



Universidade de Brasília

**Processos de Ramificação regidos por
uma fronteira K**

José Teixeira Moura Júnior

Orientador: Dr^a. Cátia Regina Gonçalves

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, 08 de Julho de 2022

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Processos de Ramificação regidos por uma fronteira K

por

José Teixeira Moura Júnior*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 29 de julho de 2022.

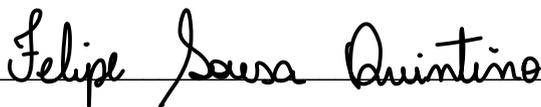
Comissão Examinadora:



Profª. Dra. Cátia Regina Gonçalves - MAT/UnB (Orientadora)



Prof. Dr. Eduardo Antonio da Silva – MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Felipe Sousa Quintino – UNIR (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Mp Moura Júnior, José Teixeira
Processos de Ramificação regidos por uma fronteira K /
José Teixeira Moura Júnior; orientador Cátia Regina
Gonçalves. -- Brasília, 2022.
68 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2022.

1. Processos de Ramificação. 2. Função Geradora de
Probabilidade. 3. Fronteira. 4. Probabilidade de Extinção.
5. Tempo de Extinção. I. Gonçalves, Cátia Regina, orient. II.
Título.

Dedico o presente trabalho à minha família, que não mediu esforços para possibilitar uma educação digna e de qualidade, e à Carol que ao longo de quase dez anos renova diariamente em mim todos os bons valores.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus por diariamente possibilitar que tenhamos a oportunidade de realizar nossos sonhos.

Ao meu pai e à minha mãe, por nutrir em mim o desejo de trilhar o caminho acadêmico e, com muito amor, ficar ao meu lado durante toda a jornada.

Ao meu irmão, João, por ser o meu companheiro matemático e meu melhor amigo.

À minha namorada, Carolina, fiel companheira, por possibilitar a melhor versão de mim a cada dia.

Aos meus amigos Caio, Giovanna, Lucas e Paulo, pelo companheirismo e força de sempre.

Aos meus amigos de graduação, os "hups", Amadeus, Ângelo, Diego, Guilherme, Gabriel, e Leonardo, por serem pessoas inestimáveis e que levarei para sempre no coração.

Ao meu professor Gilvan, por despertar em mim o interesse em estudar matemática.

À minha orientadora, professora Cátia, por além de apresentar todos os dias a área de Probabilidade de forma única e encantadora aos seus alunos ainda dedicar muito apoio e empenho durante a parceria para a finalização desta dissertação.

Aos professores Cira Etheowalda Guevara Otiniano, Eduardo Antônio da Silva, e Felipe Sousa Quintino por aceitarem participar da banca da defesa e pelas sugestões de melhoria do trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos um tipo especial de processo de ramificação dependente do tamanho da população, cujo comportamento é alternado entre crítico ou subcrítico e supercrítico conforme uma fronteira (ou limiar) K é ultrapassada pela cadeia. Apresentamos, em detalhes, os resultados obtidos por Athreya e Schuh (2016), referentes à probabilidade de extinção e ao tempo esperado de extinção dessa classe de processos.

Palavras-chave: Processos de Ramificação, Função Geradora de Probabilidade, Fronteira, Probabilidade de Extinção, Tempo de Extinção.

Abstract

In this dissertation, we study a special type of population-size-dependent branching process, whose behavior is alternated between critical or subcritical and supercritical when a threshold K is exceeded by the chain. The results obtained by Athreya and Schuh (2016), regarding the probability of extinction and the expected time of extinction of this class of processes are presented in details.

Keywords: Branching Processes, Probability Generating Function, Threshold, Probability of Extinction, Time of Extinction.

Conteúdo

Lista de Figuras	xvii
Introdução	1
1 Processos de Ramificação	5
1.1 Conceitos Preliminares	5
1.2 Processos de Galton Watson	10
1.3 Probabilidades de Extinção	18
1.4 Transiência e Recorrência	25
2 Tempo de Extinção	29
2.1 Caso Subcrítico ou Crítico	30
2.2 Decomposição de Processos Supercríticos	36
3 Um Processo de Ramificação Dependente do Tamanho da População	47
3.1 Probabilidade de Extinção	48
3.2 Tempo Esperado de Extinção	54
Bibliografia	67

Lista de Figuras

1.1	Comportamento gráfico da f.g.p. relativo à média	21
1.2	Convergência gráfica da f.g.p. sobre o ponto fixo	23

Introdução

Os processos de ramificação, em linhas gerais, são processos estocásticos utilizados para modelar a evolução do número de indivíduos de uma população ao passar das gerações, em que os nascimentos de novos integrantes da população, que também são capazes de gerar novos indivíduos, são regidos por leis de probabilidades.

Segundo Harris [4], a origem de tais processos remonta a cerca de 150 anos, com F. Galton e H. W. Watson, ao estudarem o problema da extinção do sobrenome de famílias tradicionais que havia sido observado por Thomas Malthus na cidade de Berna. (veja Jagers [6]).

No modelo original, chamado de *processo de Galton-Watson*, assume-se que os indivíduos considerados são de um único tipo e reproduzem-se independentemente uns dos outros seguindo a mesma lei de probabilidade, chamada de distribuição de descendentes, e independentemente do tamanho da população. Matematicamente, o processo de Galton-Watson é uma cadeia de Markov $\{Z_n, n \geq 0\}$ definida sobre o espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , que pode ser descrito da seguinte forma

$$Z_0 = 1 \quad \text{e} \quad Z_n = \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_k(n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

em que $X_k(n)$, $k, n = 1, 2, 3, \dots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) assumindo valores inteiros não negativos, com $P(X_k(n) = j) = p_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, e são independentes de Z_{n-1} .

Assim, Z_0 representa o número de indivíduos na geração inicial (neste caso assumimos que a população inicia-se com um único indivíduo), Z_n , para $n \geq 1$, representa o número de descendentes que compõem a n -ésima geração e, para cada k e n , $X_k(n)$ representa o número de descendentes do k -ésimo indivíduo da n -ésima geração.

A solução correta do problema abordado por Galton e Watson, sobre o cálculo da probabilidade de extinção q da população foi apresentada por J. F. Steffensen, por volta de 1930, que provou que a probabilidade do processo atingir o estado 0 (extinção) em algum tempo finito está diretamente relacionada com o número médio de descendentes gerados

por cada indivíduo, ou seja, depende do valor de $m = E(X_k(n))$. No caso $m = 1$, chamado processo *crítico*, ou $m < 1$, chamado processo *subcrítico*, a extinção é um evento certo, isto é $q = 1$, e no caso $m > 1$, chamado processo *supercrítico*, tem-se $q < 1$, ou seja, existe uma probabilidade estritamente positiva de que a extinção não ocorra em um número finito de gerações (veja, por exemplo, Athreya e Ney [1]).

Uma outra questão de interesse refere-se ao valor esperado do tempo de primeira visita ao estado zero, chamado de *tempo de extinção* do processo. Neste sentido, no caso subcrítico tem-se que o tempo médio de extinção é finito (veja Athreya e Schuh [2]) e no caso crítico, Seneta [13] apresentou condições necessárias e suficientes para a finitude do tempo médio de extinção.

Ao longo dos anos, várias generalizações do modelo original de Galton-Watson têm sido apresentadas e utilizadas em diferentes áreas de aplicações, tais como biologia, física, demografia, epidemiologia entre muitas outras. Um estudo detalhado sobre a teoria de processos de ramificação gerais pode ser encontrado em Harris [4] e Athreya e Ney [1].

Em particular, o processo de Galton-Watson assume como hipótese básica que a lei que rege a reprodução dos indivíduos a cada geração permanece a mesma, independentemente do tamanho da população. Porém, em muitas situações práticas, essa hipótese não pode ser considerada, uma vez que em vários fenômenos de reprodução como, por exemplo, em modelos aplicados à biologia (veja Klebaner [9], Levina [11] e Vasil'ev [14]), tais como, no estudo de formação de células de sangue ou células da medula óssea, ou ainda, no estudo da evolução de uma colônia de bactérias, a reprodução de um indivíduo depende do número de indivíduos presentes, ou do tamanho da população. Também, em reações químicas em que a distribuição de probabilidade do número de reações pode depender da quantidade de agentes reagentes presentes.

Nesse sentido, fenômenos dessa natureza podem ser modelados por processos conhecidos como *processos de ramificação dependentes do tamanho da população* (veja, por exemplo, Jagers [5] e Klebaner [9]).

Nesta dissertação, nós estudamos um tipo especial de processo de ramificação dependente do tamanho da população, apresentado por Athreya e Schuh em [2], que modela, por exemplo, situações em que a população está submetida a mecanismos de controle de natalidade, devido a escassez de recursos naturais e/ou de recursos que garantam a subsistência dos indivíduos, de tal forma que o processo apresenta um comportamento supercrítico quando o número de indivíduos que compõem uma geração é menor ou igual a um número natural K , chamado de fronteira ou limiar do processo, e assume um comportamento crítico ou subcrítico quando o número de indivíduos que compõem uma geração supera a fronteira K . Assim, esse tipo de processo $\{Z_n, n \geq 0\}$, que chamamos de *processo de ramificação regido por uma fronteira*

(ou com limiar) K , é tal que se $Z_n = i \leq K$ então cada um dos i indivíduos da n -ésima geração geram novos indivíduos de acordo com uma distribuição probabilidade $\{\pi_j, j \geq 0\}$ com média $M = \sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j > 1$ e se $Z_n = k \geq K$ os k indivíduos geram novos indivíduos de acordo com uma distribuição probabilidade $\{p_j, j \geq 0\}$ com média $m = \sum_{j=1}^{\infty} jp_j \leq 1$.

