Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas - IE
Mestrado acadêmico em Matemática

FRANCISCA LEMOS CAPPELLESSO

Teorema do passo da Montanha e Soluções para Equação de Euler-Lagrange

Brasília/DF

2022

FRANCISCA LEMOS CAPPELLESSO

Teorema do passo da Montanha e Soluções para Equação de Euler-Lagrange

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jiazheng Zhou

Brasília/DF

2022

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Teorema de passo da Montanha e Soluções para Equação de Euler-Lagrange
por

Francisca Lemos Cappellesso

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 24 de junho de 2022.

Comissão Examinadora:

Jiazheng Zhou

Prof. Dr. Jiazheng Zhou- MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos – MAT/UnB (Membro)

Jefferson Abrantes dos Santos

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos– UFCG (Membro)

Dedicatória

For whom and through whom everything exists. Heb 2,10

Àquele, para quem e por quem todas as coisas existem. Hb 2.10

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar e acima de tudo e de todos ao nosso Pai Celestial, pela minha vida, saúde e por todas as oportunidades que Ele me permitiu viver até aqui, em especial pela oportunidade de pleitear por mais este sonho.

Em seguida agradeço, à minha família, em especial aos meus pais Raimunda Lemos e Francisco Lemos e também ao meu marido Giovanni Cappellesso por me apoiarem na minha luta e entenderem minhas ausências.

Ao meu orientador Jiazheng Zhou pela "paciência de cozinhar pedra". Obrigada professor Zhou, por não desistir de mim apesar de todas as minhas dificuldades! O senhor foi o melhor orientador que eu poderia ter escolhido. Me acompanhou com paciência na graduação e continuou oferecendo suporte sem medir esforços durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos que me ajudaram nesta escalada, pela contribuição durante minha vida acadêmica, os quais eu destaco aqui:

Nathália Gonçalves, devo demais a você, não apenas agora no meu mestrado mas desde a época que eu estava na graduação e você já estava no mestrado, você tem sido uma luz no meu caminho. Tenho me esforçado para me espelhar em você.

Ao meu amigo Adler Marques, eu não teria conseguido sem a sua ajuda em álgebra. Nossa amizade perdura desde a época que estudávamos juntos na graduação.

Filipe Kelmer, por ser amigo, atencioso e por toda a ajuda com materiais super didáticos.

Manuel Argomedo, por me ajudar a finalizar o meu trabalho, conferindo erros e oferecendo sugestões enriquecedoras. Você foi fundamental para que eu concluísse com sucesso este trabalho.

Felipe Netto, obrigada meu amigo, te devo muito, especialmente nas análises! Um ser humano simples, inteligente, didático e que não mede esforços para ajudar quem quer que seja.

Agradeço ainda aos amigos Vinícius Kobayashi e Katianny por serem um casal tão solícito, vocês também ajudaram muito. Obrigada Vinícius, pelas explicações matemáticas especialmente sobre a desigualdade de Poincarè.

Ao André Pereira pelas conversas inbox muitas vezes descontraídas. Pela amizade e pela ajuda nas disciplinas, especialmente álgebra.

Ao German Alejandro, por ser amigo nos conselhos inbox e por me ajudar em Análise.

Ao Rodolfo Oliveira, por ser uma pessoa humilde não medir esforços para ajudar até mesmo quando não me conhecia direito e também pela ajuda em análise funcional.

Ao Luan Pereira por ser um amigo nos estudos do mestrado, mesmo a distância devido ao ensino remoto do período pandêmico.

Ao Leonardo Melo Batista, pela sua amizade e pela ajuda em lógica.

À Letícia porque me ajudou corrigindo erros e oferecendo sugestões.
Ao Daniel Haom, pela amizade desde a graduação e por me ajudar na tradução do resumo para inglês.
Aos amigos Daniel Abreu, Flávia de Sá, Jailson Oliveira, Julia Almeida, Ismael Oliveira, Thiago Guimarães, Jucileide Santos, Mirelly Oliveira, Gabriela Torres, Matheus Andrade, Gabriel Nogueira, Mateus Fleury, Bruno Zaban, Dhiego Loiola, Julia Alvarez, Wendy Fernanda, Gabriel Silva, Glaene Mendonça, Flávia Furtado. Sou muito grata a Deus por colocar pessoas tão legais no meu caminho.
Aos professores do departamento de matemática da UnB, em especial, destaco os que me auxiliaram na finalização do meu mestrado: Manuela Rezende, Luis Miranda, Willian Cintra, Matofu, Martino Garonzi, José Luis Teruel, Ary Medino e Noraí.
Aos membros da Banca professor Carlos Alberto e professor Jefferson Abrantes por aceitarem o convite para avaliarem este trabalho, a participação de vocês foi muito positiva e eu fiquei muito satisfeita! Se eu pudesse escolher uma banca, nela estariam vocês com certeza!
À professora Janete Gamboa, por sua participação como membro suplente.
Aos servidores do departamento de matemática, em especial a Claudinha, o Luan e os servidores da secretaria do MAT.
À CAPES, pelo suporte financeiro durante todos estes anos de pandemia.
E a todos que contribuíram de forma direta ou indireta nessa conquista da minha vida, meus sinceros agradecimentos.

Definição: A fé é a certeza daquilo que esperamos e a prova das coisas que não vemos. (Apóstolo Paulo em Hebreus 11,1)
Exemplo: Não temas, crê somente! (Yeshua em Marcos 5,36) [*Pois ali foi realizado um milagre por meio da fé.*]

RESUMO

O estudo realizado nesta dissertação está concentrado em trabalhar funcionais em espaços de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, definidos por

$$J(u) = \int_\Omega \mathscr{I}(x, u, \nabla u)\, dx,$$

onde Ω é um subconjunto limitado e aberto em $\mathbb{R}^N$. Sabe-se na literatura clássica que pode-se obter pontos críticos destes funcionais, quando diferenciáveis, através da aplicação do Teorema do Passo da Montanha Clássico. Entretanto, estudaremos a existência de pontos críticos para funcionais $J(u)$ que não são diferenciáveis. Assim, para contornar o problema da não-diferenciabilidade provaremos uma versão modificada do Teorema do Passo da Montanha publicada em um artigo de David Arcoya e Lucio Boccardo [3] o qual demonstra a existência de pontos críticos não-negativos para este tipo de funcional.

Em seguida estudamos um funcional dado por

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega [a(x) + |v|^\gamma]\, |\nabla v|^2\, dx - \frac{1}{p}\int_\Omega (v^+)^p\, dx,$$

para $N > 2$ onde $a(x)$ é uma função mensurável satisfazendo $0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta$, em quase todo ponto $x \in \Omega$, ver [5]. Aqui estudaremos a existência de soluções positivas da equação de Euler-Lagrange com termo quase-linear à qual este funcional $J(v)$ está associado, quando $\gamma > 1$ e $p > 1$. Entretanto será necessário estudar previamente um teorema auxiliar visto em [54] o qual nos permitirá extender o nosso resultado para $L^\infty(\Omega)$.

Palavras-chave: Teorema do Passo da Montanha para funcionais não-diferenciáveis. Equação de Euler-Lagrange com termo quase-linear. Existência de soluções positivas.

ABSTRACT

The study carried out on this dissertation is focused in working with functionals in Sobolev Spaces $W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, defined by

$$J(u) = \int_\Omega \mathscr{I}(x, u, \nabla u)\, dx,$$

where Ω is a bounded subset and open in $\mathbb{R}^N$. We know from the classic literature that one can obtain critical points of these functional, when they are differentiable, through an application of the classical Mountain Pass Theorem. However, we shall study the existence of critical points for functionals $J(u)$ which are non-differentiable. Thus, in order to circumvent the obstacle of non-differentiability, we will prove a modified version of the Mountain Pass Theorem, published in a paper by David Arcoya e Lucio Boccardo [3] which proves the existence of non negative critical points for this type of functional.
We then study a functional given by

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[a(x) + |v|^\gamma\right] |\nabla v|^2\, dx - \frac{1}{p}\int_\Omega (v^+)^p\, dx,$$

for $N > 2$,where $a(x)$ is a measurable function satisfying $0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta$, for almost all $x \in \Omega$, see [5]. Here we study the existence of positive solutions of the Euler-Lagrange equation with a quasilinear term, associated with this functional $J(v)$, quando $\gamma > 1$ e $p > 1$. Nevertheless, prior to that it will be necessary to study an auxiliary theorem as done by Stampacchia [54] that shall allow us to extend our result to $L^\infty(\Omega)$.

Keywords: Mountain Pass Theorem for non differentiable functionals. Euler-Lagrange Equation with quasilinear term. Existence of positive solutions.

SUMÁRIO

LISTA DE NOTAÇÕES E SÍMBOLOS

Usaremos as seguintes notações:

1. $L^p(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$ para o espaço de Lebesgue sobre Ω, e

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

como a norma neste espaço. Quando $p = \infty$ denotaremos $L^\infty(\Omega)$ como o espaço de Banach das funções u mensuráveis em Ω e que são essencialmente limitadas em Ω, equipado com a norma

$$|u|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \mathrm{ess}\, |u(x)|.$$

2. $W_0^{1,p}(\Omega)$ para espaço de Sobolev com suporte compacto u, $\nabla u \in L^p(\Omega)$ e

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

a norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

3. C, C_1, C_2 para denotar constantes positivas e provavelmente distintas;

4. λ_1 denotará o primeiro autovalor positivo de

$$-\Delta_p \phi \equiv -div(|\nabla \phi|^{p-2} \nabla \phi) = \lambda |\phi|^{p-2} \phi$$

para $x \in \Omega, \phi(x) = 0$ com $x \in \partial\Omega, p > 1$;

5. $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é uma autofunção positiva associada à λ_1,

6. $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \max\{-u, 0\}$ e $u = u^+ - u^-$.

7. A função sinal é

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ -1, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Observação sobre a notação 2: Usaremos

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

ou

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |u|^p + \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

pois são equivalentes.
Vejamos como um exemplo o caso $p = 2$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado em alguma direção. Então, temos a desigualdade de Poncarè:

$$\left(\int_\Omega u^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\Omega)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $C(\Omega) > 0$ é uma constante dependendo de Ω. Notemos que como $\int_\Omega u^2 \, dx \geq 0$ então vale que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \int_\Omega u^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \qquad (Z).$$

Pela desigualdade de Poincarè, a menos de uma constante, vale que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx &\leq C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\ &\leq (C(\Omega) + 1) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \qquad (W) \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\|u\|_{1,2} = \left(\int_\Omega u^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, segue de (Z) e (W) que

$$\|u\|_{1,2} \leq M \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \quad \text{com } M \text{ constante}$$

e que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \widetilde{c} \|u\|_{1,2}.$$

Logo, se tratada uma equivalência de normas, e então $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$ é de fato uma norma.

Capítulo 0

Introdução

0.1 Teorema do Passo da Montanha para Funcionais Não-Diferenciáveis

Histórico sobre o Teorema do Passo da Montanha clássico

O Teorema do Passo da Montanha clássico foi originalmente provado por Ambrosetti e Rabinowitz [2]. Este teorema é o precursor de muitos outros teoremas do tipo minimax. No qual, impondo certas condições sobre um funcional, o teorema demonstra a existência de um ponto de sela. Entretanto a aplicação do teorema original é pouco disseminada pois existem várias outras versões deste teorema na literatura, e na sua grande maioria se trata da prova de existência de pontos extremos.

Teorema 0.1 (Teorema do passo da montanha clássico)**.** *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional com $I(0) = 0$, e verificando:*

(I_1) *Existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;*

(I_2) *Existe $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \rho$ e $I(e) \leq 0$.*

Seja

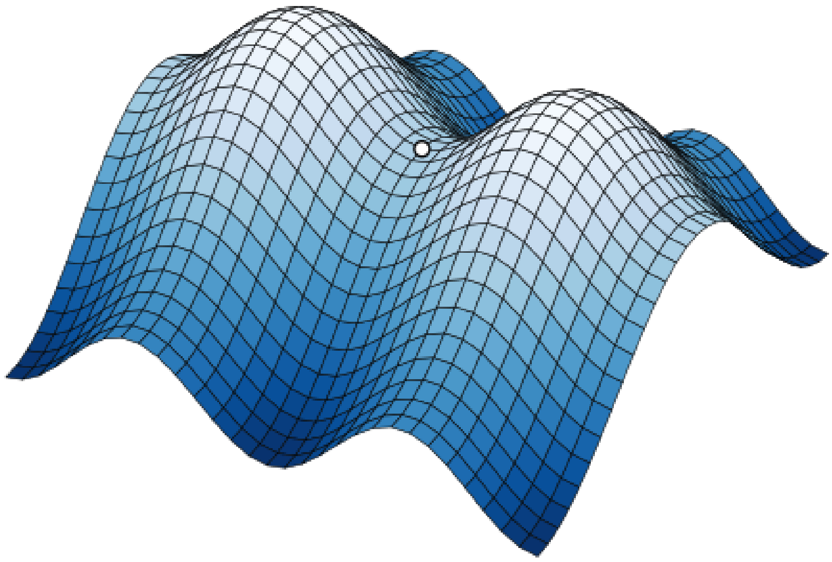
$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}.$$

Então, se I satisfaz $(PS)_c$ o nível c é um nível crítico de I, isto é, existe $u \in X$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

A intuição para o nome do *Teorema do Passo da Montanha* pode ser descrita da seguinte forma: Consideremos I descrevendo uma elevação, e suponhamos que sejam conhecidos dois pontos baixos num vilarejo rodeado por montanhas, um deles sendo a origem com $I(0) = 0$ e outro um ponto distante e onde $I(e) \leq 0$. Suponhamos ainda que entre estes dois pontos existam algumas montanhas (em $\|e\|_X > r$) onde a elevação é mais alta, maior que $\rho > 0$. De forma que se quisermos passar por um caminho γ desde a origem até e, devemos passar pelas montanhas. Ou seja, devemos subir e depois descer. Sendo I levemente suave, deve existir um ponto crítico em algum lugar no meio. Mas, a fim de poupar energia, escolhemos o caminho com menor elevação (o "*caminho mais curto*)". Assim, na prática o "*Passo da Montanha*" se localiza na passagem da elevação mais baixa entre as montanhas. Note que esta "*passagem*" é quase sempre um ponto de sela.



Sobre o Teorema do Passo da Montanha para Funcionais Não Diferenciáveis e Compacidade

O primeiro foco nesta dissertação é a respeito do principal resultado do artigo intitulado *Critical Points for Multiple Integrals of the Calculus of Variations*, ou seja, a respeito da existência de pontos críticos de funcionais definidos no espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, por

$$J(u) = \int_\Omega \mathscr{I}(x, u, \nabla u)\, dx,$$

com Ω sendo um subconjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$. Mesmo para exemplos simples em $\mathbb{R}^N$ a diferenciabilidade de $J(u)$ pode falhar. E aqui está o objetivo principal de trabalhar com o funcional $J(u)$ sob estas condições: para contornar o problema da não-diferenciabilidade, provaremos uma versão adequada do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz aplicada a funcionais os quais não são diferenciáveis em todas as direções.

0.1.1 Teorema do Passo da Montanha para Funcionais Não-Diferenciáveis

Teorema 0.2 (Teorema do Passo da Montanha para Funcionais Não-Diferenciáveis)**.** *Seja* $(X, \|\cdot\|_X)$ *um espaço de Banach e* $Y \subset X$ *um subespaço, o qual também é um espaço de Banach munido da norma* $\|\cdot\|_Y$ *tal que* $\|y\|_X \leq \|y\|_Y$ *para todo* $y \in Y$*. Suponha que* $J : X \to \mathbb{R}$ *seja um funcional tal que* $J\Big|_{(Y,\|\cdot\|_Y)}$*, seja contínuo e satisfaz:*

a) *J tem uma derivada direcional* $\langle J'(u), v\rangle$ *em cada* $u \in X$ *ao longo de qualquer direção* $v \in Y$*.*

b) *Para* $u \in X$ *fixado, a função* $\langle J'(u), v\rangle$ *é linear em* $v \in Y$*, e para* $v \in Y$ *fixado, a função* $\langle J'(u), v\rangle$ *é contínua em* $u \in X$*.*

Seja K *um espaço métrico compacto,* $K_0 \subset K$ *um subconjunto fechado e* $\gamma_0 : K_0 \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ *uma aplicação contínua. Considere o conjunto*

$$\Gamma = \left\{ \gamma : K \to (Y, \|\cdot\|_Y) : \gamma \text{ é contínuo e } \gamma\Big|_{K_0} = \gamma_0 \right\}.$$

Se

$$c \equiv \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in K} J(\gamma(t)) > c_1 \equiv \max_{t\in K_0} J(\gamma_0(t)),$$

então, para cada $\epsilon > 0$ *e* $\gamma \in \Gamma$ *tal que*

$$c \leq \max_{t\in K} J(\gamma(t)) \leq c + \frac{1}{2}\epsilon$$

existe $\overline{\gamma}_\epsilon \in \Gamma$ *e* $u_\epsilon \in \overline{\gamma}_\epsilon(K) \subset Y$ *satisfazendo*

$$c \leq \max_{t\in K} J(\overline{\gamma}_\epsilon(t)) \leq \max_{t\in K} J(\gamma(t)) \leq c + \frac{1}{2}\epsilon,$$

$$\max_{t\in K} \|\overline{\gamma}_\epsilon(t) - \gamma(t)\|_Y \leq \sqrt{\epsilon},$$

$$c - \epsilon \leq J(u_\epsilon) \leq c + \frac{1}{2}\epsilon,$$

$$|\langle J'(u_\epsilon), v\rangle| \leq \sqrt{\epsilon}\|v\|_Y,\ \forall\, v \in Y.$$

O teorema do Passo da Montanha clássico, envolve além das condições geométricas as quais justificam o nome do teorema, uma hipótese técnica conhecida como condição de Palais Smale sobre o funcional J o qual aparece frequentemente na teoria de pontos críticos e diz o seguinte: *Qualquer sequência* $\{u_n\}$*, em um espaço de Banach* E*, no qual o*

funcional $J(u_n)$ é limitado e se tem $J'(u_n)$ converge a zero no espaço dual E', possui uma subsequência convergente. Isto significa que a diferenciabilidade é condição necessária para o funcional J em E.
Assim, a versão modificada que provaremos trata de fornecer condições para a existência de pontos críticos para funcionais que não são diferenciáveis em todas as direções e finalmente aplicamos o teorema modificado ao estudo da existência e mutiplicidade de pontos críticos para algumas classes de funcionais do Cálculo Variacional. O exemplo mais simples é

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} A(x,u)|\nabla u|^2\, dx - \int\limits_{\Omega} F(x,u)\, dx,\ u \in\ W_0^{1,2}(\Omega),$$

com hipóteses adequadas sobre as funções do tipo Carathéodory $F(x,z)$ e $A(x,z)$. Em que, neste caso, a equação de Euler-Lagrange é

$$-\mathrm{div}\,(A(x,u)\nabla u) + \frac{1}{2}A'_z(x,u)|\nabla u|^2 = \frac{\partial F}{\partial z}(x,u) \equiv f(x,u),$$

onde $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e, que por sua vez, possui solução fraca dada por

$$\int\limits_{\Omega} A(x,u)\nabla u \nabla v\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} A(x,u)|\nabla u|^2 v\, dx = \int\limits_{\Omega} f(x,u)v\, dx$$

para cada função teste $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

0.1.2 Compacidade

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$. Para $p > 1$, considere o funcional

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} \mathscr{I}(x,u,\nabla u) - F(x,u^+)\, dx,$$

onde $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\mathscr{I} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory, $F(x,z) = \int_0^z f(x,t)\, dt$ é uma primitiva de uma função Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,0) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Suponha:

(i) Para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$, a função

$$\xi \mapsto \mathscr{I}(x,z,\xi) \text{ é estritamente convexa em } \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

(ii) Existe $\beta_1 > \alpha_1 > 0$ tal que

$$\alpha_1|\xi|^p \leq \mathscr{I}(x,z,\xi) \leq \beta_1|\xi|^p, \tag{2}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(iii) Existem C_1, C_2 constantes positivas tais que

$$|f(x,z)| \leq C_1|z|^\sigma + C_2, \text{ para quase todo } x \in \Omega, \forall z \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

com $\sigma + 1 < p^*$ onde

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{(N-p)}, & \text{se} \quad p < N, \\ \infty, & \text{se} \quad N \leq p. \end{cases}$$

(iv) Existe $\alpha_2 > 0$ tal que

$$a(x,z,\xi) \cdot \xi \geq \alpha_2 |\xi|^p, \tag{4}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ e

$$a(x,z,\xi) = \frac{\partial \mathscr{I}}{\partial \xi}(x,z,\xi) = \left(\frac{\partial \mathscr{I}}{\partial \xi_1}, \cdots, \frac{\partial \mathscr{I}}{\partial \xi_N} \right),$$

isto é, função Carathéodory.

(v) Existem $\beta_2 > 0$ e $h \in L^{p'}(\Omega)$, onde $p' = \frac{p}{p-1}$, tal que

$$|a(x,z,\xi)| \leq \beta_2 [h(x) + |z|^{p-1} + |\xi|^{p-1}], \tag{5}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(vi) Existe $\beta_3 > 0$ tal que

$$|b(x,z,\xi)| \leq \beta_3 |\xi|^p, \tag{6}$$

para quase todo $x \in \Omega$, e todo $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ e

$$b(x,z,\xi) = \frac{\partial \mathscr{I}}{\partial z}(x,z,\xi),$$

para quase todo $x \in \Omega$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, ou seja função Carathéodory.

Além disso, a hipótese de convexidade estrita $\xi \mapsto \mathscr{I}(x,z,\xi)$ implica que para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$ temos

$$[a(x,z,\xi) - a(x,z,\xi^*)] \cdot [\xi - \xi^*] > 0, \tag{7}$$

para todo $\xi, \xi^* \in \mathbb{R}^N$ com $\xi \neq \xi^*$.
Substituindo ξ com $t\xi$ ($t \in \mathbb{R}$) em (4), deduzimos que

$$a(x,z,0) = 0 \text{ para quase todo } x \in \Omega, \forall z \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Estudaremos o caso no qual a não-linearidade $f(x,z)$ satisfaz

$$\lim_{z\to+\infty} z^{1-p} f(x,z) = +\infty \text{ uniformemente em } x \in \Omega. \tag{9}$$

Adicionalmente a (9), supomos (3) e a seguinte condição sobre f: Existem $m > p$, $\alpha_3 > 0$ e $R_2 > 0$ tais que

$$mF(x,z) \leq zf(x,z) + \alpha_3 \lambda_1 |z|^p \tag{10}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \geq R_2$.
Vamos impor mais uma hipótese sobre $\mathscr{I}$: Existe $\alpha_4 > \alpha_3$ tal que

$$m\mathscr{I}(x,z,\xi) - a(x,z,\xi)\cdot\xi - b(x,z,\xi)z \geq \alpha_4 |\xi|^p \tag{11}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, onde m e α_3 são aqueles dados em (10). Todas as hipóteses acima, nos fornecerão condições para a demonstração da condição de compacidade, a qual enunciamos como

Proposição 0.1. *Suponhamos a validade das premissas (1) a (8), (10) e (11). Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfazendo para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$J(u_n) \leq C, \tag{12}$$

$$|u_n|_\infty \leq 2M_n, \tag{13}$$

$$\langle J'(u_n), v\rangle \leq \epsilon_n \left[\frac{|v|_\infty}{M_n} + \|v\|_{1,p}\right] \ \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \tag{14}$$

onde C é uma constante positiva, $\{M_n\} \subset \mathbb{R}^+ - \{0\}$ é uma sequência qualquer e $\{\epsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ é uma sequência convergindo para zero. Então $\{u_n\}$ é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Se, adicionalmente vale $zb(x,z,\xi) \geq 0$, então $\{u_n\}$ possui uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ a qual converge fortemente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

0.2 Solução para equação de Euler-Lagrange com termo quase-linear

Um pouco sobre a estrutura das equações de Euler-Lagrange

A ideia fundamental por trás do princípio de Dirichlet é a interpretação de um problema diferencial, escrito de forma abstrata como $F(u) = 0$, com

$$I'(0) = 0,$$

onde I é um funcional adequado definido em um conjunto de funções, e I' é a diferencial de I num sentido preciso a ser deduzido. Em outras palavras, as raízes de F são vistas como pontos críticos de I, mas que não necessariamente sejam mínimos. A equação $I'(0) = 0$ é a Equação de Euler-Lagrange à qual o funcinal I está associado. Isso motiva a seguinte

Definição 0.1. *Seja X um espaço de Banach, $U \subseteq X$ um subconjunto aberto e suponhamos que $I : U \to \mathbb{R}$ seja diferenciável. Um ponto crítico $u \in U$ de I é tal que*

$$I'(0) = 0.$$

Onde $I'(u)$ é um elemento do espaço dual X', ou seja $I'(u)v = 0$ para todo $v \in X$. Se $I'(u) = 0$ e $I(u) = c$, dizemos que u é um ponto crítico de nível c em I. Se para algum $c \in \mathbb{R}$ o conjunto $I^{-1}(c) \subset X$ contém pelo menos um ponto crítico, dizemos que c é um nível crítico de I. A equação $I'(u) = 0$ é chamada equação de Euler-Lagrange à qual o funcional I está associado.

0.2.1 Sobre como obter solução para equação de Euler-Lagrange com termo quase-linear

Aqui aplicaremos o Teorema do Passo da Montanha modificado. Assim, estudaremos a existência de soluções positivas para equações de Euler-Lagrange às quais o funcional a seguir está associado

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [a(x) + |v|^{\gamma}] \, |\nabla v|^2 \, dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} (v^+)^p \, dx,$$

onde $\gamma > 1$ e $p > 1$. Aqui estamos considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, $N > 2$, e $a(x)$ sendo uma função mensurável em quase todo ponto $x \in \Omega$ e tal que $0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta$. Enfatizaremos o caso $2^* < p < \frac{2^*}{2}(\gamma + 2)$. Considerando a equação de Euler-Lagrange à qual o funcional em questão está associado, isto é

$$\begin{cases} -\mathrm{div}([a(x) + |u|^{\gamma}]\nabla u) + \frac{\gamma}{2}|u|^{\gamma-2}u|\nabla u|^2 = u^{p-1}, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{15}$$

Iremos estudar funções não-negativas e não-triviais $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u^{\gamma-1}|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$, e tal que

$$\int_\Omega [a(x) + u^\gamma]\nabla u \nabla v \, dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^{\gamma-1}|\nabla u|^2 v \, dx = \int_\Omega u^{p-1} v \, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Quando $p > \gamma + 2$ existe um valor crítico para o expoente $p = \frac{2^*}{2}(\gamma + 2)$. Assim, nosso objetivo é estudar a existência de solução positiva para o problema (15), para isso teremos que fornecer estas restrições, isto é, $\gamma + 2 < p < \frac{2^*}{2}(\gamma + 2)$. Entretanto, a fim de aproximar o funcional para que esteja bem definido em $H_0^1(\Omega)$, será necessário impormos uma hipótese extra sobre γ, a qual será $\gamma + 2 < 2^*$.
A técnica que usaremos para resolver este problema será definir um funcional truncado, isto é, aproximaremos o funcional J por uma sequência de funcionais $J_{m,n}$ cuja parte quadrática em ∇v é limitada em relação a v. Ressaltamos que a técnica usada juntamente com a estimativa em L^∞ nos permitirá provar que quando $\gamma > 1$ então um ponto crítico, digamos $u_{\overline{m},\overline{n}}$ de $J_{\overline{m},\overline{n}}$, para $\overline{m}, \overline{n}$ suficientemente grandes, é uma solução do problema (15) sem ter que passar ao limite em m ou n.

Teorema 0.3. *Se $\gamma > 1$ é tal que $\gamma + 2 < 2^*$, e p satisfaz*

$$\gamma + 2 < p < \frac{2^*}{2}(\gamma + 2) \tag{16}$$

então existe uma solução fraca positiva $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ do problema de Dirichlet (15).

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$. Para $p > 1$, considere o funcional

$$J(u) = \int_\Omega \mathscr{I}(x, u, \nabla u) - F(x, u^+)\, dx,$$

onde $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\mathscr{I} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory, $F(x,z) = \int_0^z f(x,t)\, dt$ é uma primitiva de uma função Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,0) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Suponha:

(i) Para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$, a função

$$\xi \mapsto \mathscr{I}(x, z, \xi) \text{ é estritamente convexa em } \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

(ii) Existem $\beta_1 > \alpha_1 > 0$ tal que

$$\alpha_1 |\xi|^p \leq \mathscr{I}(x, z, \xi) \leq \beta_1 |\xi|^p, \tag{1.2}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(iii) Existem C_1, C_2 constantes positivas tais que

$$|f(x,z)| \leq C_1 |z|^\sigma + C_2, \text{ para quase todo } x \in \Omega, \forall z \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

com $\sigma + 1 < p^*$ onde

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{(N-p)}, & \text{se} \quad p < N, \\ \infty, & \text{se} \quad N \leq p. \end{cases}$$

(iv) Existe $\alpha_2 > 0$ tal que

$$a(x, z, \xi) \cdot \xi \geq \alpha_2 |\xi|^p, \tag{1.4}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ e

$$a(x,z,\xi) = \frac{\partial \mathscr{I}}{d\xi}(x,z,\xi) = \left(\frac{\partial \mathscr{I}}{\partial \xi_1}, \cdots, \frac{\partial \mathscr{I}}{\partial \xi_N}\right).$$

(v) Existem $\beta_2 > 0$ e $h \in L^{p'}(\Omega)$, onde $p' = \frac{p}{p-1}$, tal que

$$|a(x,z,\xi)| \leq \beta_2[h(x) + |z|^{p-1} + |\xi|^{p-1}], \tag{1.5}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(vi) Existe $\beta_3 > 0$ tal que

$$|b(x,z,\xi)| \leq \beta_3|\xi|^p, \tag{1.6}$$

para quase todo $x \in \Omega$, e todo $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ e

$$b(x,z,\xi) = \frac{\partial \mathscr{I}}{\partial z}(x,z,\xi),$$

para quase todo $x \in \Omega$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$.

Além disso, a hipótese de convexidade estrita $\xi \mapsto \mathscr{I}(x,z,\xi)$ implica que para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$ temos

$$[a(x,z,\xi) - a(x,z,\xi^*)] \cdot [\xi - \xi^*] > 0, \tag{1.7}$$

para todo $\xi, \xi^* \in \mathbb{R}^N$ com $\xi \neq \xi^*$.
Substituindo ξ com $t\xi$ ($t \in \mathbb{R}$) em (1.4), deduzimos que

$$a(x,z,0) = 0 \text{ para quase todo } x \in \Omega, \forall z \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Com efeito, veja que por (1.4) com $t\xi(t \in \mathbb{R}^+, t \to 0^+)$ temos que

$$a(x,z,t\xi) \cdot t\xi \geq \alpha_2|t\xi|^p$$

Assim, por um lado se $t \geq 0$ podemos reescrever a desigualdade acima cancelando um termo $t\xi$ como

$$a(x,z,t\xi) \geq \alpha_2|t\xi|^{p-1}.$$

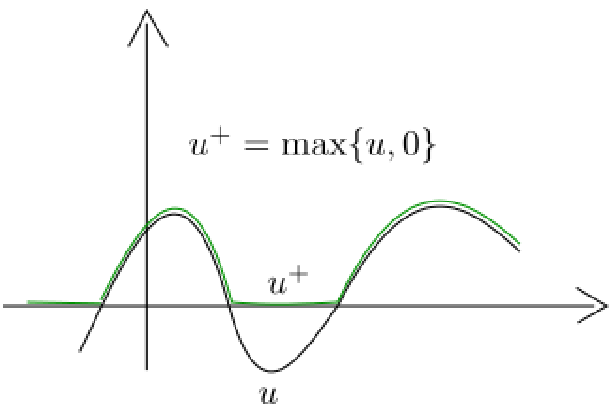
Daí, se $t \to 0^+$ então $a(x,z,0) \geq 0$. Por outro lado e analogamente, se $t \to 0^-$ então $a(x,z,t\xi) \leq \alpha_2|t\xi|^{p-1}$, assim $a(x,z,0) \leq 0$. Agora, combinando ambos temos que $a(x,z,0) = 0$ nestas condições.

1.1 Sobre as condições do funcional J não diferenciável

pelas condições de (i) a (iii), J está bem definido é contínuo e fracamente semicontínuo inferiormente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, (1.3) implica que o segundo termo que aparece em J, isto é, $\int_\Omega F(x,\cdot)\,dx \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ com derivada de Fréchet dada por

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\int_\Omega F(x,u^+)\,dx \right)', v \right\rangle &= \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega F(x,u^+ + tv)\,dx - \int_\Omega F(x,u^+)\,dx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega \left(F(x,u^+ + tv) - F(x,u^+)\right)\,dx}{t} \\
&\overset{T.V.M}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega F'(x,u^+ + \theta v)\cdot tv\,dx}{t} \\
&= \lim_{\theta\to 0} \int_\Omega F'(x,u^+ + \theta v)v\,dx \\
&= \lim_{\theta\to 0} \int_\Omega f(x,u^+ + \theta v)v\,dx \\
&= \int_\Omega f(x,u^+)v\,dx \qquad u,v \in W_0^{1,p}(\Omega),
\end{aligned}$$

onde usamos o teorema do valor médio na terceira igualdade e o teorema da convergência dominada na última igualdade.



Sabe-se que sob estas condições o funcional J, não é Gâteaux diferenciável, devido ao seu primeiro termo $\int_\Omega \mathscr{I}(x,u,\nabla u)\,dx$ não o ser também (ver referência [18], páginas 38 e 39). Entretanto, o primeiro termo possui derivada direcional em cada $u \in$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ ao longo de qualquer direção $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, a qual é dada por

$$\left\langle \left(\int_\Omega \mathscr{I}(x,u,\nabla u)\, dx \right)', v \right\rangle = \int_\Omega a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega b(x,u,\nabla u) v \, dx.$$

Consequentemente, J possui derivada direcional

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega b(x,u,\nabla u) v \, dx - \int_\Omega f(x,u^+) v \, dx$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Além disso, $\langle J'(\cdot), v\rangle$ é contínuo em $W_0^{1,p}(\Omega)$ por $(3), (5)$ e (6).

1.2 Resultados prévios ao Passo da Montanha modificado

Definição 1.1. *A função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é dita ser um ponto crítico de J se*

$$\langle J'(u), v\rangle = 0 \text{ para todo } v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{1.9}$$

O seguinte resultado será importante para o lema posterior.

Lema 1.1. *Sejam $\alpha, \beta > 0$ e $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida por $\varphi(z) = ze^{\eta z^2}$, com $\eta > (\beta/2\alpha)^2$. Então $\alpha\varphi'(z) - \beta|\varphi(z)| > \frac{1}{2}\alpha$ para todo $z \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Dado

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \varphi(z) = ze^{\eta z^2}, \end{array}$$

onde $\eta > (\beta/2\alpha)^2$, equivalentemente $-\eta < -\frac{\beta^2}{(2\alpha)^2}$ para $\alpha, \beta > 0$. Queremos provar que

$$\alpha\varphi'(z) - \beta|\varphi(z)| > \frac{1}{2}\alpha. \tag{a}$$

Note que $\varphi'(z) = e^{\eta z^2} + 2z^2\eta e^{\eta z^2} = e^{\eta z^2}(1 + 2z^2\eta)$ e substituindo estas observações do lado esquerdo em (a), temos

$$\begin{aligned} \alpha e^{\eta z^2}(1 + 2z^2\eta) - \beta|z|e^{\eta z^2} &= e^{\eta z^2}(\alpha + 2\alpha z^2\eta - \beta|z|) \\ &\geq \alpha + 2\alpha z^2\eta - \beta|z| \text{ pois } e^{\eta z^2} \geq 1, \ \forall z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

desde que $\alpha + 2\alpha z^2\eta - \beta|z| \geq 0$.

