorema da permutabilidade para transformações de Ribaucour envolvendo superfícies mínimas.

Vamos supor que $\overset{\star}{X}$ seja uma imersão que é a transformada de Ribaucour horizontal de $\tilde{X}$ para $m = m_2$. Então, denotando a solução do sistema (2.12) associada a esta transformação por $(\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi})$, iremos supor que existe uma função incógnita Γ tal que

$$(\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi}) = \Gamma(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, -\tilde{\omega}, \tilde{\varphi}) + (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, -\hat{\omega}, \hat{\varphi}). \tag{4.1}$$

O Lema abaixo mostra que podemos determinar Γ explicitamente e também as suas derivadas de primeira ordem.

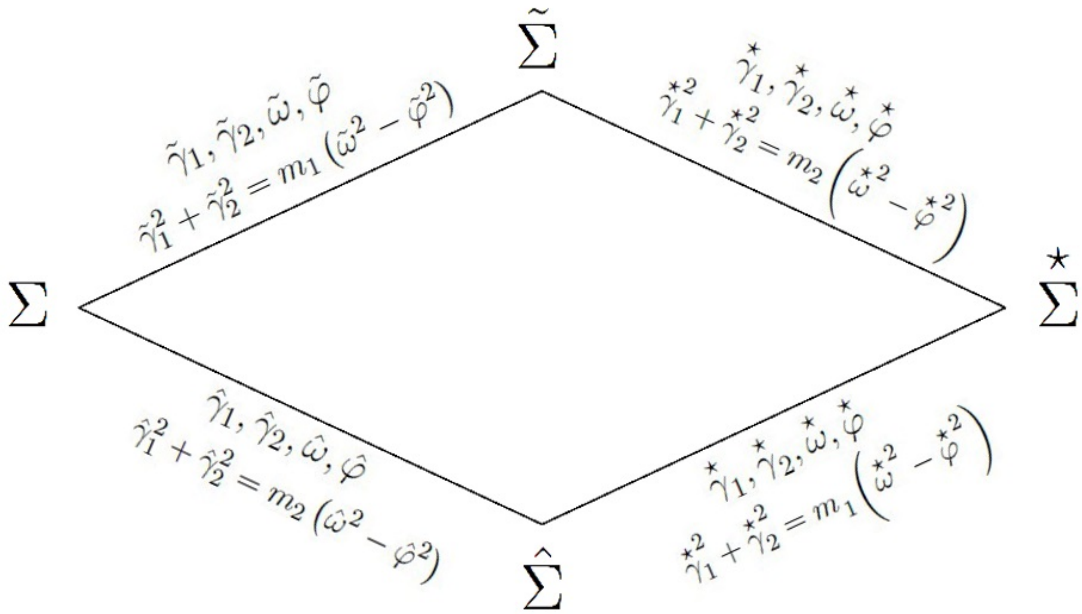


Figura 4.1: Permutabilidade da Transformação de Ribaucour Horizontal.

Lema 4.1.1. *Sejam X, $\tilde{X}$, $\hat{X}$ e $\overset{\star}{X}$ imersões mínimas com representação local canônica em $\mathbb{R}^3$. Suponha que X e $\tilde{X}$ estejam associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal via o Teorema* (2.2.3) *e que $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\omega}, \tilde{\varphi})$ é solução do sistema (2.12) para $m = m_1$, e que X e $\hat{X}$ estejam associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal via o Teorema* (2.2.3) *e que $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\omega}, \hat{\varphi})$ é solução do sistema (2.12) para $m = m_2$. Se ($\tilde{X}$ e $\overset{\star}{X}$) estão associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal via $(\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi})$ satisfazendo*

$$\overset{\star}{\gamma}_1^2 + \overset{\star}{\gamma}_2^2 = m_2\left(\overset{\star}{\omega}^2 - \overset{\star}{\varphi}^2\right). \tag{4.2}$$

tal que

$$(\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi}) = \Gamma(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, -\tilde{\omega}, \tilde{\varphi}) + (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, -\hat{\omega}, \hat{\varphi}),$$

onde Γ *é uma função que não se anula, então*

$$\Gamma = \frac{2}{m_1 - m_2}\left[\frac{m_2\left(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}\right) - \left(\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2\right)}{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2}\right]. \tag{4.3}$$

Além disso,

$$\Gamma_u = -\frac{2\tilde{\tau}_2}{\tilde{A}}(\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)$$

e

$$\Gamma_v = -\frac{2\tilde{\tau}_1}{\tilde{A}}(\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)$$

onde $\tilde{A} = m_1(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2)$.

Demonstração. De fato, por hipótese temos

$$\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\gamma}_2^2 = m_1\left(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2\right)\left(\text{resp. } \hat{\gamma}_1^2 + \hat{\gamma}_2^2 = m_2\left(\hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2\right)\right). \tag{4.4}$$

Utilizando (4.4) e (4.1) temos

$$\begin{aligned}
\overset{\star}{\gamma}_1^2 + \overset{\star}{\gamma}_2^2 &= (\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)^2 + (\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)^2 = \Gamma^2\tilde{\gamma}_1^2 + 2\Gamma\tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1^2 + \Gamma^2\tilde{\gamma}_2^2 + 2\Gamma\tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2 \\
&= \Gamma^2(\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\gamma}_2^2) + 2\Gamma(\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2) + (\hat{\gamma}_1^2 + \hat{\gamma}_2^2) \\
&= \Gamma^2 m_1(\tilde{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2) + 2\Gamma(\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2) + m_2(\hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
m_2(\overset{\star}{\omega}^2 - \overset{\star}{\varphi}^2) &= m_2\left[(-\Gamma\tilde{\omega} - \hat{\omega})^2 - (\Gamma\tilde{\varphi} + \hat{\varphi})^2\right] \\
&= m_2\left[\Gamma^2\tilde{\omega}^2 + 2\Gamma\tilde{\omega}\hat{\omega} + \hat{\omega}^2 - \Gamma^2\tilde{\varphi}^2 - 2\Gamma\tilde{\varphi}\hat{\varphi} - \hat{\varphi}^2\right] \\
&= m_2\left[\Gamma^2(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2) + 2\Gamma(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}) + \hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2\right].
\end{aligned}$$

Portanto (4.2) é equivalente a

$$\Gamma^2 m_1(\tilde{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2) + 2\Gamma(\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2) + m_2(\hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2) = m_2\left[\Gamma^2(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2) + 2\Gamma(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}) + (\hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2)\right].$$

Resolvendo a equação acima para Γ obtemos

$$\Gamma = \frac{2}{m_1 - m_2}\left[\frac{m_2\left(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}\right) - \left(\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2\right)}{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2}\right].$$

Para as derivadas parciais de Γ é conveniente escrever

$$\Gamma = \frac{\rho\zeta}{\tilde{A}} \tag{4.5}$$

onde

$$\rho = \frac{2m_1}{m_1 - m_2}$$

e

$$\zeta = m_2(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}) - (\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2).$$

Assim,

$$\Gamma_u = \frac{\rho}{\tilde{A}^2}(\zeta_u \tilde{A} - \zeta \tilde{A}_u) = \frac{\rho\zeta_u}{\tilde{A}} - \frac{\rho\zeta\tilde{A}_u}{\tilde{A}^2}.$$

Pela definição de Γ a igualdade anterior pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\Gamma_u = \frac{\rho\zeta_u}{\tilde{A}} - \frac{\Gamma\tilde{A}\tilde{A}_u}{\tilde{A}^2} = \frac{\rho\zeta_u}{\tilde{A}} - \frac{\Gamma\tilde{A}_u}{\tilde{A}^2}.$$

Sabemos que $\tilde{A}_u = 2\tilde{\gamma}_2\tilde{\tau}_2$ (Lema 2.2.1) então

$$\Gamma_u = \frac{\rho\zeta_u}{\tilde{A}} - \frac{\Gamma\tilde{A}\tilde{A}_u}{\tilde{A}^2} = \frac{\rho\zeta_u}{\tilde{A}} - \frac{2\Gamma\tilde{\gamma}_2\tilde{\tau}_2}{\tilde{A}^2}.$$

Note que para a igualdade acima ser igual a do enunciado basta mostrar

$$\rho\zeta_u = -2\tilde{\tau}_2\hat{\gamma}_2.$$

Mas observe que

$$\begin{aligned}
\zeta_u &= m_2(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi})_u - (\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2)_u \\
&= m_2(\tilde{\omega}_u\hat{\omega} + \tilde{\omega}\hat{\omega}_u - \tilde{\varphi}_u\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}_u) - (\tilde{\gamma}_{1u}\hat{\gamma}_{1u} + \tilde{\gamma}_{2u}\hat{\gamma}_{2u})
\end{aligned}$$

Sabemos que $\{\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\omega}, \tilde{\varphi}\}$ (resp. $\{\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\omega}, \hat{\varphi})\}$) são funções que satisfazem o Teorema 3.2.3 logo

$$\begin{aligned}
\zeta_u &= m_2\left[|N_v|(\hat{\omega}\tilde{\gamma}_2 + \tilde{\omega}\hat{\gamma}_2) - |N_u|(\tilde{\gamma}_2\hat{\varphi} + \tilde{\varphi}\hat{\gamma}_2)\right] \\
&\quad - \left[\hat{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\theta_1 + \tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\theta_1 + \tilde{\tau}_2\hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1\theta_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\tau}_2 - \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_1\theta_1\right] \\
&= \tilde{\gamma}_2 m_2(|N_v|\hat{\omega} - |N_u|\hat{\varphi}) + \hat{\gamma}_2 m_2(|N_v|\tilde{\omega} - |N_u|\hat{\varphi}) - \tilde{\tau}_2\hat{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_2\hat{\tau}_2.
\end{aligned}$$

Desde que

$$\hat{\tau}_2 = m_2(|N_v|\hat{\omega} - |N_u|\hat{\varphi})$$

e

$$\tilde{\tau}_2 = m_1(|N_v|\tilde{\omega} - |N_u|\hat{\varphi}),$$

segue que

$$\zeta_u = \frac{m_2}{m_1}\hat{\gamma}_2\tilde{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_2\tilde{\gamma}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1}\hat{\gamma}_2\tilde{\tau}_2.$$

Portanto,

$$\rho\zeta_u = \frac{2m_1}{m_1 - m_2}\frac{m_2 - m_1}{m_1}\hat{\gamma}_2\tilde{\tau}_2 = -2\hat{\gamma}_2\tilde{\tau}_2.$$

O cálculo de Γ_v é análogo.

$\square$

Lema 4.1.2. *Sejam X, $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ como no Lema anterior, e sejam e_i, $\tilde{e}_i$ e $\hat{e}_i$, $i = 1, 2$, os campos horizontais associados. Então*

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{e}_{1u}, \tilde{e}_2 \rangle &= \langle e_{1u}, e_2 \rangle - \frac{2\tilde{\tau}_2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}, \\
\langle \tilde{e}_{2v}, \tilde{e}_1 \rangle &= \langle e_{2v}, e_1 \rangle - \frac{2\tilde{\tau}_1\tilde{\gamma}_2}{\tilde{A}}, \\
\langle \hat{e}_{1u}, \hat{e}_2 \rangle &= \langle e_{1u}, e_2 \rangle - \frac{2\hat{\tau}_2\hat{\gamma}_1}{\hat{A}},
\end{aligned}$$

e

$$\langle \hat{e}_{2v}, \hat{e}_1 \rangle = \langle e_{2v}, e_1 \rangle - \frac{2\hat{\tau}_1\tilde{\gamma}_2}{\hat{A}}$$

onde $\tilde{A} = m_1(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2)$ e $\hat{A} = m_2(\hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2)$.