Athreya e Schuh, em [2], determinam a probabilidade de extinção desse processo e analisam o tempo médio da extinção, estabelecendo condições para que a extinção ocorra em um número médio finito de gerações.

Assim, no Capítulo 1, são apresentados conceitos e propriedades básicas do processo de ramificação de Galton-Watson, em especial o teorema sobre a probabilidade de extinção para os casos crítico, subcrítico e supercrítico, que serão úteis para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

No Capítulo 2, analisamos o tempo de extinção dos processos de Galton-Watson, apresentando os resultados obtidos em Athreya e Ney [1], Athreya e Schuh [2] e Seneta [13] que são de grande importância para a análise do tempo de extinção do processo de ramificação regido por uma fronteira K .

Finalmente, no Capítulo 3, baseados no artigo de Athreya e Schuh [2], estudamos o processo de ramificação regido por uma fronteira K , apresentando em detalhes os resultados obtidos por Athreya e Schuh relacionados ao problema de determinar a probabilidade de extinção e à análise do tempo médio de extinção desse tipo de processo.

Capítulo 1

Processos de Ramificação

O objetivo central deste capítulo é apresentar o conceito e as propriedades básicas de processos de ramificação, também conhecidos como processos de Galton-Watson, versando a respeito das probabilidades de extinção e da classificação dos estados de acordo com a propriedade de recorrência.

Também apresentamos os conceitos de extinção do processo de ramificação e analisamos as probabilidades de extinção para os casos subcrítico, crítico e supercrítico.

Assim, na Seção 1.1 apresentamos o conceito e propriedades básicas de funções geradoras de probabilidades, enquanto que na Seção 1.2 as utilizamos para calcular o valor esperado e a variância de um processo de ramificação.

Durante a Seção 1.3 são apresentados resultados a respeito da probabilidade de extinção do processo, que mostraremos que coincide com o menor ponto fixo não nulo da função geradora de probabilidades pertencente ao intervalo $[0, 1]$.

Por fim, na Seção 1.4 apresentamos o resultado que classifica todos os estados não-nulos do processo como transientes, enquanto o estado 0 difere dos demais, sendo classificado como um estado absorvente.

As referências bibliográficas utilizadas neste capítulo são: [1], [2], [3], [4], [6], [8] e [12].

1.1 Conceitos Preliminares

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares básicos que serão úteis no decorrer do trabalho.

As referências bibliográficas utilizadas nesta seção são: [1], [2], [3] e [12].

Definição 1.1. Sejam $g : \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$ e $h : \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$ funções com domínios inteiros. A *convolução* de g e h , denotada por $g * h$, é definida por

$$(g * h)(k) = \sum_j g(j)h(k - j). \quad (1.1)$$

Segue imediatamente da definição que $g * h = h * g$. Em particular, se $g = h$ denotamos $g^{*2} = g * g$ e g^{*n} a convolução de n vezes, ou seja, recursivamente $g^{*n} = \underbrace{g * \dots * g}_{n \text{ vezes}}$, chamada de convolução de n camadas de g .

A convolução é utilizada para caracterizar a soma de variáveis aleatórias discretas independentes.

De fato, se X e Y são variáveis aleatórias independentes, assumindo valores inteiros não-negativos, então da Regra da Probabilidade Total segue que

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(z) &= P(X + Y = z) \\ &= \sum_{x=0}^z p_X(x)p_Y(z - x) \\ &= (p_X * p_Y)(z), \end{aligned}$$

onde p_X , p_Y e p_{X+Y} são as funções de probabilidade de X , Y , e $X + Y$ respectivamente.

Em especial, se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias discretas, independentes e identicamente distribuídas, com função de probabilidade $P(X_1 = k) = p_k$, $k = 0, 1, \dots$, então, segue por indução sobre n que a função de probabilidade da soma $X_1 + \dots + X_n$ é a convolução de n camadas de $p = \{p_0, p_1, \dots\}$, ou seja,

$$P(X_1 + \dots + X_n = j) = p^{*n}(j), \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Uma leitura mais aprofundada sobre convoluções de funções de probabilidade pode ser encontrada em James [7].

A seguir, apresentamos a definição e algumas propriedades da função geradora de probabilidade, que é uma ferramenta importante para a análise de processos de ramificação.

Definição 1.2. (a) Seja $p = \{p_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ uma função de probabilidade discreta. Definimos a *função geradora de probabilidade* associada a p como sendo a função

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad |s| \leq 1, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

(b) Seja X uma variável aleatória (v.a.) discreta assumindo valores inteiros não-negativos com função de probabilidade $P(X = k) = p_k, k = 0, 1, 2, \dots$. A *função geradora de probabilidade* de X é definida por

$$f_X(s) = Es^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \quad |s| \leq 1, s \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

ou seja, é a função geradora de probabilidade associada à função de probabilidade de X .

A limitação $|s| \leq 1$ na Definição 1.2 nos garante a convergência de tal série, uma vez que para $s = 1$ temos que $f(1) = 1$.

Proposição 1.1. (Propriedades da Função Geradora de Probabilidade)

(P1) Seja X uma v.a. assumindo valores inteiros não-negativos com função de probabilidade $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$. Então

(a) $f_X(0) = p_0$ e $\frac{d^k f_X}{ds^k}(0) = k! p_k, k = 0, 1, \dots$, em que $\frac{d^k f_X}{ds^k}(s_0)$ denota a k -ésima derivada de f_X calculada em $s = s_0$. Assim, f_X "gera" a função de probabilidade de X .

(b) $EX = \frac{df_X}{ds}(1)$ e $EX^2 = \frac{d^2 f_X}{ds^2}(1) + \frac{df_X}{ds}(1)$ desde que EX e EX^2 sejam finitos.

De maneira geral, se X tem momentos finitos, eles podem ser obtidos a partir das derivadas de f_X em $s = 1$.

(P2) (a) Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, independentes e assumindo valores inteiros não-negativos então

$$f_{X+Y}(s) = f_X(s)f_Y(s).$$

(b) Se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias assumindo valores inteiros não-negativos, independentes e identicamente distribuídas com função geradora de probabilidade $f(s)$, então a função geradora de probabilidade de $S_n = X_1 + \dots + X_n$ é dada por

$$f_{S_n}(s) = [f(s)]^n. \quad (1.5)$$

Além disso, segue da Definição 1.1 que: se $p = \{p_k, k = 0, 1, \dots\}$ é uma função de probabilidade concentrada sobre os inteiros não-negativos e $f(s)$ é sua respectiva função geradora de probabilidades, então a função geradora de probabilidades associada à p^{*n} , a convolução de n camadas de p , é a função $[f(s)]^n$.

Demonstração. (P1)(a) Segue diretamente da Definição 1.2 que $f_X(s)$ tem uma expansão em série de potências em $s_0 = 0$, com raio de convergência $R = 1$, e como consequência do Teorema da Derivação termo a termo (veja, por exemplo, em Lima [12]) segue que f_X é infinitamente derivável para $|s| < 1$ e

$$\frac{d^k f_X}{ds^k}(0) = k! p_k.$$

(b) Primeiramente, se EX é finita, então a série $\sum_{k=0}^{\infty} k p_k s^{k-1}$ converge para $|s| \leq 1$. Logo, como $f_X(1) = 1$, segue do Teorema da Derivação termo a termo que

$$f'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = EX.$$

Da mesma forma, se EX^2 é finito, então $E[X(X-1)]$ é finita e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{ds} (k p_k s^{k-1})$$

converge. Logo, como $f'_X(1) = EX < +\infty$, pelo Teorema da Derivação termo a termo segue que

$$f''_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p_k = E[X(X-1)] = EX^2 - EX.$$

Portanto, $EX^2 = f''_X(1) + EX = f''_X(1) + f'_X(1)$.

(P2)(a) Se X e Y são v.a.'s a valores inteiros não-negativos e independentes, então por (1.4) segue que

$$f_{X+Y}(s) = E s^{X+Y} = E s^X E s^Y = f_X(s) f_Y(s).$$

(b) Temos que (1.5) segue de **(a)** por indução sobre n . Além disso, se p é uma função de probabilidade sobre os inteiros não-negativos então existem (pelo Teorema da Existência de Kolmogorov) n v.a.'s independentes e identicamente distribuídas, X_1, X_2, \dots, X_n , com função de probabilidade p tais que p^{*n} , $n \geq 1$, é a função de probabilidade da variável aleatória $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Logo, por (1.5) temos que a função geradora de probabilidade associada à convolução p^{*n} é $f_{S_n}(s) = [f(s)]^n$.

□

Finalizamos esta seção, apresentando um resultado de processos estocásticos conhecido como Identidade de Wald e que será utilizada na demonstração do Teorema 3.1 no Capítulo 3. A demonstração apresentada a seguir foi extraída de [3].

Lema 1.1 (Identidade de Wald). Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com esperança finita. Para $k \geq 1$, seja \mathcal{F}_k a σ -álgebra de Borel gerada por $\{X_j, 1 \leq j \leq k\}$. Suponha que τ seja uma variável aleatória tomando valores inteiros positivos tal que

$$\forall k \geq 1 : \{\tau \leq k\} \in \mathcal{F}_k,$$

(ou seja, τ é um tempo de parada) e $E(\tau) < \infty$. Então, temos que

$$E(S_\tau) = E(X_1)E(\tau),$$

onde $S_\tau = X_1 + \dots + X_\tau$.