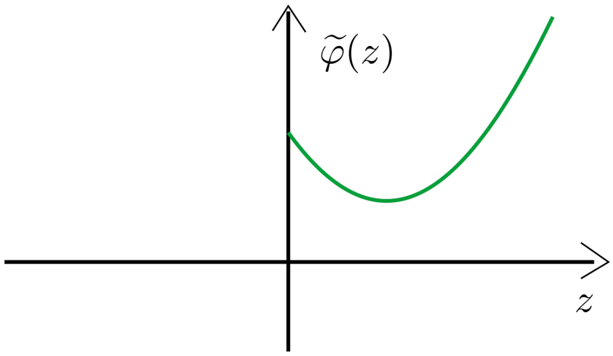
Afirmamos que

$$\alpha + 2\alpha z^2\eta - \beta|z| - \frac{1}{2}\alpha > 0.$$

Com efeito, note que se $z \leq 0$, claramente é veradeiro. Suponhamos que $z > 0$, assim temos que $\alpha + 2\alpha z^2\eta - \beta z - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 2\alpha z^2\eta - \beta z$ ou seja, se visualizarmos como uma equação do segundo grau

$$\widetilde{\varphi}(z) = 2\alpha\eta z^2 - \beta z + \frac{1}{2}\alpha, \ z > 0.$$

Como $2\alpha\eta > 0$ o gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima e deve existir ponto de mínimo.



Assim, temos que $\widetilde{\varphi}'(z) = 4\alpha\eta z - \beta = 0 \implies z = \frac{\beta}{4\alpha\eta}$, consequentemente

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\left(\frac{\beta}{4\alpha\eta}\right) &= 2\alpha\eta\frac{\beta^2}{(4\alpha\eta)^2} - \beta\left(\frac{\beta}{4\alpha\eta}\right) + \frac{1}{2}\alpha \\
&= 2\alpha\eta\frac{\beta^2}{(4\alpha\eta)^2} - \frac{\beta^2(4\alpha\eta)}{(4\alpha\eta)^2} + \frac{1}{2}\alpha \\
&= -\frac{\beta^2\alpha}{8\alpha\eta\alpha} + \frac{1}{2}\alpha \\
&= -\frac{\beta^2}{(2\alpha)^2}\frac{\alpha}{2\eta} + \frac{1}{2}\alpha \\
&> -\frac{\eta}{\eta}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Então, $\widetilde{\varphi}(z) \geq \widetilde{\varphi}\left(\frac{\beta}{4\alpha\eta}\right) > 0, \ \forall \ z \geq 0$, isto é,

$$2\alpha\eta z^2 - \beta|z| + \frac{1}{2}\alpha > 0, \ \forall \ z \in \mathbb{R}.$$

$\square$

No resultado a seguir provaremos que para todo ponto crítico $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de J se também ocorre $u \in L^\infty(\Omega)$ então u é não-negativo.

Lema 1.2. *Suponhamos que valem (1.1) a (1.6). Se* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *é um ponto crítico de* J *então* $u \geq 0$.

Demonstração. Tome $\varphi(z) = ze^{\eta z^2}$ como no lema anterior, onde $\eta > \left(\frac{\beta_3}{2\alpha_2}\right)^2$, α_2 é definido como em (1.4) e β_3 é definido como em (1.6).
Considere ainda $v = -\varphi(u^-)$ como função teste. Se u é ponto crítico então segue de (1.9) que

$$0 = \langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v\, dx + \int_\Omega b(x,u,\nabla u)v\, dx - \int_\Omega f(x,u^+)v\, dx$$

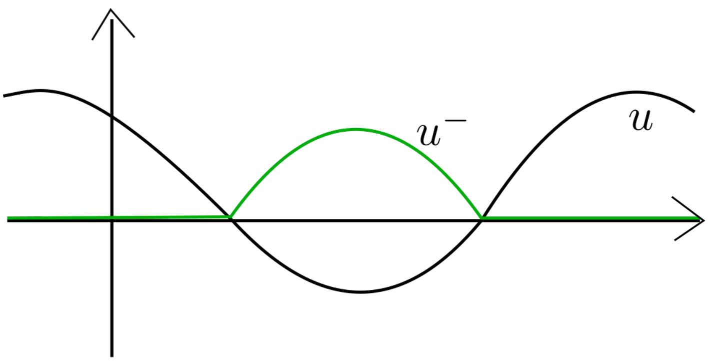
Como $\nabla v = -\varphi'(u^-)\nabla u^-$ e $\varphi'(z) = e^{\eta z^2} + 2\eta z^2 e^{\eta z^2} > 0$. Substituíndo acima, temos

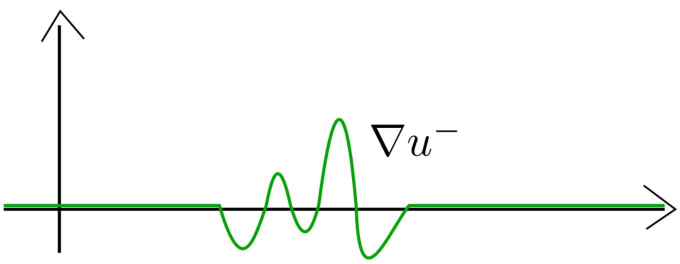
$$0 = -\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\varphi'(u^-)\nabla u^-\, dx - \int_\Omega b(x,u,\nabla u)\varphi(u^-)\, dx + \int_\Omega f(x,u^+)\varphi(u^-)\, dx.$$

Agora estudaremos a função sinal (ver notação 6).
No caso de $\varphi(u^-)$ e ∇u^-, como $u^- = \max\{0, -u\}$ vale o seguinte:

(I) $u > 0 \implies u^- = 0$;

(II) $u < 0 \implies u^- = -u > 0$;





Entretanto, no caso de $f(x,u^+)$, como $u^+ = \max\{0,u\}$ e daí vale:

$(\widetilde{I})$ $u > 0 \implies u^+ = +u > 0$;

$(\widetilde{II})$ $u < 0 \implies u^+ = 0$.

Primeiro note que combinando as possibilidades (I) e $(\widetilde{I})$ e também $(\widetilde{II})$ com (II) temos que $f \cdot \varphi \equiv 0$ e daí o último termo desaparece sobrando apenas

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\varphi'(u^-)\nabla u^- \, dx = -\int_\Omega b(x,u,\nabla u)\varphi(u^-) \, dx,$$

e considerando as possibilidades acima, quando $u > 0$ temos $u^- = 0$, restando apenas

$$\int_\Omega a(x,u^-,\nabla u^-)\varphi'(u^-)\nabla u^- \, dx = -\int_\Omega b(x,u^-,\nabla u^-)\varphi(u^-) \, dx.$$

Note que por (1.4) obtemos que

$$\int_\Omega a(x,u^-,\nabla u^-)\varphi'(u^-)\nabla u^- dx \geq \alpha_2 \int_\Omega \varphi'(u^-)|\nabla u^-|^p \, dx,$$

enquanto que, por (1.6)

$$-\int_\Omega b(x,u^-,\nabla u^-)\varphi(u^-) \, dx \leq \int_\Omega \beta_3 |\nabla u^-|^p \varphi(u^-) \, dx$$

logo,

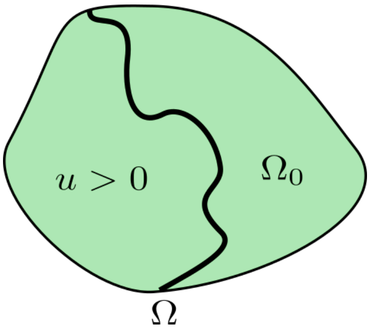
$$\alpha_2 \int_\Omega \varphi'(u^-)|\nabla u^-|^p \, dx \leq \int_\Omega \beta_3 |\nabla u^-|^p \varphi(u^-) \, dx.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \beta_3 |\nabla u^-|^p \varphi(u^-) \, dx - \int_\Omega \alpha_2 |\nabla u^-|^p \varphi'(u^-) \, dx \geq 0 \\ \Longrightarrow &\int_\Omega |\nabla u^-|^p \left[\beta_3 \varphi(u^-) - \alpha_2 \varphi'(u^-)\right] \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando o lema anterior $\beta_3 \varphi(u^-) - \alpha_2 \varphi'(u^-) < -\frac{1}{2}\alpha < 0$, temos

$$\begin{aligned} & 0 \geq -\int_\Omega |\nabla u^-|^p \frac{1}{2}\alpha \, dx \geq 0 \\ \Longrightarrow & -\int_\Omega |\nabla u^-|^p \frac{1}{2}\alpha \, dx = 0 \\ \Longrightarrow & |\nabla u^-|^p = 0 \\ \Longrightarrow & \nabla u^- = 0 \\ \Longrightarrow & u^- \text{ é constante} \end{aligned}$$



Entretanto, $u \equiv 0$ em $\partial\Omega_0$, onde $\Omega_0 = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$, assim $u^- = 0$ em Ω, portanto $u \geq 0$ em Ω. □

Observemos explicitamente que a hipótese adicional de que $u \in L^\infty(\Omega)$ é essencial na demonstração do lema anterior para que possamos tomar $v = -\varphi(u^-)$ como função teste em (1.9), pois assim $v = -\varphi(u^-)$ será limitada. Outra informação suplementar é que a limitação de um ponto crítico em $L^\infty(\Omega)$ pode ser obtida se impusermos uma condição adicional sobre o termo $b(x, z, \xi)$ (ver (1.6)). Especificamente temos:

Lema 1.3. *Suponhamos a validade das premissas de (1.1) a (1.6), (1.8) e também que existe $R_1 > 0$ tal que*

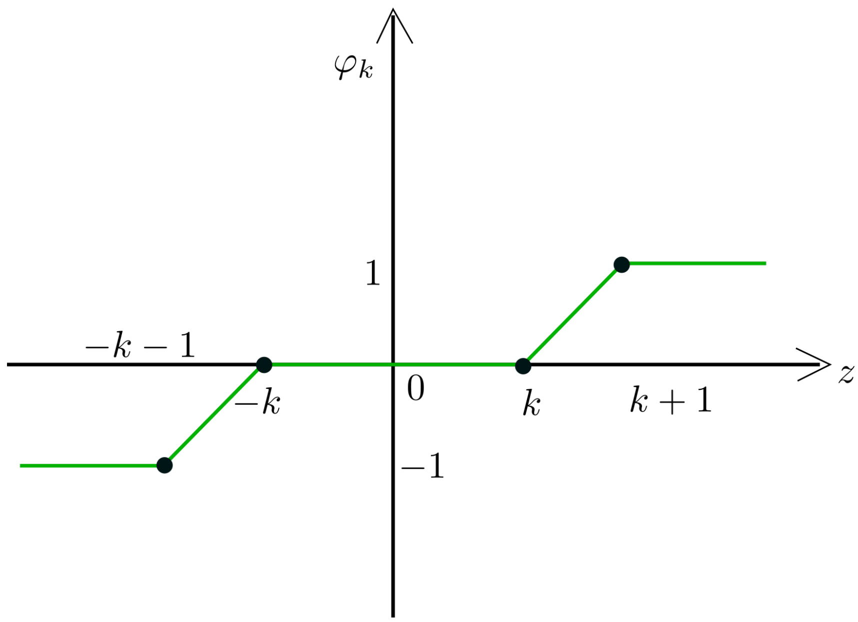
$$zb(x, z, \xi) \geq 0, \tag{1.10}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ e $z \in \mathbb{R}$ com $|z| \geq R_1$. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ um ponto crítico de J. Então $u \in L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Para $k > 0$ considere as funções reais φ_k e G_k definidas em $\mathbb{R}$ como a seguir

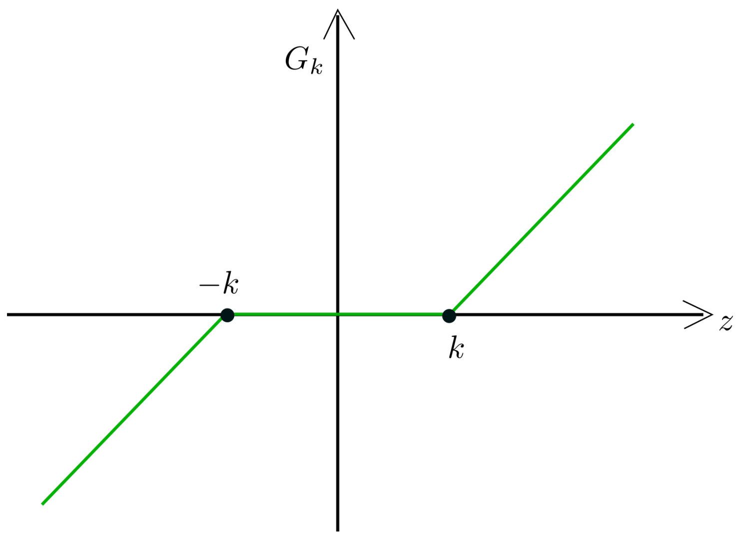
$$\varphi_k(z) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad z < -k-1, \\ z+k, & \text{se} \quad -k-1 \leq z \leq -k, \\ 0, & \text{se} \quad -k \leq z \leq k, \\ z-k, & \text{se} \quad k < z \leq k+1, \\ 1, & \text{se} \quad z > k+1, \end{cases}$$

onde o gráfico de φ_k é



$$G_k(z) = \begin{cases} z+k, & \text{se} \quad z < -k \\ 0, & \text{se} \quad -k \leq z \leq k \\ z-k, & \text{se} \quad z > k \end{cases}$$

onde o gráfico de G_k é



Afirmação 1.1. *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ então $\varphi_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração da afirmação 1.1. De fato, note que $|\varphi_k(u)| \leq 1$ basta checar o gráfico, assim temos que $\varphi_k(u) \in L^\infty(\Omega)$. Por outro lado, temos

$$\int_\Omega |\varphi_k(u)|^p \, dx \leq \int_\Omega 1 \, dx < \infty.$$

Agora note que,

$$\varphi_k'(u)=\begin{cases}0, & \text{se} \quad z<-k-1,\\ 1, & \text{se} \quad -k-1\leq z<-k,\\ 0, & \text{se} \quad -k\leq z\leq k,\\ 1, & \text{se} \quad k<z\leq k+1,\\ 0, & \text{se} \quad z>k+1,\end{cases}$$

e como $\nabla\varphi_k(u)=\varphi_k'(u)\nabla u$, substituindo os valores de φ_k' em $|\nabla\varphi_k(u)|=|\varphi_k'(u)||\nabla u|$ temos $|\nabla[\varphi_k(u)]|=|\varphi_k'(u)||\nabla u|\leq|\nabla u|$, logo

$$\int_\Omega|\nabla[\varphi_k(u)]|^p\,dx\leq\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx<\infty,$$

logo, $\varphi_k(u)\in W_0^{1,p}(\Omega)$, e como $\varphi_k(u)\in L^\infty(\Omega)$ então $\varphi_k(u)\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. E assim, está provada a afirmação 1.1.

Como u é ponto crítico, tomando $v=\varphi_k(u)\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ como função teste em (1.9) temos

$$\begin{aligned}0&=\langle J'(u),v\rangle\\ &=\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v\,dx+\int_\Omega b(x,u,\nabla u)v\,dx-\int_\Omega f(x,u^+)v\,dx\\ &=\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla[\varphi_k(u)]\,dx+\int_\Omega b(x,u,\nabla u)\varphi_k(u)\,dx-\int_\Omega f(x,u^+)\varphi_k(u)\,dx\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega f(x,u^+)\varphi_k(u)\,dx=\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\left[\varphi_k(u)\right]\,dx+\int_\Omega b(x,u,\nabla u)\varphi_k(u)\,dx \qquad (b)$$

Afirmação 1.2. *O termo* $\int_\Omega b(x,u,\nabla u)\varphi_k(u)\,dx\geq 0.$

Demonstração da afirmação 1.2. De fato, de (1.10) existe $R_1>0$ tal que $zb(x,z,\xi)\geq 0$ para quase todo $x\in\Omega$ e todo $\xi\in\mathbb{R}^N$ e $z\in\mathbb{R}$ com $|z|\geq R_1$. Então se tomarmos $k>R_1$ e se definirmos

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\{x\in\Omega:|u(x)|<k\},\\ \Omega_2&=\{x\in\Omega:|u(x)|\geq k\},\end{aligned} \qquad (\bar{b})$$

então temos que

$$\int_{\Omega} b(x,u,\nabla u)\varphi_k(u)\,dx = \int_{\Omega_1} b(x,u,\nabla u)\varphi_k(u)\,dx + \int_{\Omega_2} b(x,u,\nabla u)\varphi_k(u)\,dx \geq 0,$$

pois

$$\int_{\Omega_1} b(x,u,\nabla u)\varphi_k(u)\,dx = 0,$$
$$\int_{\Omega_2} b(x,u,\nabla u)\varphi_k(u)\,dx \geq 0,$$

pela definição de φ_k, veja gráfico. Logo a afirmação 1.2 está verificada.

Reescrevendo (b) usando a afirmação acima, temos

$$\int_{\Omega} a(x,u,\nabla u)\nabla\left[\varphi_k(u)\right]\,dx \leq \int_{\Omega} f(x,u^+)\varphi_k(u)\,dx \qquad (c)$$

Afirmação 1.3. *$\nabla[\varphi_k(u)] = \nabla u$ se $u(x) \in [-k-1,k]$ ou $u(x) \in [k,k+1]$ (ver gráfico de φ_k).*

Demonstração da afirmação 1.3. Com efeito, por um lado temos

$$\nabla\left[\varphi_k(u)\right] = \varphi_k'(u)\nabla u = \begin{cases} 1\cdot\nabla u, & \text{se } u(x)\in[-k-1,k] \text{ ou } \; u(x)\in[k,k+1] \\ 0\cdot\nabla u, & \quad\text{caso contrário} \end{cases}$$

juntando o fato acima com (1.8), isto é com $a(x,z,0) = 0$ em quase todo ponto $x \in \Omega$, segue que $\nabla\left[\varphi_k(u)\right] = \nabla u$. Como queríamos.

Substituindo $\nabla\left[\varphi_k(u)\right] = \nabla u$ em (c), temos

$$\int_{\Omega} a\left(x,u,\nabla\left[\varphi_k(u)\right]\right)\nabla\left[\varphi_k(u)\right]\,dx \leq \int_{\Omega} f(x,u^+)\varphi_k(u)\,dx$$

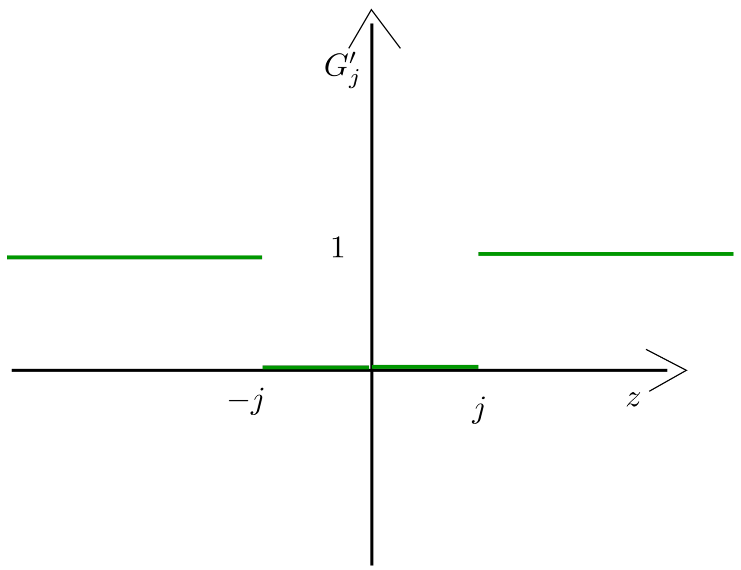
logo, de (1.4) segue que

$$\alpha_2\int_{\Omega} |\nabla\varphi_k(u)|^p\,dx \leq \int_{\Omega} f(x,u^+)\varphi_k(u)\,dx. \qquad (d)$$

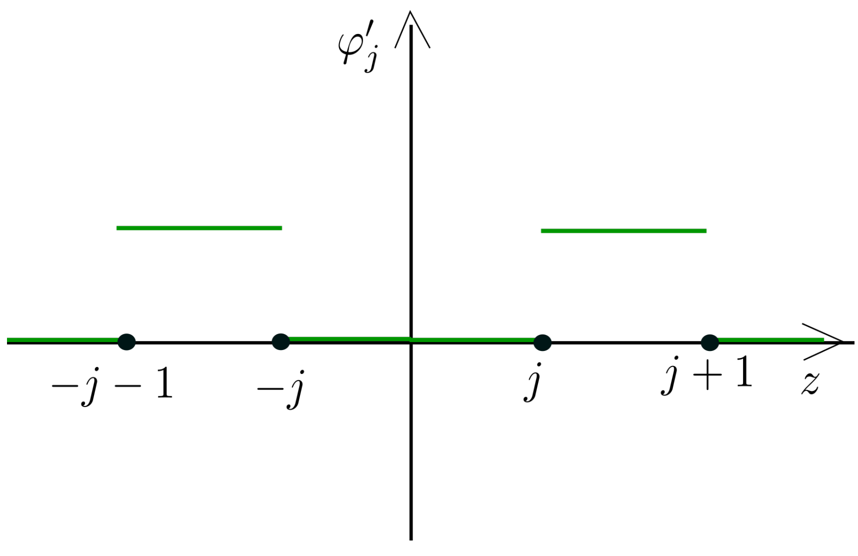
Agora, seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $j > R_1$. Podemos inferir da função G_k que

$$\nabla\left[G_k(z)\right] = G_k'(z)\nabla z = \begin{cases} 1 \cdot \nabla z & \text{se} \quad z \leq -k, \\ 0 \cdot \nabla z & \text{se} \quad -k \leq z \leq k, \\ 1 \cdot \nabla z & \text{se} \quad k \leq z, \end{cases}$$

cujo gráfico é



Além disso, o gráfico de φ_j' é



Consequentemente, somando as desigualdades em (d) obtemos que

$$\begin{aligned}\alpha_2 \int_\Omega \left|\nabla\left[G_j(u)\right]\right|^p \, dx =& \alpha_2 \sum_{k=j}^{+\infty} \int_\Omega \left|\nabla\left[\varphi_k(u)\right]\right|^p \, dx \\ \leq& \sum_{k=j}^{+\infty} \int_\Omega f(x,u^+)\varphi_k(u) \, dx \\ =& \int_\Omega f(x,u^+) G_j(u) \, dx.\end{aligned}$$

Usando (1.3) e o fato que $|G_j(u)| \leq |u|$, obtemos que

$$\begin{aligned}\alpha_2 \int_\Omega \left|\nabla\left[G_j(u)\right]\right|^p \, dx \leq& \int_\Omega f(x,u^+)|u| \, dx \\ \leq& \int_{\Omega_j} \left(C_1|u|^\sigma + C_2\right)|u| \, dx\end{aligned}$$

onde $\Omega_j = \{x \in \Omega : |u(x)| > j > R_1\}$. Finalmente, segue do teorema A.7, que $G_j(u)$ é limitada superiormente. E, decorre da definição de G_j que $u(x)$ é limitada superiormente. Logo, como $\max\limits_{\Omega} u(x) < +\infty$ segue que $u \in L^\infty(\Omega)$. $\square$

Notemos que os pontos críticos $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de J são soluções não-negativas do problema de valor de contorno

$$-\text{div } a(x,u,\nabla u) + b(x,u,\nabla u) = f(x,u), \tag{P}$$

onde $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, no sentido que

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v \, dx + \int_\Omega b(x,u,\nabla u)v \, dx = \int_\Omega f(x,u)v \, dx, \tag{1.11}$$

para toda função teste $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Além disso, note que $u = 0$ é uma solução trival do problema (P) uma vez que vale $f(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Capítulo 2

Passo da Montanha e Compacidade

Primeiramente, forneceremos uma versão modificada do clássico Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz [2] com o objetivo de estudar a existência de pontos críticos para funcionais não diferenciáveis em todas as direções. Especificamente, provaremos um teorema do tipo minimax o qual será deduzido da versão clássica do Teorema do Passo da Montanha. Na literatura existem diferentes versões deste teorema, alguns se baseiam no Princípio Variacional de Ekeland como será também a nossa abordagem.

2.1 Teorema do Passo da Montanha para funcionais não diferenciáveis

Teorema 2.1. *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e $Y \subset X$ um subespaço, o qual também é um espaço de Banach munido da norma $\|\cdot\|_Y$ tal que $\|y\|_X \leq \|y\|_Y$ para todo $y \in Y$. Suponha que $J : X \to \mathbb{R}$ é um funcional sobre X tal que $J\big|_{(Y,\|\cdot\|_Y)}$ é contínuo e satisfaz*

a) J tem uma derivada direcional $\langle J'(u), v\rangle$ em cada $u \in X$ ao longo de qualquer direção $v \in Y$.

b) Para $u \in X$ fixado, a função $\langle J'(u), v\rangle$ é linear em $v \in Y$, e para $v \in Y$ fixado, a função $\langle J'(u), v\rangle$ é contínua em $u \in X$.

Seja K um espaço métrico compacto, $K_0 \subset K$ um subconjunto fechado e $\gamma_0 : K_0 \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ uma aplicação contínua. Considere o conjunto

$$\Gamma = \left\{ \gamma : K \to (Y, \|\cdot\|_Y) : \gamma \text{ é contínua e } \gamma\big|_{K_0} = \gamma_0 \right\}.$$

Se

$$c \equiv \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in K} J(\gamma(t)) > c_1 \equiv \max_{t\in K_0} J(\gamma_0(t)), \tag{2.1}$$

então, para cada $\epsilon > 0$ *e* $\gamma \in \Gamma$ *tal que*

$$c \leq \max_{t\in K} J(\gamma(t)) \leq c + \frac{1}{2}\epsilon, \tag{2.2}$$

existe $\overline{\gamma}_\epsilon \in \Gamma$ *e* $u_\epsilon \in \overline{\gamma}_\epsilon(K) \subset Y$ *satisfazendo*

$$c \leq \max_{t\in K} J(\overline{\gamma}_\epsilon(t)) \leq \max_{t\in K} J(\gamma(t)) \leq c + \frac{1}{2}\epsilon,$$

$$\max_{t\in K} \|\overline{\gamma}_\epsilon(t) - \gamma(t)\|_Y \leq \sqrt{\epsilon},$$

$$c - \epsilon \leq J(u_\epsilon) \leq c + \frac{1}{2}\epsilon,$$

$$|\langle J'(u_\epsilon), v\rangle| \leq \sqrt{\epsilon}\|v\|_Y,\ \forall\, v \in Y.$$

Demonstração. Começaremos com a seguinte

Afirmação 2.1. Γ *é um espaço métrico completo munido com a distância uniforme*

$$d_\Gamma(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{t\in K} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_Y,$$

com $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.

Demonstração da afirmação 2.1. Com efeito, dados $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$, vejamos que é espaço métrico

(d_1) $\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_Y \geq 0$ então com mais razão ainda temos $\max_{t\in K} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_Y \geq 0$, portanto $d_\Gamma(\gamma_1, \gamma_2) \geq 0$;

(d_2)

$$\begin{aligned} d_\Gamma(\gamma_1, \gamma_2) &= \max_{t\in K} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_Y \\ &= \max_{t\in K} \|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\|_Y \\ &= d_\Gamma(\gamma_2, \gamma_1); \end{aligned}$$

(d_3)

$$
\begin{aligned}
d_\Gamma(\gamma_1,\gamma_3) &= \max_{t\in K}\|\gamma_1(t)-\gamma_3(t)\|_Y\\
&\overset{D.T.}{=} \max_{t\in K}\left(\|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)\|_Y+\|\gamma_2(t)-\gamma_3(t)\|_Y\right)\\
&\leq \max_{t\in K}\|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)\|_Y+\max_{t\in K}\|\gamma_2(t)-\gamma_3(t)\|_Y\\
&= d_\Gamma(\gamma_1,\gamma_2)+d_\Gamma(\gamma_1,\gamma_3);
\end{aligned}
$$

(d_4)

$$
\begin{aligned}
0 =& d_\Gamma(\gamma_1,\gamma_2)\\
=& \max_{t\in K}\|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)\|_Y\\
&\iff 0=\|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)\|_Y,\ \forall t\in K\\
&\iff \gamma_1(t)=\gamma_2(t),\ \forall\, t\in K\\
&\iff \gamma_1=\gamma_2.
\end{aligned}
$$

Resta provar que é completo.
Sabemos que $C(K,Y)$ é espaço métrico completo munido da distância uniforme $d(\gamma,y)<+\infty$ (ver [27], página 118). É claro que $\Gamma\subset C(K,Y)$. Além disso, temos $\gamma:K\to Y$ é contínua e Γ é munido da distância

$$d_\Gamma(\gamma_1,\gamma_2)=\max_{t\in K}\|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)\|_Y.$$

Provaremos que Γ é um subconjunto fechado de $C(K,Y)$ e isso completará toda a prova se usarmos a proposição A.1 (ver apêndice). De fato, tomando (γ_n) tal que $\gamma_n\longrightarrow\gamma$ para $\gamma\in C(K,Y)$, note que $\gamma_{|K_0}=\gamma_0$ se, e somente se, $\gamma(t)=\gamma_0(t)$ para todo $t\in K_0$, o que é verdade pois

$$
\begin{aligned}
\gamma(t) &= \lim_{n\to\infty}\gamma_n(t)\\
&= \lim_{n\to\infty}\gamma_0(t)\\
&= \gamma_0(t),\ \forall\, t\in K_0
\end{aligned}
$$

e como $\gamma_n(t)=\gamma_0(t)$ para todo $t\in K_0$. Segue que $\gamma\in\Gamma$, logo Γ é fechado em $C(K,Y)$. Finalmente, sabendo que um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Portanto, Γ é completo.

Considere Φ definida sobre Γ por

$$\Phi(\gamma) = \max_{t \in K} J(\gamma(t)) \ \forall \ \gamma \in \Gamma.$$

Afirmação 2.2. *O funcional Φ é semicontínuo inferiormente.*

Demonstração da afirmação 2.2. Primeiramente notemos que Φ está bem definido, pois J e γ são contínuos, logo $J \circ \gamma$ é uma aplicação contínua, e como K é compacto o máximo é atingido.

Mostremos que Φ é semicontínuo inferiormente.

Usaremos a definição B.1 (ver apêndice), ou seja, para mostrarmos que Φ é semicontínua inferiormente, mostraremos que $\Phi^{-1}(-\infty, \lambda] = [\Phi \leq \lambda]$ é fechado em Γ, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Com efeito, seja $(\gamma_n) \subset [\Phi \leq \lambda]$ com $\gamma_n \to \gamma$ em Γ. Com isso temos

$$\begin{aligned} & \Phi(\gamma_n) \leq \lambda \\ \Longrightarrow & \max_{t \in K} J \circ \gamma_n(t) \leq \lambda \\ \Longrightarrow & J \circ \gamma_n(t) \leq \lambda, \ \forall \ t \in K. \end{aligned} \tag{e}$$

Note que se $\gamma_n \to \gamma \in \Gamma$ então $\max\limits_{t \in K} \|\gamma_n(t) - \gamma(t)\| \to 0$, isto é $\|\gamma_n(s) - \gamma(s)\| \leq \max \|\gamma_n(t) - \gamma(t)\| \to 0$ implica que

$$\gamma_n(s) \to \gamma(s), \ \forall \ s \in K. \tag{f}$$

Como J é contínuo, segue de (e) e (f) que

$$\begin{aligned} J \circ \gamma(t) &= \lim_{n \to \infty} J \circ \gamma_n(t) \leq \lambda, \ \forall \ t \in K \\ \Longrightarrow & \max_{t \in K} J \circ \gamma(t) = \Phi(\gamma) \leq \lambda \\ \Longrightarrow & \gamma \in [\Phi \leq \lambda]. \end{aligned}$$

Portanto $[\Phi \leq \lambda]$ é fechado, e com isso finalizamos a prova da afirmação 2.2

Perceba que por (2.1) o funcional Φ é limitado inferiormente, isto é

$$c_1 \equiv \max_{t \in K_0} J(\gamma_0(t)) < \inf_{\gamma \in \Gamma} \Phi(\gamma) \equiv c.$$

Logo, aplicando o princípio variacional de Ekeland B.4 (apêndice), deduzimos que para todo $\epsilon > 0$, tal que, sem perda de generalidade, pode ser tomado como $\epsilon < c - c_1$ e $\gamma \in \Gamma$ satisfazendo (2.2), existe $\overline{\gamma}_\epsilon \in \Gamma$ satisfazendo

1. $c \leq \Phi(\overline{\gamma}_\epsilon) \leq \Phi(\gamma) \leq c + \frac{1}{2}\epsilon,$

2. $d_\Gamma(\overline{\gamma}_\epsilon, \gamma) = \max_{t \in K} \|\overline{\gamma}_\epsilon(t) - \gamma(t)\|_Y \leq 1,$

3. $\Phi(\overline{\gamma}_\epsilon) < \Phi(\vartheta) + \epsilon d_\Gamma(\overline{\gamma}_\epsilon, \vartheta), \ \forall\, \vartheta \in \Gamma$

o qual pelo corolário B.1 é equivalente a

$$\begin{aligned} & c \leq \Phi(\overline{\gamma}_\epsilon) \leq \Phi(\gamma) \leq c + \frac{1}{2}\epsilon, \\ & d_\Gamma(\overline{\gamma}_\epsilon, \gamma) = \max_{t \in K} \|\overline{\gamma}_\epsilon(t) - \gamma(t)\|_Y \leq \sqrt{\epsilon}, \\ & \Phi(\overline{\gamma}_\epsilon) < \Phi(\vartheta) + \sqrt{\epsilon} d_\Gamma(\overline{\gamma}_\epsilon, \vartheta), \ \forall\, \vartheta \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.3}$$

A demonstração estará concluída se provarmos a existência de

$$t_\epsilon \in \mathscr{T} = \{t \in K : c - \epsilon \leq J(\overline{\gamma}_\epsilon(t))\}$$

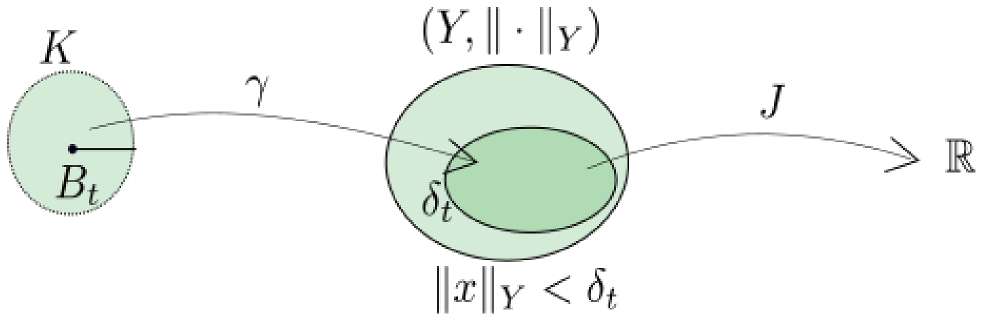
tal que, se $u_\epsilon = \overline{\gamma}_\epsilon(t_\epsilon)$, então $|\langle J'(u_\epsilon), v\rangle| \leq \sqrt{\epsilon}\|v\|_Y, \forall\, v \in Y$.
Argumentando por contradição: suponhamos que para todo $t \in \mathscr{T}$ existe $v_t \in Y$ tal que $|\langle J'(\overline{\gamma}_\epsilon(t)), v_t\rangle| > \sqrt{\epsilon}\|v_t\|_Y$. Ou seja,

$$\begin{aligned} & \langle J'(\overline{\gamma}_\epsilon(t)), v_t\rangle > \sqrt{\epsilon}\|v_t\|_Y \\ & ou \\ & \langle J'(\overline{\gamma}_\epsilon(t)), v_t\rangle < -\sqrt{\epsilon}\|v_t\|_Y. \end{aligned}$$

Observe que é suficiente provar para esta última possibilidade, pois a primeira opção pode ser obtida da última substituindo-se v_t por $-v_t$. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $\|v_t\|_Y = 1$, pois caso contrário, se $\|v_t\|_Y > 1$ podemos dividir por $\|v_t\|_Y$.
Pela hipótese $b)$ para cada $t \in \mathscr{T}$ existe $\delta_t > 0$ e uma bola aberta $B_t \in K$ com $t \in B_t$ tal que

$$\langle J'\left(\overline{\gamma}_\epsilon(s) + u\right), v_t\rangle < -\sqrt{\epsilon}, \tag{2.4}$$

para todo $s \in B_t$ e $u \in X$ tais que $\|u\|_X < \delta_t$.