Demonstração. Vamos calcular apenas $\tilde{\theta}_1 := \langle \tilde{e}_{1u}, \tilde{e}_2 \rangle$ pois as outras igualdades são semelhantes. Seja

$$\tilde{e}_1 = e_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\bar{N}$$

tal que $\bar{N} = \tilde{\gamma}_1 e_1 + \tilde{\gamma}_2 e_2$. Então

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_{1u} &= \left(e_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\bar{N}\right)_u = e_{1u} - \frac{2(\tilde{\gamma}_{1u}\tilde{A} - \tilde{\gamma}_1\tilde{A}_u)\bar{N}}{\tilde{A}^2} - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\bar{N}_u \\
&= \theta_1 e_2 - \frac{(\gamma_2\theta_1\tilde{A} - 2\tilde{\gamma}_1\tilde{\tau}_2\tilde{\gamma}_2)(\tilde{e}_2 - e_2)}{\tilde{A}\tilde{\gamma}_2} - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\tilde{\tau}_2 e_2
\end{aligned}$$

onde usamos que $\tilde{\gamma}_{1u} = \gamma_2\theta_1$, $\tilde{A}_u = 2\tilde{\tau}_2\tilde{\gamma}_2$, $\bar{N} = \dfrac{(e_1 - \tilde{e}_1)\tilde{A}}{2\tilde{\gamma}_1}$, $\bar{N}_u = \tilde{\tau}_2 e_2$ e $e_{1u} = \theta_1 e_2$. Note que os termos com e_2 se anulam. Assim,

$$\tilde{e}_{1u} = \left(\theta_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1\tilde{\tau}_2}{\tilde{A}}\right)\tilde{e}_2.$$

Portanto

$$\tilde{\theta}_1 = \langle \tilde{e}_{1u}, \tilde{e}_2 \rangle = \theta_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1 \tilde{\tau}_2}{\tilde{A}}$$

□

Teorema 4.1.1. *Considere os pares (X e $\tilde{X}$) e (X e $\hat{X}$) de imersões mínimas em $\mathbb{R}^3$ associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal via o Teorema* 2.2.3*, respectivamente, para constantes distintas m_1 e m_2. Sejam ($\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\varphi}$) e ($\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$) as correspondentes soluções do sistema (2.12). Então as funções $\{\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi}\}$ dadas por* (4.1)*, onde Γ é dada por (4.3) satisfazem (4.2) e constituem uma solução do sistema:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overset{\star}{\varphi}_u &=& |\tilde{N}_u| \overset{\star}{\gamma}_2 \\ \overset{\star}{\varphi}_v &=& |\tilde{N}_v| \overset{\star}{\gamma}_1 \\ \overset{\star}{\gamma}_{1u} &=& \overset{\star}{\gamma}_2 \langle \tilde{e}_{1u}, \tilde{e}_2 \rangle \\ \overset{\star}{\gamma}_{2v} &=& \overset{\star}{\gamma}_1 \langle \tilde{e}_{2v}, \tilde{e}_1 \rangle \\ \overset{\star}{\omega}_u &=& \overset{\star}{\gamma}_2 |\tilde{N}_v| \\ \overset{\star}{\omega}_v &=& \overset{\star}{\gamma}_1 |\tilde{N}_u| \end{array} \right.$$

Demonstração. Vamos provar apenas os itens

i) $\overset{\star}{\varphi}_u = |\tilde{N}_u| \overset{\star}{\gamma}_2$

ii) $\overset{\star}{\gamma}_{1u} = \overset{\star}{\gamma}_2 \langle \tilde{e}_{1u}, \tilde{e}_2 \rangle$

iii) $\overset{\star}{\omega}_v = \overset{\star}{\gamma}_1 |\tilde{N}_u|$

pois as outras igualdades seguem o mesmo raciocínio. Nos cálculos que seguem utilizaremos a expressão de Γ_u obtida no Lema 4.2.1, $\tilde{\theta}_1$ pelo Lema anterior e o fato de que ($\hat{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\varphi}$) e ($\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$) são soluções soluções do sistema (3.14).

i) Derivando $\overset{\star}{\varphi} = \Gamma \tilde{\varphi} + \hat{\varphi}$ com relação a u, temos

$$\overset{\star}{\varphi}_u = \Gamma_u \tilde{\varphi} + \Gamma \tilde{\varphi}_u + \hat{\varphi}_u = \Gamma_u \tilde{\varphi} + \Gamma |N_u| \tilde{\gamma}_2 + |N_u| \hat{\gamma}_2 = \Gamma_u \tilde{\varphi} + |N_u| (\Gamma \tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \overset{\star}{\varphi}_u - |\tilde{N}_u| \overset{\star}{\gamma}_2 &=& \Gamma_u \tilde{\varphi} + |N_u| (\Gamma \tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2) - |\tilde{N}_u| (\Gamma \tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2) \\ &=& \Gamma_u \tilde{\varphi} - (\Gamma \tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)(|\tilde{N}_u| - |N_u|) \\ &=& \Gamma_u \tilde{\varphi} + \dfrac{2\tilde{\tau}_2 (\Gamma \tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)}{\tilde{A}} \tilde{\varphi} \\ &=& 0. \end{array}$$

ii) Derivando $\overset{\star}{\gamma}_1 = \Gamma \tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1$ com relação a u, temos

$$\overset{\star}{\gamma}_{1u} = \Gamma_u \tilde{\gamma}_1 + \Gamma \tilde{\gamma}_{1u} + \hat{\gamma}_{1u} = \Gamma_u \tilde{\gamma}_1 + \Gamma \tilde{\gamma}_2 \theta_1 + \hat{\gamma}_2 \theta_1 = \Gamma_u \tilde{\gamma}_1 + (\Gamma \tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2) \theta_1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\overset{\star}{\gamma}_{1u} - \overset{\star}{\gamma}_2\langle \tilde{e}_{1u}, \tilde{e}_2\rangle &= \Gamma_u\tilde{\gamma}_1 + (\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)\theta_1 - (\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)\tilde{\theta}_1 \\
&= \Gamma_u\tilde{\gamma}_1 + (\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)(\theta_1 - \tilde{\theta}_1) \\
&= \Gamma_u\tilde{\gamma}_1 + \frac{2\tilde{\tau}_2(\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)}{\tilde{A}}\tilde{\gamma}_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

iii) Derivando $\overset{\star}{\omega} = -\Gamma\tilde{\omega} - \hat{\omega}$ com relação a v, temos

$$\overset{\star}{\omega}_v = \Gamma_v\tilde{\omega} - \Gamma\tilde{\omega}_v - \hat{\omega}_v = \Gamma_v\tilde{\omega} - \Gamma\tilde{\gamma}_1|N_u| - \hat{\gamma}_1|N_u| = \Gamma_v\tilde{\omega} - (\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)|N_u|.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\overset{\star}{\omega}_v - \overset{\star}{\gamma}_1|\tilde{N}_u| &= -\Gamma_v\tilde{\omega} - (\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)|N_u| - (\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)|\tilde{N}_u| \\
&= -\Gamma_v\tilde{\omega} - (\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)(|\tilde{N}_u| + |N_u|) \\
&= -\Gamma_v\tilde{\omega} - (\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)\left(|N_u| - \frac{2\tilde{\tau}_2\tilde{\varphi}}{\tilde{A}} + |N_u|\right) \\
&= -\Gamma_v\tilde{\omega} - 2(\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)\left(|N_u| - \frac{\tilde{\tau}_2\tilde{\varphi}}{\tilde{A}}\right) \\
&= -\Gamma_v\tilde{\omega} - \frac{2(\tilde{A}|N_u| - \tilde{\tau}_2\tilde{\varphi})}{\tilde{A}}(\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1).
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\tilde{A}|N_u| - \tilde{\tau}_2\tilde{\varphi} &= m_1(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2)|N_u| - m_1(\tilde{\omega}|N_v| - \tilde{\varphi}|N_u|)\tilde{\varphi} \\
&= m_1(\tilde{\omega}^2|N_u| - \tilde{\omega}\tilde{\varphi}|N_v|) \\
&= \tilde{\omega}m_1(\tilde{\omega}|N_u| - \tilde{\varphi}|N_v|) \\
&= \tilde{\omega}\tilde{\tau}_1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\overset{\star}{\omega}_v - \overset{\star}{\gamma}_1|\tilde{N}_u| = -\Gamma_v\tilde{\omega} - \frac{2\tilde{\tau}_1}{\tilde{A}}(\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)\tilde{\omega} = 0.$$

□

As funções $\{\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi}\}$ definidas no Teorema anterior nos permitem definir uma imersão mínima $\overset{\star}{X}$ a partir do Teorema 2.2.3. Evidentemente, permutando os papéis de $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ na construção acima, poderíamos obter uma outra imersão mínima, digamos, $\overset{\star\star}{X}$. O teorema abaixo afirma no entanto que estas duas imersões mínimas coincidem.

Teorema 4.1.2. *Sejam X, $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ como no Teorema 4.1.1, e sejam $\overset{\star}{X}$ e $\overset{\star\star}{X}$ imersões mínimas obtidas a partir a partir de transformadas de Ribaucour horizontais, respectivamente, de $\tilde{X}$ e $\hat{X}$,* *via as funções* $\{\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi}\}$ *e* $\{\overset{\star\star}{\gamma}_1, \overset{\star\star}{\gamma}_2, \overset{\star\star}{\omega}, \overset{\star\star}{\varphi}\}$*, para constantes* m_2 *e* m_1*, onde*

$$(\overset{\star\star}{\gamma}_1, \overset{\star\star}{\gamma}_2, \overset{\star\star}{\omega}, \overset{\star\star}{\varphi}) = \Lambda(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, -\hat{\omega}, \hat{\varphi}) + (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, -\tilde{\omega}, \tilde{\varphi}),$$

e

$$\Lambda = \frac{2}{m_2 - m_1}\left[\frac{m_1(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}) - (\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2)}{\hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2}\right].$$

Então $\overset{\star}{X} = \overset{\star\star}{X}$.

Demonstração. Para mostrar que $\overset{\star}{X} = \overset{\star\star}{X}$, iremos verificar que a expressão de $\overset{\star}{X}$ é simétrica com relação à permutação $m_1 \leftrightarrow m_2$, $\tilde{\varphi} \leftrightarrow \hat{\varphi}$, $\tilde{\omega} \leftrightarrow \hat{\omega}$ e $\tilde{\gamma}_i \leftrightarrow \hat{\gamma}_i$, já que esta permutação forneceria a expressão de $\overset{\star\star}{X}$.

Como $\tilde{X}$ está associada a $\overset{\star}{X}$ por uma transformação de Ribaucour horizontal, temos que

$$\overset{\star}{N} = \tilde{N} - \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}(\overset{\star}{\gamma}_1\tilde{e}_1 - \overset{\star}{\gamma}_2\tilde{e}_2),$$

onde $\overset{\star}{A} = m_2(\overset{\star}{\omega}{}^2 - \overset{\star}{\varphi}{}^2)$. Mostraremos que a expressão de $\overset{\star}{N}$ é simetrica com relação à permutação mencionada acima. Por conveniência, denotemos

$$\Gamma = \frac{2m_1}{m_1 - m_2}\left(\frac{m_2 x - y}{\tilde{A}}\right),$$

onde $x = \tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}$ e $y = \tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\overset{\star}{N} &= \tilde{N} - \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}(\overset{\star}{\gamma}_1\tilde{e}_1 - \overset{\star}{\gamma}_2\tilde{e}_2) = N - \frac{2\tilde{\varphi}}{\tilde{A}}(\tilde{\gamma}_1 e_1 + \tilde{\gamma}_2 e_2) - \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{m_2(\overset{\star}{\omega}{}^2 - \overset{\star}{\varphi}{}^2)}(\overset{\star}{\gamma}_1\tilde{e}_1 - \overset{\star}{\gamma}_2\tilde{e}_2) \\
&= N - \frac{2\tilde{\varphi}}{\tilde{A}}(\tilde{\gamma}_1 e_1 + \tilde{\gamma}_2 e_2) \\
&\quad - \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{m_2(\overset{\star}{\omega}{}^2 - \overset{\star}{\varphi}{}^2)}\left[\overset{\star}{\gamma}_1\left(e_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1(\tilde{\gamma}_1 e_1 + \tilde{\gamma}_2 e_2)}{\tilde{A}}\right) - \overset{\star}{\gamma}_2\left(e_2 - \frac{2\tilde{\gamma}_2(\tilde{\gamma}_1 e_1 + \tilde{\gamma}_2 e_2)}{\tilde{A}}\right)\right] \\
&= N - \left[\frac{2\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{m_2(\overset{\star}{\omega}{}^2 - \overset{\star}{\varphi}{}^2)}\left(\overset{\star}{\gamma}_1\left(1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1^2}{\tilde{A}}\right) - \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1\overset{\star}{\gamma}_2}{\tilde{A}}\right)\right] e_1 \\
&\quad - \left[\frac{2\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_2}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{m_2(\overset{\star}{\omega}{}^2 - \overset{\star}{\varphi}{}^2)}\left(\overset{\star}{\gamma}_2\left(1 - \frac{2\tilde{\gamma}_2^2}{\tilde{A}}\right) - \frac{2\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\overset{\star}{\gamma}_1}{\tilde{A}}\right)\right] e_2
\end{aligned}$$

Vamos verificar a simetria apenas para o coeficiente de e_1, que denotaremos por $C1$, já que a análise do coeficiente de e_2 é bastante semelhante. Seja

$$C1 = \frac{2\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}Q,$$

onde
$$Q = \left[\overset{\star}{\gamma}_1\left(1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1^2}{\tilde{A}}\right) - \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1\overset{\star}{\gamma}_2}{\tilde{A}}\right].$$
Faremos essa verificação por etapas. Primeiramente, observamos que Q pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
Q &= \overset{\star}{\gamma}_1\left(1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1^2}{\tilde{A}}\right) - \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1\overset{\star}{\gamma}_2}{\tilde{A}}\\
&= (\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1) - \frac{2\tilde{\gamma}_1^2(\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)}{\tilde{A}} - \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1(\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)}{\tilde{A}}\\
&= (\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1) - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\left[\tilde{\gamma}_1(\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1) + \tilde{\gamma}_2(\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)\right]\\
&= \Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\left[\Gamma(\hat{\gamma}_1^2 + \hat{\gamma}_2^2) + y\right].
\end{aligned}$$