Demonstração. Uma vez que $S_0 = 0$, como $\tau < +\infty$, podemos utilizar a partição $\{\tau = k\}_{k \geq 1}$ de Ω , para obter

$$\begin{aligned} E(S_\tau) &= \int_{\Omega} S_\tau dP = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{\tau=k\}} S_k dP \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \int_{\{\tau=k\}} X_j dP \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \int_{\{\tau=k\}} X_j dP \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{\tau \geq j\}} X_j dP. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$E(S_\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ E(X_j) - E(X_j I_{\{\tau \leq j-1\}}) \right\}. \quad (1.6)$$

Porém, o evento $\{\tau \leq j-1\}$ e as variáveis aleatórias X_j são independentes, uma vez que o evento está contido na σ -álgebra gerada por X_1, \dots, X_{j-1} . Logo, $E(X_j I_{\{\tau \leq j-1\}}) = E(X_j)P(\tau \leq j-1)$, e de (1.6) segue que

$$E(S_\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} E(X_j)P(\tau \geq j) = E(X_1) \sum_{j=1}^{\infty} P(\tau \geq j) = E(X_1)E(\tau).$$

□

1.2 Processos de Galton Watson

Os processos de ramificação são uma família de Cadeias de Markov utilizadas na modelagem matemática do desenvolvimentos de populações, como, por exemplo, bactérias reproduzindo-se por meios biológicos, populações contaminadas por um determinado vírus ou nêutrons em uma reação em cadeia.

O modelo mais simples e que deu origem ao desenvolvimento da teoria de processos de ramificação surgiu em meados de 1874 com Galton e Watson, ao estudarem o problema de extinção do sobrenome de famílias tradicionais que havia sido observado por Thomas Malthus na cidade de Berna, por volta do século XIX (veja Jagers [6]).

Nesse sentido, considere uma população formada por indivíduos aptos a gerar outros indivíduos do mesmo tipo. Suponha que cada indivíduo, até o final de sua existência, gere k descendentes com uma determinada probabilidade p_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, independentemente do número de descendentes gerado por qualquer outro indivíduo.

O conjunto inicial de indivíduos é chamado de *geração inicial* e o tamanho da geração inicial é representado pela variável aleatória Z_0 . Os Z_1 descendentes da geração inicial formam a *primeira geração*, que produz descendentes de forma independente uns dos outros e da geração inicial, formando os Z_2 indivíduos da *segunda geração*. E assim por diante Z_n denota o tamanho da n -ésima geração. O processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ é conhecido por *processo de Galton-Watson*.

Denotando o número de descendentes do k -ésimo indivíduo da $(n - 1)$ -ésima geração por $X_k(n)$, então o processo de Galton-Watson pode ser descrito matematicamente por

$$Z_n = \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_k(n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

onde $X_k(n)$, $k, n = 1, 2, \dots$ são variáveis aleatórias i.i.d., assumindo valores inteiros não-negativos e são independentes de Z_{n-1} .

Como o número de descendentes de cada indivíduo de qualquer uma das gerações tem a mesma distribuição de probabilidade $\{p_j, j = 0, 1, \dots\}$, então para simplificar a notação podemos identificar $X_k = X_k(n)$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$, e (1.7) torna-se

$$Z_n = \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Das hipóteses iniciais, como para cada $n \geq 1$ as variáveis aleatórias $X_k(n)$, $k = 1, 2, \dots$, são independentes de Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1} , temos

$$\begin{aligned} P(Z_n = j | Z_0 = i_0, \dots, Z_{n-1} = i) &= P\left(\sum_{k=1}^i X_k(n) = j | Z_0 = i_0, \dots, Z_{n-1} = i\right) \\ &= P\left(\sum_{k=1}^i X_k(n) = j\right) = P(Z_n = j | Z_{n-1} = i). \end{aligned}$$

Assim, o processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ é uma cadeia de Markov com probabilidades de transição dadas por

$$P_{ij} = P(Z_n = j | Z_{n-1} = i) = P\left(\sum_{k=1}^i X_k = j\right),$$

Assim, podemos definir o processo de ramificação de Galton-Watson da seguinte forma:

Definição 1.3. Sejam X_n , $n \geq 1$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) assumindo valores em $S = \{0, 1, \dots\}$ e com distribuição de probabilidade $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$. Uma Cadeia de Markov homogênea $\{Z_n, n \geq 0\}$ é chamada *Processo de Ramificação* (ou processo de Galton-Watson) com espaço de estados S se as suas probabilidades de transição são dadas por

$$P_{ij} = P(Z_n = j | Z_{n-1} = i) = P\left(\sum_{k=1}^i X_k = j\right) \quad (1.9)$$

para todo $i \geq 1$, $j \geq 0$ e $P(0,0) = 1$. Neste caso, $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$ é chamada distribuição de descendência.

Por (1.9) podemos observar que as probabilidades de transição de um processo de ramificação são descritas como a distribuição da soma de variáveis aleatórias i.i.d. assumindo valores inteiros não-negativos, com distribuição $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$.

Agora, por (1.2), temos que a função de probabilidade da soma $\sum_{k=1}^i X_k$ é a i -ésima convolução de $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$.

Assim, de (1.9), segue que

$$P_{ij} = p_j^{*i} \text{ para } i \geq 1 \text{ e } j \geq 1.$$

Dessa forma, temos a seguinte definição alternativa de processo de ramificação que é equivalente à Definição 1.3.

Definição 1.4 (Processo de Ramificação). Um *processo de ramificação* é uma cadeia de Markov homogênea $\{Z_n : n = 0, 1, \dots\}$, com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ com probabilidades de transição dadas por

$$P_{ij} = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} p_j^{*i}, & \text{se } i \geq 1, j \geq 0 \\ \delta_{0j}, & \text{se } i = 0, j \geq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

onde δ_{ij} é a função *Delta de Kronecker* e $\{p_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$ é uma função de probabilidade sobre S (ou seja, $p_k \geq 0, \forall k \geq 0$, e $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$), chamada distribuição de descendência de $\{p_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$.

Por outro lado, como $\{X_k : k = 1, 2, \dots\}$ e $\{Z_n : n = 0, 1, \dots\}$ assumem valores inteiros não-negativos, suas distribuições de probabilidade podem ser também caracterizadas pelas suas respectivas funções geradoras de probabilidades.

Dessa forma, na próxima proposição, utilizando as propriedades de função geradora de probabilidades descritas na seção anterior, obtemos as probabilidades de transição P_{ij} do processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ a partir da função geradora de probabilidades $f(s)$ associada à distribuição de descendência $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$.

Proposição 1.2. Seja $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ um processo de ramificação com distribuição de descendência $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$ e respectiva função geradora de probabilidades $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, $|s| \leq 1$. Então, para cada $i \geq 1$, temos

$$P_{i0} = [f(0)]^i = (p_0)^i \text{ e para } j \geq 1, P_{ij} = \left. \frac{d^j}{ds^j} [f(s)]^i \right|_{s=0} \quad (1.11)$$

Demonstração. Por (1.9), para cada $i \geq 1$, temos que a função geradora de probabilidades associada à distribuição $\{P_{ij}, j = 0, 1, \dots\}$ pode ser descrita por

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} s^j = \sum_{j \in S} P\left(\sum_{k=1}^i X_k = j\right) s^j, \quad |s| \leq 1, \quad (1.12)$$

em que X_1, X_2, \dots são as v.a.'s i.i.d. com função geradora de probabilidade $f(s)$. Então, por **(P2)** da Proposição 1.1, segue que a função geradora de probabilidades da soma $\sum_{k=1}^i X_k$ é $[f(s)]^i$.

Logo, de (1.12), segue que, para cada $i \geq 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} s^j = [f(s)]^i, \quad |s| \leq 1. \quad (1.13)$$

Portanto, por **(P1)** da Proposição 1.1, obtemos (1.11). □

Podemos obter as principais propriedades do processo de ramificação $\{Z_n : n = 0, 1, \dots\}$ a partir da função geradora de probabilidade de Z_n .

Por simplicidade, vamos assumir daqui até o final deste capítulo que $Z_0 = 1$, ou seja, com probabilidade 1 a geração inicial é formada por um único indivíduo. O caso geral, quando $Z_0 \neq 1$, pode ser facilmente derivado do caso em que $Z_0 = 1$, pois os indivíduos da geração inicial reproduzem-se independentemente uns dos outros.

De fato, se $\{Z_n, n \geq 0\}$ é um processo de ramificação tal que $Z_0 = n > 1$, então podemos decompor o processo como a soma de n processos de ramificação **independentes** $(\zeta_{m_1}, \zeta_{m_2}, \dots, \zeta_{m_n})$ tais que $\zeta_{0_i} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, ou seja, que cada processo $\{\zeta_{m_i}, m = 0, 1, \dots\}$, $1 \leq i \leq n$ se origina de um único indivíduo. Ou seja, a geração inicial Z_0 pode ser escrita como $Z_0 = \zeta_{0_1} + \zeta_{0_2} + \dots + \zeta_{0_n} = n$ e o mesmo ocorre com as demais gerações:

$$Z_k = \xi_{k_1} + \xi_{k_2} + \dots + \xi_{k_n}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

Na próxima proposição obtemos a função geradora de Z_n a partir da função geradora de descendentes e calculamos a esperança e a variância de Z_n em termos da esperança e variância do número de descendentes.

Proposição 1.3. Seja $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ um processo de ramificação tal que $Z_0 = 1$, com distribuição de descendentes $\{p_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ e respectiva função geradora de descendentes $f(s)$. Então,

(a) a função geradora de probabilidades de Z_n é dada por

$$\forall n \geq 0, f_{Z_n}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k) s^k = f_n(s), \quad |s| \leq 1, \quad (1.15)$$

onde $f_n(s)$ é a n -ésima iteração de $f(s)$, ou seja, $f_0(s) = s$ e $f_n(s) = f(f_{n-1}(s))$, $\forall n \geq 1$.