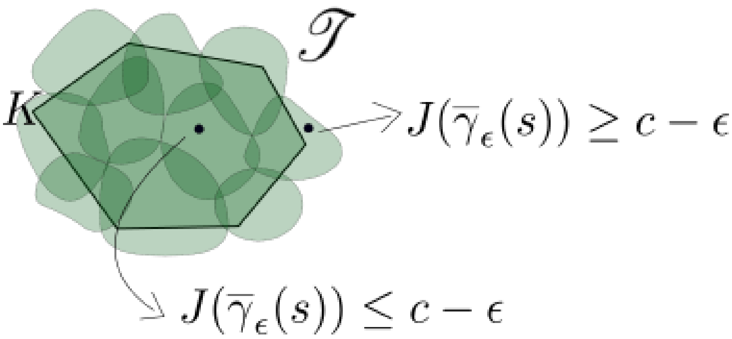


Como a desigualdade é estrita, podemos adicionar $u \in X$ como um tipo de perturbação e ainda continuar sendo contínua.
Dado que $\mathscr{T}$ é compacto, existem $\delta_{t_1}, \cdots, \delta_{t_k}$ números positivos reais e $B_{t_1}, \cdots, B_{t_k}$ bolas abertas em K tais que $t_i \in B_{t_i}$ para todo $i = 1, \cdots, k$ e

$$\mathscr{T} \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_{t_j}.$$

Considere $\gamma^* = \overline{\gamma}_\epsilon + \delta\psi \sum_{j=1}^{k} \psi_j v_{t_j}$ onde $\delta = \min\{\delta_{t_1}, \delta_{t_2}, \cdots, \delta_{t_k}\}$ e $\psi, \psi_j \in C(K, [0,1])$ são funções satisfazendo

$$\psi(s) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad J(\overline{\gamma}_\epsilon(s)) \geq c, \\ 0, & \text{se} \quad J(\overline{\gamma}_\epsilon(s)) \leq c - \epsilon, \end{cases}$$



$$\psi_j(s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{dist}(s, K - B_{t_j})}{\sum_{i=1}^{k} \operatorname{dist}(s, K - B_{t_i})}, & \text{se} \quad s \in \bigcup_{i=1}^{k} B_{t_i}, \\ 0, & \text{se} \quad s \in K - \bigcup_{k=1}^{k} B_{t_i}. \end{cases}$$

Afirmação 2.3. *Dado $\epsilon < c - c_1$ temos que $\gamma^* \in \Gamma$.*

Demonstração da afirmação 2.3. De fato, seja $t_0 \in K_0$ queremos mostrar que $\gamma^*(t_0) =$

$\gamma_0(t_0)$. O que é verdade, pois

$$\begin{aligned}\gamma^*(t_0) &= \overline{\gamma}_\epsilon(t_0) + \delta\psi(t_0)\sum_{j=1}^{k}\psi_j(t_0)v_{t_j}\\ &= \gamma_0(t_0) + 0,\end{aligned}$$

onde na última igualdade, usamos que devido a (2.1), temos $J(\gamma_0(t_0)) \leq c_1 < c$, pois por hipótese $\epsilon < c - c_1 \implies c - \epsilon > c - c + c_1 = c_1$. Logo, $J(\overline{\gamma}_\epsilon(t_0)) = J(\gamma_0(t_0)) \leq c - \epsilon$ e assim $\psi(s) = 0$, como queríamos.

Observe também que $\psi(s) = 0$ para todo $s \in K - \mathscr{T}$. Consequentemente, $\gamma^*(s) = \overline{\gamma}_\epsilon(s)$ e $J(\gamma^*(s)) = J(\overline{\gamma}_\epsilon(s)) < c - \epsilon$ para todo $s \in K - \mathscr{T}$.
Por outro lado, se $s \in \mathscr{T}$, a hipótese $a)$ e o teorema do valor médio A.1 no apêndice, implicam a existência de $\theta \in (0,1)$ tais que

$$\begin{aligned}J(\gamma^*(s)) - J(\overline{\gamma}_\epsilon(s)) &= \left\langle J'\left(\overline{\gamma}_\epsilon(s) + \theta\delta\psi(s)\sum_{j=1}^{k}\psi_j(s)v_{t_j}\right), \delta\psi(s)\sum_{j=1}^{k}\psi_j(s)v_{t_j}\right\rangle\\ &= \delta\psi(s)\sum_{j=1}^{k}\psi_j(s)\left\langle J'\left(\overline{\gamma}_\epsilon(s) + \theta\delta\psi(s)\sum_{j=1}^{k}\psi_j(s)v_{t_j}\right), v_{t_j}\right\rangle, \text{ por } (b)\\ &= -\delta\psi(s)\sqrt{\epsilon}\sum_{j=1}^{k}\psi_j(s), \text{ por } (2.4)\\ &= -\delta\psi(s)\sqrt{\epsilon}\frac{\sum_{j=1}^{k}\text{dist}(s, K - B_{t_j})}{\sum_{j=1}^{k}\text{dist}(s, K - B_{t_j})}\\ &= -\delta\psi(s).\sqrt{\epsilon} \qquad (g)\end{aligned}$$

Logo, se $s \in K$ é tal que $J(\gamma^*(s)) = \Phi(\gamma^*) \geq c$ deduzimos que $s \in \mathscr{T}$, $\psi(s) = 1$ e ainda que

$$\begin{aligned}\Phi(\gamma^*) &= J(\gamma^*(s))\\ &\leq J(\overline{\gamma}_\epsilon(s)) - \delta\sqrt{\epsilon}\\ &\leq \Phi(\overline{\gamma}_\epsilon) - \delta\sqrt{\epsilon}\\ &\leq \Phi(\overline{\gamma}_\epsilon) - \sqrt{\epsilon}d_\Gamma(\gamma^*, \overline{\gamma}_\epsilon),\end{aligned}$$

onde usamos (g) na primeira e última desigualdades. Logo o resultado acima contradiz

(2.3) e com isso completamos a prova do teorema do passo da montanha para funcionais não diferenciáveis.

□

2.2 Compacidade

Nesta seção estudaremos o caso no qual a não-linearidade $f(x,z)$ satisfaz

$$\lim_{z\to+\infty} z^{1-p}f(x,z) = +\infty \text{ uniformemente em } x\in\Omega \tag{2.5}$$

para $p = 2$, os problemas considerados nesta seção são chamados superlinear em $+\infty$. Adicionalmente a (2.5), supomos (1.3) e a seguinte condição sobre f: Existem $m > p$, $\alpha_3 > 0$ e $R_2 > 0$ tais que

$$mF(x,z) \leq zf(x,z) + \alpha_3\lambda_1|z|^p, \tag{2.6}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \geq R_2$.
Vamos impor mais uma hipótese sobre $\mathscr{I}$: Existe $\alpha_4 > \alpha_3$ tal que

$$m\mathscr{I}(x,z,\xi) - a(x,z,\xi)\cdot\xi - b(x,z,\xi)z \geq \alpha_4|\xi|^p \tag{2.7}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, onde m e α_3 são aqueles dados em (2.6).

Proposição 2.1. *Suponhamos a validade das premissas (1.1) a (1.8), (2.6) e (2.7). Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ satisfazendo para todo $n\in\mathbb{N}$,*

$$J(u_n) \leq C, \tag{2.8}$$

$$|u_n|_\infty \leq 2M_n, \tag{2.9}$$

$$\langle J'(u_n), v\rangle \leq \epsilon_n\left[\frac{|v|_\infty}{M_n} + \|v\|_{1,p}\right] \ \forall\, v\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \tag{2.10}$$

onde C é uma constante positiva, $\{M_n\}\subset\mathbb{R}^+-\{0\}$ é uma sequência qualquer e $\{\epsilon_n\}\subset\mathbb{R}^+$ é uma sequência convergindo para zero. Então $\{u_n\}$ é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Se, adicionalmente vale (1.10), então $\{u_n\}$ possui uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ a qual converge fortemente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum $u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Primeiramente, provemos que $\{u_n\}$ é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Com efeito, multiplicando (2.8) por m temos que $J(u_n) \cdot m \leq C \cdot m$, ou seja

$$\left(\int_{\Omega} \mathscr{I}(x, u_n, \nabla u_n)\, dx \right) m - \left(\int_{\Omega} F(x, u_n^+)\, dx \right) m \leq C \cdot m.$$

Agora, somando (2.10) com $v = -u_n$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left[m\mathscr{I}(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n - b(x, u_n, \nabla u_n)u_n \right]\, dx \\
&+ \int_{\Omega} \left[f(x, u_n^+)u_n - mF(x, u_n^+) \right]\, dx \\
&\leq mC + \epsilon_n \left[\frac{|u_n|_\infty}{M_n} + \|u_n\|_{1,p} \right]. \qquad (h)
\end{aligned}$$

Afirmação 2.4. *Usando* (2.6), (2.7), (2.9) *e a notação número 4, podemos deduzir da caracterização variacional de* λ_1 *(ver B.2 apêndice) que para algum* $C_1 > 0$ *e para todo* $n \in \mathbb{N}$, *vale*

$$\begin{aligned}
(\alpha_4 - \alpha_3)\|u_n\|_{1,p}^p &\leq \alpha_4 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p\, dx - \alpha_3\lambda_1 \int_{\Omega} |u_n^+|^p\, dx \\
&\leq \|u_n\|_{1,p}^p \leq C_1 + \epsilon_n \|u_n\|_{1,p}
\end{aligned}$$

Demonstração da afirmação 2.4. Com efeito, da desigualdade em (h) temos que se substituirmos a desigualdade (2.7) com $z = u_n$ e ξ como ∇u_n segue que

$$\alpha_4 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p\, dx + \int_{\Omega} \left[f(x, u_n^+)u_n - mF(x, u_n^+) \right]\, dx \leq mC + \epsilon_n \left[\frac{|u_n|_\infty}{M_n} + \|u_n\|_{1,p} \right].$$

Agora, substituindo a desigualdade (2.6) em lugar do termo $mF(x, u_n^+)$ acima, resulta que

$$\begin{aligned}
&\alpha_4 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p\, dx + \int_{\Omega} \left[f(x, u_n^+)u_n - u_n f(x, u_n^+) - \alpha_3\lambda_1 |u_n^+|^p \right]\, dx \\
&\leq mC + \epsilon_n \left[\frac{|u_n|_\infty}{M_n} + \|u_n\|_{1,p} \right]
\end{aligned}$$

sobrando apenas

$$\alpha_4 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p\, dx - \alpha_3\lambda_1 \int_{\Omega} |u_n^+|^p\, dx \leq mC + \epsilon_n \left[\frac{|u_n|_\infty}{M_n} + \|u_n\|_{1,p} \right].$$

Aplicando a imersão de Sobolev onde $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, temos que $\lambda_1 \int_{\Omega} |u_n^+|^p \leq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p$, logo

$$
\begin{aligned}
&\alpha_4 \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx - \alpha_3 \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx \leq mC + \epsilon_n \left[\frac{|u_n|_\infty}{M_n} + \|u_n\|_{1,p} \right] \\
\Longrightarrow\ &(\alpha_4 - \alpha_3) \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx \leq mC + \epsilon_n \left[\frac{|u_n|_\infty}{M_n} + \|u_n\|_{1,p} \right] \\
\Longrightarrow\ &(\alpha_4 - \alpha_3) \|u_n\|_{1,p}^p \leq mC + \epsilon_n \left[\frac{|u_n|_\infty}{M_n} + \|u_n\|_{1,p} \right].
\end{aligned}
$$

Finalmente, usando (2.9), segue que

$$
\begin{aligned}
(\alpha_4 - \alpha_3) \|u_n\|_{1,p}^p &\leq mC + \epsilon_n \left[\frac{2M_n}{M_n} + \|u_n\|_{1,p} \right] \\
&= mC + 2\epsilon_n + \epsilon_n \|u_n\|_{1,p} \\
&= C_1 + \epsilon_n \|u_n\|_{1,p},
\end{aligned}
$$

onde $C_1 := mC + 2\epsilon_n$. Com isso finalizamos a demonstração da afirmação 2.4.

Para finalizar a primeira parte da demonstração da proposição, note que dado que $\alpha_4 > \alpha_3$ por (2.7) temos que $\{u_n\}$ é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$. O que é verdade, pois caso contrário, se $\|u_n\|_{1,p}^p \to \infty$ então teríamos

$$
\alpha_4 - \alpha_3 \leq \frac{C_1}{\|u_n\|_{1,p}^p} + \epsilon_n \frac{\|u_n\|_{1,p}}{\|u_n\|_{1,p}^p} \longrightarrow 0,
$$

um absurdo.

Para provar a segunda parte notemos que se $\{M_n\}$ possui uma subsequência, a qual ainda estamos denotando por $\{M_n\}$, convergindo para zero, então por (2.9) o resultado é trivial.
Com efeito, como $M_n \to 0$ então $|u_n|_\infty \to 0$ por (2.9) e uma vez que $\{u_n\}$ é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$ segue das hipóteses (1.6) e (1.3) que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega f(x, u_n^+) u_n \, dx \to 0, \\
&\int_\Omega b(x, u_n, \nabla u_n) u_n \, dx \to 0.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

O que é verdade, pois por um lado temos que por (1.3) vale $|f(x, u_n)| \leq C_1 |u_n|^\sigma + C_2$, consequentemente

$$\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n\,dx \le \int_\Omega (C_1|u_n|^{\sigma+1}+C_2|u_n|)\,dx$$
$$= C_1\int_\Omega |u_n|^{\sigma+1}\,dx + C_2\int_\Omega |u_n|\,dx$$
$$\le C_1|u_n|_\infty^{\sigma+1}\,\mathrm{med}(\Omega)+C_2|u_n|_\infty\,\mathrm{med}(\Omega)$$

Uma vez que $|u_n|_\infty \to 0$ em $L^\infty(\Omega)$ e $\mathrm{med}(\Omega)<\infty$, segue que

$$\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n\,dx \to 0.$$

Por outro lado, temos que por (1.6) vale $|b(x,u_n,\nabla u_n)| \le \beta_3|\nabla u_n|_p^p$. Logo,

$$\int_\Omega |b(x,u_n,\nabla u_n)||u_n|\,dx \le \int_\Omega \beta_3|\nabla u_n|^p|u_n|\,dx$$
$$\le \beta_3|u_n|_\infty\int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx$$

em que na última desigualdade temos $|u_n|_\infty \to 0$ enquanto que no termo da integral, como u_n é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega b(x,u_n,\nabla u_n)u_n\,dx \to 0.$$

Com isso, tomando $v=u_n$ em (2.10)

$$\langle J'(u_n),u_n\rangle = \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n\,dx \le \epsilon_n\left[\frac{|u_n|_\infty}{M_n}+\|u_n\|_{1,p}\right],$$

onde foi aplicado (2.11) para obtermos a última desigualdade acima. Logo,

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\,dx \to 0$$

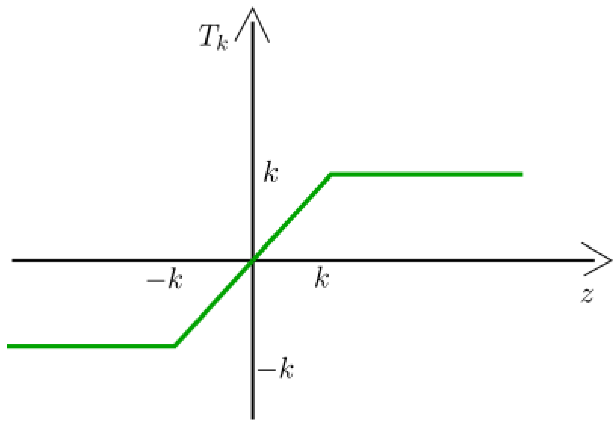
pois $|u_n|_\infty \to 0$, $\|u_n\|_{1,p}$ é limitado e $\epsilon_n \to 0$.
Agora, por (1.4) temos

$$\alpha_2\int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx \le \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \to 0$$

e segue que, como $\int_\Omega |\nabla u_n|^p\, dx \to 0$ então, pela desigualdade de Poincarè temos $\int_\Omega |u_n|^p\, dx \to 0$. Consequentemente, se $\int_\Omega |u_n|^p\, dx \to \int_\Omega |u|^p\, dx$, implica que $\int_\Omega |u|^p\, dx = 0 \implies u = 0$. Portanto, $\|u_n\|_{1,p} \to 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Entretanto, quando ocorrer que $\{M_n\}$ não possui subsequência convergindo para zero, consideraremos para $k > 0$ e $\eta > (\beta_3/2\alpha_2)^2$ as funções reais definidas em $\mathbb{R}$ por

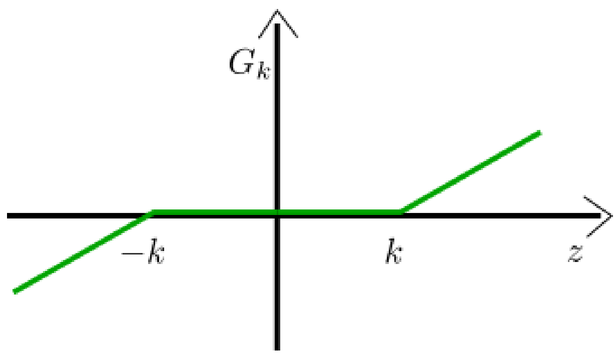
$$T_k(z) = \begin{cases} z, & \text{se} \quad |z| \leq k, \\ k\frac{z}{|z|}, & \text{se} \quad k < |z|, \end{cases}$$

cujo gráfico é



$$G_k(z) = z - T_k(z) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |z| \leq k, \\ z - k\frac{z}{|z|}, & \text{se} \quad |z| > k, \end{cases}$$

cuja representação gráfica é



e, estamos considerando ainda $\varphi(z) = ze^{\eta z^2}$, $z \in \mathbb{R}$.

Note que, da primeira parte da demonstração, podemos supor que as seguintes convergências valem, a menos de subsequências:

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), \\ &u_n \to u \text{ em } L^p(\Omega), \\ &u_n(x) \to u(x) \text{ em quase todo } x \in \Omega. \end{aligned}$$

O primeiro caso se justifica pelo fato de $\{u_n\}$ ser limitado no espaço reflexivo $W_0^{1,p}(\Omega)$ (Teorema de Kakutani). Já o segundo caso, segue do fato de que $W_0^{1,p}(\Omega) \overset{\text{cpt}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, portanto, desta imersão compacta de Sobolev temos $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$.
Finalmente, se vale $u_n(x) \to u(x)$ em quase todo ponto $x \in \Omega$, então para n suficientemente grande

$$\begin{aligned} u_n(x) - u(x) < \epsilon \implies & u_n(x) \leq u(x) + \epsilon := \overline{h}(x) \in L^p(\Omega) \\ \implies & \int_\Omega \overline{h}^p(x) < \infty \\ \implies & \overline{h}^p(x) \in L^1(\Omega). \qquad (j) \end{aligned}$$

Afirmação 2.5. *Pelo teorema da convergência dominada, podemos deduzir que*

$$\varphi\left[T_k(u_n) - T_k(u)\right] \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^p(\Omega) \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.12}$$

Demonstração da afirmação 2.5. Com efeito, tomando $z = T_k(u_n) - T_k(u)$ e substituindo em φ, temos

$$\varphi\left[T_k(u_n) - T_k(u)\right] = \left[T_k(u_n) - T_k(u)\right] e^{\eta[T_k(u_n) - T_k(u)]^2}.$$

Assim, se queremos provar que $\varphi\left[T_k(u_n) - T_k(u)\right]$ tende a zero em $L^p(\Omega)$ devemos provar que

$$\int_\Omega \left[T_k(u_n) - T_k(u)\right]^p e^{p\eta[T_k(u_n) - T_k(u)]^2}\, dx \to 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} u_n \xrightarrow{\text{q.t.p}} u \implies & T_k(u_n) \xrightarrow{\text{q.t.p}} T_k(u) \quad \text{pois } T_k \text{ é contínua} \\ \implies & T_k(u_n) - T_k(u) \xrightarrow{\text{q.t.p}} 0. \end{aligned}$$

Como, $|u_n(x)| \leq \overline{h}(x)$ por (j). Por um lado temos,

$$|T_k(u_n) - T_k(u)| \leq k + k = 2k \quad \text{ver gráfico}$$

e por outro lado,

$$e^{p\eta[T_k(u_n) - T_k(u)]} \leq e^{p\eta 2k}.$$

Logo,

$$[T_k(u_n) - T_k(u)]\, e^{2\eta[T_k(u_n)-T_k(u)]} \leq 2ke^{p\eta 2k} \in L^1(\Omega).$$

Portanto, pelo teorema da convergência dominada vale que

$$\int_\Omega [T_k(u_n) - T_k(u)]^p\, e^{p\eta[T_k(u_n)-T_k(u)]^2}\, dx \to 0,$$

como queríamos.

Levando em consideração que $u_n = T_k(u_n) + G_k(u_n)$, a demonstração da proposição estará finalizada se provarmos os seguintes passos:

Passo 1 $\{T_k(u_n)\} \to T_k(u)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, quando $n \to \infty$, para todo $k \geq R_1$.

Passo 2 Para todo $\delta > 0$, existem $k_0 \geq R_1$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\|G_k(u_n)\|_{1,p} < \delta$ para todo $k \geq k_0$ e $n \geq n_0$.

De fato, dado $\delta > 0$ existem $n_1 \in \mathbb{R}$ e $k_1 \geq R_1$ tais que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{1,p} &\leq \|u_n - T_{k_1}(u)\|_{1,p} + \|T_{k_1}(u) - u\|_{1,p} \\ &\leq \|T_{k_1}(u_n) - T_{k_1}(u)\|_{1,p} + \|G_{k_1}(u_n)\|_{1,p} + \|T_{k_1}(u) - u\|_{1,p}, \end{aligned} \tag{k}$$

onde na última desigualdade usamos desigualdade triangular e o fato de que $u_n = T_k(u_n)+ G_k(u_n)$. Vejamos agora que cada termo da soma que aparece na última desigualdade é menor que δ. Com efeito, para ver que $\|T_{k_1}(u_n) - T_{k_1}(u)\|_{1,p} < \delta$ basta aplicar o passo 1, ou seja, se provarmos que vale o passo 1, então esta desigualdade é verdadeira. Já no caso do segundo termo, uma vez que tivermos provado a veracidade do passo 2, então basta aplicá-lo para ver que $\|G_{k_1}(u_n)\|_{1,p} < \delta$. No caso do último termo da soma, é preciso trabalhar um pouco mais. Veja que

$$\|T_{k_1}(u) - u\|_{1,p}^p = \int_\Omega |T_{k_1}(u) - u|^p\, dx + \int_\Omega |\nabla\, (T_{k_1}(u) - u)|^p\, dx. \tag{m}$$

Denotando por $\{|u| > k_1\} = \{x \in \Omega : |u(x)| > k_1\}$ e por $\{|u| \leq k_1\} = \{x \in \Omega : |u(x)| \leq$

$k_1\}$, daí o primeiro termo da soma em (m) fica

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |T_{k_1}(u) - u|^p \, dx &= \int\limits_{|u| \leq k_1} |T_{k_1}(u) - u|^p \, dx + \int\limits_{|u| > k_1} |T_k(u) - u|^p \, dx \\
&= \int\limits_{|u| \leq k_1} |u - u|^p \, dx + \int\limits_{|u| > k_1} |k_1 - u|^p \, dx \\
&= \int\limits_{|u| > k_1} |u - k_1|^p \, dx \\
&= \int\limits_{\Omega} |u - k_1|^p \chi_{[|u| > k_1]} \, dx,
\end{aligned}
$$

onde na última igualdade temos ainda que

$$
\begin{aligned}
|u - k_1|^p &\leq (|u| + k_1)^p \\
&\leq (2 \max\{|u|, k_1\})^p \\
&= 2^p \max\{|u|, k_1\}^p \\
&\leq 2^p \left(|u|^p + k_1^p\right),
\end{aligned}
$$

e na última desigualdade, perceba que $|u|^p$ e k_1^p são integráveis. Portanto, pelo teorema da convergência dominada

$$
\int\limits_{|u| > k_1} |T_k(u) - u|^p \, dx \to 0.
$$

Analisemos agora o segundo termo da soma em (m), veja que

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |\nabla \left(T_{k_1}(u) - u\right)|^p \, dx &= \int\limits_{|u| \leq k_1} |\nabla \left(T_{k_1}(u) - u\right)|^p \, dx + \int\limits_{|u| > k_1} |\nabla \left(T_{k_1}(u) - u\right)|^p \, dx \\
&= \int\limits_{|u| \leq k_1} |\nabla \left(u - u\right)|^p \, dx + \int\limits_{|u| > k_1} |\nabla \left(T_{k_1}(u) - u\right)|^p \, dx \\
&= \int\limits_{|u| > k_1} |\nabla \left(k_1 - u\right)|^p \, dx \\
&= \int\limits_{|u| > k_1} |\nabla \left(u\right)|^p \, dx \\
&= \int\limits_{\Omega} |\nabla \left(u\right)|^p \chi_{[|u| > k_1]} \, dx,
\end{aligned}
$$

e veja que quando $k_1 \to \infty$ então o conjunto definido anteriormente por $|u| > k_1$ é vazio, com isso $\chi_{[|u|>k_1]} \to 0$, logo

$$\int_\Omega |\nabla(T_{k_1}(u) - u)|^p \ dx \to 0.$$

Com isso o termo em (k) fica

$$\|u_n - u\|_{1,p} \leq 3\delta, \ \forall n \geq n_1$$

ou seja, $\{u_n\}$ converge para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Isto é suficiente para passar ao limite em (2.10), e obter que u é um ponto crítico de J, pois $\langle J'(\cdot), v\rangle$ é contínua em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ fixado. E isso é verdade, veja que como $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\langle J'(\cdot), v\rangle : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é contínua por (b) no teorema do passo da montanha modificado 2.1, então é suficiente substituir u_n por u em $\langle J'(u_n), v\rangle$ já que por um lado temos $\langle J'(u), v\rangle \leq 0$ enquanto que por outro lado, se $-v$ for a função teste, teremos $\langle J'(u), -v\rangle = -\langle J'(u), v\rangle \geq 0$. Portanto, $\langle J'(u), v\rangle = 0$, ou seja u é ponto crítico de J.
Agora como vale (1.10) finalmente aplicamos o lema (1.3) e obtemos que $u \in L^\infty(\Omega)$, o que conclui a prova da proposição.
A seguir, vamos nos concentrar na demonstração dos passos 1 e 2.
Demonstração do passo 1:
Queremos provar que $\{T_k(u_n)\} \to T_k(u)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, sempre que $n \to \infty$, para todo $k \geq R_1$.
De fato, escolhendo $v_n = \varphi\left[T_k(u_n) - T_k(u)\right]$ como função teste em (2.10) e definindo $w_{n,k} = T_k(u_n) - T_k(u)$, temos que $\nabla v_n = \varphi'[w_{n,k}] \cdot \nabla w_{n,k}$. Assim,

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\varphi'[w_{n,k}]\nabla w_{n,k} \ dx \right.\\ &+ \int_\Omega b(x, u_n, \nabla u_n)\varphi(w_{n,k}) \ dx \\ &\left. - \int_\Omega f(x, u_n^+)\varphi(w_{n,k}) \ dx \right| \\ &\leq \epsilon_n \left[\frac{|\varphi[w_{n,k}]|_\infty}{M_n} + \|\varphi(w_{n,k})\|_{1,p}\right] := \epsilon_n'. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Afirmação 2.6.

$$\epsilon_n \left[\frac{|\varphi[w_{n,k}]|_\infty}{M_n} + \|\varphi(w_{n,k})\|_{1,p}\right] \leq \epsilon_n'$$

onde $\epsilon_n' \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Demonstração da afirmação 2.6. A fim de provar a afirmação 2.6 precisamos mostrar que

1) $\varphi[w_{n,k}] \in L^\infty(\Omega)$ e,

2) $\|\varphi(w_{n,k})\|_{1,p}$ é limitado

e daí, usaremos que ϵ_n é uma sequência convergindo para zero, por hipótese do enunciado desta proposição.
De fato, para ver 1) é suficiente observar que

$$\begin{aligned}\varphi\left[w_{n,k}\right] &= w_{n,k}e^{\eta\left[w_{n,k}\right]^2}\\ &= \left[T_k(u_n) - T_k(u)\right]e^{\eta[T_k(u_n)-T_k(u)]^2} < \infty\end{aligned}$$

pois $T_k(\cdot)$ é inteiramente limitada (ver gráfico).
Para provarmos 2), precisamos usar a norma do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ definida na notação 2, isto é

$$\begin{aligned}\|\varphi(w_{n,k})\|_{1,p}^p &= \int_\Omega \left[\nabla\varphi(w_{n,k})\right]^p\, dx\\ &= \int_\Omega \left[\varphi'(w_{n,k})\nabla w_{n,k}\right]^p\, dx\\ &= \int_\Omega \left(\varphi'\left(T_k(u_n) - T_k(u)\right)\right)^p \left(\nabla\left[T_k(u_n) - T_k(u)\right]\right)^p\, dx. \qquad (n)\end{aligned}$$

Observando que

$$\varphi(t) = te^{\eta t^2}$$
e
$$\varphi'(t) = e^{\eta t^2} + 2t^2\eta e^{\eta t^2},$$

substituindo no primeiro fator de potência p que aparece na última igualdade em (n), temos

$$\left|\varphi'\left(T_k(u_n) - T_k(u)\right)\right| = \left|e^{\eta[T_k(u_n)-T_k(u)]^2} + 2\left[T_k(u_n) - T_k(u)\right]^2 \eta e^{\eta[T_k(u_n)-T_k(u)]^2}\right|,$$

em que o primeiro e o segundo termos da soma acima são limitados em $L^\infty(\Omega)$, com isso, segue que

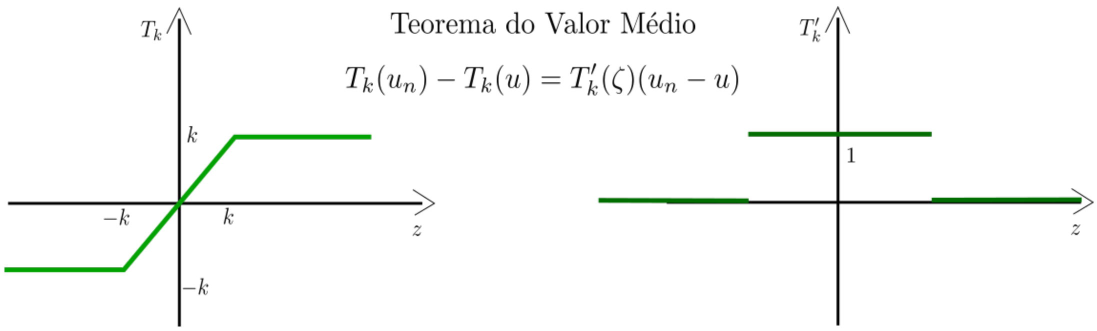
$$\left|\varphi'\left(T_k(u_n) - T_k(u)\right)\right| \le C, \qquad (p)$$

ou seja $\left(\varphi'\left[T_k(u_n) - T_k(u)\right]\right)^p$ é limitado em $L^\infty(\Omega)$.

No caso do segundo fator, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |(\nabla [T_k(u_n) - T_k(u)])|^p \, dx &= \int_\Omega |(\nabla [T_k'(\zeta)(u_n - u)])|^p \, dx \\
&= \int_\Omega |([T_k''(\zeta)(u_n - u)] + T_k'(\zeta) (\nabla u_n - \nabla u))|^p \, dx \\
&\leq 2^p \int_\Omega |[T_k''(\zeta)(u_n - u)]|^p \, dx + 2^p \int_\Omega |[T_k'(\zeta) (\nabla u_n - \nabla u)]|^p \, dx
\end{aligned}
$$

onde usamos o teorema do valor médio na primeira igualdade e que $\zeta \in (0, 1)$.



Note que a primeira integral que aparece na última desigualdade acima vai a zero porque $T_k''(\zeta) = 0$ a menos de um conjunto de medida nula, e também $u_n \to u$ q.t.p. em Ω. Enquanto que a última integral que aparece na última desigualdade acima é tal que

$$
\int_\Omega |[T_k'(\zeta) (\nabla u_n - \nabla u)]|^p \, dx \leq k^p \int_\Omega |\nabla (u_n - u)|^p < \infty,
$$

pois $T_k'(\cdot) \leq 1$ (ver gráfico), e além disso, $u_n \to u$ q.t.p. em Ω. Com isso está provada a afirmação 2.6.

Por outro lado, usando o fato que $a(x, z, 0) = 0$ por (1.8) juntamente com (1.5) e a limitação de $\{u_n\}$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos

Afirmação 2.7.

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega [a(x, u_n, \nabla T_k(u_n)) - a(x, u_n, \nabla T_k(u))] \cdot \nabla w_{n,k} \varphi'(w_{n,k}) \, dx \\
&\leq \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla w_{n,k} \varphi'(w_{n,k}) \, dx + \epsilon_n'',
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

onde $\epsilon_n'' \to 0$ *quando* $n \to +\infty$.