Mas $\tilde{A} = \tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\gamma}_2^2$, então
$$Q = \hat{\gamma}_1 - \Gamma\tilde{\gamma}_1 - \frac{2y\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}.$$
Substituindo Γ por sua expressão em Q, temos que

$$\begin{aligned}
Q &= \hat{\gamma}_1 - \frac{2m_1\tilde{\gamma}_1}{m_1 - m_2}\left(\frac{m_2x - y}{\tilde{A}}\right) - \frac{2y\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\\
&= \hat{\gamma}_1 - \frac{2m_1m_2x\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}(m_1 - m_2)} + \frac{2m_1y\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}(m_1 - m_2)} - \frac{2y\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\\
&= \hat{\gamma}_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\left(\frac{m_1m_2x}{m_1 - m_2} + \frac{m_1y}{m_1 - m_2} + y\right)\\
&= \hat{\gamma}_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\left(\frac{m_1m_2x - m_1y + y(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2}\right)\\
&= \hat{\gamma}_1 - \frac{2m_2\tilde{\gamma}_1(m_1x - y)}{\tilde{A}(m_1 - m_2)}.
\end{aligned}$$

Agora analisaremos o denominador $\overset{\star}{A}$:

$$\begin{aligned}
\overset{\star}{A} = m_2(\overset{\star}{\omega}^2 - \overset{\star}{\varphi}^2) &= m_2\left[(-\Gamma\tilde{\omega} - \hat{\omega})^2 - (\Gamma\tilde{\varphi} + \hat{\varphi})^2\right]\\
&= m_2(\Gamma^2\tilde{\omega}^2 + 2\Gamma\tilde{\omega}\hat{\omega} + \hat{\omega}^2 - \Gamma^2\tilde{\varphi}^2 - 2\Gamma\tilde{\varphi}\hat{\varphi} - \hat{\varphi}^2)\\
&= m_2\left[\Gamma^2(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2) + 2\Gamma x + \hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2\right]\\
&= m_2\left(\frac{\Gamma^2\tilde{A}}{m_1} + 2\Gamma x + \frac{\hat{A}}{m_2}\right) = m_2\Gamma\left(\frac{\Gamma\tilde{A}}{m_1} + 2x\right) + \hat{A}\\
&= 2m_2\Gamma\left(\frac{y - m_1x}{m_2 - m_1}\right) + \hat{A}.
\end{aligned}$$

Voltamos agora ao coeficiente de e_1:

$$
\begin{aligned}
C1 &= \frac{2\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}Q = \frac{2\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}} + \frac{2(\Gamma\tilde{\varphi}+\hat{\varphi})}{\overset{\star}{A}}\left[\hat{\gamma}_1 - \frac{2m_2\tilde{\gamma}_1(m_1x-y)}{\tilde{A}(m_1-m_2)}\right] \\
&= \frac{2\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1\overset{\star}{A} + 2\tilde{A}(\Gamma\tilde{\varphi}+\hat{\varphi})\left(\tilde{\gamma}_1 - \dfrac{2\tilde{\gamma}_1 m_2(m_1x-y)}{\tilde{A}(m_1-m_2)}\right)}{\tilde{A}\overset{\star}{A}} \\
&= \frac{2\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1 D + 2(\Gamma\tilde{\varphi}+\hat{\varphi})\left(\tilde{A}\tilde{\gamma}_1 - \dfrac{2\tilde{\gamma}_1 m_2(m_1x-y)}{(m_1-m_2)}\right)}{\tilde{A}\overset{\star}{A}} \\
&= \frac{2\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1\left(\dfrac{2m_2\Gamma(y-m_1x)}{m_2-m_1} + \hat{A}\right) + 2(\Gamma\tilde{\varphi}+\hat{\varphi})\left(\tilde{A}\tilde{\gamma}_1 - \dfrac{2\tilde{\gamma}_1 m_2(m_1x-y)}{(m_1-m_2)}\right)}{\tilde{A}\overset{\star}{A}} \\
&= \frac{2\left[\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1\hat{A} + \Gamma\tilde{\varphi}\tilde{A}\tilde{\gamma}_1 + \hat{\varphi}\tilde{A}\tilde{\gamma}_1 - \dfrac{2\hat{\varphi}\tilde{\gamma}_1 m_2(m_1x-y)}{m_1-m_2}\right]}{\tilde{A}\left(\dfrac{2\Gamma m_1(y-m_1x)}{m_2-m_1} + \hat{A}\right)}
\end{aligned}
$$

Substituindo Γ por sua expressão na igualdade anterior, temos:

$$
C1 = \frac{2\left[\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1\hat{A} + \hat{\varphi}\tilde{A}\hat{\gamma}_1 + \dfrac{2\tilde{\varphi}\hat{\gamma}_1 m_1(m_2x-y)}{m_1-m_2} - \dfrac{2\hat{\varphi}\tilde{\gamma}_1 m_2(m_1x-y)}{m_1-m_2}\right]}{-\dfrac{4m_1m_2(m_2x-y)(m_1x-y)}{(m_1-m_2)^2} + \hat{A}\tilde{A}}.
$$

Observe que tanto o numerador quanto o denominador são simétricos com relação à permutação.

Efetuando o cálculo análogo para o coeficiente de e_2, podemos verificar a mesma simetria, e, portanto, $\overset{\star}{X} = \overset{\star\star}{X}$.

□

4.2 Permutabilidade Envolvendo Superfícies Mínimas em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Similar ao caso de Superfícies Mínimas em $\mathbb{R}^3$, vamos considerar nessa seção três imersões mínimas, X, $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ em $\mathbb{M}^2(\varepsilon)\times\mathbb{R}$ tais que $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ estejam associadas a X por uma transformação de Ribaucour horizontal via Teorema (3.2.3). Sejam $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\omega}, \tilde{\varphi})$ e $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\omega}, \hat{\varphi})$ soluções do sistema (3.14) associadas a $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ com constantes m_1 e m_2 respectivamente.

O nosso objetivo é definir uma imersão $\overset{\star}{X}$ em $\mathbb{M}^2(\varepsilon)\times\mathbb{R}$ que seja, simultaneamente, uma transformada de Ribaucour horizontal de $\tilde{X}$, para a constante m_1, e de $\hat{X}$, para a constante m_2. Faremos isso baseado pela demonstração do Teorema da permutabilidade para transformações de Ribaucour horizontal envolvendo superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$.

Vamos supor que $\overset{\star}{X}$ seja uma imersão que é a transformada de Ribaucour horizontal de $\tilde{X}$ para $m = m_2$. Então, denotando a solução do sistema (3.14) associada a esta transformação por $(\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi})$, iremos supor que existe uma função incógnita Γ satisfazendo (4.1). Nestas condições é possível determinar Γ explicitamente e suas derivadas de acordo com o seguinte Lema:

Lema 4.2.1. *Sejam X, $\tilde{X}$, $\hat{X}$ e $\overset{\star}{X}$ imersões mínimas com representação local canônica em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Suponha que X e $\tilde{X}$ estejam associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal via o Teorema* 3.14 *e que $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\omega}, \tilde{\varphi})$ é solução do sistema (3.14) para $m = m_1$, e que X e $\hat{X}$ estejam associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal via o Teorema* (3.2.3) *e que $(\hat{\gamma}_1,\ \hat{\gamma}_2,\ \hat{\omega},\ \hat{\varphi})$ é solução do sistema (3.14) para $m = m_2$. Se $(\tilde{X}$ e $\overset{\star}{X})$ estão associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal via* (3.11) *e $(\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi})$ satifazendo*

$$\overset{\star}{\gamma}_1^2 + \overset{\star}{\gamma}_2^2 + \varepsilon\overset{\star}{\varphi}^2 = m_2\left(\overset{\star}{\omega}^2 - \overset{\star}{\varphi}^2\right) \tag{4.6}$$

tal que

$$(\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi}) = \Gamma(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, -\tilde{\omega}, \tilde{\varphi}) + (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, -\hat{\omega}, \hat{\varphi}),$$

onde Γ é uma função que não se anula, então

$$\Gamma = \frac{2}{m_1 - m_2}\left[\frac{m_2\left(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}\right) - \left(\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}\hat{\varphi}\right)}{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2}\right]. \tag{4.7}$$

Além disso,

$$\Gamma_u = -\frac{2\tilde{\tau}_2}{\tilde{A}}(\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)$$

e

$$\Gamma_v = -\frac{2\tilde{\tau}_1}{\tilde{A}}(\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)$$

onde $\tilde{A} = m_1(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2)$.

Demonstração. De fato, por hipótese temos

$$\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\gamma}_2^2 + \varepsilon\tilde{\varphi}^2 = m_1\left(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2\right)\left(\text{resp. } \hat{\gamma}_1^2 + \hat{\gamma}_2^2 + \varepsilon\hat{\varphi}^2 = m_2\left(\hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2\right)\right).$$

Segue daí e da expressão (4.1) que,

$$\begin{aligned}
\overset{\star}{\gamma}_1^2 + \overset{\star}{\gamma}_2^2 + \varepsilon\overset{\star}{\varphi}^2 &= (\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)^2 + (\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)^2 + \varepsilon(\Gamma\tilde{\varphi} + \hat{\varphi})^2 \\
&= \Gamma^2\tilde{\gamma}_1^2 + 2\Gamma\tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1^2 + \Gamma^2\tilde{\gamma}_2^2 + 2\Gamma\tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2 + \varepsilon\Gamma^2\tilde{\varphi}^2 + 2\varepsilon\Gamma\tilde{\varphi}\hat{\varphi} + \varepsilon\hat{\varphi}^2 \\
&= \Gamma^2(\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\gamma}_2^2 + \varepsilon\tilde{\varphi}^2) + 2\Gamma(\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}\hat{\varphi}) + (\hat{\gamma}_1^2 + \hat{\gamma}_2^2 + \varepsilon\hat{\varphi}^2) \\
&= \Gamma^2 m_1(\tilde{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2) + 2\Gamma(\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}\hat{\varphi}) + m_2(\hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} m_2(\overset{\star}{\omega}^2 - \overset{\star}{\varphi}^2) &= m_2\left[(-\Gamma\tilde{\omega} - \hat{\omega})^2 - (\Gamma\tilde{\varphi} + \hat{\varphi})^2\right] \\ &= m_2\left[\Gamma^2\tilde{\omega}^2 + 2\Gamma\tilde{\omega}\hat{\omega} + \hat{\omega}^2 - \Gamma^2\tilde{\varphi}^2 - 2\Gamma\tilde{\varphi}\hat{\varphi} - \hat{\varphi}^2\right] \\ &= m_2\left[\Gamma^2(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2) + 2\Gamma(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}) + \hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2\right]. \end{aligned}$$

Comparando os dois lados da igualdade, (4.6) pode ser reescrito como:

$$(m_1 - m_2)\Gamma^2(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\varphi}^2) = 2\Gamma\left[m_2(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}) - \tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2 - \varepsilon\tilde{\varphi}\hat{\varphi}\right].$$

Resolvendo a equação anterior para Γ, obtemos o procurado.