(b) se $m = EZ_1 < +\infty$ e $\sigma^2 = \text{var } Z_1 < +\infty$, temos

$$EZ_n = m^n \quad (1.16)$$

e

$$\text{var } Z_n = \begin{cases} \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}, & \text{se } m \neq 1 \\ n\sigma^2, & \text{se } m = 1 \end{cases} \quad (1.17)$$

Demonstração. (a) Como $P(Z_0 = 1) = 1$, temos

$$f_{Z_0}(s) = \sum_{k=0}^1 P(Z_0 = k)s^k = s$$

e por (1.9) segue

$$\begin{aligned} f_{Z_1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k | Z_0 = 1) s^k, \quad |s| \leq 1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad |s| \leq 1 \\ &= f(s). \end{aligned}$$

Agora, para $n \geq 1$, por (1.9)

$$\begin{aligned} f_{Z_{n+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = k | Z_n = i) P(Z_n = i) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{i=0}^{\infty} P_{ik} P(Z_n = i) \end{aligned}$$

Mas, por (1.13), $\sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} s^k = [f(s)]^i, \forall i \geq 0$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} f_{Z_{n+1}}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(Z_n = i) [f(s)]^i \\ &= f_{Z_n}(f(s)). \end{aligned}$$

Logo, como $f_{Z_0}(s) = s$ e $f_{Z_1}(s) = f(s)$, podemos obter por indução sobre n que

$$f_{Z_n}(s) = f_n(s), \quad \forall n \geq 1,$$

onde f_n é a n -ésima iteração de f .

(b) Pela Proposição 1.1, temos que

$$EZ_n = \frac{df_{Z_n}}{ds}(1) \text{ e } EZ_n^2 = \frac{d^2 f_{Z_n}}{ds^2}(1) + \frac{df_{Z_n}}{ds}(1) \quad (1.18)$$

e por (a), $f_{Z_n}(s) = f_n(s)$.

Para $n = 1$, temos que $EZ_1 = f'(1)$ e $EZ_1^2 = f''(1) + f'(1)$.

Provaremos, primeiramente, que $EZ_n = m^n$ para todo $n \geq 1$, onde $m = EZ_1$, ou seja, $\frac{df_{Z_n}}{ds}(1) = [f'(1)]^n$.

Para isso, basta observar que

$$\begin{aligned} f'_{Z_{n+1}}(s) &= \frac{d}{ds} f_{Z_{n+1}}(s) = \frac{d}{ds} [f_n(f(s))] \\ &= f'_n(f(s)) f'(s) \end{aligned} \quad (1.19)$$

e como $f(1) = 1$ e $f'(1) = EX_1 = EZ_1$ (pois $Z_0 = 1$), segue por indução sobre n que

$$EZ_n = [f'(1)]^n = m^n, \quad \forall n \geq 1$$

e (1.16) está provado.

Para provar (1.17), resta calcular $\frac{d^2 f_{Z_n}}{ds^2}(1)$. Seguindo o mesmo raciocínio anterior, derivando (1.19) obtemos

$$f''_{Z_{n+1}}(s) = f''_n(f(s)) [f'(s)]^2 + f'_n(f(s)) f''(s)$$

e calculando em $s = 1$, como $f(1) = 1$, $f'(1) = EZ_1 = m$ e $f''(1) = EZ_1^2 - EZ_1 = \text{var}(Z_1) + (EZ_1)^2 - EZ_1 = \sigma^2 + m^2 - m$, segue que

$$\begin{aligned} f''_{Z_{n+1}}(1) &= f''_n(1) [f'(1)]^2 + f'_n(1) f''(1) \\ &= f''_n(1) m^2 + f'_n(1) [\sigma^2 + m^2 - m]. \end{aligned}$$

Mas, provamos que $f'_n(1) = [f'(1)]^n = m^n$, então

$$f''_{n+1}(1) = f''_{Z_{n+1}}(1) = f''_n(1) m^2 + m^n [\sigma^2 + m^2 - m].$$

Assim, por indução sobre n , como $f''(1) = \sigma^2 + m^2 - m$ e $f_0''(1) = 0$ (pois $f_0(s) = s$) segue que

$$f_n''(1) = (\sigma^2 - m^2 - m) \sum_{k=n-1}^{2n-2} m^k + m^n.$$

Logo, como $EZ_n = m^n$, temos

$$\begin{aligned} \text{var}(Z_n) &= (\sigma^2 + m^2 - m) \sum_{k=n-1}^{2n-2} m^k + m^n - m^{2n} \\ &= \sigma^2 \sum_{k=n-1}^{2n-2} m^k + \sum_{k=n-1}^{2n-2} m^{k+2} - \sum_{k=n-1}^{2n-2} m^{k+1} + m^n - m^{2n} \\ &= \sigma^2 \sum_{k=n-1}^{2n-2} m^k + \sum_{j=n+1}^{2n} m^j - \sum_{j=n}^{2n-1} m^j + m^n - m^{2n} \\ &= \sigma^2 \sum_{k=n-1}^{2n-2} m^k. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{var } Z_n = \begin{cases} \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}, & \text{se } m \neq 1 \\ n\sigma^2, & \text{se } m = 1 \end{cases}$$

□

Observe que (1.17) nos mostra que a $\text{var } Z_n$ cresce linearmente para $m = 1$, cresce geometricamente para $m > 1$ e decresce geometricamente para $m < 1$, em que $m = EZ_1 = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} kP_{1k}$ (com $Z_0 = 1$) é chamada *média de nascimento* do processo $\{Z_n; n \geq 0\}$.

Definição 1.5. Seja $(Z_n)_{n \geq 0}$ um processo de ramificação com média de nascimentos $m \equiv \sum_{k=0}^{\infty} kP_{1k}$. Dizemos que o processo é

- (i) *Subcrítico* quando $m < 1$;
- (ii) *Crítico* quando $m = 1$;
- (iii) *Supercrítico* quando $m > 1$.

Observação 1.1. (a) Um interessante fato presente em Williams [15] associa os diferentes tipos de processos descritos na Definição 1.5 com a teoria de processos de *martingales*. Pela Definição 1.3, temos que o processo de ramificação $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ é uma cadeia de Markov. Logo, segue das propriedades de esperança condicional que

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1}|Z_0, Z_1, \dots, Z_n) &= E(Z_{n+1}|Z_n) \quad q.c. \\ &= Z_n E(X_1|Z_n) \quad q.c. \end{aligned}$$

Como X_1 é independente de Z_n e assumimos que $Z_0 = 1$, obtemos que

$$E(Z_{n+1}|Z_0, \dots, Z_n) = E(Z_{n+1}|Z_n) = Z_n m \quad q.c. \quad (1.20)$$

Assim, por (1.20), baseados no valor de m , podemos concluir, de acordo com a Definição 1.5 que

$$\{Z_n, n = 0, 1, \dots\} \text{ é } \begin{cases} \text{uma submartingale, se } m \geq 1 \\ \text{uma martingale, se } m = 1 \\ \text{uma supermartingale, se } m \leq 1. \end{cases}$$

Note que se considerarmos o processo

$$M_n := \frac{Z_n}{m^n}, \quad n \geq 0,$$

então temos

$$E(M_{n+1}|Z_0, \dots, Z_n) = M_n \quad q.c.,$$

ou seja, $\{M_n, n = 0, 1, \dots\}$ é uma *martingale* relativa ao processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$.

(b) Usando as propriedades de esperança condicional, segue de (1.20) que

$$\begin{aligned} EZ_n &= E(E(Z_n|Z_{n-1})) = E(Z_{n-1}m) \\ &= mE(Z_{n-1}). \end{aligned}$$

Logo, por indução sobre n temos

$$EZ_n = m^n.$$

Assim, obtemos uma prova alternativa para (1.16) da Proposição 1.3. De maneira análoga, podemos obter uma prova alternativa para a expressão (1.17) da *var* Z_n .

◇

1.3 Probabilidades de Extinção

Segundo Harris [4], o problema da extinção de sobrenome de uma família, que deu origem ao modelo mais simples de processos de ramificação, foi apresentado por Galton por volta de 1873, da seguinte forma: "sejam p_0, p_1, p_2, \dots as respectivas probabilidades de um homem ter $0, 1, 2, \dots$ filhos e suponha que cada filho tenha as mesmas probabilidades de gerar seus próprios filhos, independentemente uns dos outros. Qual seria a probabilidade de descendentes do sexo masculino desaparecerem depois de r gerações e, de maneira geral, qual a probabilidade do número de descendentes do sexo masculino em uma determinada geração?".

Nesta seção, vamos apresentar a solução do problema proposto por Galton e que foi reescrito por R. F. Watson, em 1874, por meio de iterações de funções geradoras de probabilidades e serviu como base para a maioria dos estudos subsequentes. A primeira solução correta para a determinação de probabilidades de extinção para o processo de Galton-Watson foi apresentada por J. F. Steffensen, por volta de 1930.

Para isso, consideramos o processo de ramificação $\{Z_n, n \geq 0\}$ de acordo com a Definição 1.3, cuja geração inicial é formada por um único indivíduo. Ou seja,

$$Z_0 = 1 \text{ e } Z_n = \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_k, \quad n \geq 1,$$

em que X_1, X_2, \dots são v.a.'s i.i.d. com função de probabilidade $\{p_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ e função geradora de probabilidade $f(s)$.