Demonstração da afirmação 2.7. Primeiramente, notemos que se $T_k(u_n) = u_n - G_k(u_n)$

então $\nabla T_k(u_n) = \nabla u_n - \nabla G_k(u_n)$, assim substituindo na primeira expressão de (2.14) temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [a(x, u_n, \nabla T_k(u_n)) - a(x, u_n, \nabla T_k(u))] \cdot \varphi'(w_{n,k})\nabla w_{n,k}\, dx \\
=&\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \varphi'(w_{n,k})\nabla w_{n,k}\, dx \\
-&\int_\Omega a(x, u_n, \nabla G_k(u_n))\varphi'(w_{n,k})\nabla w_{n,k}\, dx \\
-&\int_\Omega a(x, u_n, \nabla T_k(u))\varphi'(w_{n,k})\nabla w_{n,k}\, dx. \qquad (q)
\end{aligned}$$

Agora, definindo

$$\Omega := \{|u_n(x)| > k\} \bigcup \{|u_n(x)| \leq k\}$$

onde $\{|u_n(x)| \leq k\}$ não será considerado para $G_k(\cdot)$ que é nula neste domínio (ver gráfico). Quando for o caso, denotaremos apenas

$$\Omega_{n,k} := \{x \in \Omega : |u_n(x)| > k\} = \{|u_n(x)| > k\}\,.$$

Logo, como $G_k(u_n) = u_n - k$ em $\Omega_{n,k}$ implica $\nabla G_k(u_n) = \nabla u_n$, podemos escrever o segundo termo após a igualdade em (q) como

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega a(x, u_n, \nabla G_k(u_n)) \cdot \nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\, dx\right| \\
\leq &\int_{\Omega_{n,k}} |a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla\left(T_k(u_n) - T_k(u)\right)| C\, dx
\end{aligned}$$

em que C foi obtido de (p).
Aplicando (1.5) na desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{n,k}} |a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla\left(T_k(u_n) - T_k(u)\right)| C\, dx \\
\leq & C\beta_2 \int_{\Omega_{n,k}} \left(h(x) + |u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1}\right) \cdot \nabla\left(T_k(u_n) - T_k(u)\right)\, dx.
\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder com expoente conjugado $\frac{p-1}{p} + \frac{1}{p} = 1$, obteremos que o último termo da desigualdade acima resultará em

$$
\begin{aligned}
&C\beta_2 \int\limits_{\Omega_{n,k}} \left(h(x) + |u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1}\right) \cdot |\nabla\left(T_k(u_n) - T_k(u)\right)|\ dx \\
\leq &C\beta_2 \left[\int\limits_{\Omega_{n,k}} \left(h(x) + |u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\ dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int\limits_{\Omega_{n,k}} |(\nabla\left(T_k(u_n) - T_k(u)\right))|^p\ dx\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Observe que no primeiro fator do último termo na desigualdade acima, temos que $h(x) \in L^{p'}$ com $p' = \frac{p}{p-1}$, logo $\int\limits_{\Omega} h(x) < \infty$, e temos também que $\int\limits_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{p-1} < \infty$ já que é limitado e consequentemente $\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-1} < \infty$. Logo, o último termo da desigualdade acima pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
&C\beta_2 \left[\int\limits_{\Omega_{n,k}} \left(h(x) + |u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\ dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int\limits_{\Omega_{n,k}} |(\nabla\left(T_k(u_n) - T_k(u)\right))|^p\ dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
\leq &C_1 \left[\int\limits_{\Omega_{n,k}} |\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^p\ dx\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, como $T_k(u_n) = k$ quando $|u_n| > k$ então $\nabla T_k(u_n) = 0$, restando apenas

$$
C_1 \left[\int\limits_{\Omega n,k} |\nabla T_k(u)|^p\ dx\right]^{\frac{1}{p}}.
$$

Substituindo em (q) temos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot \nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\,dx\\
&-\int_\Omega a(x,u_n,\nabla G_k(u_n))\cdot \nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\,dx\\
&-\int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u))\cdot \nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\,dx\\
&\le \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot \nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\,dx\\
&+C_1\left(\int_{\Omega_{n,k}} |\nabla T_k(u)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&-\int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u))\cdot \nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\,dx. \qquad (r)
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que os dois últimos termos em (r) são muito pequenos. Com efeito, primeiro calculemos

$$C_1\left(\int_{\Omega_{n,k}} |\nabla T_k(u)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lembrando que

$$T_k(u)=\begin{cases} u \quad \text{se} \quad |u|\le k,\\[2ex] k\frac{u}{|u|}=\begin{cases} k,\\ -k,\end{cases} \quad \text{se } |u|>k,\end{cases} \qquad |\nabla T_k(u)|=\begin{cases} |\nabla u| \quad \text{se} \quad |u|\le k,\\ 0 \quad \text{se} \quad |u|>k.\end{cases} \qquad (\overline{r})$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
&\Omega=\{x\in\Omega : |u(x)|\le k\}\cup\{x\in\Omega : |u(x)|>k\},\\
&\Omega_{n,k}=\{x\in\Omega : |u_n(x)|>k\}.
\end{aligned}$$

Por simplicidade denotaremos

$$\begin{aligned}
&\Omega_1=\{x\in\Omega : |u(x)|\le k\},\\
&\Omega_2=\{x\in\Omega : |u(x)|>k\}. \qquad (r')
\end{aligned}$$

Logo, temos $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e substituindo temos

$$C_1\left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |\nabla T_k(u)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} = C_1\left(\int\limits_{\Omega_1\cap\Omega_{n,k}} |\nabla T_k(u)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} + C_1\left(\int\limits_{\Omega_2\cap\Omega_{n,k}} |\nabla T_k(u)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Note que o segundo termo da soma acima se anula por $(\overline{r})$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
C_1\left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |\nabla T_k(u)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} &= C_1\left(\int\limits_{\Omega_1\cap\Omega_{n,k}} |\nabla T_k(u)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\overset{(\overline{r})}{=} C_1\left(\int\limits_{\Omega_1\cap\Omega_{n,k}} |\nabla u|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C_1\left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |\nabla u|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{pois med}\,(\Omega_1 \cap \Omega_{n,k}) \leq \text{med}(\Omega_{n,k})\\
&= C_1\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \chi_{\left[\Omega_{n,k}\right]}\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } k \to +\infty, \qquad (\overline{\overline{r}})
\end{aligned}$$

onde, na última igualdade aplicamos o teorema da convergência dominada, pois $|\nabla u|^p\chi_{\left[\Omega_{n,k}\right]} \leq |\nabla u|^p \in L^1(\Omega)$.
Resta mostrar que o último termo em (r) também é muito pequeno. De fato, lembrando que

$$\begin{aligned}
&\varphi(z) = ze^{\eta z^2} \quad \text{onde } z = w_{n,k}\\
&\text{e}\\
&\varphi'(z) = e^{\eta z^2} + 2z^2\eta e^{\eta z^2} \quad \text{é limitado em } L^\infty(\Omega)
\end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned}
&\nabla w_{n,k} = \nabla(T_k(u_n) - T_k(u))\\
&u_n \to u \quad \text{q.t.p em } \Omega\\
&T_k(u_n) \to T_k(u) \quad \text{q.t.p em } \Omega, \text{ pois } T_k \text{ é contínua}\\
&T_k(u_n) - T_k(u) \to 0 \quad \text{em quase todo ponto em } \Omega\\
\Longrightarrow\ &\nabla\left(T_k(u_n) - T_k(u)\right) \longrightarrow 0 \quad \text{em quase todo ponto em } \Omega \qquad (\overline{\overline{\overline{r}}})
\end{aligned}$$

substituindo $(\overline{\overline{r}})$ e $(\overline{\overline{\overline{r}}})$ no último termo de (r) temos que

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\,dx \\
&+C_1\left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |\nabla T_k(u)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&-\int\limits_{\Omega} a(x,u_n,\nabla T_k(u))\nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\,dx \\
&=\int\limits_{\Omega} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\,dx+\epsilon''_n
\end{aligned}$$

onde

$$C_1\left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |\nabla T_k(u)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}-\int\limits_{\Omega} a(x,u_n,\nabla T_k(u))\nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\,dx:=\epsilon''_n\longrightarrow 0,\ \text{quand } n\to\infty.$$

E finalizamos a demonstração da afirmação 2.7.

Além disso, por (1.4), (1.6) e (1.10), para $k\geq R_1$, vale também que

Afirmação 2.8.

$$\begin{aligned}
&-\int\limits_{\Omega} b(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(w_{n,k})\,dx \\
&\leq\frac{\beta_3}{\alpha_2}\int\limits_{\Omega}\left[a(x,u_n,\nabla T_k(u_n))-a(x,u_n,\nabla T_k(u))\right]\cdot\nabla w_{n,k}|\varphi(w_{n,k})|\,dx+\epsilon'''_n,
\end{aligned}\tag{2.15}$$

onde $\epsilon'''_n\to 0$ *quando* $n\to+\infty$.

Demonstração da afirmação 2.8. Uma vez que,

$$\begin{aligned}
&\Omega_{n,k}=\{x\in\Omega:|u_n(x)|>k\},\\
&w_{n,k}=T_k(u_n)-T_k(u),\\
&\text{e}\\
&\varphi(w_{n,k})=w_{n,k}e^{\eta w_{n,k}^2}=\left[T_k(u_n)-T_k(u)\right]e^{\eta[T_k(u_n)-T_k(u)]^2},
\end{aligned}$$

então podemos reescrever $-\int\limits_{\Omega} b(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(w_{n,k})\,dx$ como

$$\begin{aligned}
&-\int\limits_{\Omega} b(x,u_n,\nabla u_n)\,[T_k(u_n)-T_k(u)]\,e^{\eta[T_k(u_n)-T_k(u)]^2}\\
&=-\int\limits_{\Omega_{n,k}} b(x,u_n,\nabla u_n)\,[T_k(u_n)-T_k(u)]\,e^{\eta[T_k(u_n)-T_k(u)]^2}-\int\limits_{\Omega-\Omega_{n,k}} b(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(w_{n,k})\,dx.
\end{aligned}$$

vejamos agora que o primeiro termo da última soma acima é nulo. Com efeito, já sabemos que $T_k(u_n)\to T_k(u)$ em quase todo ponto em Ω. Mais ainda,

$$T_k(u_n)-T_k(u)=k\frac{u_n}{|u_n|}-k\frac{u}{|u|}=\begin{cases} k-k=0 & \text{se} \quad u_n\le k,\\ -k+k=0 & \text{se} \quad u_n>k.\end{cases}$$

Substituindo os dados acima, temos que realmente o primeiro termo é nulo, restando apenas

$$-\int\limits_{\Omega} b(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(w_{n,k})\,dx\le-\int\limits_{\Omega-\Omega_{n,k}} b(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(w_{n,k})\,dx.$$

Mostraremos agora que o termo à direita da desigualdade acima equivale a

$$-\int\limits_{\Omega} b(x,u_n,\nabla T_k(u_n))\varphi(w_{n,k})\,dx.$$

De fato, substituindo os valores de $(\overline{r})$ no termo acima, vem que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} b(x,u_n,\nabla T_k(u_n))\varphi(w_{n,k})\,dx &=\int\limits_{\Omega_{n,k}} b(x,u_n,\nabla T_k(u_n))\varphi(w_{n,k})\,dx\\
&\quad+\int\limits_{\Omega-\Omega_{n,k}} b(x,u_n,\nabla T_k(u_n))\varphi(w_{n,k})\,dx\\
&=0+\int\limits_{\Omega-\Omega_{n,k}} b(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(w_{n,k})\,dx,
\end{aligned}$$

onde $\int\limits_{\Omega_{n,k}} b(x,u_n,\nabla T_k(u_n))\varphi(w_{n,k})\,dx=0$ devido a $\nabla T_k(u_n)=0$ em $\Omega_{n,k}$, por $(\overline{r})$. Com isso, vale que

$$-\int\limits_{\Omega-\Omega_{n,k}} b(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(w_{n,k})\,dx=-\int\limits_{\Omega} b(x,u_n,\nabla T_k(u_n))\varphi(w_{n,k})\,dx. \tag{$\widetilde{r}$}$$

Lembrando que por (1.6) vale que $\beta_3|\xi|^p\ge -b(x,z,\xi)\ge-\beta_3|\xi|^p$. Agora, substituindo no termo do lado direito da última desigualdade acima, vem que

$$-\int_\Omega b(x,u_n,\nabla T_k(u_n))\varphi(w_{n,k})\,dx \le \beta_3 \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p|\varphi(w_{n,k})|\,dx.$$

Além disso, por (1.4) vale que $|\xi|^p \le \frac{1}{\alpha^2}a(x,z,\xi)\cdot\xi$, substituindo no termo a direita da desigualdade acima, temos que

$$\beta_3\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p|\varphi(w_{n,k})|\,dx \le \frac{\beta_3}{\alpha_2}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u_n))\cdot\nabla T_k(u_n)|\varphi(w_{n,k})|\,dx.$$

Agora, usando que $\nabla w_{n,k} = \nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)$, podemos somar e subtrair os seguintes termos para obter que o lado direito da última desigualdade acima equivale a

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta_3}{\alpha_2}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u_n))\cdot\nabla T_k(u_n)|\varphi(w_{n,k})|\,dx\\
=&\frac{\beta_3}{\alpha_2}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u_n))\nabla w_{n,k}|\varphi(w_{n,k})|\,dx - \frac{\beta_3}{\alpha_2}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u))\nabla w_{n,k}|\varphi(w_{n,k})|\,dx\\
+&\frac{\beta_3}{\alpha_2}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u))\nabla w_{n,k}|\varphi(w_{n,k})|\,dx + \frac{\beta_3}{\alpha_2}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)|\varphi(w_{n,k})|\,dx.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\nabla T_k(u_n) = \nabla u_n$ em $\Omega - \Omega_{n,k}$ temos por $(\widetilde{r})$ e pelo exposto acima que

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega b(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(w_{n,k})\,dx\\
&\le \frac{\beta_3}{\alpha_2}\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla T_k(u_n)) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))]\cdot\nabla w_{n,k}|\varphi(w_{n,k})|\,dx + \epsilon_n''',
\end{aligned}$$

onde $\epsilon_n''' \to 0$ e pode ser calculado similarmente ao caso anterior. E a afirmação 2.8 está provada.

Afirmação 2.9. *Subtraindo* (2.15) *de* (2.14) *e levando em conta* (2.13), *obteremos que*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla T_k(u_n)) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))]\cdot\nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\,dx\\
&-\frac{\beta_3}{\alpha_2}\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla T_k(u_n)) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))]\cdot\nabla w_{n,k}|\varphi(w_{n,k})|\,dx\\
&\le \int_\Omega f(x,u_n^+)\varphi(w_{n,k})\,dx + \epsilon_n' + \epsilon_n'' + \epsilon_n'''.
\end{aligned}$$

Demonstração da afirmação 2.9. Com efeito, primeiramente notemos que

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \left[a(x,u_n,\nabla T_k(u_n)) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))\right] \nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\, dx \\
&-\int\limits_{\Omega} b(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(w_{n,k})\, dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\, dx + \epsilon_n'' \text{ por (2.14)} \\
+\frac{\beta_3}{\alpha_2}&\int\limits_{\Omega} \left[a(x,u_n,\nabla T_k(u_n)) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))\right] \nabla w_{n,k}|\varphi(w_{n,k})|\, dx + \epsilon_n''', \text{ por (2.15)}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \left[a(x,u_n,\nabla T_k(u_n)) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))\right] \nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\, dx \\
-\frac{\beta_3}{\alpha_2}&\int\limits_{\Omega} \left[a(x,u_n,\nabla T_k(u_n)) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))\right] \nabla w_{n,k}|\varphi(w_{n,k})|\, dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} b(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(w_{n,k})\, dx \\
&+\int\limits_{\Omega} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\, dx + \epsilon_n'' + \epsilon_n'''.
\end{aligned}$$

E, agora por (2.13) segue que o termo a direita da desigualdade acima é tal que

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla w_{n,k}\varphi'(w_{n,k})\, dx \\
&+\int\limits_{\Omega} b(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(w_{n,k})\, dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} f(x,u_n^+)\varphi(w_{n,k})\, dx + \epsilon_n' + \epsilon_n'' + \epsilon_n'''.
\end{aligned}$$

Concluindo assim a afirmação 2.9.

Afirmação 2.10. *Pelo lema 1.1 e devido a (1.3), para todo $k \geq R_1$, temos*

$$\int\limits_{\Omega} \left[a(x,u_n,\nabla T_k(u_n)) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))\right] \cdot \nabla w_{n,k}\, dx \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração da afirmação 2.10. De fato, a fim de podermos aplicar o lema 1.1 tomando

$$\alpha = [a(x, u_n, \nabla T_k(u_n)) - a(x, u_n, \nabla T_k(u))] \cdot \nabla w_{n,k} > 0,$$

$$\beta = \frac{\beta_3}{\alpha_2} [a(x, u_n, \nabla T_k(u_n)) - a(x, u_n, \nabla T_k(u))] \cdot \nabla w_{n,k} > 0$$

Note que as afirmações acima fazem sentido por (1.7). E além disso, seja

$$\varphi = \varphi(w_{n,k}),$$

$$\varphi' = \varphi'(w_{n,k}), \qquad (s)$$

onde $\varphi(z) = ze^{\eta z^2}$ é uma função real e

$$\eta > \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\beta_3}{\alpha_2} [a(x, u_n, \nabla T_k(u_n)) - a(x, u_n, \nabla T_k(u))] \cdot \nabla w_{n,k}}{2 [a(x, u_n, \nabla T_k(u_n)) - a(x, u_n, \nabla T_k(u))] \cdot \nabla w_{n,k}}\right)^2 = \left(\frac{\beta_3}{2\alpha_2}\right)^2.$$

Logo, pelo lema 1.1, com $z = w_{n,k}$ temos

$$0 < \alpha\varphi'(z) - \beta|\varphi(z)| - \frac{1}{2}\alpha.$$

Assim, substituindo a desigualdade acima e as hipóteses de (s) no termo da afirmação 2.9 obteremos

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{2} \int_\Omega \alpha \, dx &< \int_\Omega \alpha\varphi'(z) \, dx - \int_\Omega \beta|\varphi(z)| \, dx \\ &\leq \int_\Omega f(x, u_n^+)\varphi(z) \, dx + \epsilon_n' + \epsilon_n'' + \epsilon_n'''. \end{aligned} \qquad (\overline{\overline{s}})$$

Entretanto, aplicando (1.3) no termo à direita da última desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega f(x, u_n^+)\varphi(z) \, dx + \epsilon_n' + \epsilon_n'' + \epsilon_n''' \\ \leq &C_1 \int_\Omega |u_n|^\sigma |\varphi(w_{n,k})| \, dx + C_2 \int_\Omega |\varphi(w_{n,k})| \, dx + \epsilon_n' + \epsilon_n'' + \epsilon_n''' \\ = &|\varphi(w_{n,k})| \left(C_1 \int_\Omega |u_n|^\sigma \, dx + C_2 \int_\Omega \, dx \right) + \epsilon_n' + \epsilon_n'' + \epsilon_n''' \\ = &|\varphi(w_{n,k})| \left(C_1 |u_n|_\infty^\sigma \operatorname{med}(\Omega) + C_2 \operatorname{med}(\Omega) \right) + \epsilon_n' + \epsilon_n'' + \epsilon_n''' \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

pois $\varphi(z) < \infty$ conforme vimos na afirmação 2.6 e como $|u_n|_\infty \to 0$ em $L^\infty(\Omega)$ e med$(\Omega) < \infty$, segue que

$$\int_\Omega f(x, u_n^+)\varphi(z)\, dx + \epsilon_n' + \epsilon_n'' + \epsilon_n''' \longrightarrow 0.$$

O que contradiz $(\overline{\overline{\overline{s}}})$. Logo,

$$\int_\Omega \left[a(x, u_n, \nabla T_k(u_n)) - a(x, u_n, \nabla T_k(u))\right] \nabla w_{n,k}\, dx \longrightarrow 0,$$

sempre que $n \to \infty$. Finalizamos assim a demonstração da afirmação 2.10.
Com isso, assumindo a afirmação 2.10 e devido a $\overline{\overline{\overline{r}}}$, podemos usar o lema B.1 de [13] para concluir que

$$T_k(u_n) \longrightarrow T_k(u) \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Finalizando assim a demonstração do passo 1.

Demonstração do passo 2:
Queremos provar que para todo $\delta > 0$, existem $k_0 \geq R_1$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\|G_k(u_n)\|_{1,p} < \delta$ para todo $k \geq k_0$ e $n \geq n_0$.
Para ver o passo 2, primeiramente tomamos $v_n = G_k(u_n)$ como função teste em (2.10), e usando (2.9) temos que vale a seguinte

Afirmação 2.11.

$$\left| \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla G_k(u_n)\, dx + \int_\Omega b(x, u_n, \nabla u_n) G_k(u_n)\, dx - \int_\Omega f(x, u_n^+) G_k(u_n)\, dx \right| \leq \epsilon_n'''',$$

com $\epsilon_n'''' \to 0$ *quando* $n \to +\infty$.

Demonstração da afirmação 2.11. De fato, por um lado sabemos que

$$\langle J'(u_n), v\rangle = \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla v\, dx + \int_\Omega b(x, u_n, \nabla u_n) v\, dx - \int_\Omega f(x, u_n^+) v\, dx$$

substituindo $v_n = G_k(u_n)$ como função teste em (2.10) segue que, o lado direito da igualdade acima é tal que

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla G_k(u_n)\, dx + \int_\Omega b(x, u_n, \nabla u_n) G_k(u_n)\, dx - \int_\Omega f(x, u_n^+) G_k(u_n)\, dx$$
$$\leq \epsilon_n \left[\frac{|G_k(u_n)|_\infty}{M_n} + \|G_k(u_n)\|_{1,p} \right], \quad \forall\, G_k(u_n) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \qquad (t)$$

Observe que de $G_k(u_n) = u_n - T_k(u_n)$ temos

$$G_k(u_n) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |u_n| \leq k \\ u_n - k\frac{u_n}{|u_n|} & \text{se} \quad |u_n| > k \end{cases} \qquad |\nabla G_k(u)| = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |u_n| \leq k \\ \nabla u_n & \text{se} \quad |u_n| > k \geq R_1 \end{cases} \qquad (\bar{t})$$

além disso por (2.9) temos $|u_n|_\infty \leq 2M_n$.
Agora substituindo as observações acima na expressão a direita da desigualdade em (t) temos que

$$\begin{aligned} \epsilon_n \left[\frac{|u_n - k|_\infty}{M_n} + \|u_n - k\|_{1,p} \right] &\leq \epsilon_n \left[\frac{|u_n|_\infty}{M_n} + \|u_n\|_{1,p} \right] \\ &\leq \epsilon_n \left[\frac{2M_n}{M_n} + \|u_n\|_{1,p} \right] \\ &= \epsilon_n \left[2 + \|u_n\|_{1,p} \right] \\ &\leq \epsilon_n'''', \end{aligned}$$

onde $\epsilon_n'''' \to 0$ já que $\|u_n\|_{1,p} < \infty$ pela primeira parte da proposição, consequentemente $2 + \|u_n\|_{1,p}$ é limitado, e ainda por hipótese temos $\epsilon_n \to 0$. Além disso, se substituirmos v_n por $-v_n$ segue que, também vale

$$-\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla G_k(u_n)\,dx - \int_\Omega b(x, u_n, \nabla u_n)G_k(u_n)\,dx + \int_\Omega f(x, u_n^+)G_k(u_n)\,dx \leq \epsilon_n'''',$$

multiplicando ambos os lados por (-1), temos

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla G_k(u_n)\,dx + \int_\Omega b(x, u_n, \nabla u_n)G_k(u_n)\,dx - \int_\Omega f(x, u_n^+)G_k(u_n)\,dx \geq -\epsilon_n''''$$

Logo,

$$\left| \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla G_k(u_n)\,dx + \int_\Omega b(x, u_n, \nabla u_n)G_k(u_n)\,dx - \int_\Omega f(x, u_n^+)G_k(u_n)\,dx \right| \leq \epsilon_n''''$$

com $\epsilon_n'''' \to 0$. Donde finalizamos a demonstração da afirmação 2.11.

Observe que por $(\bar{t})$ substituindo $\nabla G_k(u_n)$ por ∇u_n no termo a esquerda da desigualdade da afirmação 2.11, temos

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n\,dx + \int_\Omega b(x, u_n, \nabla u_n)G_k(u_n)\,dx - \int_\Omega f(x, u_n^+)G_k(u_n)\,dx \leq \epsilon_n''''. \qquad (\bar{\bar{t}})$$

Assim, devido a (1.3), (1.4), (1.10) e ao teorema de imersão de Sobolev, para todo $k \geq R_1$, podemos deduzir a seguinte

Afirmação 2.12.

$$\alpha_2 \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^p \ dx \leq \epsilon_n'''' + C_3 \|G_k(u_n)\|_{1,p} \left(\text{med}(\Omega_{n,k})\right)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$+ C_4 \|G_k(u_n)\|_{1,p} \|u_n\|_{1,p}^\sigma (\text{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{1}{p_1} - \frac{\sigma}{p^*}}$$

em que $p_1 = \frac{Np}{Np-N+p}$ *é o expoente conjugado de Hölder do expoente de Sobolev* p^*.

Demonstração da afirmação 2.12. Com efeito, note que por (1.4) temos

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^p \, dx + \int_\Omega b(x, u_n, \nabla u_n) G_k(u_n) \, dx \\
\leq &\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \nabla u_n \, dx + \int_\Omega b(x, u_n, \nabla u_n) G_k(u_n) \, dx \\
\leq &\epsilon_n''' + \int_\Omega f(x, u_n^+) G_k(u_n) \, dx
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha_2 \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^p \, dx \leq \epsilon_n''' + \int_\Omega f(x, u_n^+) G_k(u_n) \, dx$$

em que a última desigualdade se justifica devido a $(\bar{\bar{t}})$ e a (1.10) pois $b(x, u_n, \nabla u_n) G_k(u_n) \geq 0$. Agora veja que do termo que aparece na última desigualdade acima, segue de (1.3) que

$$\epsilon_n'''' + \int_\Omega f(x, u_n^+) G_k(u_n) \, dx \leq \epsilon_n'''' + C_2 \int_\Omega |G_k(u_n)| \, dx + C_1 \int_\Omega |u_n|^\sigma |G_k(u_n)| \, dx.$$

Por (r') e por $(\bar{t})$, podemos reescrever o termo a direita da desigualdade acima como

$$\begin{aligned}
&\epsilon_n'''' + C_1 \int_{\Omega - \Omega_{n,k}} |u_n|^\sigma |G_k(u_n)| \, dx + C_1 \int_{\Omega_{n,k}} |u_n|^\sigma |G_k(u_n)| \, dx \\
&+ C_2 \int_{\Omega - \Omega_{n,k}} |G_k(u_n)| \, dx + C_2 \int_{\Omega_{n,k}} |G_k(u_n)| \, dx \\
= &\epsilon_n'''' + C_2 \int_{\Omega_{n,k}} |G_k(u_n)| \, dx + C_1 \int_{\Omega_{n,k}} |u_n|^\sigma |G_k(u_n)| \, dx. \qquad (u)
\end{aligned}$$

Vamos agora estudar o que ocorre com os termos da soma a direita de (u), começando pelo último termo. Vejamos que podemos aplicar a desigualdade de Hölder e usar que por (1.3) $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Logo, precisamos obter o expoente conjugado de Hölder de p^* e a este iremos chamar p_1. De fato, pela desigualdade de Hölder podemos escrever o último termo da soma a direita em (u) como

$$\int\limits_{\Omega_{n,k}} |u_n|^\sigma |G_k(u_n)|\, dx \leq \left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{\sigma p_1}\, dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |G_k(u_n)|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

onde

$$\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p_1} = 1.$$

Substituindo $p^* = \frac{Np}{N-p}$ acima , segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{Np}{N-p}} + \frac{1}{p_1} = 1 \implies & \frac{N-p}{Np} + \frac{1}{p_1} = 1 \\
\implies & \frac{1}{p_1} = 1 - \frac{N-p}{Np} \\
\implies & \frac{1}{p_1} = \frac{Np - N - p}{Np} \\
\implies & p_1 = \frac{Np}{Np - N - p}.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |G_k(u_n)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} = |G_k(u_n)|_{p^*}.$$

Desta forma, o último termo da soma em (u) pode ser reescrita como

$$\int\limits_{\Omega_{n,k}} |u_n|^\sigma |G_k(u_n)| \leq \left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{\sigma p_1}\, dx\right)^{\frac{1}{p_1}} |G_k(u_n)|_{p^*}. \qquad (\overline{u})$$

Analogamente, podemos aplicar a desigualdade de Hölder no penúltimo termo da soma a direita de (u) tal que,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega_{n,k}} |G_k(u_n)|\, dx &= \int\limits_{\Omega_{n,k}} 1 \cdot |G_k(u_n)|\, dx \\
&\leq \left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} 1\, dx\right)^{1/q} \left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |G_k(u_n)|^p\, dx\right)^{1/p} \\
&= (\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{1/q}\, |G_k(u_n)|_p, \qquad (\overline{\overline{u}})
\end{aligned}$$

onde $q = \frac{p}{p-1}$. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1 &\implies \frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}\\ &\implies \frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}\\ &\implies q=\frac{p}{p-1}\end{aligned}$$

Agora, substituindo as observações acima em $(\overline{\overline{u}})$, obteremos

$$\int\limits_{\Omega_{n,k}} |G_k(u_n)|\ dx \leq (\text{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{p-1}{p}}\ |G_k(u_n)|_p. \qquad (\overline{\overline{\overline{u}}})$$

Com isso, substituindo $(\overline{u})$ e $(\overline{\overline{\overline{u}}})$ em (u), temos que

$$\begin{aligned}&\epsilon_n'''' + C_2\int\limits_{\Omega_{n,k}} |G_k(u_n)|\ dx + C_1\int\limits_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{\sigma}|G_k(u_n)|\ dx\\ \leq&\epsilon_n'''' + C_2\,(\text{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{p-1}{p}}\ |G_k(u_n)|_p + C_1\left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{\sigma p_1}\ dx\right)^{\frac{1}{p_1}} |G_k(u_n)|_{p^*}. \qquad (v)\end{aligned}$$

Veja que podemos aplicar novamente a desigualdade de Hölder para o termo $\int\limits_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{\sigma p_1}\ dx$ que aparece em (v).
Com efeito,

$$\begin{aligned}\left(\int\limits_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{\sigma p_1}\ dx\right)^{\frac{1}{p_1}} &= \int\limits_{\Omega_{n,k}} (1\cdot|u_n|^{\sigma p_1}\ dx)^{\frac{1}{p_1}}\\ &\leq \left(\left[\int\limits_{\Omega_{n,k}} |1|\ dx\right]^{1/q}\cdot\left[\int\limits_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{\sigma p_1 t}\ dx\right]^{1/t}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\ &= [\text{med}(\Omega_{n,k})]^{\frac{1}{q}\frac{1}{p_1}}\left[\int\limits_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{\sigma p_1 t}\ dx\right]^{\frac{1}{t}\frac{1}{p_1}}, \qquad (\overline{v})\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{q}\frac{1}{p_1} + \frac{1}{t}\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_1}$, equivalentemente $\frac{1}{q} + \frac{1}{t} = 1$. Assim, considerando

$$\begin{aligned} \frac{1}{q}\frac{1}{p_1} &= \frac{1}{p_1} - \frac{\sigma}{p^*} = \frac{1}{p_1}\left(1 - \frac{\sigma p_1}{p^*}\right) \\ \Longrightarrow \frac{1}{q} &= 1 - \frac{\sigma p_1}{p^*} \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} + \frac{1}{t} = 1 \ &\Longrightarrow \frac{1}{t} = 1 - \frac{1}{q} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{t} = \frac{\sigma p_1}{p^*} \\ &\Longrightarrow t = \frac{p^*}{\sigma p_1}. \end{aligned}$$

De onde segue que,

$$\begin{aligned} \left(\left[\int_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{\sigma p_1 t}\, dx\right]^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{p_1}} &= \left(\left(\int_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{\sigma}{p^*}p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &= \left(\left(\int_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\right)^{\sigma} \\ &\leq |u_n|_{p^*}^{\sigma} \\ &\leq \|u_n\|_{1,p}^{\sigma}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade aplicamos o teorema de Rellich–Kondrachov (ver teorema 9.16 em [15]).
Substituindo a desigualdade acima em $(\overline{v})$ temos que

$$\left(\int_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{\sigma p_1}\, dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq (\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{1}{p_1} - \frac{\sigma}{p^*}} \|u_n\|_{1,p}^{\sigma}. \qquad (\overline{\overline{v}})$$

Finalmente, substituindo $(\overline{\overline{v}})$ em (v), e usando imersão de Sobolev segue que

$$\begin{aligned} &\epsilon_n'''' + C_2(\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{p-1}{p}}|G_k(u_n)|_p + C_1|G_k(u_n)|_{p^*}\left(\int_{\Omega_{n,k}} |u_n|^{\sigma p_1}\, dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \\ \leq &\epsilon_n'''' + C_3\|G_k(u_n)\|_{1,p}(\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{p-1}{p}} + C_4\|G_k(u_n)\|_{1,p}\|u_n\|_{1,p}^{\sigma}(\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{\sigma}{p^*}\right)}. \end{aligned}$$

Com isso, acabamos de provar a afirmação 2.12.