Agora vamos calcular as derivadas de Γ, mostraremos apenas Γ_u pois a demonstração de Γ_v é similar. Por conveniência escrevemos

$$\Gamma = \frac{\rho\zeta}{\tilde{A}}$$

onde

$$\rho = \frac{2m_1}{m_1 - m_2}$$

e

$$\zeta = m_2 x - y$$

tal que $x = \tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}$ e $y = \tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}\hat{\varphi}$. Assim,

$$\Gamma_u = \frac{\rho}{\tilde{A}^2}(\zeta_u\tilde{A} - \zeta\tilde{A}_u) = \frac{\rho\zeta_u}{\tilde{A}} - \frac{\rho\zeta\tilde{A}_u}{\tilde{A}^2}.$$

Pela definição de Γ, a igualdade anterior pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\Gamma_u = \frac{\rho\zeta_u}{\tilde{A}} - \frac{\Gamma\tilde{A}\tilde{A}_u}{\tilde{A}^2} = \frac{\rho\zeta_u}{\tilde{A}} - \frac{\Gamma\tilde{A}_u}{\tilde{A}^2}.$$

Sabemos que $\tilde{A}_u = 2\tilde{\gamma}_2\tilde{\tau}_2$ (Lema (3.2.1)) então

$$\Gamma_u = \frac{\rho\zeta_u}{\tilde{A}} - \frac{\Gamma\tilde{A}\tilde{A}_u}{\tilde{A}^2} = \frac{\rho\zeta_u}{\tilde{A}} - \frac{2\Gamma\tilde{\gamma}_2\tilde{\tau}_2}{\tilde{A}^2}.$$

Note que para a igualdade acima ser igual a do enunciado basta mostrar

$$\rho\zeta_u = -2\tilde{\tau}_2\hat{\gamma}_2.$$

Mas observe que

$$\begin{aligned}
\zeta_u &= m_2 x_u - y_u = m_2(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi})_u - (\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}\hat{\varphi})_u \\
&= m_2(\tilde{\omega}_u\hat{\omega} + \tilde{\omega}\hat{\omega}_u - \tilde{\varphi}_u\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}_u) - (\tilde{\gamma}_{1u}\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_{1u} + \tilde{\gamma}_{2u}\hat{\gamma}_2 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_{2u} + \varepsilon\tilde{\varphi}_u\hat{\varphi} + \varepsilon\tilde{\varphi}\hat{\varphi}_u)
\end{aligned}$$

Sabemos que $\{\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\omega}, \tilde{\varphi}\}$ (resp. $\{\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\omega}, \hat{\varphi})\}$) são funções que satisfazem o sistema (3.14), logo

$$\begin{aligned}
\zeta_u &= m_2\left[|N_v|(\hat{\omega}\tilde{\gamma}_2 + \tilde{\omega}\hat{\gamma}_2) - |N_u|(\tilde{\gamma}_2\hat{\varphi} + \tilde{\varphi}\hat{\gamma}_2)\right] \\
&\quad - [\hat{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\theta_1 + \tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\theta_1 + \tilde{\tau}_2\hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1\theta_1 - \varepsilon\hat{\varphi}|N_u| + \tilde{\gamma}_2\hat{\tau}_2 - \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_1\theta_1 - \varepsilon\hat{\varphi}|N_u| \\
&\quad + \varepsilon\hat{\varphi}|N_u|\tilde{\gamma}_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}|N_u|\hat{\gamma}_2] \\
&= \tilde{\gamma}_2 m_2(|N_v|\hat{\omega} - |N_u|\hat{\varphi}) + \hat{\gamma}_2 m_2(|N_v|\tilde{\omega} - |N_u|\hat{\varphi}) - \tilde{\tau}_2\hat{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_2\hat{\tau}_2.
\end{aligned}$$

Desde que

$$\hat{\tau}_2 = m_2(|N_v|\hat{\omega} - |N_u|\hat{\varphi})$$

e

$$\tilde{\tau}_2 = m_1(|N_v|\tilde{\omega} - |N_u|\hat{\varphi}),$$

segue que

$$\zeta_u = \frac{m_2}{m_1}\hat{\gamma}_2\tilde{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_2\tilde{\gamma}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1}\hat{\gamma}_2\tilde{\tau}_2.$$

Portanto,

$$\rho\zeta_u = \frac{2m_1}{m_1 - m_2}\frac{m_2 - m_1}{m_1}\hat{\gamma}_2\tilde{\tau}_2 = -2\hat{\gamma}_2\tilde{\tau}_2.$$

□

Teorema 4.2.1. *Considere os pares (X e $\tilde{X}$) e (X e $\hat{X}$) de imersões mínimas em* $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ *associadas por uma transformação de Ribaucour horizontal via o Teorema* 3.2.3*, respectivamente, para constantes distintas* m_1 *e* m_2*. Sejam* $(\tilde{\gamma}_1,\ \tilde{\gamma}_2,\ \tilde{\omega},\ \tilde{\varphi})$ *e* $(\hat{\gamma}_1,\ \hat{\gamma}_2,\ \hat{\omega},\ \hat{\varphi})$ *as correspondentes soluções do sistema (3.13). Então as funções* $\{\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi}\}$ *dadas por* (4.1)*, onde* Γ *é dada por (4.3) satisfazem (4.2) e constituem uma solução do sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\overset{\star}{\varphi}_u &=& |\tilde{N}_u|\overset{\star}{\gamma}_2 \\
\overset{\star}{\varphi}_v &=& |\tilde{N}_v|\overset{\star}{\gamma}_1 \\
\overset{\star}{\gamma}_{1u} &=& \overset{\star}{\gamma}_2\langle\tilde{e}_{1u}, \tilde{e}_2\rangle \\
\overset{\star}{\gamma}_{2v} &=& \overset{\star}{\gamma}_1\langle\tilde{e}_{2v}, \tilde{e}_1\rangle \\
\overset{\star}{\omega}_u &=& \overset{\star}{\gamma}_2|\tilde{N}_v| \\
\overset{\star}{\omega}_v &=& \overset{\star}{\gamma}_1|\tilde{N}_u|
\end{array}\right.$$

Demonstração. Semelhante ao caso em $\mathbb{R}^3$. □

Vamos verificar agora que o diagrama é comutativo, isto é, trocando $m_1 \leftrightarrow m_2$, $\tilde{\varphi} \leftrightarrow \hat{\varphi}$, $\tilde{\omega} \leftrightarrow \hat{\omega}$ e $\tilde{\gamma}_i \leftrightarrow \hat{\gamma}_i$ a superfície $\overset{\star}{\Sigma}$ é a mesma.

Teorema 4.2.2. *Sejam X, $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ como no Teorema 4.2.1, e sejam $\overset{\star}{X}$ e $\overset{\star\star}{X}$ imersões mínimas obtidas a partir a partir de transformadas de Ribaucour horizontais, respectivamente, de $\tilde{X}$ e $\hat{X}$, via as funções $\{\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi}\}$ e $\{\overset{\star\star}{\gamma}_1, \overset{\star\star}{\gamma}_2, \overset{\star\star}{\omega}, \overset{\star\star}{\varphi}\}$, para constantes m_2 e m_1, onde*

$$(\overset{\star\star}{\gamma}_1, \overset{\star\star}{\gamma}_2, \overset{\star\star}{\omega}, \overset{\star\star}{\varphi}) = \Lambda(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, -\hat{\omega}, \hat{\varphi}) + (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, -\tilde{\omega}, \tilde{\varphi}),$$

e

$$\Lambda = \frac{2}{m_2 - m_1}\left[\frac{m_1\left(\tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}\right) - \left(\tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}\hat{\varphi}\right)}{\hat{\omega}^2 - \hat{\varphi}^2}\right].$$

Então $\overset{\star}{X} = \overset{\star\star}{X}$.

Demonstração. Vamos verificar que a expressão de $\overset{\star}{X}$ é simétrica com relação à permutação. Como $\overset{\star}{X}$ está associada a $\tilde{X}$ por uma transformação de Ribaucour horizontal, temos que

$$\overset{\star}{N} = \tilde{N} - \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}(\overset{\star}{\gamma}_1\tilde{e}_1 + \overset{\star}{\gamma}_2\tilde{e}_2 + \varepsilon\overset{\star}{\varphi}\tilde{N}).$$

Mostraremos que a expressão de $\overset{\star}{N}$ é simétrica em relação $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\omega}, \tilde{\varphi}, m_1)$ e $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\omega}, \hat{\varphi}, m_2)$. Por conveniência denotemos

$$\Gamma = \frac{2m_1}{m_1 - m_2}\left(\frac{m_2 x - y}{\tilde{A}}\right),$$

onde $x = \tilde{\omega}\hat{\omega} - \tilde{\varphi}\hat{\varphi}$ e $y = \tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}\hat{\varphi}$. Assim

$$\begin{aligned}
\overset{\star}{N} &= \tilde{N} - \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}(\overset{\star}{\gamma}_1\tilde{e}_1 + \overset{\star}{\gamma}_2\tilde{e}_2 + \varepsilon\overset{\star}{\varphi}\tilde{N}) \\
&= N - \frac{2\tilde{\varphi}}{\tilde{A}}(\tilde{\gamma}_1 e_1 + \tilde{\gamma}_2 e_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}N) \\
&\quad -\frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}\left[\overset{\star}{\gamma}_1\left(e_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1(\tilde{\gamma}_1 e_1 + \tilde{\gamma}_2 e_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}N)}{\tilde{A}}\right) + \overset{\star}{\gamma}_2\left(e_2 - \frac{2\tilde{\gamma}_2(\tilde{\gamma}_1 e_1 + \tilde{\gamma}_2 e_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}N)}{\tilde{A}}\right)\right. \\
&\quad \left. +\varepsilon\overset{\star}{\varphi}\left(N - \frac{2\tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}_1 e_1 + \tilde{\gamma}_2 e_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}N)}{\tilde{A}}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left[\frac{2\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}\left(\overset{\star}{\gamma}_1\left(1-\frac{2\tilde{\gamma}_1^2}{\tilde{A}}\right) - \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1\overset{\star}{\gamma}_2}{\tilde{A}} - \frac{2\varepsilon\overset{\star}{\varphi}\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\right)\right] e_1 \\
& - \left[\frac{2\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_2}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}\left(\overset{\star}{\gamma}_2\left(1-\frac{2\tilde{\gamma}_2^2}{\tilde{A}}\right) - \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1\overset{\star}{\gamma}_1}{\tilde{A}} - \frac{2\varepsilon\overset{\star}{\varphi}\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_2}{\tilde{A}}\right)\right] e_2 \\
& + \left[1 - \frac{2\tilde{\varphi}^2\varepsilon}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}\left(-\varepsilon\overset{\star}{\varphi}\left(1-\frac{2\tilde{\varphi}^2\varepsilon}{\tilde{A}}\right) + \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\varphi}\varepsilon\overset{\star}{\gamma}_2}{\tilde{A}} + \frac{2\varepsilon\overset{\star}{\gamma}_1\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\right)\right] N.
\end{aligned}
$$

Vamos verificar primeiro a simetria para o coeficiente de e_1, que denotaremos por $C1$. Seja

$$C1 = \frac{2\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}Q,$$

onde

$$\overset{\star}{A} = m_2(\overset{\star}{\omega}{}^2 - \overset{\star}{\varphi}{}^2)$$

e

$$Q = \overset{\star}{\gamma}_1\left(1-\frac{2\tilde{\gamma}_1^2}{\tilde{A}}\right) - \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1\overset{\star}{\gamma}_2}{\tilde{A}} - \frac{2\varepsilon\overset{\star}{\varphi}\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}.$$

Faremos essa verificação por etapas. Note que Q pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
Q \quad &= \quad \overset{\star}{\gamma}_1\left(1-\frac{2\tilde{\gamma}_1^2}{\tilde{A}}\right) - \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1\overset{\star}{\gamma}_2}{\tilde{A}} - \frac{2\varepsilon\overset{\star}{\varphi}\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}} \\
&= \quad (\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1) - \frac{2\tilde{\gamma}_1^2(\Gamma\tilde{\gamma}_1+\hat{\gamma}_1)}{\tilde{A}} - \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1(\Gamma\tilde{\gamma}_2+\hat{\gamma}_2)}{\tilde{A}} - \frac{2\varepsilon\tilde{\gamma}_1\tilde{\varphi}(\Gamma\tilde{\varphi}+\hat{\varphi})}{\tilde{A}} \\
&= \quad (\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1) - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\left[\tilde{\gamma}_1(\Gamma\tilde{\gamma}_1+\hat{\gamma}_1) + \tilde{\gamma}_2(\Gamma\tilde{\gamma}_2+\hat{\gamma}_2) + \varepsilon\tilde{\varphi}(\Gamma\tilde{\varphi}+\hat{\varphi})\right] \\
&= \quad \Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\left[\Gamma(\tilde{\gamma}_1^2+\tilde{\gamma}_2^2+\varepsilon\tilde{\varphi}^2) + y\right].
\end{aligned}
$$

Mas $\tilde{A} = \tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\gamma}_2^2 + \varepsilon\tilde{\varphi}^2$, então

$$Q = \hat{\gamma}_1 - \Gamma\tilde{\gamma}_1 - \frac{2y\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}.$$

Substituindo Γ por sua expressão em Q, temos que

$$
\begin{aligned}
Q \quad &= \quad \hat{\gamma}_1 - \frac{2m_1\tilde{\gamma}_1}{m_1-m_2}\left(\frac{m_2x-y}{\tilde{A}}\right) - \frac{2y\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}} \\
&= \quad \hat{\gamma}_1 - \frac{2m_1m_2x\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}(m_1-m_2)} + \frac{2m_1y\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}(m_1-m_2)} - \frac{2y\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}} \\
&= \quad \hat{\gamma}_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\left(\frac{m_1m_2x}{m_1-m_2} + \frac{m_1y}{m_1-m_2} + y\right) \\
&= \quad \hat{\gamma}_1 - \frac{2\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\left(\frac{m_1m_2x - m_1y + y(m_1-m_2)}{m_1-m_2}\right) \\
&= \quad \hat{\gamma}_1 - \frac{2m_2\tilde{\gamma}_1(m_1x-y)}{\tilde{A}(m_1-m_2)}.
\end{aligned}
$$

O denominador $\overset{\star}{A}$ é semelhante ao caso $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$\overset{\star}{A} = 2m_2\Gamma\left(\frac{y - m_1x}{m_2 - m_1}\right) + \hat{A}.$$

Logo, temos que o coeficiente de e_1 é dado como:

$$C1 = \frac{2\left[\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1\hat{A} + \Gamma\tilde{\varphi}\tilde{A}\tilde{\gamma}_1 + \hat{\varphi}\tilde{A}\hat{\gamma}_1 - \dfrac{2\hat{\varphi}\tilde{\gamma}_1 m_2(m_1x - y)}{m_1 - m_2}\right]}{\tilde{A}\left(\dfrac{2\Gamma m_1(y - m_1x)}{m_2 - m_1} + \hat{A}\right)}.$$

Substituindo Γ por sua expressão na igualdade anterior, temos:

$$C1 = \frac{2\left[\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1\hat{A} + \hat{\varphi}\tilde{A}\hat{\gamma}_1 + \dfrac{2\tilde{\varphi}\hat{\gamma}_1 m_1(m_2x - y)}{m_1 - m_2} - \dfrac{2\hat{\varphi}\tilde{\gamma}_1 m_2(m_1x - y)}{m_1 - m_2}\right]}{\dfrac{4m_1m_2(m_2x - y)(m_1x - y)}{(m_1 - m_2)^2} + \hat{A}\tilde{A}}.$$

Observe que tanto o numerador quanto o denominador são simétricos com relação a permutação.