Neste contexto, X_k representa o número de descendentes do k -ésimo indivíduo do sexo masculino em cada uma das gerações da família e Z_n é o número de indivíduos do sexo masculino da n -ésima geração de descendentes.

Claramente, quando o processo atinge o estado 0 em algum tempo n , ou seja, quando $Z_n = 0$, então $Z_{n+k} = 0$ para todo $k > 0$. Assim, o estado 0 é chamado *absorvente* do processo e dizemos que a *extinção do processo* ocorre quando o estado 0 é atingido.

Assim, se denotarmos o evento

$$Q = \{Z_n = 0, \text{ para algum } n \geq 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}, \quad (1.21)$$

chamado *extinção* do processo, então estamos interessados em determinar a *probabilidade de extinção*

$$P(Q) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right).$$

Note que, como $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$, $\forall n \geq 1$, segue da Propriedade de Continuidade da Probabilidade que

$$P(Q) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0). \quad (1.22)$$

Segundo o tratamento proposto por Watson, usando a função geradora de probabilidades, pela Proposição 1.3 segue que

$$P(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0), \quad (1.23)$$

onde $f_n(s)$, a n -ésima iteração de $f(s)$, é a função geradora de probabilidades de Z_n , $n \geq 1$.

Observe que como

- $f_{n+1}(0) = f(f_n(0))$,
- $f(s)$ é uma função estritamente crescente,
- $f_0(0) = 0$ e
- $f_1(0) = f(0) = p_0$,

se assumirmos que $p_0 > 0$, então $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) \leq 1$, com $\{f_n(0), n \geq 0\}$ uma sequência crescente. Assim, por (1.23) se $p_0 = f(0) > 0$ temos

$$0 < P(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) \leq 1. \quad (1.24)$$

Mais ainda, como $f(s)$ é contínua em $0 \leq s \leq 1$, podemos concluir que

$$P(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f_{n-1}(0)) = f(P(Q)). \quad (1.25)$$

Assim, o problema de determinar a probabilidade de extinção $P(Q)$ consiste em determinar um ponto fixo da função geradora de probabilidade $f(s)$.

Observe que $s_0 = 1$ é um ponto fixo de $f(s)$, pois $f(1) = 1$. Resta saber se existe algum ponto fixo no intervalo $[0, 1)$. Para evitar trivialidades vamos assumir que $0 < p_0, p_1 < 1$.

A proposição a seguir estabelece que para os processos de ramificação críticos ou sub-críticos não existe nenhum ponto fixo em $[0, 1)$ e para os processos supercríticos existe um único ponto fixo de $f(s)$ no intervalo $[0, 1)$.

Proposição 1.4. Seja $f(s)$ a função geradora de probabilidade com respeito à distribuição de descendência $\{p_k\}$ de um processo de ramificação $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ com um único indivíduo inicial,

ou seja, $Z_0 = 1$, e seja $m = f'(1) = EZ_1$. Suponha que $p_0 + p_1 < 1$. Se $m \leq 1$, então a equação

$$f(s) = s \quad (1.26)$$

não possui raízes em $[0, 1)$. Se $m > 1$, então a equação (1.26) possui uma única raiz em $[0, 1)$.

Demonstração. Pela (P1) da Proposição 1.1, temos que $f(0) = p_0$ e já vimos que $f(1) = 1$, pois $\{p_k\}$ é uma função de probabilidade. Como por hipótese $p_0 + p_1 < 1$, então $0 < p_0, p_1 < 1$.

Caso 1: $m \leq 1$. Suponha primeiramente que $m < 1$. Então $f'(1) = m < 1$. Como $f'(0) = p_1 < 1$ e $f'(s)$ é não-decrescente em $[0, 1)$, pois $f''(0) \geq 0$ já que é uma série de termos não-negativos, então segue que $f(s) < 1$ para $s \in [0, 1)$.

Supondo agora que $m = 1$, como $p_1 < 1$ e

$$1 = m = f'(1) = p_1 + \sum_{k=2}^{\infty} kp_k,$$

então temos que $p_k > 0$ para algum $k \leq 2$.

Então, $f'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k s^{k-1}$ é crescente em $[0, 1)$, pois sua derivada neste intervalo será estritamente positiva. Assim, como $f'(1) = 1$, concluímos novamente que $f'(s) < 1$ em $[0, 1)$.

Logo, se $m \leq 1$, temos $f'(s) < 1$ em $[0, 1)$. Assim, segue que

$$\frac{d}{ds}(f(s) - s) = f'(s) - 1 < 0, \quad \forall s \in [0, 1),$$

e, conseqüentemente, a função $f(s) - s$ é decrescente em $[0, 1)$. Assim, como $f(1) - 1 = 0$, concluímos que $f(s) - s > 0$ para todo $s \in [0, 1)$, e, portanto, $f(s) = s$ não possui raízes neste intervalo.

Caso 1: $m > 1$. Supondo $m = f'(1) > 1$, pela continuidade de $f'(s)$, existe $s_0 \in (0, 1)$ tal que $f'(s) > 1$ para todo $s_0 < s < 1$. E pelo Teorema do Valor Médio temos

$$\frac{f(1) - f(s_0)}{1 - s_0} > 1.$$

Como $f(1) = 1$, segue que $f(s_0) - s_0 < 0$. Agora, $f(s) - s$ é contínua em s e positiva em $s = 0$, pois $f(0) = p_0 > 0$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, deve haver uma raiz em $[0, s_0)$.

Resta mostrarmos que tal raiz é única. Suponha, por absurdo, que existam duas raízes q_1 e q_2 de $f(s) - s$ em $[0, s_0)$. Logo, pelo Teorema de Rolle, como existem três raízes em

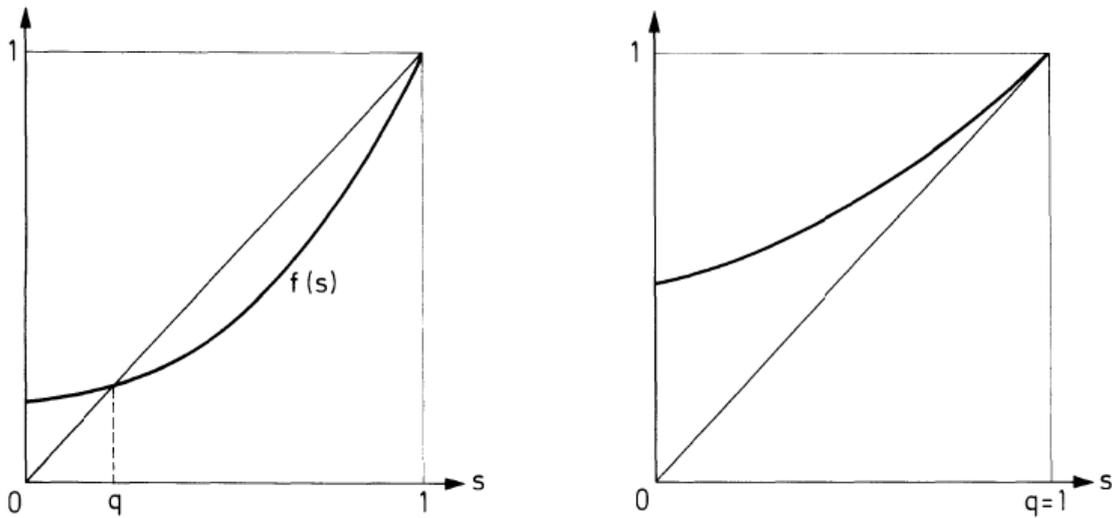


Figura 1.1 Representações gráficas encontradas em [1] sobre $f(s)$ quando $m > 1$ e $m \leq 1$, respectivamente.

$[0, 1]$, pois $s = 1$ também é raiz, então $f'(s)$ tem ao menos duas raízes em $(0, 1)$. Aplicando novamente o Teorema de Rolle, temos que a segunda derivada $f''(s)$ possui ao menos uma raiz em $(0, 1)$.

Mas como $f'(1) > 1$, já vimos que existe algum $k \geq 2$ tal que $p_k > 0$, então segue que

$$f''(s) = 2p_2 + \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2}$$

não tem como possuir raiz em $(0, 1)$, o que é uma contradição. Logo, $f(s) - s$ possui uma única raiz em $[0, 1)$.

□

Observe que pela Proposição 1.4, graficamente nos encontramos em uma das duas situações propostas na Figura 1.1, onde q é a menor raiz positiva da equação $f(s) = s$.

Assim, quando um processo de ramificação que se origina de um único indivíduo na sua geração inicial é subcrítico ou crítico, a equação $f(s) = s$ não possui raízes entre $[0, 1)$, tendo a sua menor raiz positiva $q = 1$, ou seja, possui como certa a sua extinção, uma vez que $P(Q) = f(P(Q)) = 1$. Por outro lado, quando o mesmo processo é supercrítico, temos apenas duas raízes positivas: $s_0 = 1$ e $q \in (0, 1)$, sendo q a menor raiz positiva no intervalo $[0, 1]$.

Na próxima proposição estabelecemos a relação entre q e o $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s)$.

Proposição 1.5. Sob as mesmas hipóteses da Proposição 1.4, se q é a menor raiz não-negativa da equação $f(s) = s$, temos:

- (a) se $s \in [0, q)$, então $f_n(s) \uparrow q$
- (b) se $s \in (q, 1)$, então $f_n(s) \downarrow q$
- (c) se $s = q$, então $f_n(q) = q, \forall n \geq 1$.

Onde os símbolos (\uparrow) e (\downarrow) significam que as convergências são monótonas crescente e decrescente, respetivamente.