Observe agora que,

$$\left(\frac{1}{p_1} - \frac{\sigma}{p^*}\right) = \frac{p^* - \sigma p_1}{p_1 p^*} = \left(1 - \frac{\sigma p_1}{p^*}\right)\frac{1}{p_1}$$

de forma que $\sigma < p^* - 1 = \frac{Np}{N-p} - 1 = \frac{Np-N+p}{N-p} = \frac{p^*}{p_1}$, consequentemente

$$\sigma\frac{p_1}{p^*} < \frac{p^*}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p^*} = 1 \implies 1 - \frac{\sigma p_1}{p^*} > 0.$$

Com estas observações, podemos provar a seguinte

Afirmação 2.13.

$$\frac{\alpha_2}{2}\|G_k(u_n)\|_{1,p}^p \leq \epsilon_n'''' + C_5\frac{p-1}{p}\left[(\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{p-1}{p}} + (\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\left(1-\frac{\sigma p_1}{p^*}\right)\frac{1}{p_1}}\right],$$

onde $C_5 := C_3 + C_4\|u_n\|_{1,p}^\sigma$, *pois* $\|u_n\|_{1,p}$ *é limitado em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração da afirmação 2.13. Com efeito, primeiramente, veja que o lado esquerdo da desigualdade demonstrada na afirmação 2.12 é equivalente a

$$\alpha_2\|G_k(u_n)\|_{1,p}^p = \alpha_2\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^p \, dx,$$

pois foi como definimos a norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ na notação número 2.
Agora, olhando para o lado direito da desigualdade na afirmação 2.12 como $\|u_n\|_{1,p}$ é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tomando $C_3 + C_4\|u_n\|_{1,p}^\sigma := C_5$, podemos reescrever a desigualdade da afirmação anterior como

$$\alpha_2\|G_k(u_n)\|_{1,p}^p \leq \epsilon_n''''+C_5\left[(\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{p-1}{p}} + (\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\left(1-\frac{\sigma p_1}{p^*}\right)\frac{1}{p_1}}\right]\|G_k(u_n)\|_{1,p} \qquad (w).$$

Pela desigualdade de Young, se tomarmos $a = \|G_k(u_n)\|_{1,p}$ e $b = 1$, e se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ temos $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ e então vale que

$$\begin{aligned}\|G_k(u_n)\|_{1,p} \cdot 1 &\leq \frac{\|G_k(u_n)\|_{1,p}^p}{p} + \frac{1^q}{q}\\ &= \frac{\|G_k(u_n)\|_{1,p}^p}{p} + \frac{p-1}{p}\end{aligned}$$

Logo, a desigualdade em (w) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\alpha_2\|G_k(u_n)\|_{1,p}^p &\leq \epsilon_n'''' + C_5\left[(\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{p-1}{p}} + (\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\left(1-\frac{\sigma p_1}{p^*}\right)\frac{1}{p_1}}\right]\left(\frac{\|G_k(u_n)\|_{1,p}^p}{p} + \frac{p-1}{p}\right)\\ &= \epsilon_n'''' + C_5\left[(\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{p-1}{p}} + (\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\left(1-\frac{\sigma p_1}{p^*}\right)\frac{1}{p_1}}\right]\frac{\|G_k(u_n)\|_{1,p}^p}{p}\\ &\quad + C_5\left[(\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{p-1}{p}} + (\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\left(1-\frac{\sigma p_1}{p^*}\right)\frac{1}{p_1}}\right]\frac{p-1}{p}. \qquad (\overline{w})\end{aligned}$$

Dado, que $\Omega_{n,k} = \{x \in \Omega : |u_n(x)| > k\} \subset \{x \in \Omega : \overline{h}(x) > k\}$, então segue que

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{med}(\Omega_{n,k}) = 0$$

uniformemente em $n \in \mathbb{N}$. O que é verdade, pois caso contrário, supondo que $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{med}(\Omega_{n,k}) > 0$, daí como $\Omega_{n,k+1} \subset \Omega_{n,k}$, consequentemente $\mathrm{med}\left(\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_{n,k}\right) > 0$. Entretanto, dado $x \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_{n,k}$ temos que $\overline{h}(x) = \infty$ um absurdo, caso $\overline{h}$ não tenha $\mathbb{R}$ como contradomínio. Desta forma, como vale $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{med}(\Omega_{n,k}) = 0$ temos que, para cada $\delta > 0$, existe $k_0 \geq R_1$ tal que para todo $k \geq k_0$ e $n \in \mathbb{N}$, o penúltimo termo que aparece na soma em $(\overline{w})$, pode ser escrito como

$$\frac{C_5}{p}\left[(\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{p-1}{p}} + (\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\left(1-\frac{\sigma p_1}{p^*}\right)\frac{1}{p_1}}\right]\|G_k(u_n)\|_{1,p}^p < \frac{\alpha_2}{2}.$$

Consequentemente, o último termo da soma na igualdade em $(\overline{w})$ fica

$$\frac{\alpha_2}{2}\|G_k(u_n)\|_{1,p}^p \leq \epsilon_n'''' + C_5\frac{p-1}{p}\left[(\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\frac{p-1}{p}} + (\mathrm{med}(\Omega_{n,k}))^{\left(1-\frac{\sigma}{p^*}\right)\frac{1}{p_1}}\right],$$

de onde concluímos a demonstração da afirmação 2.13.

Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|G_k(u_n)\|_{1,p} < \delta \;\forall\, k \geq k_0,\; \forall\, n \geq n_0.$$

O que conclui a demonstração do passo 2 e também da proposição. $\square$

Capítulo 3

Estimativa para $L^\infty(\Omega)$

Estudaremos algumas desigualdades para as normas $L^p(\Omega)$ em $2 \leq p < +\infty$ a partir das soluções do problema de Dirichlet para a equação $Lu = T$ que foi demonstrada em outras referências por Stampacchia [55], [56], [57] e por [41] fornecendo alguns novos detalhes. Neste capítulo, Lu é um operador elíptico de segunda ordem do tipo

$$Lu = -\left(a_{ij}u_{x_i} + d_j u\right)_{x_j} + \left(b_i u_{x_i} + cu\right).$$

A fim de provarmos o teorema principal deste capítulo precisaremos do seguinte lema, cuja demonstração encontra-se em [54] e [56].

Lema 3.1. *Seja $\varphi(t)$ uma função definida para $t \geq k_0$, não negativa e não crescente tal que se $h > k \geq k_0$ tem-se que*

$$\varphi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^\alpha}\left[\varphi(k)\right]^\beta \tag{3.1}$$

onde C, α, β são constantes positivas. Assim, se

(I) $\beta > 1$ *tem-se*

$$\varphi(k_0 + d) = 0 \tag{3.2}$$

onde

$$d^\alpha = C\left[\varphi(k_0)\right]^{\beta-1} 2^{\frac{\alpha\beta}{(\beta-1)}} \tag{3.3}$$

(II) $\beta = 1$ *tem-se*

$$\varphi(h) \leq e \cdot e^{[-\zeta(h-k_0)]}\varphi(k_0) \quad \textit{onde}\ \zeta = (eC)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.4}$$

(III) $\beta < 1$ *e* $k_0 > 0$

$$\varphi(h) \leq 2^{\frac{\mu}{(1-\beta)}} \left\{ C^{\frac{1}{(1-\beta)}} + (2k_0)^{\mu}\varphi(k_0) \right\} \cdot h^{-\mu} \quad \textit{onde } \mu = \frac{\alpha}{1-\beta} \tag{3.5}$$

Seja $u(x)$ uma subsolução em $H_0^1(\Omega)$ em relação à equação

$$Lu = T = -\sum (f_i)_{x_i} \qquad (\Theta)$$

então tem-se

$$a(u,\varphi) = \int\limits_{\Omega} \left\{ a_{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j} + b_i u_{x_i}\varphi + d_j u \varphi_{x_j} + cu\varphi \right\} dx \leq \int\limits_{\Omega} f_i \varphi_{x_i} dx \tag{3.6}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ com $\varphi(x) \geq 0$ em Ω. □

Consideremos verdadeiras as seguintes premissas:

(i) L é uniformemente elíptica, isto é, existe uma constante $\nu \geq 0$ tal que

$$\nu|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

com $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

$$\begin{cases} |a_{ij}(x)| \leq M, \\ b_i(x),\ d_i(x) \in L^N(\Omega), \quad (i = 2, \cdots, N) \\ c(x) \in L^{N/2}(\Omega) \end{cases}$$

(ii) $f_i \in L^p(\Omega)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, com $p > N$;

(iii) no sentido das distribuições, temos:

$$c - \sum (d_i)_{x_i} \geq c_0 > -\infty,$$

(iv) $\max\limits_{\partial\Omega} u \leq \Phi < +\infty$ onde $\Phi \geq 0$ é uma constante.

Teorema 3.1. *Sejam as hipóteses (i) − (iv), então existem constantes K e R, onde R não depende de Ω, tal que*

$$\max_{\Omega} u \leq \max\left(0, \max_{\partial\Omega} u\right) + K \sum |f_i|_p \left(\text{med}(\Omega)\right)^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p}} + R|u|_2 \tag{3.7}$$

onde u é subsolução de (Θ). A constante R será nula se o funcional $a(u,\varphi)$ for coercivo em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Fixemos $\overline{\lambda} > -c_0$ de forma que $a(u,v) + \overline{\lambda}(u,v)_{L^2(\Omega)}$ seja coercivo em $H_0^1(\Omega)$, isto é, existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,u) + \overline{\lambda}(u,u)_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|u\|_{1,2}^2, \qquad (Aa)$$

onde $\|u\|_{1,2} = |\nabla u|_2$.
Agora, de (3.6) temos

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) + \overline{\lambda}(u,\varphi)_{L^2(\Omega)} &\leq \left(\int_\Omega f_i \varphi_{x_i}\, dx \right) + \overline{\lambda}(u,\varphi)_{L^2} \\ &= \int_\Omega f_i \varphi_{x_i}\, dx + \overline{\lambda} \int_\Omega u\varphi\, dx \\ &= \int_\Omega \left[f_i \varphi_{x_i} + \overline{\lambda} u \varphi \right] dx. \qquad (Bb) \end{aligned}$$

Defina a função $v = \max\{u - k, 0\}$ com $k > \Phi$, onde

$$\Phi := \max\{\max_{\partial\Omega}\{u - k\}, 0\}.$$

Note que $v \in H_0^1(\Omega)$ pelo teorema A.6 com $p = 2$. Seja $A(k) = \{x \in \Omega : u(x) \geq k\}$, se $v \neq 0$ temos $v = u - k$ e $v_{x_i} = u_{x_i}$ em $A(k)$. Tomando $\varphi = v$ segue de (3.6) que

$$\int_{A(k)} \left[a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + b_i u_{x_i} v + d_j u v_{x_j} + cuv + \overline{\lambda} uv \right] dx \leq \int_{A(k)} \left[f_i v_{x_i} + \overline{\lambda} uv \right] dx.$$

Assim, usando agora que $u = v + k$ e $u_{x_i} = v_{x_i}$, temos

$$\int_{A(k)} \left[a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + b_i v_{x_i} v + d_j (v+k) v_{x_j} + c(v+k)v + \overline{\lambda}(v+k)v \right] dx \leq \int_{A(k)} \left[f_i v_{x_i} + \overline{\lambda} uv \right] dx$$

isto é,

$$\begin{aligned} &\int_{A(k)} \left[a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + b_i v_{x_i} v + d_j v v_{x_j} + cvv \right] dx + \overline{\lambda} \int_{A(k)} vv\, dx \\ &\quad + \int_{A(k)} \left[d_j k v_{x_j} + ckv \right] dx + \overline{\lambda} \int_{A(k)} kv\, dx \leq \int_{A(k)} \left[f_i v_{x_i} + \overline{\lambda} uv \right] dx. \end{aligned}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{A(k)} \left[d_j k v_{x_j} + ckv\right]\ dx + \overline{\lambda} \int\limits_{A(k)} kv\ dx\\
=&k \int\limits_{A(k)} d_j v_{x_j}\ dx + ck \int\limits_{A(k)} v\ dx + \overline{\lambda} k \int\limits_{A(k)} v\ dx\\
=&-k \int\limits_{A(k)} (d_j)_{x_j} v\ dx + k \int\limits_{A(k)} cv\ dx + k \int\limits_{A(k)} \overline{\lambda} v\ dx, \quad \text{usando integração por partes}\\
=&k \int\limits_{A(k)} \left(c - (d_j)_{x_j}\right) v\ dx + k \int\limits_{A(k)} \overline{\lambda} v\ dx\\
\geq&k \int\limits_{A(k)} c_0 v\ dx + k \int\limits_{A(k)} \overline{\lambda} v\ dx, \quad \text{pela hipótese } (iii)\\
=&k(c_0 + \overline{\lambda}) \int\limits_{A(k)} v\ dx > 0, \quad \text{pois } \overline{\lambda} > -c_0.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\int\limits_{A(k)} \left[a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + b_i v_{x_i} v + d_j v v_{x_j} + cvv\right]\ dx + \overline{\lambda} \int\limits_{A(k)} vv\ dx \leq \int\limits_{A(k)} \left[f_i v_{x_i} + \overline{\lambda} uv\right]\ dx
$$

ou, equivalentemente,

$$
a(v,v) + \overline{\lambda}(v,v)_{L^2(\Omega)} \leq \int\limits_{A(k)} \left[f_i v_{x_i} + \overline{\lambda} uv\right]\ dx. \tag{3.8}
$$

Agora, aplicando (Aa) temos

$$
\alpha \|v\|_{1,2}^2 \leq \int\limits_{A(k)} \left[f_i v_{x_i} + \overline{\lambda} uv\right]\ dx = \int\limits_{A(k)} f_i v_{x_i}\ dx + \overline{\lambda} \int\limits_{A(k)} uv\ dx. \tag{Cc}
$$

Usando a desigualdade de Hölder em $\int\limits_{A(k)} f_i v_{x_i}\ dx$ temos

$$
\alpha \|v\|_{1,2}^2 \leq |f_i|_2 |v_{x_i}|_2 + \overline{\lambda} \int\limits_{A(k)} uv\ dx.
$$

Usando a desigualdade de Young (versão alternativa)

$$
|v_{x_i}|_2 |f_i|_2 \leq \epsilon |v_{x_i}|_2^2 + C_\epsilon |f_i|_2^2
$$

para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado.
Sabemos que $p^* = \frac{Np}{N-p}$ e que $(p^*)' = \frac{Np}{N+p}$ e aplicando a desigualdade de Hölder, a segunda parcela da soma em (Cc) pode ser reescrita como:

$$\int\limits_{A(k)} uv\, dx \leq \left(\int\limits_{A(k)} |v|^{2^*}\, dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int\limits_{A(k)} |u|^{(2^*)'}\, dx \right)^{\frac{1}{(2^*)'}}$$
$$= |v|_{2^*} \left(\int\limits_{A(k)} |u|^{(2^*)'}\, dx \right)^{\frac{1}{(2^*)'}}.$$

Agora, usando imersão de Sobolev com $W^{1,p}(A(k)) \hookrightarrow L^s(A(k))$, $1 \leq s \leq q^*$, temos

$$\int\limits_{A(k)} uv\, dx \leq \widetilde{c}\|v\|_{1,2} \left(\int\limits_{A(k)} |u|^{(2^*)'}\, dx \right)^{\frac{1}{(2^*)'}}$$

e aplicando a desigualdade de Young, vem que

$$\int\limits_{A(k)} uv\, dx \leq \epsilon \widetilde{c}^2 \|v\|_{1,2}^2 + C_\epsilon \left(\int\limits_{A(k)} |u|^{(2^*)'}\, dx \right)^{\frac{2}{(2^*)'}}.$$

Substituindo tudo em (Cc) temos

$$\alpha \|v\|_{1,2}^2 \leq \epsilon |v_{x_i}|_2^2 + C_\epsilon |f_i|_2^2 + \epsilon \overline{\lambda} \widetilde{c}^2 \|v\|_{1,2}^2 + C_\epsilon \overline{\lambda} \left(\int\limits_{A(k)} |u|^{(2^*)'}\, dx \right)^{\frac{2}{(2^*)'}}$$
$$\leq \epsilon \left(N + \overline{\lambda} \widetilde{c}^2 \right) \|v\|_{1,2}^2 + C_\epsilon |f_i|_2^2 + C_\epsilon \overline{\lambda} \left(\int\limits_{A(k)} |u|^{(2^*)'}\, dx \right)^{\frac{2}{(2^*)'}},$$

pois $|v_{x_i}|_2 \leq |\nabla v|_2 = \|v\|_{1,2}$.
Assim temos,

$$\left(\alpha - \epsilon \left(N + \overline{\lambda} \widetilde{c}^2 \right) \right) \|v\|_{1,2}^2 \leq C_\epsilon |f_i|_2^2 + C_\epsilon \overline{\lambda} \left(\int\limits_{A(k)} |u|^{(2^*)'}\, dx \right)^{\frac{2}{(2^*)'}}.$$

Com isso, para ϵ suficientemente pequeno, de forma que $\left(\alpha - \epsilon \left(N + \overline{\lambda} \widetilde{c}^2 \right) \right) > 0$, existe $t > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{1,2}^2 &\leq t\left[\int\limits_{A(k)} f_i^2\,dx + \overline{\lambda}\left(\int\limits_{A(k)} |u|^{(2^*)'}\,dx\right)^{\frac{2}{(2^*)'}}\right] \\
&= t\left[\int\limits_{A(k)} f_i^2\,dx + \overline{\lambda}\left(\int\limits_{A(k)} u^{(2^*)'}\,dx\right)^{\frac{2}{(2^*)'}}\right]. \qquad (Dd)
\end{aligned}
$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder com $s = \frac{p}{2}$ e $s' = \frac{p}{p-2}$ no primeiro termo de (Dd) temos

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{A(k)} f_i^2\,dx &\leq \left(\int\limits_{A(k)} f_i^{2\frac{p}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int\limits_{A(k)} 1^{\frac{p}{p-2}}\,dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \\
&= |f_i|_p^2(\mathrm{med}(A(k)))^{1-\frac{2}{p}}.
\end{aligned}
$$

Considerando $r > (2^*)'$ e usando a desigualdade de Hölder com expoentes $s = \frac{r}{(2^*)'}$ e $s' = \frac{r}{r-(2^*)'}$ no último termo da soma em (Dd), temos

$$
\begin{aligned}
\left(\int\limits_{A(k)} u^{(2^*)'}\,dx\right)^{\frac{2}{(2^*)'}} &\leq \left(\left(\int\limits_{A(k)} u^{(2^*)'s}\,dx\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int\limits_{A(k)} 1^{s'}\,dx\right)^{\frac{1}{s'}}\right)^{\frac{2}{(2^*)'}} \\
&= \left(\left(\int\limits_{A(k)} u^{r}\,dx\right)^{\frac{(2^*)'}{r}} (\mathrm{med}(A(k)))^{\frac{r-(2^*)'}{r}}\right)^{\frac{2}{(2^*)'}} \\
&= \left(\int\limits_{A(k)} u^{r}\,dx\right)^{\frac{2}{r}} (\mathrm{med}(A(k)))^{\frac{2}{(2^*)'}-\frac{2}{r}} \\
&= |u|_r^2\,(\mathrm{med}(A(k)))^{\frac{2}{(2^*)'}-\frac{2}{r}}
\end{aligned}
$$

Então, podemos reescrever (Dd) como:

$$
\|v\|_{1,2}^2 \leq t\left[|f_i|_p^2\,(\mathrm{med}(A(k)))^{1-\frac{2}{p}} + \overline{\lambda}|u|_r^2\,(\mathrm{med}(A(k)))^{\frac{2}{(2^*)'}-\frac{2}{r}}\right].
$$

Desde que $W_0^{1,p}(A(k)) \hookrightarrow L^{2^*}(A(k))$, existe $\overline{c} > 0$ tal que $|v|_{2^*} \leq \overline{c}\|v\|_{1,2}$, assim vale também que

$$\frac{1}{c}|v|_{2^*}^2 \leq \|v\|_{1,2}^2 \leq t\left[|f_i|_p^2 \left(\mathrm{med}(A(k))\right)^{1-\frac{2}{p}} + \overline{\lambda}|u|_r^2 \left(\mathrm{med}(A(k))\right)^{\frac{2}{(2^*)'}-\frac{2}{r}}\right].$$

Por outro lado, como $h > k > \Phi$ temos que $A(h) \subset A(k)$. Consequentemente, com $v = u - k$ temos ainda que

$$\begin{aligned}
|v|_{2^*}^2 = \left(\int_{A(k)} v^{2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}} &= \left(\int_{A(k)} (u-k)^{2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \\
&\geq \left(\int_{A(h)} (u-k)^{2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \\
&\geq \left(\int_{A(h)} (h-k)^{2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}}
\end{aligned}$$

em que a última desigualdade se justifica pelo fato de que $u(x) \geq h > k$ em

$$A(h) = \{x \in \Omega : u(x) \geq h\}.$$

Assim,

$$|v|_{2^*}^2 \geq (h-k)^2 \left(\int_{A(h)} 1\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}} = (h-k)^2 \left(\mathrm{med}A(h)\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&(h-k)^2 \left(\mathrm{med}(A(h))\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \\
&\leq t\left[|f_i|_p^2 \left(\mathrm{med}A(k)\right)^{1-\frac{2}{p}} + \overline{\lambda}|u|_r^2 \left(\mathrm{med}A(k)\right)^{\frac{2}{(2^*)'}-\frac{2}{r}}\right] \\
&\leq t\left[|f_i|_p^2 \left(\mathrm{med}\ A(k)\right)^{\min\left\{1-\frac{2}{p};\frac{N+2}{N}-\frac{2}{r}\right\}/\left(1-\frac{2}{N}\right)} + \overline{\lambda}|u|_r^2 \left(\mathrm{med}\ A(k)\right)^{\min\left\{1-\frac{2}{p};\frac{N+2}{N}-\frac{2}{r}\right\}/\left(1-\frac{2}{N}\right)}\right] \\
&\leq t\left[|f_i|_p^2 + \overline{\lambda}|u|_r^2\right] \left(\mathrm{med}(A(k))\right)^{\min\left\{1-\frac{2}{p};\frac{N+2}{N}-\frac{2}{r}\right\}/\left(1-\frac{2}{N}\right)},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\mathrm{med}(A(h)) &\leq \frac{t^{\frac{2^*}{2}}}{(h-k)^{2^*}} \left[|f_i|_p^2 + \overline{\lambda}|u|_r^2\right]^{\frac{2^*}{2}} \left(\mathrm{med}(A(k))\right)^{\min\left\{1-\frac{2}{p};\frac{N+2}{N}-\frac{2}{r}\right\}/\left(1-\frac{2}{N}\right)} \\
&= \frac{\overline{K}}{(h-k)^{2^*}} \left[|f_i|_p^2 + \overline{\lambda}|u|_r^2\right]^{\frac{2^*}{2}} \left(\mathrm{med}(A(k))\right)^{\beta}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

em que $\beta = \min\left\{1-\frac{2}{p}; \frac{N+2}{N}-\frac{2}{r}\right\}/\left(1-\frac{2}{N}\right)$ e $\overline{K} = t^{\frac{2^*}{2}}$.
Como $u \in L^2(\Omega)$, segue de (3.9) com $r = 2$ e devido ao lema 3.1 item (III), que $u \in L^{t_1}(\Omega)$ com $t_1 > 2$. Ainda por (3.9) com $r = t_1$ e devido ao lema 3.1 item (III) segue que $u \in L^{t_2}(\Omega)$ com $t_2 > t_1 > 2$. Fazendo esta iteração temos que $u \in L^r(\Omega)$ com

$$\frac{N+2}{N} - \frac{2}{r} > 1 - \frac{2}{p},$$

pois $p > N \implies \frac{1}{N} > \frac{1}{p} \implies \frac{2}{N} > \frac{2}{p}$. Portanto, $\beta > 1$. Daí, aplicando o lema 3.1 item (I) temos que $\operatorname{med}(A(k_0+d)) = 0$ onde

$$d^{2^*} = C\left(\operatorname{med}(A(k_0))\right)^{\beta-1} 2^{\frac{2^*\beta}{(\beta-1)}},\ k_0 \le k$$

isto é,

$$\begin{aligned}
d &= \left(\overline{K}\left(|f_i|_p^2 + \overline{\lambda}|u|_r^2\right)^{\frac{2^*}{2}} \left(\operatorname{med}(A(k_0))\right)^{\beta-1} 2^{\frac{2^*\beta}{(\beta-1)}}\right)^{\frac{1}{2^*}} \\
&= \overline{K}^{\frac{1}{2^*}} \left(|f_i|_p^2 + \overline{\lambda}|u|_r^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\operatorname{med}(A(k_0))\right)^{\frac{\beta-1}{2^*}} 2^{\frac{\beta}{(\beta-1)}} \\
&\le \overline{K}^{\frac{1}{2^*}} \left(|f_i|_p + \overline{\lambda}^{\frac{1}{2}}|u|_r\right) \left(\operatorname{med}(\Omega)\right)^{\frac{\beta-1}{2^*}} 2^{\frac{\beta}{(\beta-1)}},\ \text{pelo teorema A.3 item 3.}
\end{aligned}$$

Considerando $\beta = \frac{2^*}{p^*} + 1 > 1$ segue que

$$d \le \overline{K}^{\frac{1}{2^*}} \left(|f_i|_p + \overline{\lambda}^{\frac{1}{2}}|u|_r\right) \left(\operatorname{med}(\Omega)\right)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} 2^{\frac{\beta}{(\beta-1)}}.$$

Para $r = 2$, segue que

$$\begin{aligned}
d \le& \overline{K}^{\frac{1}{2^*}} |f_i|_p \operatorname{med}(\Omega)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} 2^{\frac{\beta}{(\beta-1)}} + \overline{K}^{\frac{1}{2^*}} \overline{\lambda}^{\frac{1}{2}} \operatorname{med}(\Omega)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} 2^{\frac{\beta}{\beta-1}} |u|_2 \\
=& K|f_i|_p \left(\operatorname{med}(\Omega)\right)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} + R|u|_2 \\
\le& \max\left\{0, \max_{\partial\Omega} u\right\} + K\sum_{i=1}^{N} |f_i|_p \left(\operatorname{med}(\Omega)\right)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} + R|u|_2.
\end{aligned}$$

Desde que, para $\beta > 1$ por (3.2) segue que

$$0 = \operatorname{med}\left(A(k_0+d)\right) = \operatorname{med}\{x \in \Omega : u(x) \ge k_0 + d > d\}.$$

Segue que $u(x) \le d$, $x \in \Omega$, logo $u \in L^\infty(\Omega)$ e consequentemente $\max_{\Omega} u \le d$.

$\square$

Capítulo 4

Solução para equação de Euler-Lagrange com termo quase-linear

Neste capítulo estudaremos a existência de pontos críticos para um dado funcional e mostraremos a existência de soluções fracas positivas para a equação de Euler-Lagrange à qual o funcional J está associado. Dado $\Omega \in \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, with $N > 2$, e uma função mensurável $a(x)$ tal que

$$0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta \tag{4.1}$$

em quase todo ponto $x \in \Omega$.
O funcional a ser estudado é

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [a(x) + |v|^{\gamma}] \, |\nabla v|^2 \ dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} (v^+)^p \ dx,$$

se $\gamma > 1$ e $p > 1$. E este está associado à seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}([a(x) + |u|^{\gamma}]\nabla u) + \frac{\gamma}{2}|u|^{\gamma-2}u|\nabla u|^2 = u^{p-1}, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Iremos encontrar funções não-negativas e não-triviais $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u^{\gamma-1}|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$, e tal que

$$\int_{\Omega} [a(x) + u^{\gamma}]\nabla u \nabla v \ dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u^{\gamma-1}|\nabla u|^2 v \ dx = \int_{\Omega} u^{p-1} v \ dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, resumidamente, em outras palavras mostraremos a existência de soluções fracas positivas para $\gamma > 1$ para a equação (4.2).

Teorema 4.1. *Se $\gamma > 1$ é tal que $\gamma + 2 < 2^*$, e p satisfaz*

$$\gamma + 2 < p < \frac{2^*}{2}(\gamma + 2) \tag{4.3}$$

então existe uma solução fraca positiva $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ do problema de Dirichlet (4.2).

Demonstração. Usaremos ferramentas do método variacional para obter a solução positiva u que satisfaz (4.2). Com o objetivo de deixar clara a estratégia usada para resolver este tipo de problema dividiremos a demonstração em algumas etapas, as quais são

Passo 1: Definição de um funcional truncado;

Passo 2: Geometria e compacidade para o funcional truncado;

Passo 3: Estimativa L^∞ para a solução obtida no passo anterior;

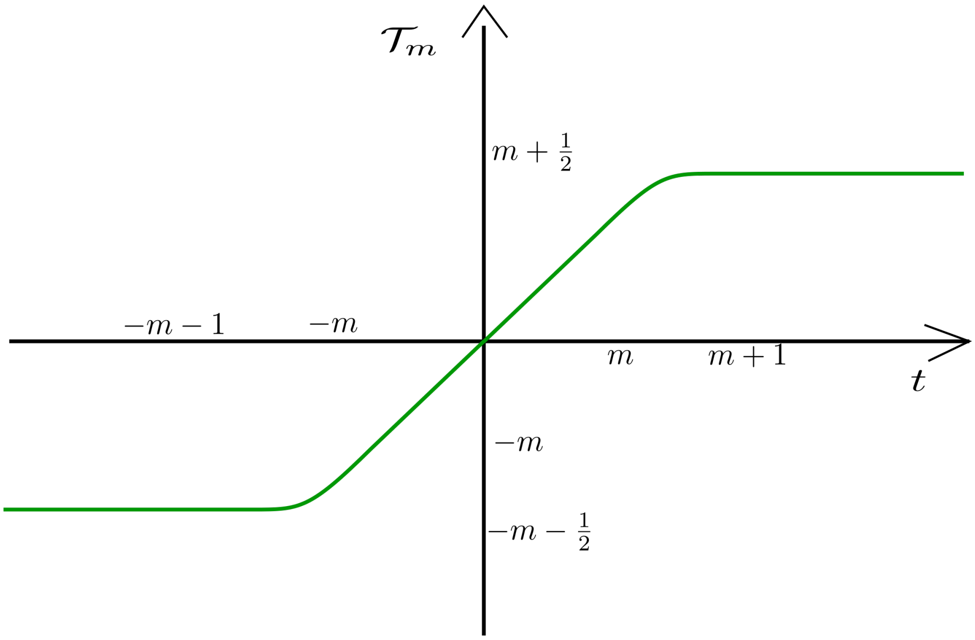
Passo 4: Conclusão

Passo 1: Definindo um funcional truncado

Seja q um número real tal que $\gamma + 2 < q < \min(p, 2^*)$. Se m e n são números inteiros positivos, vamos considerar a regularização C^1 do truncamento ao nível m, $\mathcal{T}_m(t)$, definido por

$$\mathcal{T}_m(t) = \begin{cases} -m - \frac{1}{2} & \text{se } t \leq -m-1, \\ (m+1)t + \frac{t^2+m^2}{2} & \text{se } -m-1 \leq t \leq -m, \\ \quad t & \text{se } -m \leq t \leq m, \\ (m+1)t - \frac{t^2+m^2}{2} & \text{se } m \leq t \leq m+1, \\ m + \frac{1}{2} & \text{se } m+1 \leq t, \end{cases} \tag{4.4}$$

onde o gráfico associado a (4.4) é



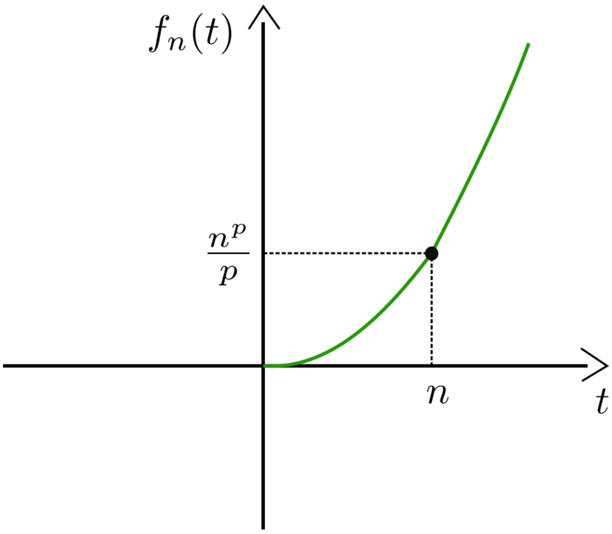
Consideremos ainda a regularização C^1do truncamento da função $\frac{t^p}{p}$ dado por

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{(t^+)^p}{p} & \text{se } t < n, \\ n^p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{n^{p-q}t^q}{q} & \text{se } n \leq t. \end{cases} \tag{4.5}$$

Note que da definição de f_n temos que se $t = n$ então

$$\begin{aligned} f_n(n) &= n^p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{n^{n-q}n^q}{q} \\ &= \frac{n^p}{p} - \frac{n^p}{q} + \frac{n^p n^{-q} n^q}{q} \\ &= \frac{n^p}{p} - \frac{n^p}{q} + \frac{n^p}{q} \\ &= \frac{n^p}{p} \end{aligned}$$

Assim o gráfico referente a (4.5) é



Afirmação 4.1.

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{n^{p-q}t^q}{q},\ \forall\, t \geq 0. \tag{4.6}$$

Demonstração da afirmação 4.1: Em todo caso, como $q < \min\{p, 2^*\}$, ou seja, $p > q$ o que implica que $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$.

[Caso: $t \geq n$] Por um lado temos,

$$\begin{aligned} f_n(t) &= n^p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{n^{p-q}t^q}{q} \\ &< \frac{n^{p-q}t^q}{q} \end{aligned}$$

pois $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < 0$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned} f_n(t) &= n^p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{n^{p-q}t^q}{q} \\ &\geq n^p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{n^{p-q}n^q}{q} \\ &= \frac{n^p}{p} - \frac{n^p}{q} + \frac{n^p}{q} \geq 0. \end{aligned}$$

[Caso: $t < n$] De um lado, claramente $f_n(t) \geq 0$, pois $t \geq 0$.

De outro lado,

$$
\begin{aligned}
f_n(t) &= \frac{t^p}{p} \\
&= \frac{t^p t^q}{p t^q} \\
&< \frac{t^{p-q} t^q}{q}, \text{ pois } \frac{1}{p} < \frac{1}{q} \\
&< \frac{n^{p-q} t^q}{q}, \text{ pois } t < n.
\end{aligned}
$$

Afirmação 4.2.

$$
0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^p}{p}, \ \forall t \geq 0. \tag{4.7}
$$

Demonstração da afirmação 4.2: Do que foi argumentado na afirmação anterior, já provamos que $f_n(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$. Resta provar que $f_n(t) \leq \frac{t^p}{p}$, $\forall t \geq 0$, o que é claro se $t < n$. Enquanto que se $t \geq n$, definimos

$$
\begin{aligned}
g_n(t) &= f_n(t) - \frac{t^p}{p} \\
&= \frac{n^p}{p} - \frac{n^p}{q} + \frac{n^{p-q} t^q}{q} - \frac{t^p}{p}.
\end{aligned}
$$

Por um lado veja que quando $n = t$, temos

$$
\begin{aligned}
g_n(n) &= \frac{n^p}{p} - \frac{n^p}{q} + \frac{n^{p-q} n^q}{q} - \frac{n^p}{p} \\
&= -\frac{n^p}{q} + \frac{n^p}{q} = 0.
\end{aligned}
$$

Note ainda que,

$$
\begin{aligned}
g_n'(t) &= n^{p-q} t^{q-1} - t^{p-1} \\
&= t^{q-1}(n^{p-q} - t^{p-q}) < 0,
\end{aligned}
$$

ou seja, g é decrescente e $g_n(t) < g_n(n) = 0$, quando $t > n$. Isto é, $f_n(t) - \frac{t^p}{p} \leq 0$, o que implica que

$$
f_n(t) \leq \frac{t^p}{p}, \ \forall t \geq n.
$$

Concluímos assim a prova da afirmação 4.2.

Vamos agora considerar o funcional truncado

$$J_{m,n}(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega [a(x) + |\mathcal{T}_m(v)|^\gamma]|\nabla v|^2\, dx - \int_\Omega f_n(v)\, dx, \tag{4.8}$$

para $v \in H_0^1(\Omega)$.

Afirmação 4.3. *O funcional em (4.8) está bem definido.*

Demonstração da afirmação 4.3: Para provar a afirmação, basta mostrarmos que para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se $J_{m,n}(v) < \infty$. De fato, por (4.1) sabemos que $0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta$, além disso, pela definição de $\mathcal{T}_m$ temos $|\mathcal{T}_m(v)|^\gamma \leq \left(m + \frac{1}{2}\right)^\gamma$ e uma vez que $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ isso implica que, no caso do primeiro termo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega [a(x) + |\mathcal{T}_m(v)|^\gamma]|\nabla v|^2\, dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\beta + \left(m + \frac{1}{2}\right)^\gamma\right] |\nabla v|^2\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\beta + \left(m + \frac{1}{2}\right)^\gamma\right] \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\beta + \left(m + \frac{1}{2}\right)^\gamma\right] \|v\|_{1,2}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Resta checar que $\int_\Omega f_n(v)\ dx < +\infty$. Para tanto, lembremos que por (4.6) vale que $0 \leq f_n(t) \leq \frac{n^{p-q}t^q}{q}$, então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_n(v)\, dx &\leq \int_\Omega \frac{n^{p-q}v^q}{q}\, dx \\
&= \frac{n^{p-q}}{q}\int_\Omega v^q\, dx \\
&\leq \frac{n^{p-q}}{q} C^q \|v\|_{1,2}^q < \infty,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a imersão de Sobolev.