O cálculo para o coeficiente de e_2 segue análogo ao caso anterior. Vamos agora analisar o coeficiente de N, para isso consideramos

$$C2 = 1 - \frac{2\tilde{\varphi}^2\varepsilon}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}\left(-\varepsilon\overset{\star}{\varphi}\left(1 - \frac{2\tilde{\varphi}^2\varepsilon}{\tilde{A}}\right) + \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\varphi}\varepsilon\overset{\star}{\gamma}_2}{\tilde{A}} + \frac{2\varepsilon\overset{\star}{\gamma}_1\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}\right).$$

Podemos reecrever $C2$ como:

$$C2 = 1 - \frac{2\tilde{\varphi}^2\varepsilon}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}Q2,$$

onde $Q2 = -\varepsilon\overset{\star}{\varphi}\left(1 - \dfrac{2\tilde{\varphi}^2\varepsilon}{\tilde{A}}\right) + \dfrac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\varphi}\varepsilon\overset{\star}{\gamma}_2}{\tilde{A}} + \dfrac{2\varepsilon\overset{\star}{\gamma}_1\tilde{\varphi}\tilde{\gamma}_1}{\tilde{A}}$. Substituindo $\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\varphi}$ pelas suas expressões dada por (4.1) em $Q2$, temos

$$\begin{aligned}
Q2 &= \frac{2\overset{\star}{\gamma}_1\tilde{\gamma}_1\tilde{\varphi}\varepsilon}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\gamma}_2\tilde{\gamma}_2\tilde{\varphi}\varepsilon}{\tilde{A}} - \varepsilon\overset{\star}{\varphi} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}\tilde{\varphi}^2\varepsilon^2}{\tilde{A}} \\
&= \frac{2\tilde{\gamma}_1\tilde{\varphi}\varepsilon(\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1)}{\tilde{A}} + \frac{2\tilde{\gamma}_2\tilde{\varphi}\varepsilon(\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2)}{\tilde{A}} + \frac{2\tilde{\varphi}^2\varepsilon^2(\Gamma\tilde{\varphi} + \hat{\varphi})}{\tilde{A}} - \varepsilon(\Gamma\tilde{\varphi} + \hat{\varphi}) \\
&= \frac{2\tilde{\varphi}\varepsilon}{\tilde{A}}\left[\tilde{\gamma}_1(\Gamma\tilde{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1) + \tilde{\gamma}_2(\Gamma\tilde{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2) + \tilde{\varphi}\varepsilon(\Gamma\tilde{\varphi} + \hat{\varphi})\right] - \varepsilon(\Gamma\tilde{\varphi} + \hat{\varphi}) \\
&= \frac{2\tilde{\varphi}\varepsilon}{\tilde{A}}\left[\Gamma(\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\gamma}_2^2 + \varepsilon\tilde{\varphi}^2) + \tilde{\gamma}_1\hat{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2\hat{\gamma}_2 + \varepsilon\tilde{\varphi}\hat{\varphi}\right] - \varepsilon(\Gamma\tilde{\varphi} + \hat{\varphi}) \\
&= \frac{2\tilde{\varphi}\varepsilon}{\tilde{A}}\left[\Gamma\tilde{A} + y\right] - \varepsilon(\Gamma\tilde{\varphi} + \hat{\varphi}) \\
&= \varepsilon\Gamma\tilde{\varphi} - \varepsilon\hat{\varphi} + \frac{2\tilde{\varphi}\varepsilon y}{\tilde{A}}.
\end{aligned}$$

Substituindo Γ em $Q2$:

$$\begin{aligned}
Q2 &= \frac{2\varepsilon\tilde{\varphi}m_1(m_2x-y)}{\tilde{A}(m_1-m_2)} - \varepsilon\tilde{\varphi} + \frac{2\tilde{\varphi}\varepsilon y}{\tilde{A}} \\
&= \frac{2\varepsilon\tilde{\varphi}m_1m_2x}{\tilde{A}(m_1-m_2)} - \frac{2\varepsilon\tilde{\varphi}m_1y}{\tilde{A}(m_1-m_2)} - \varepsilon\tilde{\varphi} + \frac{2\tilde{\varphi}\varepsilon y}{\tilde{A}} \\
&= \frac{2\varepsilon\tilde{\varphi}}{\tilde{A}}\left(\frac{m_1m_2x}{m_1-m_2} - \frac{m_1y}{m_1-m_2} + y\right) - \varepsilon\hat{\varphi} \\
&= \frac{2\varepsilon\tilde{\varphi}m_2}{\tilde{A}}\left(\frac{m_1x-y}{m_1-m_2}\right) - \varepsilon\hat{\varphi}.
\end{aligned}$$

Retomando ao coeficiente de N,

$$\begin{aligned}
C2 &= 1 - \frac{2\tilde{\varphi}^2\varepsilon}{\tilde{A}} + \frac{2\overset{\star}{\varphi}}{\overset{\star}{A}}Q2 = 1 - \frac{2\tilde{\varphi}^2\varepsilon}{\tilde{A}} + \frac{2(\Gamma\tilde{\varphi}+\hat{\varphi})}{\overset{\star}{A}}\left[\frac{2\varepsilon\tilde{\varphi}m_2(m_1x-y)}{\tilde{A}(m_1-m_2)} - \varepsilon\hat{\varphi}\right] \\
&= \frac{\tilde{A}\overset{\star}{A} - 2\tilde{\varphi}^2\varepsilon\overset{\star}{A} + 2(\Gamma\tilde{\varphi}-\hat{\varphi})\left[\frac{2\varepsilon\tilde{\varphi}m_2(m_1x-y)}{m_1-m_2} - \varepsilon\hat{\varphi}\tilde{A}\right]}{\tilde{A}\overset{\star}{A}}.
\end{aligned}$$

Agora substituindo $\overset{\star}{A} = 2m_2\Gamma\left(\dfrac{y-m_1x}{m_2-m_1}\right) + \hat{A}$ no numerador,

$$\begin{aligned}
C2 &= \frac{\frac{2\tilde{A}m_2\Gamma(y-m_1x)}{m_2-m_1} + \tilde{A}\hat{A} - 2\tilde{\varphi}^2\varepsilon\left[2m_2\Gamma\left(\frac{y-m_1x}{m_2-m_1}\right) + \hat{A}\right]}{\tilde{A}\overset{\star}{A}} \\
&+ \frac{2(\Gamma\tilde{\varphi}-\hat{\varphi})\left[\frac{2\varepsilon\tilde{\varphi}m_2(m_1x-y)}{m_1-m_2} - \varepsilon\hat{\varphi}\tilde{A}\right]}{\tilde{A}\overset{\star}{A}} \\
&= \frac{\frac{2\tilde{A}m_2\Gamma(y-m_1x)}{m_2-m_1} + \tilde{A}\hat{A} - \frac{4\tilde{\varphi}^2\varepsilon m_2\Gamma(m_1x-y)}{m_1-m_2} - 2\tilde{\varphi}^2\varepsilon\hat{A} - 2\Gamma\tilde{\varphi}\varepsilon\hat{\varphi}\tilde{A} - 2\hat{\varphi}\tilde{A}\varepsilon}{\tilde{A}\overset{\star}{A}} \\
&+ \frac{\frac{4\tilde{\varphi}^2\varepsilon m_2\Gamma(m_1x-y)}{m_1-m_2} + \frac{4\hat{\varphi}\tilde{\varphi}\varepsilon m_2\Gamma(m_1x-y)}{m_1-m_2}}{\tilde{A}\overset{\star}{A}}.
\end{aligned}$$

Novamente substituindo Γ por sua expressão na igualdade anterior, temos que

$$C2 = 1 - \frac{2\tilde{\varphi}^2\varepsilon\hat{A} + 2\hat{\varphi}\tilde{A}\varepsilon + \frac{4\tilde{\varphi}\hat{\varphi}\varepsilon m_1(m_2x-y)}{m_1-m_2} - \frac{4\tilde{\varphi}\hat{\varphi}\varepsilon m_2(m_1x-y)}{m_1-m_2}}{\frac{4m_2m_1(m_1x-y)(m_2x-y)}{(m_1-m_2)^2} + \tilde{A}\hat{A}}.$$

Note que $C2$ também é simétrico com relação a permutação, portanto segue o resultado. $\square$

Capítulo 5

Aplicações

Nesse capítulo apresentaremos exemplos de novas superfícies mínimas como aplicações da teoria desenvolvida nos capítulos anteriores. Em nosso primeiro exemplo, calculamos uma transformada de Ribaucour horizontal de uma esfera em $\mathbb{R}^3$. Em seguida, calculamos as transformadas de Ribaucour horizontais de um plano vertical e um catenóide. A escolha destas superfícies representa bem os casos que consideramos no Teorema 2.2.3. Posteriormente exibimos também novos exemplos de superfícies mínimas nos espaços produto via a transformação de Ribaucour horizontal. Por último, usaremos os resultados do Teorema de Permutabilidade para construir algumas novas superfícies.

Proposição 5.0.1. *Considere a esfera parametrizada por*

$$X(u,v) = (\cos(u)\cos(v), \cos(u)sen(v), sen(u)).$$

Seja $\tilde{X}$ *a aplicação dada por* (2.11) *em que*

$$\begin{cases} \varphi &= -f(v)\cos(u) + g(u) \\ \gamma_1 &= -f'(v) \\ \gamma_2 &= f(v) + \dfrac{g'(u)}{sen(u)} \end{cases}$$

onde f *e* g *são funções reais. Então as imagens de* $X(u,v)$ *e* $\tilde{X}(U)$*, em que* U *é o conjunto dos pontos regulares de* $\tilde{X}$*, estão associadas por uma transformação Ribaucour horizontal.*

Demonstração. Seja $X(u,v) = (\cos(u)\cos(v), \cos(u)sen(v), sen(u))$ uma parametrização ortogonal da esfera. Então de acordo com Teorema 2.1.1 basta mostrar que as funções acima são soluções do sistema (2.10). Para isso, observe que

- $N(u,v) = (\cos(u)\cos(v), \cos(u)sen(v), 0)$
- $N_u = (-sen(u)\cos(v), -sen(u)sen(v), 0)$ e $N_v = (-\cos(u)sen(v), \cos(u)\cos(v), 0)$, logo $|N_u| = sen(u)$ e $|N_v| = \cos(u)$. Assim,

- $e_1 = (-sen(v), \cos(v), 0)$ e $e_2 = (-\cos(v), -sen(v), 0)$
- $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = -1$

Pelos itens acima, temos que o sistema (2.10) é dado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \varphi_u &= \gamma_2 sen(u) \\ \varphi_v &= \gamma_1 \cos(u) \\ \gamma_{1u} &= 0 \\ \gamma_{2v} &= -\gamma_1 \end{cases}$$

Desde que $\gamma_{1u} = 0$ podemos considerar

$$\gamma_1 = -f'(v)$$

logo $\gamma_{2v} = f'(v)$ e assim,

$$\gamma_2 = f(v) + z(u) \tag{5.1}$$

onde f e z são funções reais. Segue do sistema que $\varphi_v = \gamma_1 \cos(u)$, daí $\varphi_v = -f'(v)\cos(u)$ e desse modo,

$$\varphi = -f(v)\cos(u) + g(u)$$

com g uma função real. Derivando φ em relação a u, temos que

$$\varphi_u = f(v)sen(u) + g'(u). \tag{5.2}$$

Comparando (5.2) com a expressão φ_u do sistema temos

$$f(v)sen(u) + g'(u) = sen(u)\gamma_2 = sen(u)(f(v) + z(u)),$$

logo

$$z(u) = \frac{g'(u)}{sen(u)}. \tag{5.3}$$

Portanto o resultado segue substituindo (5.3) em (5.1). $\square$

Observação 5.0.1. *Seja $\tilde{\Sigma}$ a superfície do exemplo anterior. Então considerando $f(v) = \cos(v)$ e $g(u) = u$, temos por* (2.11) *que sua parametrização $\tilde{X}$ é dada por*

$$\tilde{X} = \left(\frac{\cos(v)\cos(u)^3 + 2u\cos(v)sen(u) - 2u\cos(u)^2 + 2u}{2sen(u)\cos(v) - \cos(u)^2 + 2}, \right.$$
$$\left. \frac{-sen(v)(\cos(u)^3 - 2sen(u)u - 2\cos(u)}{2sen(u)\cos(v) - \cos(u)^2 + 2}, sen(u) \right)$$

a qual também é ortogonal.