Demonstração.

- (a) Para todo $s \in [0, q)$, por hipótese temos que $f(s) - s > 0$. Como f é estritamente crescente e convexa em $[0, 1]$, pois $f'(s) > 0$ e $f''(s) > 0$ para $0 < p_0 + p_1 < 1$ e como $f_0(s) = s, f_1(s) = f(s)$ e $f_n(s) = f(f_{n-1}(s)), \forall n \geq 1$, segue que a sequência $\{f_n(s)\}$ é monótona crescente e, para todo $0 \leq s < q, f(s) < f(q) = q$ e $f_n(s) < f_n(q) = q$ para todo $n \geq 1$. Ou seja, para $0 \leq s < q$

$$s < f(s) < f_2(s) < \dots < f_n(s) < f_n(q) = q$$

para todo $n \geq 1$. Logo, a sequência $\{f_n(s)\}$ é monótona crescente e limitada superiormente por q e, conseqüentemente, existe $L \leq q$ tal que $f_n(s) \uparrow L$. Como f é contínua em $[0, 1]$, podemos concluir que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s)) = f(L).$$

Ou seja, L é uma raiz da equação $f(s) = s$. Mas como q é a menor raiz não-negativa desta equação, segue que $L = q$. Portanto, $f_n(s) \uparrow q$.

- (b) Para $s \in (q, 1)$ podemos proceder de forma similar à (a), seguindo do fato de que neste intervalo temos que $f(s) - s < 0$, para concluir que existe $L \geq q$ tal que $1 > f_n(s) \downarrow L$ e $L = f(L)$. Mas, pela Proposição 1.4 a única raiz da equação $f(s) = s$ no intervalo $[0, 1)$ é q . Portanto, $f_n(s) \downarrow q$.

- (c) Para $s = q$ como $f(q) = q$ e $f_0(s) = s$, segue diretamente que $f_n(q) = q, \forall n \geq 1$.

□

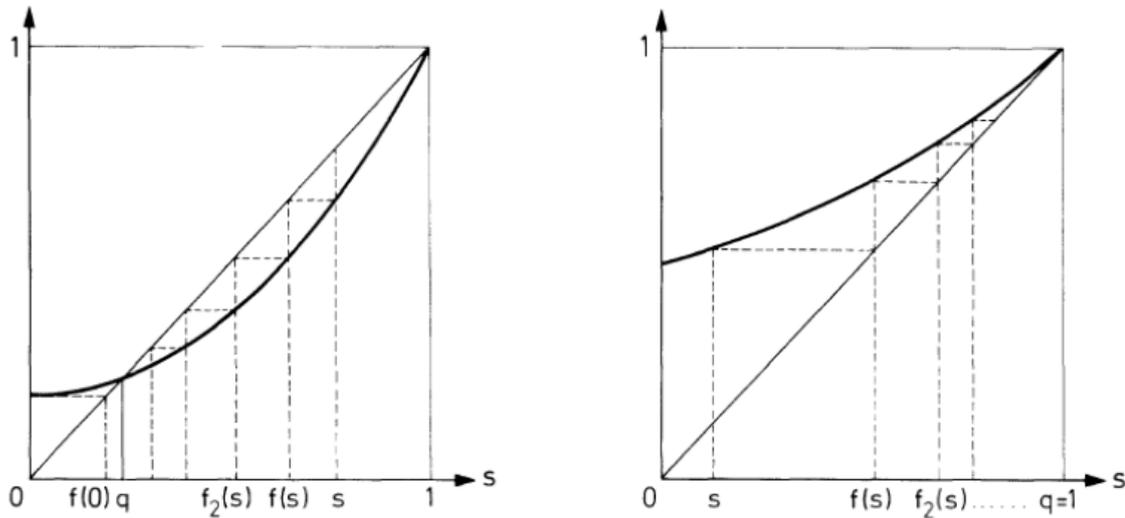


Figura 1.2 Representações gráficas em [1] sobre a convergência quando $m > 1$ e $m \leq 1$, respectivamente.

Graficamente, a convergência descrita na Proposição 1.5 está exibida na Figura 1.2

Finalmente, como consequência das proposições anteriores, demonstramos no teorema a seguir o resultado de Steffensen-Watson, que estabelece que os processos de ramificação críticos ou subcríticos têm probabilidade de extinção igual a 1 e para os processos supercríticos a probabilidade de extinção é estritamente menor que 1 e é a menor raiz positiva da equação $f(s) = s$.

Teorema 1.1. Seja $\{Z_n, n \geq 0\}$ um processo de ramificação com distribuição de descendentes $\{p_k, k \geq 0\}$ cuja função geradora de probabilidades é $f(s)$ e tal que $Z_0 = 1$. Suponha que $p_0 + p_1 < 1$, seja $m = EZ_1$ e considere a probabilidade de extinção $P(Q)$ definida em (1.22).

- (a) se $m \leq 1$ então $P(Q) = 1$.
- (b) se $m > 1$ então $P(Q)$ é a menor raiz não-negativa da equação $f(s) = s$ em $[0, 1)$ e necessariamente $P(Q) < 1$.

Demonstração. Por (1.25) temos que $P(Q)$ é uma raiz possível da equação $f(s) = s$, $0 \leq s \leq 1$. Note que, como $p_0 > 0$ por (1.23) e (1.24), $0 < P(Q) \leq 1$.

(a) Se $m \leq 1$, então pela Proposição 1.4 temos que a equação $f(s) = s$ não possui raízes no intervalo $[0, 1)$. Logo, a única raiz possível em $[0, 1]$ é $s_0 = 1$.

Assim, neste caso, $P(Q) = 1$.

(b) Se $m > 1$, então pela Proposição 1.4, a equação $f(s) = s$ possui uma única raiz q em $[0, 1)$ e, como $p_0 > 0$, temos $q > 0$. Assim, q é a menor raiz não-negativa em $(0, 1]$ e, neste caso, podemos ter $P(Q) = q$ ou $P(Q) = 1$.

Agora, por (1.24) vimos que $P(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)$, com $f_n(s)$ a n -ésima iteração de $f(s)$. Por outro lado, pela Proposição 1.5(a) temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = q$.

Portanto, $P(Q) = q$.

□

Observação 1.2. Observe que no caso geral em que $Z_0 = i$, $i \geq 1$, usando a decomposição em (1.14), obtemos

$$\begin{aligned} P(Z_n \rightarrow 0 | Z_0 = i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0 | Z_0 = i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n^{(1)} + \dots + \xi_n^{(i)} = 0 | \xi_0^{(k)} = 1, k = 1, \dots, i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n^{(1)} = 0, \dots, \xi_n^{(i)} = 0 | \xi_0^{(k)} = 1, k = 1, \dots, i) \end{aligned}$$

e como os processos $\{\xi_n^{(k)}\}$ são processos de ramificação independentes com $\xi_0^{(k)} = 1$, $k = 1, \dots, i$ todos com a mesma distribuição de descendentes, segue que

$$P(Z_n \rightarrow 0 | Z_0 = i) = \lim_{n \rightarrow \infty} [P(\xi_n^{(k)} = 0)]^i = q^i,$$

em que $q = P(\text{extinção de } \xi_n^{(k)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n^{(k)} = 0)$, ou seja é a menor raiz positiva da equação $f(q) = q$.

Além disso, para $i \geq 1$, temos

$$E(Z_1 | Z_0 = i) = im, \text{ onde } m = E\xi_1^{(k)}, k = 1, 2, \dots, i,$$

e

$$\begin{aligned} E(Z_1) &= \sum_{i \geq 1} E(Z_1 | Z_0 = i) P(Z_0 = i) \\ &= mE(Z_0). \end{aligned}$$

Assim, se $P(Z_0 = i) = 1$, segue que o processo $\{Z_n : n = 0, 1, \dots\}$ é crítico, subcrítico ou supercrítico se, e somente se, os processos $\{\xi_n^{(k)} : n = 1, \dots, i\}$ são críticos, subcríticos ou supercríticos, respectivamente.

◇

1.4 Transiência e Recorrência

Conforme a Definição 1.3, um processo de Galton-Watson $\{Z_n, n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov com espaços de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, com probabilidades de transição

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j = 0 \\ P\left(\sum_{k=1}^i X_k = j\right) & \text{para } i \geq 1 \text{ e } j \geq 0, \end{cases}$$

em que X_1, X_2, \dots são v.a.'s i.i.d. assumindo valores inteiros não-negativos e com função de probabilidades $\{p_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$.

Nesta seção, vamos classificar os estados da cadeia $\{Z_n : n = 0, 1, \dots\}$ de acordo com a propriedade de recorrência.

Lembrando, da teoria clássica de cadeias de Markov a tempo discreto e espaço de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, denotamos por f_{ii} a probabilidade de que o primeiro retorno ao estado $i \in S$ ocorra em um tempo finito, ou seja,

$$f_{ii} = P(\tau_i < +\infty | X_0 = i),$$

em que

$$\tau_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i | X_0 = i\}$$

é o tempo de primeira visita ao estado i .

Assim, dizemos que um estado i é *recorrente* se $f_{ii} = 1$. Para maiores detalhes sobre as propriedades de cadeias de Markov a tempo e valores discretos veja, por exemplo, Kannan [8].

Na proposição a seguir, mostramos que os estados não-nulos do processo de ramificação tal que $p_1 \neq 1$ são todos transientes.

Proposição 1.6. Seja $\{Z_n, n \geq 0\}$ um processo de ramificação com distribuição de descendentes $\{p_k, k \geq 0\}$, tal que $p_1 = P(X_1 = 1) \neq 1$. Seja $k \in S = \{0, 1, 2, \dots\}$.