Passo 2: Geometria e compacidade para o funcional truncado

Vamos agora provar que para cada m e n, o funcional $J_{m,n}$ satisfaz as hipóteses da versão modificada do teorema do passo da montanha que vimos no capítulo 2.

Note primeiramente que

$$
\begin{aligned}
J_{m,n}(v) &= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} [a(x) + |\mathcal{T}_m(v)|^{\gamma}]\, |\nabla v|^2\, dx - \int\limits_{\Omega} f_n(v)\, dx \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, dx - \int\limits_{\Omega} f_n(v)\, dx \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, dx - \frac{n^{p-q}}{q}\int\limits_{\Omega} (v^+)^q\, dx,
\end{aligned}
$$

onde na primeira desigualdade usamos que de (4.1) tínhamos $a(x) \geq \alpha$ o que implica que $a(x)+|v|^{\gamma} \geq \alpha$. E na segunda desigualdade usamos (4.6), ou seja que $-f_n(v) \geq -\frac{n^{p-q}(v^+)^q}{q}$.

Afirmação 4.4. *Assumindo*

$$
L_n(v) := \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, dx - \frac{n^{p-q}}{q}\int\limits_{\Omega} (v^+)^q\, dx
$$

afirmamos que zero é um mínimo local de L_n.

Demonstração da afirmação 4.4: Veja que

$$
\begin{aligned}
L_n(v) &= \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, dx - \frac{n^{p-q}}{q}\int\limits_{\Omega} (v^+)^q\, dx \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, dx - \frac{n^{p-q}}{q}\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v^+|^2\, dx\right)^{\frac{q}{2}} \\
&= \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, dx \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{n^{p-q}}{q}\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v^+|^2\, dx\right)^{\frac{q-2}{2}}\right),
\end{aligned}
\qquad (*_1)
$$

onde usamos imersão de Sobolev com $|v|_q^q \leq C\|v\|_{1,2}^q$ na desigualdade acima.
Por outro lado, devemos ter

$$
\frac{\alpha}{2} - \frac{n^{p-q}}{q}t^{q-2} > 0 \iff t < \left(\frac{q\alpha}{2n^{p-q}}\right)^{\frac{1}{q-2}}. \qquad (*_2)
$$

Fixando

$$
R_n := \frac{1}{2}\left(\frac{q\alpha}{2n^{p-q}}\right)^{\frac{1}{q-2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha q}{2}\right)^{\frac{q-p}{q-2}} n^{\frac{q-p}{q-2}},
$$

segue de $(*_1)$ e de $(*_2)$ que

$$J_{m,n} \geq L_n \geq \sigma_n > 0 \text{ em } \partial B_{R_n}(0), \tag{4.9}$$

onde $\sigma_n := R_n\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{n^{p-q}}{q}R_n^{q-2}\right) = \frac{\alpha}{4}R_n$. Agora, basta notar que R_n e σ_n tendem a zero quando n tende ao infinito, pois no caso da potência de n temos que $2\left(\frac{q-p}{q-2}\right) < 0$, dado que $p > q$. Com isso temos que zero é um nível crítico de L_n, e pelo teorema do passo da montanha clássico, temos que zero é um mínimo local de L_n. Temos assim finalizado a prova da afirmação 4.4.

Afirmação 4.5. *Por outro lado, seja ω uma função fixada em $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com $|\omega|_\infty = 1$. Então, para $t < \min\{n, m\}$ temos que*

$$J_{m,n}(t\omega) = c_1 t^{\gamma+2} + c_2 t^2 - c_3 t^p := Q(t),$$

onde

$$c_1 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\omega|^\omega |\nabla\omega|^2,$$
$$c_2 = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla\omega|^2,$$
$$c_3 = \frac{1}{2}\int_\Omega (\omega^+)^p.$$

Demonstração da afirmação 4.5. Com efeito,

$$\begin{aligned}
J_{m,n}(t\omega) &\overset{(4.8)}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega [a(x) + |\mathcal{T}_m(t\omega)|^\gamma]|\nabla(t\omega)|^2\,dx - \int_\Omega f_n(t\omega)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla(t\omega)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathcal{T}_m(t\omega)|^\gamma|\nabla(t\omega)|^2\,dx - \int_\Omega f_n(t\omega)\,dx \\
&\overset{(C)}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|t|^2|\nabla\omega|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |t|^\gamma|\mathcal{T}_m(\omega)|^\gamma|t|^2|\nabla\omega|^2\,dx - \int_\Omega f_n(t\omega)\,dx \\
&\overset{(D)}{=} \frac{t^2}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla\omega|^2\,dx + \frac{t^{\gamma+2}}{2}\int_\Omega |\mathcal{T}_m(\omega)|^\gamma|\nabla\omega|^2\,dx - \int_\Omega \frac{[(t\omega)^+]^p}{p}\,dx \\
&\overset{(E)}{=} \frac{t^2}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla\omega|^2\,dx + \frac{t^{\gamma+2}}{2}\int_\Omega |\omega|^\gamma|\nabla\omega|^2\,dx - \frac{t^p}{p}\int_\Omega (\omega^+)^p\,dx \\
&= \left(\int_\Omega |\omega|^\gamma|\nabla\omega|^2\,dx\right)\frac{t^{\gamma+2}}{2} + \left(\int_\Omega a(x)|\nabla\omega|^2\,dx\right)\frac{t^2}{2} - \left(\int_\Omega (\omega^+)^p\,dx\right)\frac{t^p}{p} \\
&= c_1\frac{t^{\gamma+2}}{2} + c_2\frac{t^2}{2} - c_3\frac{t^p}{p} := Q(t), \quad \text{como queríamos.}
\end{aligned}$$

Onde

(C) $\nabla(t\omega) = t\nabla\omega$,

(D) usamos que $t > 0$ no primeiro e segundo termos, enquanto que no terceiro termo usamos que $t < n$ e (4.5),

(E) usamos que $t < m$ e também (4.4) no segundo termo, enquanto que no terceiro termo usamos apenas que $t > 0$.

Afirmação 4.6. *Seja $t_0 > 0$ a maior raiz de $Q(t)$, então para cada $t > t_0$ temos que*

$$J_{m,n}(t\omega) = Q(t) < 0,$$

uma vez que $2 < \gamma + 2 < p$.

Demonstração da afirmação 4.6. De fato, considerando o polinômio definido acima, isto é

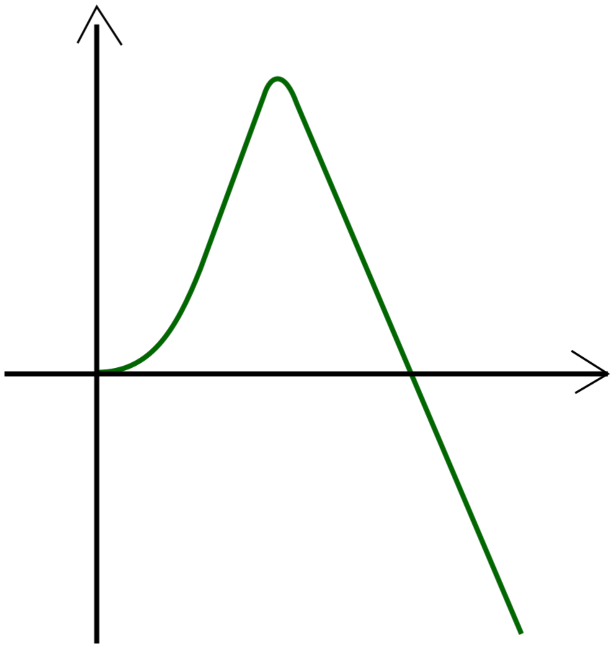
$$Q(t) = c_1 t^{\gamma+2} + c_2 t^2 - c_3 t^p,$$

como $2 < \gamma + 2 < p$, por (4.3) e porque estamos com $\gamma > 1$, e devido $t > t_0 > 0$ podemos reescrever este polinômio da seguinte forma

$$Q(t) = t^p(c_1 t^{\gamma+2-p} + c_2 t^{2-p} - c_3). \qquad (**)$$

Com isso, afirmamos que existe t_N tal que $Q(t) < 0$, para todo $t > t_N$. Com efeito, suponhamos por contradição que não exista nenhuma raiz maximal, isto significa que existe uma sequência (t_n) de raízes de $Q(t)$ tais que $Q(t_n) = 0$ quando $t_n \to +\infty$. Entretanto, $t_N < t_n$ para algum n, já que $t_n \to +\infty$. Portanto, $Q(t_n) < 0$ neste caso, contradizendo $Q(t_n) = 0$ para todo t_n tendendo ao infinito. Portanto,

$$t^p(c_1 t^{\gamma+2-p} + c_2 t^{2-p} - c_3) \to -\infty, \text{ quando } t \to +\infty.$$



Finalizamos assim a prova da afirmação 4.6.

Afirmação 4.7. *Vimos na prova da afirmação 4.4 que* $R_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Seja* $\overline{n}$ *tal que* $t_0\|\omega\|_{1,2} > R_n$ *para cada* $n \geq \overline{n}$, *e definamos* $\overline{t} = t_0 + 1$. *Então* $\overline{\omega} = \overline{t}\omega$ *possui norma em* $H_0^1(\Omega)$ *maior que* R_n *e é tal que*

$$J_{m,n}(\overline{\omega}) < 0, \ \forall \ m > \overline{t}, \ \forall \ n > \max\{\overline{t}, \overline{n}\}. \tag{4.10}$$

Demonstração da afirmação 4.7. De fato, seja $t_0 > 0$ para t_0 fixado e $\|\overline{\omega}\|_{1,2}$ fixado, temos que

$$\begin{aligned} \|\overline{\omega}\|_{1,2} &= \|\overline{t}\omega\|_{1,2} \\ &= \|(t_0+1)\omega\|_{1,2} \\ &= (t_0+1)\|\omega\|_{1,2} \\ &> t_0\|\omega\|_{1,2} \\ &> R_n. \end{aligned}$$

Observe ainda que $\forall m > \overline{t}$, $\forall n > \max\{\overline{t}, \overline{n}\}$, $\overline{t} = t_0 + 1$ e para cada $t > t_0$ vale que $J_{m,n}(t\omega) = Q(t) < 0$, conforme vimos na afirmação anterior. Em particular, para $\overline{t} = t_0 + 1 > t_0$ vale que

$$J_{m,n}(\overline{\omega}) = J_{m,n}(\overline{t}\omega) < 0.$$

Temos ainda que

Afirmação 4.8. *Se* $C_0 \overset{\text{def}}{=} \max_{s\in[0,1]} Q(s\bar{t}) \geq \sigma_n > 0$ *então*

$$0 < \sigma_n \leq \max_{s\in[0,1]} J_{m,n}(s\overline{\omega}) \leq C_0, \ \forall\, m > \bar{t}, \ \forall\, n > \max\{\bar{t}, \overline{n}\}. \tag{4.11}$$

Demonstração da afirmação 4.8. Primeiramente, notemos que faz sentido definir C_0 como acima pois

$$\begin{aligned}
Q(s\bar{t}) &= c_1(s\bar{t})^{\gamma+2} + c_2(s\bar{t})^2 - c_3(s\bar{t})^p \\
&= c_1 s^{\gamma+2}\bar{t}^{\gamma+2} + c_2 s^2\bar{t}^2 - c_3 s^p\bar{t}^p \\
&= s^2(c_1 s^{\gamma}\bar{t}^{\gamma+2} + c_2\bar{t}^2 - c_3 s^{p-2}\bar{t}^p).
\end{aligned}$$

Note que neste caso a potência s^2 controla a função pois $s \in [0,1]$, contrariamente ao que vimos no caso $(**)$, onde lá a potência $p > 2$ controlava a função. Além disso, aqui $\bar{t}$ está fixado e sendo Q uma função contínua definida em um domínio compacto atinge máximo e mínimo. Portanto, C_0 realmente pode ser definido como acima pois

$$c_1 s^{\gamma}\bar{t}^{\gamma+2} + c_2\bar{t}^2 - c_3 s^{p-2}\bar{t}^p \geq \sigma_n > 0,$$

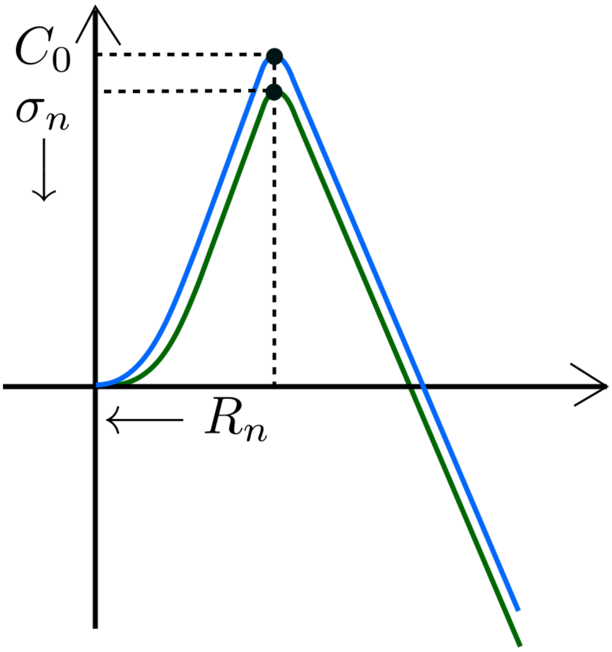
onde a última desigualdade se deve a (4.9).
Além disso, $\forall\, m > \bar{t}$ e $n > \max\{\bar{t}, \overline{n}\}$ temos que

$$\begin{aligned}
J_{m,n}(s\overline{\omega}) &= J_{m,n}(s(t_0+1)\omega) \\
&= c_1[s(t_0+1)]^{\gamma+2} + c_2[s(t_0+1)]^2 - c_3[s(t_0+1)]^p \\
&= Q[s(t_0+1)] \\
&= Q(s\bar{t}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$0 < \sigma_n \leq \max_{s\in[0,1]} J_{m,n}(s\overline{\omega}) = \max_{s\in[0,1]} Q(s\bar{t}) \leq C_0,$$

para todo $m > \bar{t}$ e para todo $n > \max\{\bar{t}, \overline{n}\}$, como queríamos.



Veja que não houve necessidade de se considerar $\gamma > 1$ a fim de obter as propriedades geométricas (4.9), (4.10) e (4.11) para o funcional $J_{m,n}$ definido em (4.8). Perceba que pelas afirmações provadas acima representadas no gráfico pode-se inferir que se R_n e σ_n tendem a zero quando $n \to \infty$, existe C_0 não-dependendo de n tal que o funcional de energia $J_{m,n}(s\overline{\omega})$ não excede C_0.

Observação 4.1. *De agora em diante, consideraremos valores de m e n tais que $m > \bar{t}$ e $n > \max\{\bar{t}, \overline{n}\}$.*

Provaremos agora que cada funcional $J_{m,n}$ satisfaz as condições de compacidade da proposição 2.1 provada no capítulo 2. Como o nosso funcional $J_{m,n}$ é de classe C^1 para $\gamma > 1$ poderíamos aplicar o Teorema clássico do Passo da Montanha para mostrar que $J_{m,n}$ possui um ponto crítico $u_{m,n} \not\equiv 0$, pertencente a $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Entretanto o teorema clássico inclui a condição de Palais Smale. Mas no nosso caso, como queremos provar que vale a condição de compacidade vista na proposição 2.1, usaremos o Teorema do Passo da Montanha modificado de Boccardo pois este, por sua vez, foi provado usando a versão modificada.

Afirmação 4.9. *Se ϵ_k é uma sequência de números positivos convergindo a zero, $S_k > 0$,* *e $\{v_k\}$ é uma sequência em $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\begin{aligned} J_{m,n}(v_k) &\leq C_*, \\ |v_k|_\infty &\leq 2S_k, \\ \langle J'_{m,n}(v_k), v\rangle &\leq \epsilon_k \left[\frac{|v|_\infty}{S_k} + \|v\|_{1,2}\right], \end{aligned}$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, então $\{v_k\}$ possui subsequência fortemente convergente em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração da afirmação 4.9: De fato, primeiro vamos calcular $\langle J'_{m,n}(v_k), v_k\rangle$. Seja

$$\begin{aligned} |\cdot|^2 : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \nabla v_k &\longmapsto \quad |\nabla v_k|^2 = \langle \nabla v_k, \nabla v_k\rangle. \end{aligned}$$

Calculemos a derivada da função acima pela definição, isto é

$$\begin{aligned} \left\langle \left(|\nabla v_k|^2\right)', v_k \right\rangle &= \lim_{h\to 0} \frac{|\nabla(v_k + hv_k)|^2 - |\nabla v_k|^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle \nabla(v_k + hv_k), \nabla(v_k + hv_k)\rangle - \langle \nabla v_k, \nabla v_k\rangle}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle \nabla v_k + h\nabla v_k, \nabla v_k + h\nabla v_k\rangle - \langle \nabla v_k, \nabla v_k\rangle}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle \nabla v_k, \nabla v_k\rangle + 2h\langle \nabla v_k, \nabla v_k\rangle + h^2\langle \nabla v_k, \nabla v_k\rangle - \langle \nabla v_k, \nabla v_k\rangle}{h} \\ &= 2\nabla v_k \nabla v_k \\ &= 2|\nabla v_k|^2. \qquad\qquad (F) \end{aligned}$$

Além do mais, para calcular a derivada de $|\mathcal{T}_m(v_k)|^\gamma$, vamos reescrever esta expressão como

$$|\mathcal{T}_m(v_k)|^\gamma = \left[(\mathcal{T}_m^2(v_k))^{\frac{\gamma}{2}}\right].$$

Assim, calcular $(|\mathcal{T}_m(v_k)|^\gamma)'$ é o mesmo que calcular a derivada $\left(\left[(\mathcal{T}_m^2(v_k))^{\frac{\gamma}{2}}\right]\right)'$, daí

$$\begin{aligned} \left(\left[(\mathcal{T}_m^2(v_k))^{\frac{\gamma}{2}}\right]\right)' &= \frac{\gamma}{2}\left[\mathcal{T}_m^2(v_k)\right]^{\frac{\gamma}{2}-1} 2\mathcal{T}_m(v_k)\mathcal{T}'_m(v_k) \\ &= \gamma\left[\mathcal{T}_m^2(v_k)\right]^{\frac{\gamma-2}{2}} \mathcal{T}_m(v_k)\mathcal{T}'_m(v_k) \\ &= \gamma|\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma-2}\mathcal{T}_m(v_k)\mathcal{T}'_m(v_k). \qquad\qquad (G) \end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\langle J'_{m,n}(v_k), v_k\rangle &= \left(\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a(x)\left(|\nabla v_k|^2\right)'\; dx v_k\right)\\
&+\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(|\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma}\right)' |\nabla v_k|^2\; dx v_k + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma}\left(|\nabla v_k|^2\right)'\; dx v_k\right)\\
&-\left(\int\limits_{\Omega} f'_n(v_k)\; dx v_k\right),
\end{aligned}
$$

como queríamos.
Agora substituindo (F), (G) e multiplicando por $\frac{1}{q}$ segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q}\langle J'_{m,n}(v_k), v_k\rangle &= \frac{1}{2q}\int\limits_{\Omega} a(x)\cdot 2|\nabla v_k|^2\; dx\\
&+\frac{1}{2q}\int\limits_{\Omega} \gamma|\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma-2}\mathcal{T}_m(v_k)\mathcal{T}'_m(v_k)|\nabla v_k|^2 v_k\; dx\\
&+\frac{1}{2q}\int\limits_{\Omega} |\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma} 2|\nabla v_k|^2\; dx - \frac{1}{q}\int\limits_{\Omega} f'_n(v_k) v_k\; dx.
\end{aligned}
$$

Finalmente, subtraindo este resultado de $J_{m,n}(v_k)$ segue que

$$\begin{aligned}
J_{m,n}(v_k) - \frac{1}{q}\langle J'_{m,n}(v_k), v_k\rangle &= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla v_k|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma}|\nabla v_k|^2\,dx \\
&- \int\limits_{\Omega} f_n(v_k)\,dx - \frac{1}{q}\int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla v_k|^2\,dx \\
&- \frac{1}{2q}\int\limits_{\Omega} \gamma|\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma-2}\mathcal{T}_m(v_k)\mathcal{T}'_m(v_k)|\nabla v_k|^2 v_k\,dx \\
&- \frac{1}{q}\int\limits_{\Omega} |\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma}|\nabla v_k|^2\,dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\Omega} f'_n(v_k)v_k\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla v_k|^2\,dx \\
&+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int\limits_{\Omega} |\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma}|\nabla v_k|^2\,dx + \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q}f'_n(v_k)v_k - f_n(v_k)\,dx \\
&- \frac{\gamma}{2q}\int\limits_{\Omega} |\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma-2}\mathcal{T}_m(v_k)\mathcal{T}'_m(v_k)|\nabla v_k|^2 v_k\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla v_k|^2\,dx \\
&+ \int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)|\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma} - \frac{\gamma}{2q}|\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma-2}\mathcal{T}_m(v_k)\mathcal{T}'_m(v_k)v_k\right]|\nabla v_k|^2\,dx \\
&+ \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q}f'_n(v_k)v_k - f_n(v_k)\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla v_k|^2\,dx \\
&+ \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{2q}|\mathcal{T}_m(v_k)|^{-2}\mathcal{T}_m(v_k)\mathcal{T}'_m(v_k)v_k\right]|\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma}|\nabla v_k|^2\,dx \\
&+ \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q}f'_n(v_k)v_k - f_n(v_k)\,dx
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla v_k|^2\, dx \\
&+ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{2q}\frac{\mathcal{T}_m'(v_k)}{\mathcal{T}_m(v_k)} v_k\right) |\mathcal{T}_m(v_k)^{\gamma}||\nabla v_k|^2\, dx \\
&+ \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q} f_n'(v_k)v_k - f_n(v_k)\, dx \\
&\leq C_* + \epsilon_k \left[\frac{|v_k|_\infty}{S_k} + \|v_k\|_{1,2}\right]
\end{aligned}
$$

em que na penúltima igualdade usamos que $m > \bar{t}$ e na última desigualdade apenas as hipóteses do enunciado da afirmação.
Além disso, provaremos que os termos do lado esquerdo da última desigualdade acima são positivos. Vejamos:

1. Verifiquemos que o termo $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla v_k|^2\, dx$ é de fato positivo. Com efeito, neste caso é suficiente notar que dados que $a(x) > 0$, $|\nabla v_k|^2 > 0$ e como $q > 2$ temos que $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} > 0$, como queríamos.

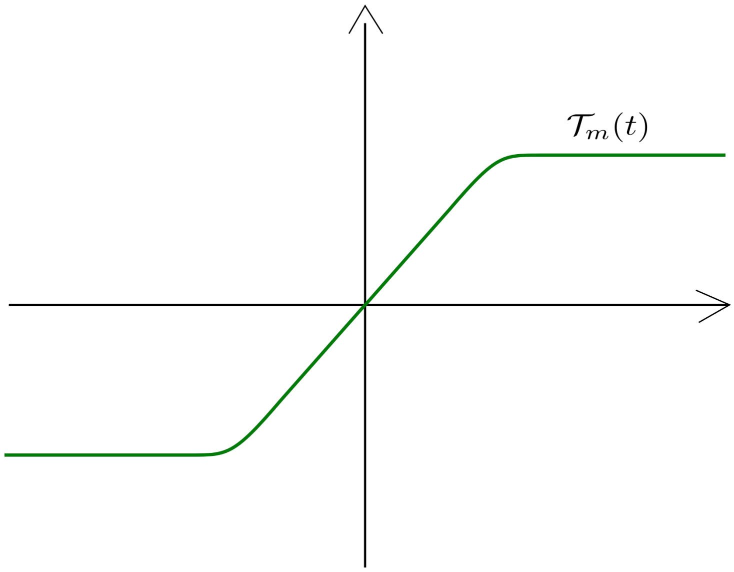
2. Quanto ao segundo termo $\int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{2q}\frac{\mathcal{T}_m'(v_k)}{\mathcal{T}_m(v_k)} v_k\right) |\mathcal{T}_m(v_k)|^{\gamma}|\nabla v_k|^2\, dx$, é suficiente usar que $q > \gamma + 2$ e que

$$0 \leq \frac{t\mathcal{T}_m'(t)}{\mathcal{T}_m(t)} \leq 1. \qquad (L)$$

Com efeito, por um lado temos que

$$t\frac{\mathcal{T}_m'(t)}{\mathcal{T}_m(t)} \geq 0,$$

pois $\mathcal{T}_m$ é uma função não decrescente e sua derivada é não-negativa. Lembremos do gráfico de $\mathcal{T}_m$



Além disso, $\mathcal{T}_m$ é uma função ímpar, então se $t < 0$ e $\mathcal{T}_m(t) < 0$ isto implica que $\frac{t}{\mathcal{T}_m(t)} > 0$. Logo, de fato vale que

$$t\frac{\mathcal{T}_m'(t)}{\mathcal{T}_m(t)} \geq 0.$$

Por outro lado, temos que se $t > 0$ e $t < m$ daí $\mathcal{T}_m'(t) = 1$, e se $t \geq m$, segue que

$$\frac{t\mathcal{T}_m'(t)}{\mathcal{T}_m(t)} \leq \frac{t \cdot 1}{t} = 1.$$

Logo, vale que $0 \leq \frac{t\mathcal{T}_m'(t)}{\mathcal{T}_m(t)} \leq 1$. Multiplicando por $\frac{\gamma}{2q}$, temos

$$0 \leq \frac{\gamma}{2q}\frac{t\mathcal{T}_m'(t)}{\mathcal{T}_m(t)} \leq \frac{\gamma}{2q}.$$

Agora, usando a desigualdade acima e também que $q > \gamma + 2$ segue que, no segundo termo temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{2q}\frac{\mathcal{T}_m'(v_k)}{\mathcal{T}_m(v_k)}v_k &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{2q} \\ &= \frac{q - 2 - \gamma}{2q} \\ &= \frac{q - (\gamma + 2)}{2q} > 0 \end{aligned}$$

como queríamos.

3. Para checar que o terceiro termo é positivo usaremos a definição de f_n.

Com efeito, uma vez que $n > \bar{t}$ segue da definição de f_n que $f_n(v_k) = \frac{(v_k{}^+)^p}{p}$ e que

$$\begin{aligned}\langle f_n'(v_k), v_k\rangle &= \frac{p(v_k{}^+)^{p-1}}{p}(v_k{}^+)\\ &= (v_k{}^+)^p.\end{aligned}$$

Agora, substituindo este resultado no terceiro termo segue que

$$\frac{1}{q}(v_k{}^+)^p - \frac{(v_k{}^+)^p}{p} = (v_k{}^+)^p\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) > 0,$$

pois $p > q$.

Com isso finalizamos a verificação de que os três termos são positivos.

Salientamos que aqui foi o único lugar onde foi necessário escolher q satisfazendo $q > \gamma + 2$. Consequentemente, a hipótese (4.3) onde $\gamma + 2 < 2^*$ apenas desenvolve sua função aqui.

Vejamos agora que como uma consequência de (4.1) e (4.12), a sequência $\{v_k\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

De fato, acabamos de ver que estes três termos à esquerda da desigualdade abaixo, são positivos:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega a(x)|\nabla v_k|^2\,dx\\ &+ \int_\Omega \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{2q}\frac{\mathcal{T}_m'(v_k)}{\mathcal{T}_m(v_k)}v_k\right)|\mathcal{T}_m(v_k)|^\gamma|\nabla v_k|^2\,dx\\ &+ \int_\Omega \left(\frac{1}{q}f_n'(v_k) - f_n(v_k)\right)\,dx\\ &\le C_* + \epsilon_k\left[\frac{|v_k|_\infty}{S_k} + \|v_k\|_{1,2}\right].\end{aligned}$$

Agora, vamos desconsiderar o segundo e terceiro termos e assim obteremos que

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega |\nabla v_k|^2\,dx &\overset{(4.1)}{\le} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega a(x)|\nabla v_k|^2\,dx\\ &\le C_* + \epsilon_k\left[\frac{|v_k|_\infty}{S_k} + \|v_k\|_{1,2}\right].\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\|v_k\|_{1,2}^2 &\leq \frac{1}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} + C_* + \epsilon_k\left[\frac{|v_k|_\infty}{S_k} + \|v_k\|_{1,2}\right] \\ &\overset{\text{Af. } 4.9}{=} \frac{q}{\alpha(q-2)} + C_* + \epsilon_k\left[\frac{2S_k}{S_k} + \|v_k\|_{1,2}\right] \\ &= C_1 + \epsilon_k\left[2 + \|v_k\|_{1,2}\right].\end{aligned}$$

Supondo por absurdo que $\|v_k\|_{1,2} \to \infty$ quando $k \to \infty$, temos

$$1 = \frac{\|v_k\|_{1,2}^2}{\|v_k\|_{1,2}^2} \leq \frac{C_1}{\|v_k\|_{1,2}^2} + \epsilon_k\left[\frac{2}{\|v_k\|_{1,2}^2} + \frac{1}{\|v_k\|_{1,2}}\right] = 0$$

uma contradição.

Desta forma $\|v_k\|_{1,2}$ é limitado e existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|v_k\|_{1,2} \leq C_1 \qquad (K)$$

onde $C_1 := \left(\frac{q}{\alpha(q-2)} + C_*\right)^{1/2}$.

Por argumentos semelhantes aos da proposição 2.1 visto no capítulo 2, é possível provar que existe uma subsequência de $\{v_k\}$ que converge fortemente em $H_0^1(\Omega)$, logo a verificação de compacidade está concluída, ou seja, está provada a afirmação 4.9.

Portanto, como (4.9), (4.10) e (4.11) são as hipóteses geométricas do teorema do Passo da Montanha (versão modificada), segue daquele resultado que $J_{m,n}$ possui um ponto crítico $u_{m,n} \not\equiv 0$, pertencente a $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com nível crítico

$$0 < \sigma_n \leq J_{m,n}(u_{m,n}) = \inf_{\rho\in\Gamma}\max_{s\in[0,1]} J_{m,n}(\rho(s)) \leq C_0, \tag{4.13}$$

onde

$$\Gamma = \left\{\rho : [0,1] \to H_0^1(\Omega),\ \rho \text{ contínua},\ \rho(0) = 0,\ \rho(1) = \overline{\omega}\right\},$$

onde usamos (4.11) para obter (4.13). Portanto, $u_{m,n}$ é uma solução fraca de

$$\begin{aligned}&-\operatorname{div}([a(x) + |\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^\gamma]\nabla u_{m,n}) \\ &+ \frac{\gamma}{2}\mathcal{T}_m'(u_{m,n})|\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^{\gamma-2}\mathcal{T}_m(u_{m,n})|\nabla u_{m,n}|^2 \\ &= f_n'(u_{m,n}), \qquad (H)\end{aligned}$$

onde estamos considerando que as condições de Dirichlet na fronteira são nulas.

Considere ainda os seguintes fatos:

(I) Se $t \leq 0$ então $f_n'(t) \equiv 0$. Com efeito, pois de (4.5) se $t \leq 0$ então $f_n'(t) = \frac{(t^+)^p}{p}$, e quando $t \leq 0$ sabemos que $t^+ = \max\{0, t\} = 0$, logo $f_n'(t) = 0$.

(J) Além disso, lembremos que $\mathcal{T}_m'(s)s \geq 0$, pois se $s > 0$ havíamos obtido por (L) que

$$0 \leq \frac{\mathcal{T}_m'(s)s}{\mathcal{T}_m(s)} \leq 1$$

assim, $\mathcal{T}_m'(s)s \geq 0$.

Afirmação 4.10. *Declaramos que $u_{m,n}$ é solução fraca positiva do problema (H).*

Demonstração da afirmação 4.10. De fato, sabemos que $u_{m,n}$ é solução fraca de (H) se $u_{m,n}$ é ponto crítico do funcional em (4.8), ou seja $J_{m,n}'(u_{m,n}) \equiv 0$. Resta provar $u_{m,n} \geq 0$. Uma vez que,

$$\begin{aligned}
\left\langle J_{m,n}'(u_{m,n}), \omega \right\rangle &= \frac{1}{2} \int_\Omega a(x) \nabla u_{m,n} \nabla \omega \, dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_\Omega \gamma |\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^{\gamma-2} \mathcal{T}_m(u_{m,n}) \mathcal{T}_m'(u_{m,n}) |\nabla u_{m,n}|^2 \omega \, dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_\Omega |\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^\gamma \nabla u_{m,n} \nabla \omega \, dx \\
&- \int_\Omega f'(u_{m,n}) \omega \, dx,
\end{aligned}$$

escolhendo $\omega = u_{m,n}^-$ como função teste, segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \langle J_{m,n}'(u_{m,n}), u_{m,n}^- \rangle \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega a(x) \nabla u_{m,n} \nabla u_{m,n}^- \, dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_\Omega \gamma |\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^{\gamma-2} \mathcal{T}_m(u_{m,n}) \mathcal{T}_m'(u_{m,n}) |\nabla u_{m,n}|^2 (u_{m,n}^-) \, dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_\Omega |\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^\gamma |\nabla u_{m,n}^-|^2 \, dx \\
&- \int_\Omega f'(u_{m,n})(u_{m,n}^-) \, dx.
\end{aligned}$$

Consequentemente, como o suporte de $u_{m,n}^- \cap u_{m,n}^+ = \varnothing$, isto é, fora de onde $u_{m,n}$ é negativo temos que $u_{m,n}^-$ vale zero, daí segue que

$$
\begin{aligned}
0 &\le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla u_{m,n}^-|^2\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \gamma|\mathcal{T}_m(u_{m,n}^-)|^{\gamma-2}\mathcal{T}_m(u_{m,n}^-)\mathcal{T}_m'(u_{m,n}^-)|\nabla u_{m,n}^-|^2(u_{m,n}^-)\, dx \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\mathcal{T}_m(u_{m,n}^-)|^{\gamma}|\nabla u_{m,n}^-|^2\, dx \\
&+ \int\limits_{\Omega} f'(u_{m,n}^-)u_{m,n}^-\, dx \le 0.
\end{aligned}
$$

Onde, para concluir a última desigualdade usamos que os dois primeiros termos após a igualdade e após $-\frac{1}{2}$ sao não negativos (por (J)), enquanto que o último termo é nulo conforme vimos em (I).
Desta forma, temos

$$
0 \le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla u_{m,n}^-|^2\, dx \le 0.
$$

Daí, $\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla u_{m,n}^-|^2\ dx = 0$. Lembrando que $a(x) > 0$, segue que necessariamente devemos ter $|\nabla u_{m,n}^-| = 0$, o que implica que $\nabla u_{m,n}^- = 0$, logo $u_{m,n}$ é constante e como se anula na fronteira então $u_{m,n}^- \equiv 0$. Concluímos assim que $u_{m,n} \ge 0$, e finalizamos aqui a demonstração da afirmação 4.10. Ou seja, $u_{m,n}$ é solução positiva do problema (H) e, portanto resolve

$$
\begin{aligned}
&- \operatorname{div}([a(x) + \mathcal{T}_m(u_{m,n})^{\gamma}]\nabla u_{m,n}) \\
&+ \frac{\gamma}{2}\mathcal{T}_m'(u_{m,n})\mathcal{T}_m(u_{m,n})^{\gamma-1}|\nabla u_{m,n}|^2 \\
&= f_n'(u_{m,n}).
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

Passo 3: Estimativa L^∞ para a solução obtida no passo anterior

Dado $J_{m,n}(u_{m,n}) \le C_0$ por (4.13) e $J_{m,n}'(u_{m,n}) = 0$, temos que $u_{m,n}$ satisfaz uma fórmula parecida com a que vimos em (4.12) com $C_* = C_0$ e $\epsilon_k = 0$. Ou seja, para todo $m > \bar{t} = t_0 + 1$ e para todo $n > \max\{\bar{t}, \bar{n}\}$ vale que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \int_\Omega a(x)|\nabla u_{m,n}|^2 \, dx \\
&+ \int_\Omega \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{2q} \frac{\mathcal{T}_m'(u_{m,n})}{\mathcal{T}_m(u_{m,n})} u_{m,n}\right) |\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^\gamma |\nabla u_{m,n}|^2 \, dx \\
&+ \int_\Omega \left(\frac{1}{q} f_n'(u_{m,n}) u_{m,n} - f_n(u_{m,n})\right) \, dx \leq C_0.
\end{aligned}$$

Argumentando como antes, temos que $\int\limits_\Omega a(x)|\nabla u_{m,n}|^2 \, dx$ é limitado com relação a m e n. De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x)|\nabla u_{m,n}|^2 \, dx \\
&\overset{(4.1)}{\leq} \beta \int_\Omega |\nabla u_{m,n}|^2 \, dx \\
&= \beta \|u_{m,n}\|_{1,2}^2 \leq \widetilde{C}_1.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Em que na última desigualdade, usamos (K), com $u_{m,n}$ em lugar de v_k. Além disso, afirmamos que $\int\limits_\Omega |\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^\gamma |\nabla u_{m,n}|^2 \, dx$ é limitado com relação a m e n.
Com efeito,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^\gamma |\nabla u_{m,n}|^2 \, dx \\
&\leq \left(m + \frac{1}{2}\right)^\gamma \int_\Omega |\nabla u_{m,n}|^2 \, dx \\
&= \left(m + \frac{1}{2}\right)^\gamma \|u_{m,n}\|_{1,2}^2 \leq \widetilde{C}_2.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Em que na última desigualdade usamos (K).
Claro que por (4.15) também temos que $\{u_{m,n}\}$ é limitada com relação a m e n em $H_0^1(\Omega)$. Agora, iremos provar que $\{u_{m,n}\}$ é limitado em $L^\infty(\Omega)$ por uma constante M_n (dependendo de n, mas não de m). Para isso dividiremos a demonstração em algumas etapas através de afirmações.