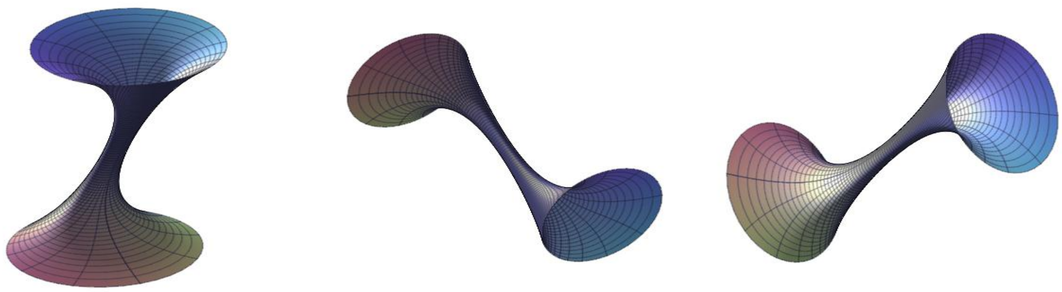


Figura 5.1: Transformada de Ribaucour horizontal da esfera com $v = [0, 4\pi]$ e $u = [-1, 1]$

5.1 Famílias de Superfícies Mínimas em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção, usando a transformação de Ribaucour horizontal, obteremos famílias de superfícies mínimas a partir do plano vertical e do catenóide em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 5.1.1. *Considere o plano parametrizado por*

$$X(u, v) = (0, v, u).$$

Seja $\tilde{X}$ a aplicação dada por (2.11), *em que*

$$\begin{cases} \varphi &= c_1 sen(v\sqrt{m}) + c_2 \cos(v\sqrt{m}) \\ \omega &= \left(c_3 e^{u\sqrt{m}} - c_4 e^{-u\sqrt{m}}\right) \dfrac{1}{\sqrt{m}} \\ \gamma_1 &= \sqrt{m}\,(c_1 \cos(v\sqrt{m}) - c_2 sen(v\sqrt{m})) \\ \gamma_2 &= c_3 e^{u\sqrt{m}} + c_4 e^{-u\sqrt{m}} \end{cases}$$

e as constantes c_i, $i = 1, ..., 4$ satisfazem

$$4\, c_3\, c_4\, m + c_1{}^2 m + c_2{}^2 m = 0$$

com $m \neq 0$. Então as imagens de $X(u, v)$ e $\tilde{X}(U)$, em que U é o conjunto dos pontos regulares de $\tilde{X}$, estão associadas por uma transformação Ribaucour horizontal e $\tilde{X}(U)$ é uma imersão mínima.

Demonstração. Note que pelo Teorema 2.2.3 basta verificar que a função $(\varphi, \omega, \gamma_1, \gamma_2)$ dada acima é solução do sistema (2.14). Para isso observe que se $X(u, v) = (0, v, u)$ é uma parametrização do plano vertical, então

- $N(u, v) = (0, v)$
- $N_u = (0, 0, 0)$, $N_v = (0, 1)$, logo $|N_u| = 0$ e $|N_v| = 1$. Assim,

- $e_1 = (0,1,0)$ e $e_2 = ie_1 = (1,0,0)$
- $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

Usando os itens acima, pelo Teorema 2.14, temos que o seguinte sistema

$$\begin{cases} \varphi_u &= 0 \\ \varphi_v &= \gamma_1 \\ \gamma_{1u} &= 0 \\ \gamma_{2v} &= 0 \\ \omega_u &= \gamma_2 \\ \omega_v &= 0 \\ \gamma_{2u} &= m\omega \\ \gamma_{1v} &= -m\varphi \end{cases}$$

é integrável. Desde que $\gamma_{2v} = 0$, então $\gamma_2 = f(u)$ onde f é uma função real e assim, segue da penúltima igualdade que

$$\omega = \frac{f(u)}{m}.$$

Derivando ω em relação a u,

$$\omega_u = \frac{f_{uu}}{m}.$$

Mas pelo sistema acima $\omega_u = \gamma_2$, então

$$\frac{f_{uu}}{m} = f(u).$$

Daí,

$$\gamma_2 = f(u) = c_3 \exp(u\sqrt{m}) + c_3 \exp(u\sqrt{m}).$$

Portanto,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m}}(c_3 \exp(u\sqrt{m}) + c_3 \exp(u\sqrt{m}).$$

Além disso, temos que $\varphi_v = \gamma_1$, logo da última igualdade do sistema segue que

$$\varphi_{vv} = -m\varphi.$$

Resolvendo essa equação, concluímos

$$\varphi = c_1 sen(v\sqrt{m}) + c_2 \cos(v\sqrt{m})$$

logo,

$$\gamma_1 = \sqrt{m}(c_1 \cos(v\sqrt{m}) - c_2 sen(v\sqrt{m})).$$

Tendo as funções, para encontrar a relação entre as constantes basta usar a expressão

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = m(\omega^2 - \varphi^2).$$

□

Conhecendo-se as funções $(\varphi, \omega, \gamma_1, \gamma_2)$, podemos através do Teorema 2.2.3 construir uma nova família de superfícies mínimas associadas ao plano por uma transformação de Ribaucour horizontal a qual ilustramos pelas figuras abaixo.

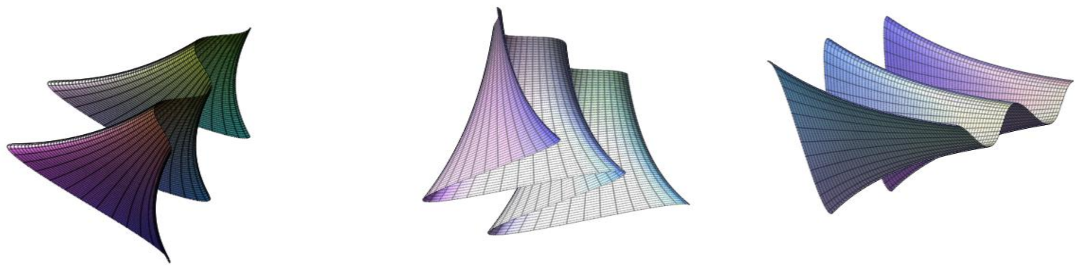


Figura 5.2: Transformada do plano.

A figura 5.2 ilustra a transformada do plano obtida tomando $v = [0, 2\pi]$, $u = \left[-\ln(2) - \frac{1}{2}, -2\right]$ e escolhendo as constantes $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -2$, $c_4 = \frac{1}{2}$ e $m = 4$.

Proposição 5.1.2. *Considere o catenóide parametrizado por*

$$X(u, v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)sen(v), u).$$

Seja $\tilde{X}$ a aplicação dada por (2.11) *em que*

$$\begin{cases} \varphi &= \dfrac{1}{m}\left[g'(u)senh(u) - \cosh(u)(-mf(v) + g(u))\right] \\ \omega &= \dfrac{1}{m}\left[g'(u)\cosh(u) - senh(u)(-mf(v) + g(u))\right] \\ \gamma_1 &= f'(v) \\ \gamma_2 &= f(v) + g(u) \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} f(v) &= sen(v\sqrt{1+m})c_3 + \cos(v\sqrt{1+m})c_4 \\ g(u) &= e^{u\sqrt{1+m}}c_2 + e^{-u\sqrt{1+m}}c_1 \end{cases}$$

e as constantes satisfazem

$$\frac{a\left(a{c_1}^2 + a{c_2}^2 - {c_1}^2 - {c_2}^2 + 4\, c_3\, c_4\right)}{a-1} = 0$$

com $a = 1 + m$ e $m \neq 0$. Então as imagens de $X(u, v)$ e $\tilde{X}(U)$, em que U é o conjunto dos *pontos regulares de $\tilde{X}$, estão associadas por uma transformação Ribaucour horizontal e $\tilde{X}(U)$ é uma imersão mínima.*

Demonstração. Note que pelo Teorema 2.2.3 basta verificar que as funções $(\varphi, \omega, \gamma_1, \gamma_2)$ dadas acima são soluções do sistema (2.13). Para isso observe que se

$$X(u,v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)sen(v), u)$$

é a parametrização do catenóide, pelo Teorema 2.2.1 temos que o seguinte sistema é integrável:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_u &=& senh(u)\gamma_2 \\ \varphi_v &=& \cosh(u)\gamma_1 \\ \gamma_{1u} &=& 0 \\ \gamma_{2v} &=& \gamma_1 \\ \omega_u &=& \cosh(u)\gamma_2 \\ \omega_v &=& senh(u)\gamma_1 \\ \gamma_{2u} &=& m(\cosh(u)\omega - senh(u)\varphi) \\ \gamma_{1v} &=& m(senh(u)\omega - \cosh(u)\varphi) - \gamma_2 \end{array}\right. \tag{5.4}$$

Seja $\gamma_1 = f'(v)$. Então $\gamma_{2v} = f'(v)$, logo $\gamma_2 = f(v) + g(u)$. Segue das duas ultimas igualdades que

$$\left\{\begin{array}{rcl} g'(u) &=& m(\cosh(u)\omega - senh(u)\varphi) \\ f''(v) &=& m(senh(u)\omega - \cosh(u)\varphi) - \gamma_2 \end{array}\right.$$

substituindo γ_2

$$\left\{\begin{array}{rcl} g'(u) &=& m(\cosh(u)\omega - senh(u)\varphi) \\ f''(v) + f'(v) + g(u) &=& m(senh(u)\omega - \cosh(u)\varphi) \end{array}\right. \tag{5.5}$$

multiplicando a primeira igualdade do sistema acima por $\cosh(u)$ e a segunda por $-senh(u)$ temos

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cosh(u)g'(u) &=& m\cosh(u)^2\omega - m\cosh(u)senh(u)\varphi \\ -senh(u)(f''(v) + f'(v) + g(u)) &=& -msenh(u)^2\omega + m\cosh(u)senh(u)\varphi \end{array}\right.$$

segue então que

$$\cosh(u)g'(u) - senh(u)(f''(v) + f'(v) + g(u)) = m\omega.$$

Portanto

$$\omega = \frac{1}{m}(\cosh(u)g'(u) - senh(u)(f''(v) + f'(v) + g(u)).$$

Agora multiplicando a primeira igualdade do sistema (5.5) por $senh(u)$ e a segunda por $-\cosh(u)$

temos

$$\begin{cases} senh(u)g'(u) &=& m\cosh(u)senh(u)\omega - msenh(u)^2\varphi \\ -\cosh(u)(f''(v)+f'(v)+g(u)) &=& +m\cosh(u)^2\varphi - m\cosh(u)senh(u)\omega \end{cases}$$

segue então que

$$senh(u)g'(u) - \cosh(u)(f''(v)+f'(v)+g(u)) = m\varphi.$$

Portanto

$$\varphi = \frac{1}{m}(senh(u)g'(u) - \cosh(u)(f''(v)+f'(v)+g(u)).$$

Podemos encontrar f e g. Para isso basta derivar ω em relação a u e usar o sistema (5.4):

$$\begin{aligned} \omega_u &= \frac{1}{m}(senh(u)g'(u) + \cosh(u)g''(u) - cosh(u)(f''(v)+f(v)+g(u)) - senh(u)g'(u)) \\ &= \cosh(u)\gamma_2 = \cosh(u)f(v) + \cosh(u)g(u). \end{aligned}$$

Daí temos que

$$\cosh(u)g''(u) - cosh(u)(f''(v)+f(v)+g(u)) = m(\cosh(u)f(v) + \cosh(u)g(u)),$$

assim,

$$\cosh(u)g''(u) - \cosh(u)g(u) - m\cosh(u)g(u) = m\cosh(u)f(u) + c(f''(v)+f(v)).$$

Então

$$g''(u) - g(u)(1+m) = f''(v) + f(v)(m+1).$$

Como um lado da igual está em função de u e a outra em função de v, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} g''(u) - g(u)(1+m) &=& k \\ f''(v) + f(v)(m+1) &=& k \end{cases} \tag{5.6}$$

tal que k é constante. Observe da segunda igualdade do sistema acima, podemos reescrever ω e φ da seguinte forma:

$$\begin{cases} \omega &=& \frac{1}{m}(\cosh(u)g'(u) - senh(u)(k - mf(v) + g(u)) \\ \varphi &=& \frac{1}{m}(senh(u)g'(u) - \cosh(u)(k - mf(v) + g(u)) \end{cases}$$

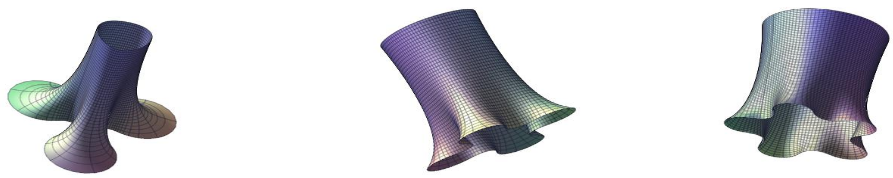
Resolvendo o sistema (5.6) segue que

$$\begin{cases} f(v) &=& sen(v\sqrt{1+m})c_2 + \cos(v\sqrt{1+m})c_1 + \frac{k}{1+m} \\ g(u) &=& e^{u\sqrt{1+m}}c_2 + e^{-u\sqrt{1+m}}c_1 - \dfrac{k}{1+m} \end{cases}$$

Para encontrar a relação das constantes basta substituir as expressões de γ_i, ω e φ em $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 -$

$m(\omega^2 - \varphi^2) = 0.$ □

Novavente utilizando o Teorema 2.2.3 e conhecendo-se as funções $(\varphi, \omega, \gamma_1, \gamma_2)$, podemos construir uma nova família de superfícies mínimas associadas ao catenóide por uma transformação de Ribaucour horizontal no qual ilustramos pelas figuras abaixo.