- (a) Se $k = 0$, então k é recorrente (positivo).
- (b) Se $k \neq 0$, então k é transiente e $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = k) = 0$.
- (c) A única distribuição estacionária da cadeia $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ é $\Pi = (1, 0, 0, \dots)$, ou seja, Π é a única distribuição de probabilidade tal que $\sum_{i \in S} \Pi_i P_{ij} = \Pi_j, \forall j \in S$.
- (d) $P(Z_n \rightarrow \infty) = 1 - P(Z_n \rightarrow 0) = 1 - P(Q)$, em que $P(Q)$ é a probabilidade de extinção definida em (1.22).

Demonstração. (a) Se $k = 0$ então como $P_{00} = 1$, por definição, então 0 é um estado absorvente e consequentemente recorrente. Além disso, 0 é recorrente positivo, pois neste caso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n P_{00}^m}{n} = 1,$$

já que $P_{00}^n = P(X_n = 0 | X_0 = 0) = 1, \forall n \geq 0$.

(b) Seja $k \neq 0$. Para obter f_{ii} , vamos analisar os casos em que $p_0 = 0$ ou $p_0 \neq 0$. Lembrando que, por hipótese, $p_1 < 1$.

Se $p_0 = 0$, então temos

$$f_{kk} = P(X_1 = 1, \dots, X_k = 1) = [P(X_1 = 1)]^k = p_1^k < 1,$$

pois como cada indivíduo gera ao menos um outro, visto que $p_0 = 0$, então o retorno só ocorre quando os k indivíduos produzem exatamente um descendente na próxima geração.

Agora, se $p_0 > 0$, temos

$$f_{kk} \leq 1 - P(X_1 = 0, \dots, X_k = 0) = 1 - (p_0)^k,$$

pois como $p_0 > 0$, se todos os k indivíduos não gerarem nenhum indivíduo, então o processo não retornará ao estado k em algum tempo finito. Logo, como $0 < p_0 \leq 1$, segue que $f_{kk} < 1$.

Assim, em ambos os casos, se $k \neq 0$ então k é transiente.

Neste caso, da teoria de cadeias de Markov a tempo e estados discretos, como k é transiente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{kk}^n = 0$ e consequentemente $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = k) = 0$. (Vide Teorema 3.5.4 em Kannan [8]).

(c) Como $P_{00} = 1$, é fácil ver que $\Pi = (1, 0, 0, \dots)$ é uma distribuição estacionária para a cadeia $\{Z_n, n \geq 0\}$.

Agora, sabemos que se $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ é uma distribuição estacionária para uma cadeia de Markov com espaços de estados $S = \{0, 1, \dots\}$ então $\alpha_j = 0$, para todo j estado transiente.

Assim, como por (b) todo estado $k \neq 0$ é transiente para a cadeia de Markov $\{Z_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, então $\Pi = (1, 0, 0, \dots)$ é a única distribuição estacionária para $\{Z_n\}_{n \geq 0}$.

(d) Seja $q = P(Q)$. Por (1.22) segue que

$$q = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right) = P(Z_n \rightarrow 0).$$

Por **(b)**, todos os estados não-nulos são transientes, então das propriedades de cadeias de Markov (vide, por exemplo, Teorema 3.5.4 em Kannan [8]) segue que, para todo $k = 1, 2, \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = k | Z_0 = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{1k}^n < +\infty.$$

Então, pelo Lema de Borel Cantelli, segue que

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{Z_n = k\}) = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots,$$

ou seja,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \{Z_j \neq k\} \right) = 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

Assim, como o espaço de estados de Z_n é $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, por (1.27) segue que ou $Z_n \rightarrow 0$ ou $Z_n \rightarrow +\infty$ com probabilidade 1. Portanto,

$$P(Z_n \rightarrow \infty) = 1 - P(Z_n \rightarrow 0) = 1 - P(Q) = 1 - q.$$

□

Capítulo 2

Tempo de Extinção

Considere um processo de ramificação $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ com distribuição de descendência $\{p_k, k \geq 0\}$.

Sem perda de generalidade, vamos assumir que $Z_0 = 1$, ou seja, a geração inicial é formada por um único indivíduo. Caso contrário, podemos decompor Z_n como em (1.14).

Na Seção 1.3 estudamos o problema de determinar a probabilidade de extinção definida em (1.22), ou seja,

$$P(Q) = P(Z_n = 0, \text{ para algum } n \geq 1).$$

Observe que o evento Q é equivalente ao evento em que a cadeia $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ atinge pela primeira vez o estado 0 em algum tempo finito. Assim, determinar $P(Q)$ é determinar a probabilidade do tempo de primeira visita ao estado 0 ser finito. Esse tempo de primeira visita ao estado 0 é um tempo de parada com respeito a $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ chamado de *tempo de extinção*, definido a seguir.

Definição 2.1. Definimos o *tempo de extinção* do processo de ramificação $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ como sendo o tempo de parada dado por

$$\tau := \min\{n : n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\}. \quad (2.1)$$

Lembrando que um tempo de parada ξ para o processo estocástico $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ é uma v.a. (estendida) assumindo valores em $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, em que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ tal que

$$\forall n \geq 0, \{\xi = n\} \in \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n),$$

em que $\sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$ é a σ -álgebra gerada pelas v.a.'s Z_0, Z_1, \dots, Z_n , ou em outras palavras, é a σ -álgebra que contém a informação do processo até o tempo n .

Dessa forma, usando (2.1) podemos reescrever a probabilidade de extinção como sendo

$$q = P(Q) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right) = P(\tau < +\infty). \quad (2.2)$$

Assim, pelo Teorema 1.1 temos que se o processo é crítico ou subcrítico (isto é, $m = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k \leq 1$) então com probabilidade 1 o tempo de extinção τ assume valores em $\{0, 1, 2, \dots\}$, pois $q = P(\tau < +\infty) = 1$, e se o processo é supercrítico (isto é, $m > 1$) então $q = P(\tau < +\infty) < 1$, ou equivalentemente $1 - q = P(\tau = +\infty) > 0$, ou seja, existe uma probabilidade positiva $1 - q$ da população se extinguir (alcançar o estado 0) em um número finito de gerações.

Neste capítulo apresentamos propriedades relacionadas ao tempo de extinção, apresentadas em Athreya e Ney [1], Athreya e Schuh [2] e Seneta [13] e que serão de grande importância para o desenvolvimento dos resultados apresentados no Capítulo 3.

Na Seção 2.1, para os casos subcrítico e crítico apresentamos os resultados que estabelecem as condições para a finitude do tempo médio de extinção $E\tau$.

Na Seção 2.2 apresentamos o estudo realizado por Athreya e Schuh [2] para o caso supercrítico.

2.1 Caso Subcrítico ou Crítico

Nesta seção analisaremos o tempo médio de extinção $E\tau$, onde τ é o tempo de extinção definido em (2.1), de um processo de ramificação $\{Z_n, n \geq 0\}$ tal que o número médio de descendentes $m = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$ é menor ou igual a 1.

Por (2.2) e pelo Teorema 1.1 vimos que, neste caso τ é um tempo de parada finito, ou seja, que assume valores em $\{0, 1, 2, \dots\}$ com probabilidade 1.

Primeiramente, consideramos o caso $m < 1$, ou seja, $\{Z_n : n = 0, 1, \dots\}$ é um processo subcrítico, e apresentamos o resultado extraído de Athreya e Schuh [2], que estabelece que neste caso o tempo médio de extinção é finito.

Proposição 2.1. Seja $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ um processo de ramificação subcrítico, isto é, $m = \sum_{j \geq 1} jp_j < 1$, com distribuição de descendentes $\{p_k, k \geq 0\}$ e tal que $Z_0 = 1$. Se $\tau \equiv \min\{n : n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\}$ é o tempo de extinção do processo, então

$$E\tau = E(\tau | Z_0 = 1) \leq \frac{1}{1 - m} < \infty \quad (2.3)$$

Demonstração. Como $m < 1$, temos que τ é uma variável aleatória assumindo valores inteiros não-negativos. Assim, segue das propriedades elementares de esperança que

$$E\tau = \sum_{j=0}^{\infty} P(\tau > j).$$

Mas, como $\{Z_n > 0\} \supset \{Z_{n+1} > 0\}$, $\forall n \geq 1$, da definição de τ em (2.1) segue que

$$P(\tau > j) = P(Z_1 > 0, \dots, Z_j > 0) = P(Z_j > 0), \forall j \geq 1 \quad (2.4)$$

e como $Z_0 = 1$, temos $P(Z_0 > 0) = 1$.

Assim,

$$E\tau = \sum_{j=0}^{\infty} P(Z_j > 0).$$

Por outro lado, se $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ é a função geradora de probabilidades associada à $\{p_k, k \geq 0\}$, pela Proposição 1.3 temos que a função geradora de probabilidades de $\{Z_n, n \geq 0\}$ é $f_n(s)$, a n -ésima iteração de $f(s)$. Assim, das propriedades de função geradora de probabilidades (Proposição 1.1), segue que

$$P(Z_j > 0) = 1 - P(Z_j = 0) = 1 - f_j(0), \forall j \geq 0,$$

lembrando que $f_0(s) = s$.