Afirmação 4.11. *Seja $A > 0$ provaremos que*

$$S^2 \left(\int_\Omega (u_{m,n})^{\frac{A+2}{2} 2^*} \, dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{(A+2)^2}{4\alpha} \int_\Omega a(x)|\nabla u_{m,n}|^2 (u_{m,n})^A \, dx,$$

onde S é uma constante originada da imersão de Sobolev.

Demonstração da afirmação 4.11. Pelo teorema (A.8), ver apêndice, com $p = 2, N \geq 3$ e $q = 2^*$. Podemos obter a relação

$$\left(\int_\Omega |v|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq \frac{1}{S}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

Tomando $v = (u_{m,n})^{\frac{A+2}{2}}$, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega v^{2^*}\,dx\right)^{\frac{1}{2^*}} &= \left(\int_\Omega \left((u_{m,n})^{\frac{A+2}{2}}\right)^{2^*}\,dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \\
&\leq \frac{1}{S}\left(\int_\Omega \left|\nabla\left[(u_{m,n})^{\frac{A+2}{2}}\right]\right|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{S}\left(\int_\Omega \left|\frac{A+2}{2}(u_{m,n})^{\frac{A}{2}}\nabla u_{m,n}\right|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{A+2}{2}\frac{1}{S}\left(\int_\Omega \left|(u_{m,n})^{\frac{A}{2}}\nabla u_{m,n}\right|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Assim, como $u_{m,n}$ é uma solução positiva de (4.14) segue que

$$\left(\int_\Omega \left[(u_{m,n})^{\frac{A+2}{2}}\right]^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{(A+2)^2}{4}\frac{1}{S^2}\int_\Omega (u_{m,n})^A|\nabla u_{m,n}|^2\,dx$$

E agora, devido $\alpha < a(x)$ temos que $\frac{a(x)}{\alpha} > 1$. Portanto,

$$S^2\left(\int_\Omega (u_{m,n})^{\frac{A+2}{2}2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{(A+2)^2}{4\alpha}\int_\Omega a(x)|\nabla u_{m,n}|^2(u_{m,n})^A\,dx.$$

Afirmação 4.12. *Seja $A > 0$, afirmamos ainda que*

$$\frac{(A+2)^2}{4\alpha}\int_\Omega a(x)|\nabla u_{m,n}|^2(u_{m,n})^A\,dx \leq \frac{(A+2)^2}{4\alpha(A+1)}n^{p-q}\int_\Omega (u_{m,n})^{A+q}\,dx.$$

Demonstração da afirmação 4.12. Com efeito, seja $A > 0$ e consideremos $v = (u_{m,n})^{A+1}$

como função teste em (4.14), segue que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega -\mathrm{div}\left([a(x)+\mathcal{T}_m(u_{m,n})^\gamma]\nabla u_{m,n}\right)(u_{m,n})^{A+1}\,dx\\
&+\int_\Omega \frac{\gamma}{2}\mathcal{T}_m'(u_{m,n})^{\gamma-1}|\nabla u_{m,n}|^2(u_{m,n})^{A+1}\,dx\\
&=\int_\Omega f_n'(u_{m,n})(u_{m,n})^{A+1}\,dx. \qquad (***)
\end{aligned}$$

Conforme vimos anteriormente o segundo termo antes da igualdade é positivo e iremos desconsiderá-lo. Trabalhando apenas com o lado esquerdo da igualdade em $(***)$ por enquanto, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega -\mathrm{div}\left([a(x)+\mathcal{T}_m(u_{m,n})^\gamma]\nabla u_{m,n}\right)(u_{m,n})^{A+1}\,dx\\
&=\int_\Omega -\mathrm{div}(a(x)\nabla u_{m,n})(u_{m,n})^{A+1}\,dx-\int_\Omega \mathrm{div}(\mathcal{T}_m(u_{m,n})^\gamma\nabla u_{m,n})(u_{m,n})^{A+1}dx\\
&\overset{\text{Green}}{=}\int_\Omega a(x)\nabla u_{m,n}\nabla(u_{m,n})^{A+1}\,dx+\int_\Omega \mathcal{T}_m(u_{m,n})^\gamma\nabla u_{m,n}\nabla(u_{m,n})^{A+1}\,dx\\
&=\int_\Omega (A+1)a(x)(u_{m,n})^A\nabla u_{m,n}\nabla u_{m,n}\,dx+\int_\Omega \mathcal{T}_m(u_{m,n})^\gamma(A+1)(u_{m,n})^A\nabla u_{m,n}\nabla u_{m,n}\,dx\\
&=\int_\Omega (A+1)a(x)(u_{m,n})^A|\nabla u_{m,n}|^2\,dx+\int_\Omega \mathcal{T}_m(u_{m,n})^\gamma(A+1)(u_{m,n})^A|\nabla u_{m,n}|^2\,dx,
\end{aligned}$$

onde usamos o teorema de Green na segunda igualdade. Note que o segundo termo na última igualdade é positivo como vimos antes, e iremos desconsiderá-lo a partir de agora. Assim, juntando o resultado acima com o lado direito da igualdade em $(***)$, temos que

$$\int_\Omega (A+1)a(x)(u_{m,n})^A|\nabla u_{m,n}|^2\,dx\leq\int_\Omega f_n'(u_{m,n})(u_{m,n})^{A+1}\,dx.$$

Agora, similarmente, iremos trabalhar apenas com o lado direito da desigualdade acima, e aplicaremos a segunda igualdade em (4.5):

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_n'(u_{m,n})(u_{m,n})^{A+1}\,dx&=\int_\Omega n^{p-q}(u_{m,n})^{q-1}(u_{m,n})^{A+1}\,dx\\
&=n^{p-q}\int_\Omega (u_{m,n})^{A+q}\,dx.
\end{aligned}$$

Logo, juntando o resultado obtido na parte que correspondia ao lado esquerdo com este, segue que

$$(A+1)\int\limits_{\Omega} a(x)(u_{m,n})^A|\nabla u_{m,n}|^2\,dx \leq n^{p-q}\int\limits_{\Omega}(u_{m,n})^{A+q}\,dx.$$

Portanto, multiplicando ambos os lados por $\frac{(A+2)^2}{4\alpha}$ e reorganizando os termos temos

$$\frac{(A+2)^2}{4\alpha}\int\limits_{\Omega} a(x)(u_{m,n})^A|\nabla u_{m,n}|^2\,dx \leq \frac{(A+2)^2}{4\alpha}\frac{n^{p-q}}{(A+1)}\int\limits_{\Omega}(u_{m,n})^{A+q}\,dx,$$

como queríamos provar.

Agora, juntando as desigualdades obtidas nas afirmações 4.11 e 4.12 temos que

$$\begin{aligned} S^2\left(\int\limits_{\Omega}(u_{m,n})^{\frac{A+2}{2}2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \frac{(A+2)^2}{4\alpha}\int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla u_{m,n}|^2(u_{m,n})^A\,dx \\ &\leq \frac{(A+2)^2}{4\alpha(A+1)}n^{p-q}\int\limits_{\Omega}(u_{m,n})^{A+q}\,dx. \qquad (M)\end{aligned}$$

Afirmação 4.13. *Se $u_{m,n}$ pertence a $L^r(\Omega)$ para algum $r>1$, então $u_{m,n}$ pertence a $L^{\frac{r-q+2}{2}2^*}(\Omega)$, com norma*

$$|u_{m,n}|_{\frac{r-q+2}{2}2^*} \leq \left(\frac{(r-q+2)^2}{4\alpha S^2(r-q+1)}\right)^{\frac{1}{r-q+2}} n^{\frac{p-q}{r-q+2}}|u_{m,n}|_r^{\frac{r}{r-q+2}}. \qquad (N)$$

Demonstração da afirmação 4.13. Com efeito, pela desigualdade em (M) temos

$$S^2\left(\int\limits_{\Omega}(u_{m,n})^{\left(\frac{A+2}{2}\right)2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{(A+2)^2}{4\alpha(A+1)}n^{p-q}\int\limits_{\Omega}(u_{m,n})^{A+q}\,dx.$$

Agora, escolhendo $A=r-q$, temos que

$$S^2\left(\int\limits_{\Omega}(u_{m,n})^{\left(\frac{r-q+2}{2}\right)2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{(r-q+2)^2}{4\alpha(r-q+1)}n^{p-q}\int\limits_{\Omega}(u_{m,n})^{r}\,dx < +\infty. \qquad (O)$$

Portanto,

$$u_{m,n}\in L^{\left(\frac{r-q+2}{2}\right)2^*}(\Omega).$$

Resta mostrar que vale a desigualdade em (N). Para isso, reescrevemos a integração em

(O) como uma norma, daí

$$S^2\left(|u_{m,n}|^{\frac{r-q+2}{2}2^*}_{\frac{r-q+2}{2}2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{(r-q+2)^2}{4\alpha(r-q+1)}n^{p-q}\int\limits_{\Omega}(u_{m,n})^r\,dx.$$

Consequentemente,

$$|u_{m,n}|^{r-q+2}_{\frac{r-q+2}{2}2^*} \leq \frac{(r-q+2)^2}{S^2 4\alpha(r-q+1)}n^{p-q}\int\limits_{\Omega}(u_{m,n})^r\,dx$$

$$\Longrightarrow\ |u_{m,n}|_{\frac{r-q+2}{2}2^*} \leq \left(\frac{(r-q+2)^2}{S^2 4\alpha(r-q+1)}\right)^{\frac{1}{r-q+2}} n^{\frac{p-q}{r-q+2}}\left(\int\limits_{\Omega}(u_{m,n})^r\,dx\right)^{\frac{1}{r-q+2}}$$

$$= \left(\frac{(r-q+2)^2}{S^2 4\alpha(r-q+1)}\right)^{\frac{1}{r-q+2}} n^{\frac{p-q}{r-q+2}}|u_{m,n}|_r^{\frac{r}{r-q+2}}.$$

Com isso concluímos a prova da afirmação 4.13.

Além disso, como $u_{m,n}$ pertence a $H_0^1(\Omega)$, aplicando imersão de Sobolev temos que $u_{m,n}$ pertence a $L^{2^*}(\Omega)$.
Vejamos agora a iteração de Moser

$$|u_{m,n}|_{\frac{r-q+2}{2}2^*} \leq \left(\frac{(r-q+2)^2}{4\alpha S^2(r-q+1)}\right)^{\frac{1}{r-q+2}} n^{\frac{p-q}{r-q+2}}|u_{m,n}|_r^{\frac{r}{r-q+2}} \tag{1}$$

Definindo $r_0 = 2^*$ e $r_k = \frac{2^*}{2}r_{k-1} + \frac{2^*}{2}(2-q)$. De (1) temos que

$$|u_{m,n}|_{r_k} = |u_{m,n}|_{\frac{(r_{k-1}-q+2)}{2}2^*} \qquad (2)$$

$$\leq \underbrace{\left(\frac{(r_{k-1}-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_{k-1}-q+1)}\right)^{\frac{1}{r_{k-1}-q+2}} n^{\frac{p-q}{r_{k-1}-q+2}}}_{C_1} |u_{m,n}|_{r_{k-1}}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{r_{k-1}}{r_k}}$$

$$= C_1 |u_{m,n}|_{r_{k-1}}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{r_{k-1}}{r_k}}$$

$$\leq C_1 \left\{ \left(\frac{(r_{k-2}-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_{k-2}-q+1)}\right)^{\frac{1}{r_{k-2}-q+2}} n^{\frac{p-q}{r_{k-2}-q+2}} |u_{m,n}|_{r_{k-2}}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}}} \right\}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{r_{k-1}}{r_k}}$$

$$= C_1 \underbrace{\left(\frac{(r_{k-2}-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_{k-2}-q+1)}\right)^{\frac{1}{r_{k-2}-q+2}\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{r_{k-1}}{r_k}} n^{\frac{p-q}{r_{k-2}-q+2}\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{r_{k-1}}{r_k}}}_{C_2} |u_{m,n}|_{r_{k-2}}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}}\frac{r_{k-1}}{r_k}}$$

$$= C_1 C_2 |u_{m,n}|_{r_{k-2}}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{r_{k-2}}{r_k}}$$

$$\leq C_1 C_2 \left\{ \left(\frac{(r_{k-3}-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_{k-3}-q+1)}\right)^{\frac{1}{r_{k-3}-q+2}} n^{\frac{p-q}{r_{k-3}-q+2}} |u_{m,n}|_{r_{k-3}}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{r_{k-3}}{r_{k-2}}} \right\}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{r_{k-2}}{r_k}}$$

$$= C_1 C_2 \underbrace{\left(\frac{(r_{k-3}-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_{k-3}-q+1)}\right)^{\frac{1}{r_{k-3}-q+2}\left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{r_{k-2}}{r_k}} n^{\frac{p-q}{r_{k-3}-q+2}\left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{r_{k-2}}{r_k}}}_{C_3} |u_{m,n}|_{r_{k-3}}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^3\frac{r_{k-3}}{r_{k-2}}\frac{r_{k-2}}{r_k}}$$

$$= C_1 C_2 C_3 |u_{m,n}|_{r_{k-3}}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^3\frac{r_{k-3}}{r_k}}$$

$$\leq \cdots \leq C_1 C_2 C_3 \cdots C_{k-1} \underbrace{\left(\frac{(r_0-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_0-q+1)}\right)^{\frac{1}{r_0-q+2}\left(\frac{2^*}{2}\right)^{k-1}\frac{r_1}{r_k}} n^{\frac{p-q}{r_0-q+2}\left(\frac{2^*}{2}\right)^{k-1}\frac{r_1}{r_k}}}_{C_k} |u_{m,n}|_{2^*}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^k\frac{r_0}{r_k}}$$

Agora, reescrevendo as primeiras potências que aparecem em $C_1, C_2, ..., C_k$, segue que

$C_1)$

$$\frac{1}{r_{k-1}-q+2} = \frac{\left(\frac{2^*}{2}\right)}{\left(\frac{2^*}{2}\right)(r_{k-1}-q+2)}$$
$$= \left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{1}{r_k},$$

$C_2)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_{k-2}-q+2}\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{r_{k-1}}{r_k} &= \frac{\left(\frac{2^*}{2}\right)}{\left(\frac{2^*}{2}\right)(r_{k-2}-q+2)}\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{r_{k-1}}{r_k}\\
&= \left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{1}{r_{k-1}}\frac{r_{k-1}}{r_k}\\
&= \left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{1}{r_k},
\end{aligned}$$

$C_3)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_{k-3}-q+2}\left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{r_{k-2}}{r_k} &= \frac{\left(\frac{2^*}{2}\right)}{\left(\frac{2^*}{2}\right)(r_{k-3}-q+2)}\left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{r_{k-2}}{r_k}\\
&= \left(\frac{2^*}{2}\right)^3\frac{1}{r_{k-2}}\frac{r_{k-2}}{r_k}\\
&= \left(\frac{2^*}{2}\right)^3\frac{1}{r_k},
\end{aligned}$$

$\vdots$

$C_k)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_0-q+2}\left(\frac{2^*}{2}\right)^{k-1}\frac{r_1}{r_k} &= \frac{\left(\frac{2^*}{2}\right)}{\left(\frac{2^*}{2}\right)(r_0-q+2)}\left(\frac{2^*}{2}\right)^{k-1}\frac{r_1}{r_k}\\
&= \left(\frac{2^*}{2}\right)^k\frac{1}{r_1}\frac{r_1}{r_k}\\
&= \left(\frac{2^*}{2}\right)^k\frac{1}{r_k}.
\end{aligned}$$

Substituindo adequadamente as expressões acima em cada potência de $C_1, C_2, ..., C_k$ segue que

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \left(\frac{(r_{k-1}-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_{k-1}-q+1)}\right)^{\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{1}{r_k}} n^{(p-q)\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{1}{r_k}},\\
C_2 &= \left(\frac{(r_{k-2}-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_{k-2}-q+1)}\right)^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{1}{r_k}} n^{(p-q)\left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{1}{r_k}},\\
&\vdots\\
C_k &= \left(\frac{(r_0-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_0-q+1)}\right)^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^k\frac{1}{r_k}} n^{(p-q)\left(\frac{2^*}{2}\right)^k\frac{1}{r_k}}.
\end{aligned}
$$

Reescrevendo toda a expressão em (2) novamente e substituindo os expoentes acima, temos que

$$
\begin{aligned}
|u_{m,n}|_{r_k} \leq &\left[\left(\frac{(r_{k-1}-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_{k-1}-q+1)}\right)n^{(p-q)}\right]^{\left(\frac{2^*}{2}\right)\frac{1}{r_k}}\\
&\cdot\left[\left(\frac{(r_{k-2}-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_{k-2}-q+1)}\right)n^{(p-q)}\right]^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^2\frac{1}{r_k}}\\
&\vdots\\
&\cdot\left[\left(\frac{(r_0-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_0-q+1)}\right)n^{(p-q)}\right]^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^k\frac{1}{r_k}} \cdot |u_{m,n}|_{2^*}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^k\frac{r_0}{r_k}}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Considerando $r_0 = 2^*$. Dado que $\frac{2^*}{2} > 1$, vamos provar que r_k é uma sequência crescente que diverge para infinito.
Com efeito, note que se

$(k = 1)$

$$r_1 = \frac{2^*}{2}(r_0 - q + 2)$$

Subtraindo $\frac{2}{2^*}r_0$ em ambos os lados, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{2^*}(r_1 - r_0) &= r_0 - \frac{2}{2^*}r_0 + (2-q)\\
&= 2^* - \frac{2}{2^*}2^* + 2 - q\\
&= 2^* - q > 0.
\end{aligned}
$$

Logo $r_1 > r_0$.

$(k = 2)$ Analogamente

$$\begin{aligned}\frac{2}{2^*}(r_2 - r_1) &= r_1 - \frac{2}{2^*}r_1 + (2-q)\\ &= \frac{2^*}{2}(r_0 - q + 2) - r_0 + q - 2 - q + 2\\ &= \frac{(2^*)^2 - 2^*q + 22^* - 22^*}{2}\\ &= \frac{2^*}{2}(2^* - q) > 0.\end{aligned}$$

Então, $r_2 > r_1$.

No caso geral, repetindo o mesmo procedimento, obteremos que

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 &= \left(\frac{2^*}{2}\right)^2 (2^* - q)\\ r_3 - r_2 &= \left(\frac{2^*}{2}\right)^3 (2^* - q)\\ &\vdots\\ r_k - r_{k-1} &= \left(\frac{2^*}{2}\right)^k (2^* - q)\,. \end{aligned}$$

Procedendo desta maneira indefinidamente, podemos obter que r_k é uma sequência crescente, isto é $r_0 < r_1 < r_2 < ... < r_k < ...$ e cujo limite é

$$\lim_{k\to\infty} r_k = +\infty. \qquad (4)$$

Com efeito, pelo exposto acima, temos

$$\begin{aligned} r_k - r_1 &= \left(\frac{2^*}{2}\right)^2 (2^* - q) + \left(\frac{2^*}{2}\right)^3 (2^* - q) + \cdots + \left(\frac{2^*}{2}\right)^k (2^* - q)\\ &= \left[\left(\frac{2^*}{2}\right)^2 + \left(\frac{2^*}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2^*}{2}\right)^k\right](2^* - q), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} r_k &= r_1 + \left[\left(\frac{2^*}{2}\right)^2 + \left(\frac{2^*}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2^*}{2}\right)^k\right](2^* - q)\\ &= (r_0 + (2-q))\left(\frac{2^*}{2}\right) + \left[\left(\frac{2^*}{2}\right)^2 + \left(\frac{2^*}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2^*}{2}\right)^k\right](2^* - q). \end{aligned}$$

Como $(r_0+(2-q))\left(\frac{2^*}{2}\right)>0$ e $(2^*-q)>0$ tomando $k\to\infty$, temos que vale (4).
Afirmamos que

$$\left(\frac{(r_0-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_0-q+1)}\right)<\left(\frac{(r_1-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_1-q+1)}\right)<...<\left(\frac{(r_k-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_k-q+1)}\right)<...\cdot \tag{5}$$

De fato, tomando $t=r_0,r_1,r_2,...,r_k,...$ e definindo

$$f(t)=\frac{(t-q+2)^2}{4\alpha S^2(t-q+1)}$$

temos que

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{2(t-q+2)4\alpha S^2(t-q+1)-(t-q+2)^2 4\alpha S^2}{4\alpha S^2(t-q+1)^2}\\&=\frac{(t-q+2)[2t-2q+2-t+q-2]}{4\alpha S^2(t-q+1)^2}\\&=\frac{(t-q+2)(t-q)}{4\alpha S^2(t-q+1)^2}\end{aligned}$$

A fim de provar que f é uma função crescente, precisamos mostrar que $(t-q+2)(t-q)>0$. Primeiro, note que se $t=r_0$ então $(2^*-q+2)(2^*-q)>0$ já que $2^*-q>0$. Agora, como $r_0>r_1>r_2>...$, substituindo cada valor separadamente para t temos que $f'(t)>0$ o que implica que f é uma função crescente.
Retornando agora em (3) e substituindo o resultado obtido em (5), podemos reescrever (3) da seguinte forma

$$|u_{m,n}|_{r_k}\le\left[\left(\frac{(r_{k-1}-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_{k-1}-q+1)}\right)n^{(p-q)}\right]^{\frac{1}{r_k}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{2^*}{2}\right)^i}|u_{m,n}|_{2^*}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^k\frac{r_0}{r_k}}. \tag{6}$$

Escrevendo

$$C_n:=\left[\left(\frac{(r_{k-1}-q+2)^2}{4\alpha S^2(r_{k-1}-q+1)}\right)n^{(p-q)}\right]^{\frac{1}{r_k}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{2^*}{2}\right)^i},$$

finalmente temos que

$$|u_{m,n}|_{r_k}\le C_n|u_{m,n}|_{2^*}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^k\frac{r_0}{r_k}}\le\widetilde{C}_n,$$

em que na última desigualdade usamos (4.15) para obter uma estimativa de $u_{m,n}$ em $L^{2^*}(\Omega)$.
Por último, se k é tal que $\frac{r_k-q+2}{2}2^*>\frac{N}{2}$, uma adaptação do caso quase-linear da demonstração do teorema de Stampacchia implica que existe $M_n>0$ tal que $|u_{m,n}|_\infty\le M_n$. De fato, vamos demonstrar a adaptação, para este caso, do teorema 3.1 vista no capítulo 3.

Sabemos que $u_{m,n}$ é uma solução fraca de

$$-\text{div}\left(\left[a(x)+|\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^\gamma\right]\nabla u_{m,n}\right)+\frac{\gamma}{2}\mathcal{T}_m'(u_{m,n})|\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^{\gamma-2}\mathcal{T}_m(u_{m,n})|\nabla u_{m,n}|^2=f'(u_{m,n}).$$

Então,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left[a(x)+|\mathcal{T}_m u_{m,n}|^\gamma\right]\nabla u_{m,n}\nabla\varphi\,dx\\+\frac{\gamma}{2}&\int_\Omega\mathcal{T}_m'(u_{m,n})|\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^{\gamma-2}\mathcal{T}_m(u_{m,n})|\nabla u_{m,n}|^2\varphi\,dx\\=&\int_\Omega f_n'(u_{m,n})\varphi\,dx,\quad\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)\qquad(\Theta)\end{aligned}$$

Para $k>m$ adequado considere $v=\max\{u_{m,n}-k,0\}=(u_{m,n}-k)^+\geq 0$ e assim pelo teorema A.6 (apêndice) temos que $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Considerando $A(k)=\{x\in\Omega: u_{m,n}(x)\geq k\}$, note que se $v\neq 0$ então $v=u_{m,n}-k$ em $A(k)$, e assim $\nabla v=\nabla u_{m,n}$. Considerando $\varphi=v$ em (Θ) obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{A(k)}\left[a(x)+|\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^\gamma\right]|\nabla v|^2\,dx\\+\frac{\gamma}{2}&\int_{A(k)}\mathcal{T}_m'(u_{m,n})|\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^{\gamma-2}\mathcal{T}_m(u_{m,n})|\nabla v|^2v\,dx\\=&\int_{A(k)}f_n'(u_{m,n})v\,dx\end{aligned}$$

e como vimos que $\frac{\gamma}{2}\int_{A(k)}\mathcal{T}_m'(u_{m,n})|\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^{\gamma-2}T_m(u_{m,n})|\nabla v|^2v\,dx>0$ e que $\int_{A(k)}|\mathcal{T}_m(u_{m,n})|^\gamma|\nabla v|^2\,dx>0$, então

$$\int_{A(k)}a(x)|\nabla v|^2\,dx\leq\int_{A(k)}f_n'(u_{m,n})v\,dx.$$

Usando (4.1) temos

$$\alpha\int_{A(k)}|\nabla v|^2\,dx\leq\int_{A(k)}f_n'(u_{m,n})v\,dx.$$

Da definição de f_n, segue que $f_n'(t) \leq t^{p-1} \leq t^p$. Daí

$$\alpha\|v\|_{1,2}^2 \leq \int\limits_{A(k)} (u_{m,n})^p v \, dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder, com $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $(2^*)' = \frac{2N}{N+2}$ vem que

$$\begin{aligned}\alpha\|v\|_{1,2}^2 \leq & \left(\int\limits_{A(k)} v^{2^*} \, dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int\limits_{A(k)} (u_{m,n})^{p(2^*)'} \, dx \right)^{\frac{1}{(2^*)'}} \\ = & |v|_{2^*} \left(\int\limits_{A(k)} (u_{m,n})^{p(2^*)'} \, dx \right)^{\frac{1}{(2^*)'}}\end{aligned}$$

Como $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, existe $\widetilde{c} > 0$ tal que $|v|_{2^*} \leq \widetilde{c}\|v\|_{1,2}$. Assim

$$\alpha\|v\|_{1,2}^2 \leq \widetilde{c}\|v\|_{1,2} \left(\int\limits_{A(k)} (u_{m,n})^{p(2^*)'} \, dx \right)^{\frac{1}{(2^*)'}}.$$

Pela desigualdade de Young com ϵ, temos

$$\alpha\|v\|_{1,2}^2 \leq \epsilon\widetilde{c}^2\|v\|_{1,2}^2 + C_\epsilon \left(\int\limits_{A(k)} (u_{m,n})^{p(2^*)'} \, dx \right)^{\frac{2}{(2^*)'}}$$

ou seja,

$$(\alpha - \epsilon\widetilde{c}^2)\|v\|_{1,2}^2 \leq C_\epsilon \left(\int\limits_{A(k)} (u_{m,n})^{p(2^*)'} \, dx \right)^{\frac{2}{(2^*)'}}.$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de forma a garantir que $\alpha - \epsilon\widetilde{c}^2 > 0$ temos que existe $\overline{k} > 0$, tal que

$$\|v\|_{1,2}^2 \leq \overline{k} \left(\int\limits_{A(k)} (u_{m,n})^{p(2^*)'} \, dx \right)^{\frac{2}{(2^*)'}}.$$

Considere $r > p(2^*)'$, aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $s = \frac{r}{p(2^*)'}$ e

$s' = \frac{r}{r-(2^*)'p}$ temos que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{1,2}^2 \leq & \overline{k}\left[\left(\int\limits_{A(k)} (u_{m,n})^{ps(2^*)'}\, dx\right)^{\frac{1}{s}}\left(\int\limits_{A(k)} 1^{s'}\, dx\right)^{\frac{1}{s'}}\right]^{\frac{2}{(2^*)'}}\\
= & \overline{k}\left[\left(\int\limits_{A(k)} (u_{m,n})^{r}\, dx\right)^{\frac{p(2^*)'}{r}} (\mathrm{med}(A(k)))^{\frac{r-p(2^*)'}{r}}\right]^{\frac{2}{(2^*)'}}\\
= & \overline{k}|u_{m,n}|_r^{2p}\,(\mathrm{med}A(k))^{\frac{2}{(2^*)'}-\frac{2p}{r}}.
\end{aligned}$$

Usando imersão de Sobolev, temos que $|v|_{2^*}^2 \leq \widetilde{c}\|v\|_{1,2}^2$, consequentemente

$$|v|_{2^*}^2 \leq \overline{k}\widetilde{c}|u_{m,n}|_r^{2p}\,(\mathrm{med}(A(k)))^{\frac{2}{(2^*)'}-\frac{2p}{r}}.$$

Por outro lado, como $h > k > \Phi = \max\left\{\max\limits_{\partial\Omega}\{u_{m,n} - k\}, 0\right\}$ temos que $A(h) \subset A(k)$. Consequentemente, se $v = u_{m,n} - k$ temos

$$\begin{aligned}
|v|_{2^*}^2 = & \left(\int\limits_{A(k)} v^{2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}} = \left(\int\limits_{A(k)} (u_{m,n}-k)^{2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}}\\
\geq & \left(\int\limits_{A(h)} (u_{m,n}-k)^{2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}}\\
\geq & \left(\int\limits_{A(h)} (h-k)^{2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \quad \text{pois } u_{m,n}(x) \geq h > k \text{ em } A(h) = \{x \in \Omega : u_{m,n}(x) \geq h\}\\
= & (h-k)^2\left(\int\limits_{A(h)} 1\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}}\\
= & (h-k)^2\,(\mathrm{med}A(h))^{\frac{2}{2^*}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(h-k)^2\,(\mathrm{med}(A(h)))^{\frac{2}{2^*}} \leq |v|_{2^*}^2 \leq \overline{k}\widetilde{c}|u_{m,n}|_r^{2p}\,(\mathrm{med}(A(k)))^{\frac{2}{(2^*)'}-\frac{2p}{r}}$$

ou seja,

$$\mathrm{med}(A(h)) \leq \frac{K}{(h-k)^{2^*}}|u_{m,n}|_r^{p2^*}\,(\mathrm{med}(A(k)))^{\beta} \qquad (\Lambda)$$

onde

$$K = \left(\overline{k}\widetilde{c}\right)^{\frac{2^*}{2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\frac{2}{(2^*)'} - \frac{2p}{r}}{\frac{2}{2^*}}.$$

Como $u_{m,n} \in L^2(\Omega)$, segue de Λ com $r = 2$ e devido ao lema 3.1 item (III), que $u_{m,n} \in L^{t_1}(\Omega)$ com $t_1 > 2$. Ainda por Λ com $r = t_1$ e devido ao lema 3.1 item (III) segue que $u_{m,n} \in L^{t_2}(\Omega)$ com $t_2 > t_1 > 2$. Fazendo esta iteração temos que $u_{m,n} \in L^r(\Omega)$.
Se $r \to \infty$ temos $\beta = \frac{2^*}{(2^*)'} > 1$ e aplicando o lema 3.1 item (I) temos que

$$\text{med}\,(A(k_0 + d)) = 0 = \text{med}\,\{x \in \Omega : u_{m,n}(x) \geq k_0 + d\}\,.$$

Logo, temos que $u_{m,n}(x) \leq d$, com $x \in \Omega$ e $d = C\,[\varphi(k_0)]^{(\beta-1)}\,2^{\frac{\alpha\beta}{(\beta-1)}}$. Portanto, $u_{m,n} \in L^\infty(\Omega)$, como queríamos. E acabamos de demonstrar a adaptação do teorema 3.1 de Stampacchia para este caso. Note que a hipótese em que k é tal que $\frac{r_k - q + 2}{2} 2^* > \frac{N}{2}$ foi crucial para obtermos a adaptação demonstrada acima, uma vez que para a solução $u_{m,n}$ pertencer a $L^\infty(\Omega)$, necessariamente deve-se ter $\frac{r_k - q + 2}{2} 2^* > 1$, o que é verdade pois $\frac{N}{2} > 1$ já que $N > 2$.

Seja agora m_n um inteiro tal que $m_n \geq \max\{M_n + 2, \overline{t}\}$. Se nós definirmos $u_n \overset{\text{def}}{=} u_{m_n,n}$, então $\mathcal{T}_{m_n}(u_n) = u_n$ e $\mathcal{T}'_{m_n}(u_n) = 1$, por (4.4). Então a equação satisfeita por u_n é

$$-\text{div}([a(x) + u_n^\gamma]\nabla u_n) + \frac{\gamma}{2} u_n^{\gamma-1}|\nabla u_n|^2 = f_n'(u_n), \qquad (\Psi)$$

com condições de fronteira nula e a qual foi obtida bastando apenas substituir os valores de $\mathcal{T}_{m_n}(u_n)$ e $\mathcal{T}'_{m_n}(u_n)$ em (4.14).
Além disso, por (4.16) temos que $\int_\Omega u_n^\gamma |\nabla u_n|^2\,dx$ é limitado com respeito a n, pois

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_n^\gamma |\nabla u_n|^2\,dx &\leq \left(m + \frac{1}{2}\right)^\gamma \int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \\ &= \left(m + \frac{1}{2}\right)^\gamma \|u_n\|_{1,2}^2 < +\infty. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Mais ainda, $\int\limits_\Omega u_n^{\left(\frac{2^*}{2}\right)(\gamma+2)}\,dx$ também é limitado. Vamos verificar:

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega u_n^{\left(\frac{2^*}{2}\right)(\gamma+2)}\,dx &= \int\limits_\Omega u_n^{\left(\frac{2^*}{2}\right)\gamma} u_n^{2^*}\,dx \\ &\leq \left(m+\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{2^*}{2}\right)\gamma} \int\limits_\Omega u_n^{2^*}\,dx \\ &\leq \left(m+\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{2^*}{2}\right)\gamma} C\|u_n\|_{1,2}^{2^*} < \infty,\end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade usamos (4.4) e na última desigualdade usamos a imersão de Sobolev $|u_n|_{2^*}^{2^*} \leq C\|u_n\|_{1,2}^{2^*}$.