(a) (b) (c)

Figura 5.3: Transformada de Ribaucour horizontal do catenóide.

As figuras de 5.3 ilustram três superfícies associadas ao catenóide pela transformação de Ribaucour horizontal com $v = [-\pi, \pi]$, $u = [-0.01, 0.9]$ e constantes,

$$\begin{array}{lcl} 5.3a & : & c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -4, c_4 = 1, m = 8, \\ 5.3b & : & c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -\dfrac{15}{2}, c_4 = 1, m = 15, \\ 5.3c & : & c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -12, c_4 = 1, m = 24. \end{array}$$

Observe que podemos controlar os números de fins de cada superfície escolhendo valores apropriado para m.

5.2 Famílias de Superfícies Mínimas em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Nesta seção, usando as transformações de Ribaucour horizontal, obteremos famílias de superfícies mínimas em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Proposição 5.2.1. *Considere a superfície mínima imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por*

$$X(u, v) = (2\cosh v, -senhv, \sqrt{5}\cosh v, u).$$

Seja $\tilde{X}$ a aplicação dada por (3.11) *em que*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi & = & c_3 sen(v\sqrt{m-1}) + c_4\cos(v\sqrt{m-1}) \\ \omega & = & c_1 e^{u\sqrt{m}} + c_2 e^{-u\sqrt{m}} + k \\ \gamma_1 & = & (c_3 sen(v\sqrt{m-1}) - c_4\cos(v\sqrt{m-1}))\sqrt{m-1} \\ \gamma_2 & = & \left(c_1 e^{u\sqrt{m}} - c_2 e^{-u\sqrt{m}}\right)\sqrt{m} \end{array} \right.$$

e as constantes satisfazem

$$-4\,c_1\,c_2\,m + {c_3}^2 m + {c_4}^2 m - {c_3}^2 - {c_4}^2 = 0$$

com $m \neq 0$*. Então as imagens de* $X(u,v)$ *e* $\tilde{X}(U)$*, em que* U *é o conjunto dos pontos regulares de* $\tilde{X}$*, estão associadas por uma transformação Ribaucour horizontal e* $\tilde{X}(U)$ *é uma imersão mínima.*

Demonstração. Note que pelo Teorema 3.2.3 basta verificar que as função $(\varphi, \omega, \gamma_1, \gamma_2)$ dadas acima é uma solução do sistema (3.15). Para isso observe que se

$$X(u,v) = (2\cosh(v), -senh(v), \sqrt{5}\cosh(v), u)$$

parametrização local da superfície mínima Σ. Então temos que:

- $N = (2\cosh(v), senh(v), \sqrt{5}\cosh(v), 0)$
- $N_u = (0,0,0,0)$ e $N_v = (2senh(v), -\cosh(v), \sqrt{(}5)senh(v), 0)$, logo $|N_u| = 0$ e $|N_v| = 1$. Assim,
- $e_1 = (2senh(v), -\cosh(v), \sqrt{(}5)senh(v), 0)$ e $e_2 = ie_1 = (\sqrt{5}, 0, 2, 0)$
- $\theta_1 = \theta_2 = 0$

Usando os itens acima, pelo Teorema (3.2.2), temos que o seguinte sistema

$$\begin{cases} \varphi_u &= 0 \\ \varphi_v &= \gamma_1 \\ \gamma_{1u} &= 0 \\ \gamma_{2v} &= 0 \\ \omega_u &= \gamma_2 \\ \omega_v &= 0 \\ \gamma_{2u} &= m\omega \\ \gamma_{1v} &= (1-m)\varphi \end{cases}$$

é integrável. Note que o sistema é semelhante ao caso do plano em $\mathbb{R}^3$, então seguindo a mesma ideia de resolução, chegamos que

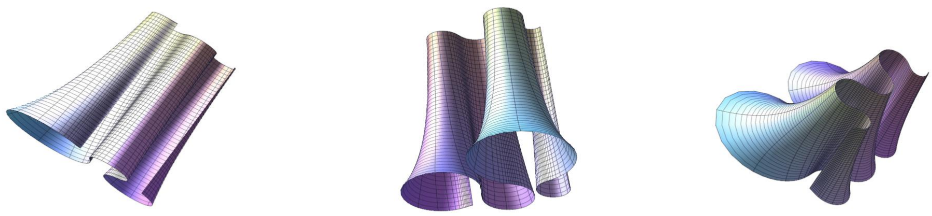
$$\begin{aligned} \omega &= c_1 e^{u\sqrt{m}} + c_2 e^{-u\sqrt{m}} + k \\ \varphi &= c_3 sen(v\sqrt{m-1}) + c_4\cos(v\sqrt{m-1}) \\ \gamma_1 &= (c_3 sen(v\sqrt{m-1}) - c_4\cos(v\sqrt{m-1}))\sqrt{m-1} \\ \gamma_2 &= (c_1 e^{u\sqrt{m}} - c_2 e^{-u\sqrt{m}})\sqrt{m} \end{aligned}$$

Para encontrar a relação das constantes c_1, c_2, c_3, e c_4, basta usar a expressão

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \varphi^2 = m(\omega^2 - \varphi^2).$$

$\square$

Seguindo as ideias das proposições anteriores no espaço Euclidiano exibimos abaixo exemplos de novas famílias de superfícies mínimas associadas a superfícies da proposição anterior por uma transformação de Ribaucour horizontal via Teorema 3.2.3.



(a) (b) (c)

Figura 5.4: Transformada de Ribaucour horizontal em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Usando o modelo do hiperbolóide $\left(\left[\frac{\tilde{X}_1}{1+\tilde{X}_3}, \frac{\tilde{X}_1}{1+\tilde{X}_3}, \tilde{X}_4\right]\right.$ onde $\tilde{X}_i$, $i = 1, ..., 4$, são as coordenadas da parametrização da superfície transformada), as figuras de 5.4 correspondem a transformada de Ribaucour horizontal da superfície parametrizada como na Proposição 5.2.1 com $v = [0, \pi]$, $u = [-0.01, 0.01]$ e as constantes escolhidas para cada figura foram

$$\begin{array}{rcl} 5.4a & : & c_1 = \dfrac{4}{9}, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 1, m = 9 \\ 5.4b & : & c_1 = \dfrac{15}{32}, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 1, m = 16 \\ 5.4c & : & c_1 = \dfrac{12}{25}, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 1, m = 25. \end{array}$$

Observe que semelhante ao caso do catenóide, podemos controlar os números de fins de cada superfície de acordo com o valor de m.

Proposição 5.2.2. *Considere a superfície mínima imersa em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por*

$$X(u, v) = (-\cos(v), -sen(v), 0, u).$$

Seja $\tilde{X}$ a aplicação dada por (3.11) *em que*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi & = & c_1 sen(v\sqrt{m+1}) + c_2 \cos(v\sqrt{m+1}) \\ \omega & = & \dfrac{1}{m}\left(c_3 e^{u\sqrt{m}} + c_4 e^{-u\sqrt{m}} - k\right) \\ \gamma_1 & = & \left(c_1 \cos(v\sqrt{m+1}) - c_2 sen(v\sqrt{m+1})\right)\sqrt{m+1} \\ \gamma_2 & = & c_3 e^{u\sqrt{m}} + c_4 e^{-u\sqrt{m}} - k \end{array} \right.$$

e as constantes satisfazem

$$c_1{}^2 m + c_2{}^2 m + c_1{}^2 + c_2{}^2 + 4\, c_3\, c_4 = 0$$

com $m \neq 0$. Então as imagens de $X(u,v)$ e $\tilde{X}(U)$, em que U é o conjunto dos pontos regulares de $\tilde{X}$, estão associadas por uma transformação Ribaucour horizontal e $\tilde{X}(U)$ é uma imersão mínima.

Demonstração. Com os mesmos argumentos da proposição anterior, vamos verificar que a função $(\varphi, \omega, \gamma_1, \gamma_2)$ dada acima é uma solução do sistema (3.15). Desde de que $X(u,v) = (-\cos(v), -sen(v), 0, u)$ é parametrização local de alguma superfície mínima, então

- $N = (-\cos(v), -sen(v), 0, 0)$
- $N_u = (0,0,0,0)$ e $N_v = (sen(v), -\cos(v), 0, 0)$, logo $|N_u| = 0$ e $|N_v| = 1$. Assim,
- $e_1 = (sen(v), -\cos(v), 0, 0)$. e $e_2 = ie_1 = (0,0,1,0)$
- $\theta_1 = \theta_2 = 0$

Usando os itens acima, pelo Teorema (3.2.2), temos que o sistema

$$\begin{cases} \varphi_u &= 0 \\ \varphi_v &= \gamma_1 \\ \gamma_{1u} &= 0 \\ \gamma_{2v} &= 0 \\ \omega_u &= \gamma_2 \\ \omega_v &= 0 \\ \gamma_{2u} &= m\omega \\ \gamma_{1v} &= -(1+m)\varphi \end{cases}$$

é integrável. Note que o sistema também é semelhante ao caso em $\mathbb{R}^3$, então seguindo a mesma ideia de resolução, chegamos que

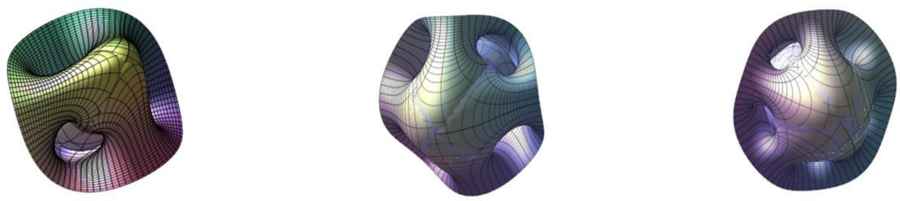
$$\begin{aligned} \omega &= \frac{c_3 e^{u\sqrt{m}} + c_4 e^{-u\sqrt{m}} - k}{m} \\ \varphi &= c_1 sen(v\sqrt{m+1}) + c_2 \cos(v\sqrt{m+1}) \\ \gamma_1 &= \left(c_1 \cos(v\sqrt{m+1}) - c_2 sen(v\sqrt{m+1})\right)\sqrt{m+1} \\ \gamma_2 &= c_3 e^{u\sqrt{m}} + c_4 e^{-u\sqrt{m}} - k \end{aligned}$$

Além disso, a expressão

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \varphi^2 = m(\omega^2 - \varphi^2)$$

nos permite encontrar a relação das constantes c_1, c_2, c_3, e c_4. □

Com essas funções, vamos apresentar através das figuras abaixo, uma família de superfícies mínimas associadas a superfície da proposição anterior por uma transformação de Ribaucour horizontal. Nesses exemplos também se observa que os valores de m tem relação com os números de fins.



(a) (b) (c)

Figura 5.5: Transformada de Ribaucour horizontal em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

As figuras de 5.5 correspondem a transformada de Ribaucour horizontal da superfície parametrizada como na Proposição 5.2.2 onde usamos o modelo $[\exp(u)\tilde{X}_1, \exp(u)\tilde{X}_2, \exp(u)\tilde{X}_3]$, com $\tilde{X}_i,\ i = 1, 2, 3$ sendo as coordenadas (u última coordenada) da parametrização da superfície transformada, $v = [0, 2\pi]$, $u = [-0.5, 0.5]$ e as constantes escolhidas para cada superfície foram

$$\begin{aligned} 5.4a \quad &: \quad c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -5, c_4 = 1, m = 9 \\ 5.4b \quad &: \quad c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -\frac{17}{2}, c_4 = 1, m = 16 \\ 5.4c \quad &: \quad c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -13, c_4 = 1, m = 25. \end{aligned}$$

5.3 Famílias de Superfícies Mínimas pelo Teorema de Permutabilidade

Tomaremos como exemplo as famílias de superfícies mínimas do catenóide em $\mathbb{R}^3$ e da Proposição 5.2.2 em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Seguindo a notação do Teorema de permutação, tomaremos $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\omega}, \tilde{\varphi})$, respectivamente $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\omega}, \hat{\varphi})$ soluções do sistema (2.12) associadas a $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ com respectivas constante que escolhemos casualmente.

Seja o catenóide parametrizado por

$$X(u, v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)sen(v), u).$$

Vamos considerar duas superfícies $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ mínimas associadas a X via Proposição 5.1.2 da seguinte maneira respectivamente:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} &= \dfrac{1}{3}\left[\tilde{g}'(u)senh(u) - \cosh(u)(-3\tilde{f}(v) + \tilde{g}(u))\right] \\ \tilde{\omega} &= \dfrac{1}{3}\left[\tilde{g}'(u)\cosh(u) - senh(u)(-3\tilde{f}(v) + \tilde{g}(u))\right] \\ \tilde{\gamma}_1 &= \tilde{f}'(v) \\ \tilde{\gamma}_2 &= \tilde{f}(v) + \tilde{g}(u) \end{cases}$$

onde,

$$\begin{cases} \tilde{f}(v) &= sen(2v)c_3 + \cos(2v)c_4 \\ \tilde{g}(u) &= e^{2u}c_2 + e^{-2u}c_1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \hat{\varphi} &= \dfrac{1}{15}\left[\hat{g}'(u)senh(u) - \cosh(u)(-15\hat{f}(v) + \hat{g}(u))\right] \\ \hat{\omega} &= \dfrac{1}{15}\left[\hat{g}'(u)\cosh(u) - senh(u)(-15\hat{f}(v) + \hat{g}(u))\right] \\ \hat{\gamma}_1 &= \hat{f}'(v) \\ \hat{\gamma}_2 &= \hat{f}(v) + \hat{g}(u) \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \hat{f}(v) &= sen(4v)d_3 + \cos(4v)d_4 \\ \hat{g}(u) &= e^{4u}d_2 + e^{-4u}d_1 \end{cases}$$

Com essas informações, podemos encontrar a expressão de Γ dada por (4.3) e consequentemente $\{\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi}\}$ que satifaz (4.1). Note que apesar da diferença das funções soluções serem pequenas, temos duas superfícies diferentes. Essas funções, de acordo com o Teorema 4.1.1 constitui uma nova família de superfícies mínimas associadas a $\tilde{X}$ por uma transformação de Ribaucour horizontal no qual ilustramos pela figura abaixo.

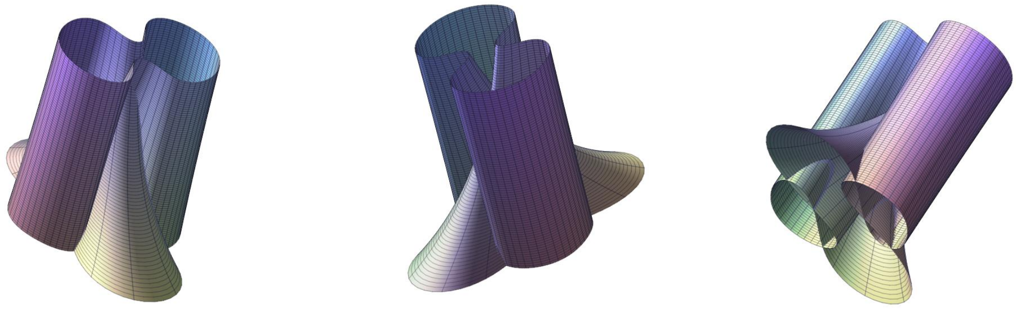


Figura 5.6: Permutação do catenóide.

As figuras de 5.6 ilustram a permutação do catenóide com $v = [0, 2\pi]$, $u = [0.55, 0.9]$ e constantes $d_1 = c_1 = 2$, $d_2 = c_2 = 1$, $c_3 = -\frac{15}{4}$, $d_3 = -\frac{75}{4}$ e $d_4 = c_4 = 1$.

Agora seja a superfície mínima em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por

$$X(u, v) = (-\cos(v), -sen(v), 0, u).$$

Consideramos duas superfícies mínimas também nesse espaço, $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ associadas a X por uma transformação de Ribaucour horizontal via Proposição 5.2.2 com constantes m_1 e m_2 da seguinte maneira,

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} &= c_1 sen(v\sqrt{m_1+1}) + c_2\cos(v\sqrt{m_1+1}) \\ \tilde{\omega} &= \dfrac{1}{m_1}\left(c_3 e^{u\sqrt{m_1}} + c_4 e^{-u\sqrt{m_1}}\right) \\ \tilde{\gamma}_1 &= \left(c_1\cos(v\sqrt{m_1-1}) - c_2 sen(v\sqrt{m_1+1})\right)\sqrt{m_1+1} \\ \tilde{\gamma}_2 &= c_3 e^{u\sqrt{m_1}} + c_4 e^{-u\sqrt{m_1}} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \hat{\varphi} &= d_1 sen(v\sqrt{m_2+1}) + d_2\cos(v\sqrt{m_2+1}) \\ \hat{\omega} &= \dfrac{1}{m_2}\left(d_3 e^{u\sqrt{m_2}} + d_4 e^{-u\sqrt{m_2}}\right) \\ \hat{\gamma}_1 &= \left(d_1\cos(v\sqrt{m_2+1}) - d_2 sen(v\sqrt{m_2+1})\right)\sqrt{m_2+1} \\ \hat{\gamma}_2 &= d_3 e^{u\sqrt{m_2}} + d_4 e^{-u\sqrt{m_2}} \end{cases}$$

respectivamente.

Análogo ao exemplo anterior, essas funções nos permite calcular a expressão de Γ em (4.7) e consequentemente temos $\{\overset{\star}{\gamma}_1, \overset{\star}{\gamma}_2, \overset{\star}{\omega}, \overset{\star}{\varphi}\}$ que satifaz (4.1). Essas funções, pelo Teorema 4.2.1, constitui uma nova família de superfícies mínimas associadas a $\tilde{X}$ por uma transformação de Ribaucour horizontal no qual também ilustramos pelas figuras abaixos.

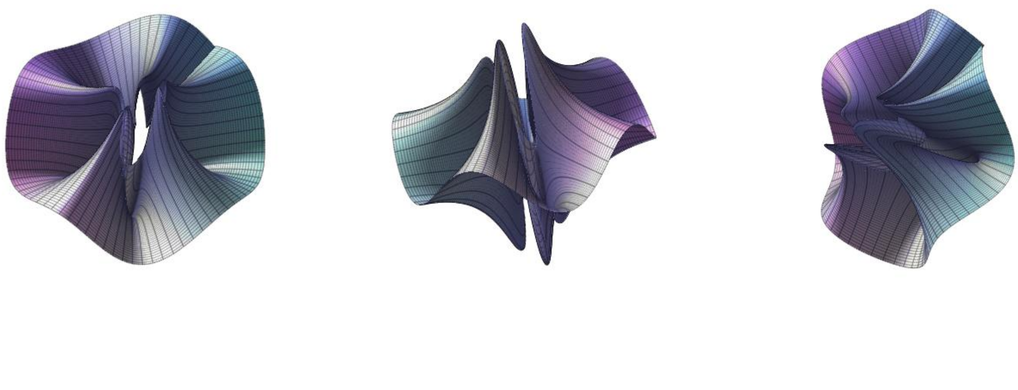


Figura 5.7: Permutação em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

As figuras de 5.7 correspondem a permutação da superfície X com $v = [0, 2\pi]$, $u = [4, 5]$ e constantes $m_1 = 4$, $m_2 = 9$, $d_1 = c_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = c_2 = 1$, $c_3 = \frac{25}{24}$, $d_3 = \frac{25}{12}$ e $d_4 = c_4 = -\frac{3}{2}$ e modelo

$[\exp(u)\tilde{X}_1, \exp(u)\tilde{X}_2, \exp(u)\tilde{X}_3]$. Nesse exemplo, observamos com maior clareza a relação das constantes escolhidas m_1 e m_2 com os números de fins, sendo que a transformada com $m = 4$ teria 2 fins e $m = 9$ teria 3 fins. Na figura acima, pela permutação, temos a soma desses fins quando escolhemos esses valores para m.

Referências Bibliográficas

[1] Abresch, U.; Rosenberg, H. *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Acta Math. **193** (2004), 141-174.

[2] Aledo, J.A.; Espinar, J.M.; Gálvez, J.A. *The Codazzi equation on surfaces.*, Adv. in Math., 224 (2010), 2511-2530.

[3] Aledo, J.A; Espinar, J.M.; Gálvez, J.A. *Complete surfaces of constant curvature in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$*.*, Calc. Var. Partial Diferential Equations, **29** (2005), 347-363.

[4] Baird, P.; Wood, J.C. *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds* London Math. Soc. Monographs 29, Clarendon Press, Oxford (2003)

[5] Bianchi, Luigi. *Lezioni di Geometria Differenciable*, Terza Edizione, Bologna Nicola Zanichelli, Ed. 1927.

[6] Burstall, F.; Hertrich-Jeromin U. *The Ribaucour transformation in Lie sphere geometry*, Differ Geom Appl 24, 503-520 (2006).

[7] Canevari, S.C. *A transformação de Darboux-Bianchi para superfícies isotérmicas em* $\mathbb{R}^3$, Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2004.

[8] Carmo, M.P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies-Manfredo Perdigão do Carmo-* 5. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[9] Dajczer, M.; Tojero, R. *An extension of the classical Ribaucour transformation*, Proc. London Math. Soc. 85 (2002), 211-232.

[10] Daniel, B. *Isometric immersions into* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *and applications to minimal surfaces.*, Transactions of the American Mathematical Society, vol.361 (2009), no. 12, 6255-6282.

[11] Darboux, G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Gauthier-Villars, Paris (1887), (109).

[12] Eisenhart, L. P. *Transformations of Surfaces*, b. 1876., National Research Council (U.S.) Princeton: Princeton University Press, 1923.

[13] Espinar, J.M.; Rosenberg, H. *Complete Constant Mean Curvature surfaces and Bernstein type Theorems in* $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, J. Diff. Geom., 82 (2009), $611 - 628$.

[14] Espinar, J.M.; Rosenberg, H. *Complete Constant Mean Curvature surfaces in homogeneous spaces*, Comm. Math. Helv., 86 (2011), 659-674.

[15] Gimarez, W.O. *Pares de Codazzi em Superfícies de Variedades Homogêneas.* Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

[16] Laurent Hauswirth; Ricardo Sa Earp; Eric Toubiana. *Associate and conjugate minimal immersions in* $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$., Tohoku Math. J. (2) 60 (2) 267 - 286, 2008.

[17] Lemes. M.V; Tenenblat K. *On Ribaucour transformations and minimal surfaces*, Mat. Contemp. 29 (2005), 13-40.

[18] Meeks, W. H.; Rosenberg, H. *The theory of minimal surfaces in* $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$., Comment. Math. Helv. 80 (2005), 811-858.

[19] Mary, S.D. *Line congruences as surfaces in the space of lines* Washington Universtiy in St. Louis. SUNY College at Potsdam, USA. Communicated by A. Gray Received 25 January 1997.

[20] Aledo, J.A.; Espinar, J.M.; Gálvez, J.A. *Surfaces with constant curvature in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Height estimates and representation.*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series 38(4), (2007), 533 - 554.

[21] Rogers, C.; Schief, W.K. *Backlund and Darboux transformations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[22] Rosenberg, H. *Minimal surface in* $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.,Illiois J. Math. 46 (2002), 1177-1195.

[23] Tenenblat, K; A.V Corro, W. Ferreira, *On Ribaucour Transformations for Hypersurfaces*, Matemática Comtemporânea Vol. 17, pág. 137-158, 1999.

[24] Tenenblat, K.; Wang, Q. *Ribaucour Transformation for linear Weingarten surfaces in space forms*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 212 (2003), 256-296.

[25] Tenenblat, K.; Corro, A.V.; Ferreira, W. *Minimal Surfaces Obtained by Ribaucour Transformations*, Geometria Dedicata, 96 (2003), 117-150.