Note que, pela hipótese (4.3) temos $p < \left(\frac{2^*}{2}\right)(\gamma+2)$, então u_n é limitado em $L^p(\Omega)$. Usaremos este fato, para provar que u_n é uniformemente limitado em $L^\infty(\Omega)$.

Afirmação 4.14. *Seja $A > 0$, temos que*

$$S^2\left(\int\limits_\Omega (u_n)^{\frac{\gamma+A+2}{2}2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\frac{\gamma+A+2}{2}\right)^2 \int\limits_\Omega (u_n)^{\gamma+A}|\nabla u_n|^2\,dx,$$

onde S é uma constante obtida da imersão de Sobolev.

Demonstração da afirmação 4.14. Similar ao que fizemos na afirmação 4.11 usaremos a relação

$$\left(\int\limits_\Omega v^{2^*}\,dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq \frac{1}{S}\left(\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tomando $v = (u_n)^{\frac{\gamma+A+2}{2}}$, temos que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega v^{2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}} &= \left(\int_\Omega (u_n)^{\frac{\gamma+A+2}{2}2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \\
&\leq \frac{1}{S^2}\left(\int_\Omega |\nabla\left[(u_n)\right]^{\frac{\gamma+A+2}{2}}|^2\, dx\right) \\
&= \frac{1}{S^2}\left(\int_\Omega \left|\frac{\gamma+A+2}{2}(u_n)^{\frac{\gamma+A}{2}}\nabla u_n\right|^2\, dx\right) \\
&= \left(\frac{\gamma+A+2}{2}\right)^2 \frac{1}{S^2}\int_\Omega \left|(u_n)^{\frac{\gamma+A}{2}}\nabla u_n\right|^2\, dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
S^2\left(\int_\Omega (u_n)^{\frac{\gamma+A+2}{2}2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\frac{\gamma+A+2}{2}\right)^2 \int_\Omega (u_n)^{\gamma+A}|\nabla u_n|^2\, dx.
$$

Afirmação 4.15. *Declaramos também que vale*

$$
\left(\frac{\gamma+A+2}{2}\right)^2 \int_\Omega (u_n)^{\gamma+A}|\nabla u_n|^2\, dx \leq \frac{(\gamma+A+2)^2}{4(A+1)}\int_\Omega (u_n)^{A+p}\, dx.
$$

Demonstração da afirmação 4.15. De fato, seja $A > 0$ e considere $v = (u_n)^{A+1}$ como função teste na equação de Euler-Lagrange satisfeita por u_n, segue que

$$
\int_\Omega -\mathrm{div}\left([a(x)+u_n^\gamma]\nabla u_n\right)(u_n)^{A+1}\, dx + \int_\Omega \frac{\gamma}{2}u_n^{\gamma-1}|\nabla u_n|(u_n)^{A+1}\, dx = \int_\Omega f_n'(u_n)(u_n)^{A+1}\, dx.
$$

O segundo termo do lado esquerdo que é positivo, iremos desconsiderá-lo a fim de obter a seguinte desigualdade

$$
-\int_\Omega \mathrm{div}[a(x)\nabla u_n](u_n)^{A+1}\, dx - \int_\Omega \mathrm{div}[u_n^\gamma\nabla u_n](u_n)^{A+1}\, dx \leq \int_\Omega f_n'(u_n)(u_n)^{A+1}\, dx.
$$

Trabalhando agora apenas com o lado esquerdo da desigualdade acima e aplicando o Teorema de Green, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x)\nabla u_n \nabla (u_n)^{A+1}\, dx + \int_\Omega u_n^\gamma \nabla u_n \nabla (u_n)^{A+1}\, dx \\
&= \int_\Omega a(x)(A+1)(u_n)^A \nabla u_n \nabla u_n\, dx + \int_\Omega u_n^\gamma (A+1)(u_n)^A \nabla u_n \nabla u_n\, dx \\
&= \int_\Omega a(x)(A+1)(u_n)^A |\nabla u_n|^2\, dx + \int_\Omega (u_n)^\gamma (A+1)(u_n)^A |\nabla u_n|^2\, dx.
\end{aligned}
$$

Desconsiderando agora o primeiro termo que é positivo e juntando isso ao termo do lado direito da última desigualdade obteremos que

$$(A+1)\int_\Omega (u_n)^{\gamma+A}|\nabla u_n|^2\, dx \leq \int_\Omega f_n'(u_n)(u_n)^{A+1}\, dx.$$

Lembrando que $f_n'(t) \leq (t^+)^{p-1}$, iremos trabalhar agora com o lado direito da desigualdade acima, isto é

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f_n'(u_n)(u_n)^{A+1}\, dx &= \int_\Omega (u_n)^{p-1}(u_n)^{A+1}\, dx \\
&= \int_\Omega (u_n)^{A+p}\, dx.
\end{aligned}
$$

Juntando isso ao termo do lado esquerdo da penúltima desigualdade obteremos que

$$(A+1)\int_\Omega (u_n)^{\gamma+A}|\nabla u_n|^2\, dx \leq \int_\Omega (u_n)^{A+p}\, dx.$$

Multiplicando ambos os lados por $\left(\frac{\gamma+A+2}{2}\right)^2$ obteremos finalmente que

$$\left(\frac{\gamma+A+2}{2}\right)^2 \int_\Omega (u_n)^{\gamma+2}|\nabla u_n|^2\, dx \leq \frac{(\gamma+A+2)^2}{4(A+1)}\int_\Omega (u_n)^{A+p}\, dx.$$

Concluímos assim a demonstração da afirmação 4.15.

Pelas desigualdades obtidas nas afirmações 4.14 e 4.15 temos que

$$S^2\left(\int\limits_\Omega (u_n)^{\frac{\gamma+A+2}{2}2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\frac{\gamma+A+2}{2}\right)^2\int\limits_\Omega (u_n)^{\gamma+A}|\nabla u_n|^2\,dx$$

$$\leq \frac{(\gamma+A+2)^2}{4(A+1)}\int\limits_\Omega (u_n)^{A+p}\,dx. \qquad (P)$$

Afirmação 4.16. *Se u_n pertence a $L^r(\Omega)$, então u_n pertence a $L^{\frac{\gamma+r-p+2}{2}2^*}(\Omega)$ com norma*

$$|u_n|_{\frac{\gamma+r-p+2}{2}2^*} \leq \left(\frac{\gamma+r-p+2}{4S^2(r-p+1)}\right)^{\frac{2^*}{2}}|u_n|_r^{\frac{r}{\gamma+r-p+2}} \qquad (Q)$$

Demonstração da afirmação 4.16. Com efeito, de (P) temos que vale

$$S^2\left(\int\limits_\Omega (u_n)^{\frac{\gamma+A+2}{2}2^*}\,dx\right)^{2/2^*} \leq \frac{(\gamma+A+2)^2}{4(A+1)}\int\limits_\Omega (u_n)^{A+p}\,dx.$$

Agora, escolhendo $A = r-p$, temos que

$$S^2\left(\int\limits_\Omega (u_n)^{(\frac{\gamma+r-p+2}{2})2^*}\,dx\right)^{2/2^*} \leq \frac{(\gamma+r-p+2)^2}{4(r-p+1)}\int\limits_\Omega (u_n)^r\,dx < +\infty \qquad (R)$$

o que implica que $u_n \in L^{\frac{\gamma+r-p+2}{2}2^*}(\Omega)$.
Resta checar a desigualdade em (Q): reescrevendo o termo a esquerda da desigualdade em (R) como uma norma temos que

$$S^2\left(|u_n|^{\frac{\gamma+r-p+2}{2}2^*}_{\frac{\gamma+r-p+2}{2}2^*}\right)^{2/2^*} \leq \frac{(\gamma+r-p+2)^2}{4(r-p+1)}\int\limits_\Omega (u_n)^r\,dx$$

$$\Longrightarrow\ |u_n|^{\gamma+r-p+2}_{\frac{\gamma+r-p+2}{2}2^*} \leq \frac{(\gamma+r-p+2)^2}{4S^2(r-p+1)}\int\limits_\Omega (u_n)^r\,dx$$

$$\Longrightarrow\ |u_n|_{\frac{\gamma+r-p+2}{2}2^*} \leq \left(\frac{(\gamma+r-p+2)^2}{4S^2(r-p+1)}\right)^{\frac{1}{\gamma+r-p+2}}\left(\int\limits_\Omega (u_n)^r\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma+r-p+2}}.$$

Portanto,

$$|u_n|_{\frac{\gamma+r-p+2}{2}2^*} \leq \left(\frac{(\gamma+r-p+2)^2}{4S^2(r-p+1)}\right)^{\frac{1}{\gamma+r-p+2}}|u_n|_r^{\frac{r}{\gamma+r-p+2}}. \qquad (S)$$

Observe que como $\gamma > 1$ e também $A = r - p > 0$ segue que temos

$$\frac{1}{\gamma + r - p + 2} \leq \frac{1}{\gamma + 2} \leq \frac{2^*}{2}.$$

E assim, a expressão em (S) pode ser reescrita como

$$|u_n|_{\frac{\gamma+r-p+2}{2}2^*} \leq \left(\frac{(\gamma + r - p + 2)^2}{4S^2(r - p + 1)} \right)^{\frac{2^*}{2}} |u_n|_r^{\frac{r}{\gamma+r-p+2}} \text{ para } \gamma > 1. \qquad (\overline{S})$$

Assim, argumentando como antes, se considerarmos a sequência r_k definida desta vez por

$$\begin{cases} r_0 = \frac{2^*}{2}(\gamma + 2) \\ r_k = r_{k-1}\frac{2^*}{2} + \frac{2^*}{2}(\gamma + 2 - p), \end{cases}$$

então, $u_n \in L^{r_k}(\Omega)$, para todo k, e

$$\begin{aligned} |u_n|_{r_k} &\leq \left(\frac{(\gamma + r_{k-1} - p + 2)^2}{4S^2(r_{k-1} - p + 1)} \right)^{\frac{2^*}{2}} |u_n|_{r_{k-1}}^{\frac{2^* r_{k-1}}{2 r_k}} \\ &\leq \cdots \leq C |u_n|_{\frac{2^*}{2}(\gamma+2)}^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^{k+1} \frac{\gamma+2}{r_k}} \leq \widetilde{C}, \end{aligned}$$

onde usamos (4.17) na última passagem para estimar uniformemente a norma de $\{u_n\}$ em $L^{\frac{2^*}{2}(\gamma+2)}(\Omega)$ com respeito a n.
Claramente a sequência $\{r_k\}$ é crescente e ilimitada, pois $\frac{2^*}{2} > 1$, de forma que após um número finito de passos concluiremos que u_n^{p-1} é limitado em $L^r(\Omega)$, com $r > N/2$. Usando novamente uma adaptação do teorema de Stampacchia, a saber uma adaptação do teorema 3.1 provado no capítulo 3, exatamente como fizemos anteriormente, vale que existe C^* tal que

$$|u_n|_\infty \leq C^*, \ \forall\, n > \max\{\bar{t}, \overline{n}\}.$$

Passo 4: Conclusão

Se $n \geq \max\{C^*, \bar{t}, \overline{n}\}$, segue que

$$\begin{aligned} |u_n|_\infty \leq n &\implies u_n(x) \leq n, \ x \in \Omega \\ &\implies f_n(u_n) = \frac{u_n^p}{p} \\ &\implies f_n'(u_n) = u_n^{p-1}. \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo em (Ψ) segue que $u := u_n$ é uma solução positiva não-trivial de (4.2). $\square$

Apêndice A

Espaços Métricos, Teoria da Medida e Equações Diferenciais Parciais

A.1 Espaços Métricos

Teorema A.1. *[37] Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Suponhamos que o segmento de reta $[a, a+v]$ esteja contido em U, que a restrição $f\big|_{[a,a+v]}$ seja contínua e que exista a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v, em todo ponto $x \in (a, a+v)$. Então existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v).$$

Proposição A.1. *[37] Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo.*

Sejam X um conjunto, M um espaço métrico e $\alpha : X \to M$ uma aplicação. A notação $\mathcal{B}_\alpha(X, M)$ representa o conjunto das aplicações $f : X \to M$ tais que $d(f, \alpha) = \sup\limits_{x \in X} d(f(x), \alpha(x)) < \infty$, com a métrica da convergência uniforme.

Teorema A.2. *[37] Se um espaço métrico M é completo então $\mathcal{B}_\alpha(X, M)$ é completo, sejam quais forem X e $\alpha : X \to M$.*

Corolário A.1. *[37] Sejam M, N espaços métricos. Se N é completo então, para toda aplicação $\alpha : M \to N$, o espaço métrico $C_\alpha(M, N)$ é completo.*

Teorema A.3. *[17] Sejam $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e suponha que $p \geq 1$ seja um inteiro. Então valem as seguintes desigualdades:*

1) $|x + y|^p \leq 2^{p-1}|x^p + y^p|$, *2)* $(|x| + |y|)^{1/p} \leq |x|^{\frac{1}{p}} + |y|^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{p-1}{p}} (|x| + |y|)^{\frac{1}{p}}$ *e*

3) $|x - y|^p \leq 2^{p-1}|x^p - y^p|$, *quando* $p \geq 1$ *for um inteiro ímpar.*

A.2 Teoria da Medida

Definição A.1. *[60] Sejam* X, Y *espaços topológicos e* $(T, \mathcal{M}, \mu)$ *um espaço mensurável. Dizemos que* $f : T \times X \longrightarrow Y$ *é uma função Carathéodory se*

(i) $f(\cdot, u)$ *é mensurável para cada* u*;*

(ii) $f(t, \cdot)$ *é contínua para cada* t*.*

Em outras palavras é mensurável em t *e contínua em* u*.*

Definição A.2. *[15] Define-se por* $L^1(\Omega)$*, o espaço das funções integráveis de* Ω *em* $\mathbb{R}$*. Usa-se a seguinte a seguinte notação para a norma deste espaço*

$$|f|_1 = \int_\Omega |f| \, d\mu = \int |f|.$$

Definição A.3. *[15] Seja* $p \in \mathbb{R}$ *com* $1 < p < \infty$*. Definimos*

$$L^p = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

cuja norma

$$|f|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

Definição A.4. *[15] Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ é mensurável e existe uma constante } C \\ \text{tal que } |f(x)| \leq C \text{ em quase todo ponto em } \Omega \end{array} \right\} \tag{A.1}$$

Teorema A.4 (Teorema da convergência dominada)**.** *[44] Suponha que as funções* $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ *sejam integráveis e* $f_k \to f$ *em quase todo ponto. Suponha também que* $|f_k| \leq g$ *em quase todo ponto, para alguma função* $g \in L^1(\Omega)$*. Então vale que*

$$\int_\Omega f_k \, dx \longrightarrow \int_\Omega f \, dx.$$

A.3 Equações Diferenciais Parciais

Considere a seguinte relação, obtida de [8]

$$
\begin{aligned}
Lu &= -\text{div}(A(x)\nabla u) \text{ onde, por exemplo } A(x) \text{ é operador identidade} \\
&= -\text{div}(I\nabla u) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} := -\Delta u
\end{aligned} \tag{A.2}
$$

Onde Δ é denominado operador de Laplace.

Definição A.5. *[15] Uma forma bilinear* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *é coerciva se existe uma constante* $\alpha > 0$ *tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2,$$

para todo $v \in H$.

Definição A.6. *[61] Seja* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Dizemos que* I *satisfaz a* ***condição de Palais-Smale*** *se toda sequência* $(u_k) \subset X$ *tal que* $\sup_k |I(u_k)| < \infty$ *e* $\lim_{k\to\infty} I'(u_k) = 0$ *possui subsequência convergente.*
Se $c \in \mathbb{R}$, *dizemos que* I *satisfaz a condição de Palais-Smale no nível* c *desde que toda sequência tal que* $\lim_{k\to\infty} I(u_k) = c$ *e* $\lim_{k\to\infty} I'(u_k) = 0$, *possui subsequência convergente.*

Teorema A.5. *[61][Teorema do passo da montanha clássico] Seja* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *um funcional tal que* $I(0) = 0$ *e*

(I_1) *Existem* $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;

(I_2) *Existe* $e \in X$ *tal que* $\|e\|_X > \rho$ *e* $I(e) \leq 0$.

Seja

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}.$$

Então, se I *satisfaz* $(PS)_c$ *o nível* c *é um nível crítico de* I, *isto é, existe* $u \in X$ *tal que* $I(u) = c$ *e* $I'(u) = 0$.

Teorema A.6. *[21] Se* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *então* $u^+, u^-, |u| \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Além disso, vale também que*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & q.t.p. \text{ em } \{u > 0\}, \\ 0, & q.t.p. \text{ em } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

e que

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0, & q.t.p. \ em \ \{u \geq 0\}, \\ -\nabla u, & q.t.p. \ em \ \{u < 0\}. \end{cases}$$

Teorema A.7. *[28]Suponha que $u(x)$ representa o mínimo absoluto do funcional*

$$I(u) = \int_\Omega F(x, u, u_x)\, dx$$

na classe das funções que pertencem a $W^{1,m}(\Omega)$ que assume valor de contorno $\varphi'(s)$. Suponha que a função F é tal que

$$\begin{aligned} &F(x, u, p) \geq \nu|p|^m - \varphi_1(x)(|u|^{\alpha_1} + 1), \ \nu = const > 0, \\ &F(x, u, 0) \leq \varphi_2(x)|u|^{\alpha_2} + \varphi_0(x), \ \varphi_i \geq 0, \ i = 0, 1, 2 \end{aligned} \tag{A.3}$$

onde $\varphi_i(x) \in L_{r_i}(\Omega)$ com $r_i > \frac{n}{m}$, para $i = 0, 1, 2$, e que

$$\alpha_i < \frac{mn}{n - m}\left(1 - \frac{1}{r_i}\right),$$

para $i = 1, 2$. Então, se $\max\limits_s \mathrm{ess}|u| = M_0 < \infty$, então a quantidade $\max\limits_\Omega \mathrm{ess}|u|$ é limitada em termos das constantes M_0, $\|u\|_{L_i(\Omega)}$, $i = \frac{\alpha_i r_i}{r_i - 1}$ e $\mathrm{med}\Omega$.

A.4 Espaços de Banach

Existem duas noções básicas de funções diferenciáveis f definidas sobre um conjunto aberto de um espaço de Banach X em um espaço de Banach Y. São elas:

Definição A.7. *[8]*

1. *Dizemos que f é uma função Gâteaux diferenciável em x_0 se existe um operador linear limitado T de X em Y tal que para cada $u \in X$,*

   $$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} = Tu.$$

   *O operador T é chamado de **derivada de Gâteaux** de f em x_0 e denotado por $D_f(x_0)$.*
   Se para algum u fixado o limite

   $$f'(x_0, u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t_u) - f(x_0)}{t}$$

   existir, dizemos que f tem uma derivada direcional de x_0 na direção de u. Então

f é Gâteaux diferenciável em x_0 se, e somente se, todas as derivadas direcionais $f'(x_0, u)$ existem e elas formam um operador linear limitado de u. Neste caso a notação é $f'(x_0, u) = D_f(x_0)u$.

2. *Se existe o limite uniforme em x na definição da derivada de Gâteaux sobre a esfera unitária de X, dizemos que f é Fréchet diferenciável em x_0 e T é a **derivada de Fréchet** de f em x_0.*

A.5 Espaços de Sobolev

Definição A.8. *[15] Dado Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ escrevemos $C_0^1(\Omega)$ para denotar o espaço das funções diferenciáveis com derivada contínua e suporte compacto em Ω, também representado por*

$$C_0^1(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ é continuamente diferenciável e possui suporte compacto}\}$$

Definição A.9. *[15] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como sendo*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \\ \forall \varphi \in C_0^1(\Omega),\ \forall i = 1, 2, ..., N \end{array} \right\} \tag{A.4}$$

Defina $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ define-se $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ e escreve-se

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é munido da norma

$$\|u\|_{1,p} = |u|_p + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_p.$$

Enquanto que o espaço $H^1(\Omega)$ é munido do produto interno

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1} &= (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} \\ &= \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Cuja norma associada a este produto escalar é

$$\|u\|_{1,2} = \left(|u|_2^2 + \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_2^2 \right)^{1/2}$$

a qual é equivalente à norma em $W^{1,2}(\Omega)$.

Definição A.10. *[15] Seja* $1 \leq p < \infty$ *então o espaço de Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *denota o fecho de* $C_0^1(\Omega)$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$. *O espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *munido da norma* $W^{1,p}(\Omega)$, *é um espaço de Banach separável, ou seja é reflexivo se* $1 < p < \infty$. *Defina* $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$, *dizemos que* H_0^1, *munido do produto escalar em* $H^1(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert.*

Definição A.11. *[39] Diz-se que o aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é limitado na direção* x_i *se existe um intervalo aberto finito* (a, b) *da reta tal que*

$$pr_i\Omega \subset (a, b)$$

onde pr_i *é a projeção de* $\mathbb{R}^N$ *sobre o eixo* x_i.

Teorema A.8. *[21][Estimativas para* $W_0^{1,p}(U)$, $1 \leq p < N$*]. Seja* U *um subconjunto de* $\mathbb{R}^N$, *aberto e limitado. Suponha* $u \in W_0^{1,p}(U)$ *para algum* $1 \leq p < N$. *Então temos a estimativa*

$$|u|_q \leq C|\nabla u|_p$$

para cada $q \in [1, p^*]$, *onde a constante* C *depende de* p, q, N *e de* U.

Teorema A.9. *[24][Imersão de Sobolev]*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{Np}{(N-p)}} & se \quad p < N \\ C^0(\overline{\Omega}) & se \quad p > N. \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante $C = C(N, p)$ *tal que, para qualquer* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |u|_{\frac{Np}{(N-p)}} &\leq C|\nabla u|_p, \quad para\, p < N \\ \sup_{\Omega} |u| &\leq C|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}}|\nabla u|_p, \quad para\, p > N. \end{aligned}$$

Apêndice B

Análise Funcional e Métodos Variacionais

B.1 Análise Funcional

Definição B.1. *[15] Dizemos que a função $\varphi : E \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ é semincontínua inferiormente se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto*

$$[\varphi \leq \lambda] = \{x \in E; \varphi(x) \leq \lambda\}$$

é fechado.

Definição B.2 (Forma coerciva). *[29] Uma forma bilinear $a : H \times H \to \mathbb{R}$ é coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2, \ \forall \ v \in H.$$

Teorema B.1. *[15][Desigualdade de Young] Se p, q são números reais positivos e tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então para todo $a, b \geq 0$ vale que*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

valendo a igualdade apenas no caso em que $a^p = b^q$.

Observação B.1. *[15][Desigualdade de Young com ϵ] As vezes será conveniente usar a forma*

$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^q$$

onde C_ϵ é uma constante positiva que depende de ϵ.

Demonstração. Com efeito, seja $\epsilon > 0$, agora, nas condições do teorema B.1 temos que

$$\begin{aligned} ab &= (\nu a)\left(\frac{b}{\nu}\right) \\ &\leq \frac{1}{p}(\nu a)^p + \frac{\left(\frac{b}{\nu}\right)^q}{q} \\ &\leq \frac{\nu^p}{p}a^p + \frac{1}{q\nu^q}b^q. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = \frac{\nu^p}{p}$ temos que

$$ab \leq \epsilon a^p + \frac{1}{q(\epsilon p)^{\frac{q}{p}}}b^q.$$

Portanto,

$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^q.$$

$\square$

Teorema B.2. *[44][Desigualdade de Hölder] Sejam $1 < p, q < \infty$ os conjugados de Lebesgue, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dadas $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ funções $f \in L^p$, $g \in L^q$ e $V \subseteq D$, então vale que*

$$\left| \int_V f(x)g(x)\, dx \right| \leq \left(\int_V |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_V |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

onde no caso da desigualdade temos ainda que $fg \in L^1(V)$.

Lema B.1. *[13]Suponha que*

$$u_\epsilon \rightharpoonup \in\; W_0^{1,p}(\Omega) \text{ fracamente q.t.p. em}\Omega, \tag{B.1}$$

e

$$\int_\Omega [a(x, u_\epsilon, \nabla u_\epsilon) - a(x, u_\epsilon, \nabla u)]\nabla(u_\epsilon - u) \longrightarrow 0. \tag{B.2}$$

Então

$$u_\epsilon \longrightarrow u \;\in\; W_0^{1,p}(\Omega) \text{ fortemente.} \tag{B.3}$$

B.2 Métodos Variacionais

Teorema B.3. *[21][Princípio variacional para o autovalor principal]* *(i)* *Temos*

$$\lambda_1 = \min\left\{B[u,u] | u \in H_0^1(U),\ |u|_2 = 1\right\}.$$

(ii) *Além disso, o mínimo acima é atingido para uma função* w_1*, positiva em* U*, a qual é solução de*

$$\begin{cases} Lw_1 & = \lambda_1 w_1 \quad em\, U \\ w_1 & = 0 \quad sobre\, \partial U \end{cases}$$

(iii) *Finalmente, se* $u \in H_0^1(U)$ *é uma solução fraca qualquer de*

$$\begin{cases} Lu & = \lambda_1 u \quad em\, U \\ u & = 0 \quad sobre\, \partial U \end{cases}$$

então u *é um múltiplo de* w_1*.*

Teorema B.4. *[61][Princípio Variacional de Ekeland] Seja* V *um espaço métrico completo, e* $F : V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ *uma função semicontínua inferiormente,* $F \not\equiv +\infty$*, e limitada inferiormente. Seja* $\epsilon > 0$ *dado, e um ponto* $u \in V$*, tal que* $F(u) \leq \inf\limits_V F + \epsilon$*. Então existe algum ponto* $v \in V$ *tal que*

1. $F(v) \leq F(u)$;
2. $d(u,v) \leq 1$;
3. $\forall w \neq v,\ F(w) > F(v) - \epsilon d(v,w)$.

Corolário B.1. *[25] Seja* (V,d) *um espaço métrico completo e* $\mathcal{F} : V \to \mathbb{R}$ *uma função semicontínua inferiormente na topologia da métrica e limitada inferiormente, se introduzirmos em* V *uma nova distância* $d_1 = \epsilon^{\frac{1}{2}} d$*, a topologia de* V *continua a mesma. Em particular* (V, d_1) *é um espaço métrico completo, e* $\mathcal{F}$ *é semicontínua inferiormente. Pelo princípio Variacional de Ekeland, segue que se* $\mathcal{F}(u) \leq \inf\limits_V \mathcal{F} + \epsilon$*, existe* $v \in V$ *diferente daquele no Teorema de Ekeland, tal que*

(i′) $d(u,v) \leq \epsilon^{\frac{1}{2}}$;

(ii′) $\mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(u)$;

(iii′) $\mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(w) + \epsilon^{\frac{1}{2}} d(v,w)\ \forall\, w \in V$.

Bibliografia

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev spaces.** Academic press, New York, 1975.

[2] AMBROSETTI, A., RABINOWITZ, P. H. **Dual variational methods in critical point theory and applications.** J. Funct. Anal. **14** (1973), 349-381.

[3] ARCOYA, D., BOCCARDO, L. **Critical points for multiple integrals of Calculus of Variations** Arch. Ration. Mech. Anal. **134** (3), 249-274 (1996).

[4] ARCOYA, D., BOCCARDO, L. **Some remarks on critical point theory.** NoDEA **6**. 79-100 (1999).

[5] ARCOYA, D., BOCCARDO, L., ORSINA, L. **Critical points for functionals with quasilinear singular Euler-Lagrange equations.** Calculus of variations (2013) 47: 159-180. Springer-Verlag, 2012.

[6] AXLER, S. J. **Linear algebra done right.** Springer-Verlag New York, Inc. 2nd edition, 1997.

[7] BACHMAN, G., LAWRENCE, N. **Functional Analysis.** Academic press, inc, New York, USA, Fifth Printing, 1972.

[8] BADIALE, M., SERRA, E. **Semilinear elliptic equations for beginners.** Existence results via the variational approach, Springer, 2011.

[9] BARTLE, R. G. **The elements of Integration and Lebesgue measure.** Wiley Classics Library Edition Published, 1995.

[10] BENYAMINI, Y., LINDENSTRAUSS, J. **Geometric nonlinear functional analysis.** Colloquium publications, volume 48, AMS, 1991.

[11] BERG, P. W., MCGREGOR, J. L. **Elementary partial differential equations.** Holden-Day, Oakland, CA, 1966.

[12] BOCARDO, L., GALLOUET, T., MURAT, F. **A unified presentation of two existence results for problems with natural growth.** Pitman research notes in mathematics 296 (1993), 127-137.

[13] BOCCARDO, L., MURAT, F., PUEL, J. P. **Existence of bounded solutions for nonlinear unilateral problems.** Ann. Mat. Pura Appl. **152** (1988), 183-196.

[14] BOGACHEV, V.I. **Measure Theory.** Volume 1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[15] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and Partial differential Equations.** Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[16] CANDELA, A., PALMIERI, G. **Infinitely many solutions of some nonlinear variational equations.** Calc. Var. Partial Differ. Equ. **34**, 495-530 (2009).

[17] CHUNJIANG, Q., LIN, W. **Non-Lipschitz continuous stabilizers for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization.** Sistems & control letters **(188)** 42 (2001), 185-200.

[18] DACOROGNA, B. **Direct methods in the calculus of variations.** Springer-Verlag, 1989.

[19] DE FIGUEIREDO, D.G. **The Ekeland variational princile with applications and detours.** Springer-Verlang, 1989.

[20] EKELAND, I. **Nonconvex minimization problems.** Bull. Amer. Math. Soc. (NS) **1** (1979), 443-474.

[21] EVANS, L. C. **Partial differential equations.** Graduate Studies in mathematics, volume 19. American mathematical Society, 2nd edition, 2010.

[22] FITZPATRICK, P.M., ROYDEN, H.L. **Real Analysis.** Person Education Asia Limited and China Machine Press, 4th edition, 2010.

[23] FOLLAND, G. B. **introduction to partial differential equations.** Princeton university press, 2nd edition, 1995.

[24] GILBARG, D., TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order.** Classics in mathematics, Springer, 2001.

[25] GIUST, E. **Direct methods in the calculus of variations.** World scientific publishing Co. Pte. Ltd., 2003.

[26] HOFFMAN, K., KUNZE, R. **Linear Algebra.** Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 2nd edition, 1971.

[27] KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications.** John Wiley & Sons. United States of America, 1978.

[28] LADYZENSKAYA, O.A. URALCEVA, N.N. **Linear and quasilinear elliptic equations.** Academic Press, New York, 1968.

[29] LAX, P. D. **Functional Analysis.** Wiley-Interscience a John Wiley & Sons, Inc., publication, 2002.

[30] LAX, P. D. **Linear Algebra.** Pure and applied mathematics. Wiley-Interscience a John Wiley & Sons, Inc., publication, 1997.

[31] LEE, J. M. **Introduction to Smooth manifolds.** Graduate texts in mathematics 218, Springer, 1950.

[32] LEONI, G. **A first course in Sobolev spaces.** Graduate studies in mathematics, volume 105, AMS, 2000.

[33] LIMA, E. L. **Análise no espaço $\mathbb{R}^N$.** Coleção matemática universitária, 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[34] LIMA, E. L. **Análise real volume 1. Funções de uma variável.** Coleção matemática universitária, 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[35] LIMA, E. L. **Curso de análise; v.1.** Projeto Euclides, 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[36] LIMA, E. L. **Curso de análise; v.2.** Projeto Euclides, 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[37] LIMA, E. L. **Espaços métricos.** Projeto Euclides, 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[38] LIU, J., WANG, Y.-Q., WANG, Z.-Q **Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, II.** J. Differ. Equ. **187**, 473-493 (2003).

[39] MEDEIROS, L. A. J. **Espaços de Sobolev.** Iniciação aos Problemas Elípticos não homogêneos, Rio de Janeiro, Editora Instituto de Matemática, UFRJ, 2019.

[40] MERINO, L., SANTOS, E. **Álgebra Lineal con métodos elementales.** Copyright Ediciones Paraninfo, S.A. 1ª edición, 2010.

[41] MIRANDA, C. **Alcune osservazioni sulla maggiorazione in L^ν delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche del secondo ordine.** Ann. di Matematica, vol. 61 (1963), 151-170.

[42] MORREY C.B. **Multiple integrals in the calculus of variations.**. Springer-Verlag, 1966.

[43] MUNKRES, J. R. **Topology** Prentice Hall, Inc. 2nd edition. Massachusetts Institute of Tecnology, 2000.

[44] OLIVEIRA, C. R. DE **Introdução à análise funcional.** Projeto Euclides. 1ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[45] PEDERSEN G. K. **Analysis now.** Functional analysis. Springer-Verlag New York Inc, 1989.

[46] RABINOWITZ P.H. **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.** CBMS Regional Conference Series Math. **65**, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[47] ROYDEN, H. L. **Real Analysis.** Macmillan publishing company, New York, 1988.

[48] RUDIN, W. **Real and complex analysis.** McGraw-Hill Book Company, Madison USA, 3rd edition, 1987.

[49] RUDIN, W. **Functional analysis.** McGraw-Hill Book Company, Madison USA, 2nd edition, 1991.

[50] SALSA, S. **Partial differential equations in action.** From modelling to theory, Universitext, Springer, 2008.

[51] SCHAEFER, H. H. **Topological vector Spaces.** Springer-Verlag, New York, 1st edition, 1971.

[52] SILVA, E.A.B., VIEIRA, G.F. **Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with critical growth.** Calc. Var. Partial Differ. Equ. **39**, 1-33 (2010).

[53] SOBOLEV, S. L. **Applications of functional analysis in Mathematical Physics.** Translations of mathematical monographs, volume 7, American mathematical society, 1963.

[54] STAMPACCHIA, G. **Le problème di Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.** Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **15**, 189-258 (1965).

[55] STAMPACCHIA, G. **Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni del secondo ordine ellittiche.** Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, serie III, vol. XII, fasc. III (1958), 223-245.

[56] STAMPACCHIA, G. **Régularisation des solutions de problèmes aux limites elliptiques à données discontinues.** Inter. Symp. on Lin. Spaces, Jerusalem (1960), 399-408.

[57] STAMPACCHIA, G. **Équations elliptiques à données discontinues.** Séminaire Schwartz (1960/61) (nº 4).

[58] STAMPACCHIA, G. **Some limit cases of L^p-estimates for solutions of second order elliptic equations.** Comm. Pure Appl. Math., vol. XVI (1963), 505-510.

[59] STRUWE, M. **Variational methods.** Springer-Verlag, 1990.

[60] WEEDEN, R. L., ZYGMUND, A. **Measure and Integral.** An introduction to real analysis. Marcel Dekker, Inc. New York, USA, 1977.

[61] WILLEM, M. **Minimax theorems.** 1st edition, Birkhäuser, 1996.

[62] YANG, Y. **A concise text on advanced Linear Algebra.** Cambridge University press, 2015.

[63] YOSIDA, K. **Functional Analysis.** Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 6th edition, 1980.