Logo, podemos escrever

$$E(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} (1 - f_j(0)). \quad (2.5)$$

Agora, como f_j é contínua no seu raio de convergência, pelo Teorema do Valor Médio temos que existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$f'_j(c) = \frac{f_j(1) - f_j(0)}{1 - 0} = 1 - f_j(0),$$

e como f'_j é estritamente crescente em $(0, 1]$, pois $f''_j(s) > 0$, $\forall s \in (0, 1]$, segue da igualdade acima que

$$1 - f_j(0) \leq f'_j(1). \quad (2.6)$$

Mas, como $m < 1 < +\infty$, pela Proposição 1.1 e pela Proposição 1.3(b), temos

$$f'_j(1) = EZ_j = m^j. \quad (2.7)$$

Portanto, por (2.5) a (2.7), como $m < 1$, segue que

$$E(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} (1 - f_j(0)) \leq \sum_{j=0}^{\infty} f'_j(1) = \sum_{j=0}^{\infty} m^j = \frac{1}{1-m}$$

e (2.3) está provada. □

Observação 2.1. Vale observar que poderíamos ter utilizado a Desigualdade de Markov na demonstração da Proposição 2.1, escrevendo

$$P(Z_j > 0) = P(Z_j \geq 1) \leq E(Z_j) = m^j. \quad \diamond$$

Agora, analisemos o caso crítico, em que $m = 1$. Neste caso, o tempo médio de extinção pode ser finito ou infinito, e a proposição a seguir, apresentada em Seneta [13], estabelece condições necessárias e suficientes para que $E(\tau)$ seja finito.

Proposição 2.2. Seja $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ um processo de ramificação crítico com função geradora de probabilidades $f(s)$ e tal que $Z_0 = 1$. Se $\tau = \min\{n : n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\}$, então

(a) $E(\tau) = \infty$ se, e somente se $I = \int_0^1 \frac{1-s}{f(s)-s} ds = \infty$;

(b) $E(\tau) < \infty$ se, e somente se $I = \int_0^1 \frac{1-s}{f(s)-s} ds < \infty$.

Demonstração. Como $m = 1$, temos que τ é um tempo de parada assumindo valores inteiros não-negativos e podemos usar (2.5) para escrever

$$\begin{aligned} E\tau &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - f_n(0)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [f_{n+1}(0) - f_n(0)] \frac{(1 - f_n(0))}{f_{n+1}(0) - f_n(0)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Devemos mostrar que a série em (2.8) converge se, e somente se, a integral $I = \int_0^1 \frac{1-s}{f(s)-s} ds$ converge.

Para isso, defina

$$H(s) = \frac{1-s}{f(s)-s}, \text{ para } s \in [0, 1) \quad (2.9)$$

e denote

$$\mu_n = f_n(0), \forall n \geq 0, \quad (2.10)$$

ou seja, $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = f(0) = p_0$ e $\mu_{n+1} = f(\mu_n)$.

Assim, podemos reescrever (2.8) da seguinte maneira

$$E\tau = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n)H(\mu_n) \quad (2.11)$$

e devemos provar que a série converge se, e somente se $I = \int_0^1 H(s)ds$ converge.

Para analisar o comportamento da função $H(s)$, vamos escrever

$$H(s) = \frac{1}{1-g(s)}, \forall s \in [0, 1), \quad (2.12)$$

em que

$$g(s) = \frac{1-f(s)}{1-s}, \forall s \in [0, 1). \quad (2.13)$$

Agora, como $f(s)$ é a função geradora de probabilidades associada à $\{p_k, k \geq 0\}$, então por definição

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, |s| < 1$$

e como

$$\frac{1}{1-s} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k, |s| < 1, \quad (2.14)$$

segue da propriedade do produto de série de potências que

$$\frac{f(s)}{1-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k p_j \right) s^k, |s| < 1. \quad (2.15)$$

Então, $g(s)$ é a diferença das séries de potências (2.14) e (2.15) em $[0, 1)$ e pode ser escrita como

$$g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k, \text{ com } a_k = 1 - \sum_{j=0}^k p_j, \forall k \geq 1.$$

Mas, note que como $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$, então temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{s \rightarrow 1^-} g(s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{1-f(s)}{1-s} = f'(1) = 1.$$

Ou seja, se considerarmos $g(1) = 1$, a função $g(s)$ é uma função geradora de probabilidades.

Assim, $g(s)$ é contínua e monótona crescente, $0 < g(s) < 1, \forall s \in [0, 1)$ e $\lim_{s \rightarrow 1^-} g(s) = 1$.

Logo, segue de (2.12) que $H(s)$ é positiva, contínua e monótona crescente em $[0, 1)$, com $H(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow 1^-$. Assim, a integral $I = \int_0^1 H(s) ds$ existe e $I \leq +\infty$.

Por outro lado, considerando a sequência $\{\mu_n, n \geq 0\}$ definida em (2.10), como a função geradora de probabilidades f é não-decrescente, temos que $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência não-decrescente. Além disso, por (1.22) e pelo Teorema 1.1 segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = P(Q) = 1$, pois por hipótese $m = 1$.

Assim, $\{\mu_n, n \geq 0\}$ é uma partição de $[0, 1)$ e das propriedades de integração, como H é monótona crescente e positiva, segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) H(\mu_n) \leq I \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \mu_{n-1}) H(\mu_n). \quad (2.16)$$

Agora, pelo Teorema do Valor Médio, para cada $n \geq 1$, temos

$$(\mu_{n+1} - \mu_n) = (\mu_n - \mu_{n-1}) f'(c_n)$$

para algum c_n tal que $\mu_{n-1} < c_n < \mu_n$. Mas, como $\mu_n \uparrow 1$, segue que $c_n \rightarrow 1$ e $f'(c_n) \uparrow f'(1) = 1$. Então, podemos obter $N \geq 1$ tal que

$$(\mu_{n+1} - \mu_n) = \frac{1}{2} (\mu_n - \mu_{n-1}), \quad \forall n \geq N.$$

Dessa forma, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) H(\mu_n)$ converge então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \mu_{n-1}) H(\mu_n)$ também converge. A implicação contrária é imediata por (2.16). Além disso, por (2.16) segue que a integral I converge se, e só se, qualquer uma das séries converge.

Portanto, por (2.11) podemos concluir que $E\tau < +\infty$ se, e somente se, a integral I é finita.

□

Finalizamos esta seção apresentando um resultado auxiliar, que será utilizado no Capítulo 3 e que estabelece cotas inferior e superior para o tempo esperado de extinção da soma de processos de ramificação subcríticos independentes e identicamente distribuídos.

Lema 2.1. Sejam $\{Z_n\} = \{Z_{n,1} + Z_{n,2} + \dots + Z_{n,k}, n = 0, 1, \dots\}$ a soma de k processos de ramificação subcríticos, independentes e com distribuição de descendência tal que $p_0 >$

$p_1 = 1$, $p_1 < 1$ e $Z_{0,i} = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Se $\tau_i := \min\{n : n \in \mathbb{N}, Z_{n,i} = 0\}$ e $\tilde{\tau} := \min\{n : n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\} = \max\{\tau_1, \dots, \tau_k\}$, então, para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$-\frac{1}{\ln(1-p_0)}H_k \leq E\tilde{\tau} \leq 1 - \frac{1}{\ln(1-p_0)}H_k, \quad (2.17)$$

onde $H_k := (1 + 1/2 + \dots + 1/k)$.

Demonstração. Para cada $i = 1, \dots, k$, o processo $\{Z_{n,i}, n = 0, 1, \dots\}$ por hipótese é um processo subcrítico, com distribuição de descendência $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$ tal que $p_0 + p_1 = 1$, $p_1 < 1$ e $P(Z_{0,i} = 1) = 1$. Assim, a função geradora de probabilidades de descendência é

$$f(s) = p_0 + s(1 - p_0), \quad |s| \leq 1.$$

Então, se $\tau_i = \inf\{n \geq 1, Z_{n,i} = 0\}$, podemos usar (2.4) para τ_i e obter para todo $n \geq 0$

$$P(\tau_i > n) = P(Z_{n,i} > 0) = 1 - f_n(0) = (1 - p_0)^n,$$

ou seja, τ_i tem distribuição geométrica de parâmetro p_0 .

Assim, para $\tilde{\tau} = \max\{\tau_1, \dots, \tau_k\}$, como por hipótese τ_1, \dots, τ_k são independentes, segue que

$$P(\tilde{\tau} \leq n) = P(\max\{\tau_1, \dots, \tau_k\} \leq n) = (1 - (1 - p_0)^n)^k.$$

Logo, denotando $(1 - p_0) = q_0$, temos

$$E(\tilde{\tau}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (1 - q_0^n)^k) \quad (2.18)$$

Agora, como $0 < q_0 < 1$, a função $g(x) = 1 - (1 - q_0^x)^k$, $x \geq 0$, é contínua, positiva e decrescente. Então, das propriedades de integração podemos obter

$$g(0) + \int_1^{\infty} g(x)dx \leq \sum_{x=0}^{\infty} g(x) \leq g(0) + \int_0^{\infty} g(x)dx$$

e, como $g(0) = 1$ e $g(x) \leq 1, \forall x \geq 0$, segue que

$$\int_0^{\infty} g(x)dx \leq 1 + \int_1^{\infty} g(x)dx \leq \sum_{x=0}^{\infty} g(x) \leq 1 + \int_0^{\infty} g(x)dx. \quad (2.19)$$

Assim, por (2.18) e (2.19) obtemos

$$\int_0^\infty 1 - (1 - q_0^x)^k dx \leq E(\tilde{\tau}) \leq 1 + \int_0^\infty 1 - (1 - q_0^x)^k dx. \quad (2.20)$$

Mas, fazendo a substituição $y = 1 - q_0^x$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^\infty 1 - (1 - q_0^x)^k dx &= \int_0^1 \frac{1 - y^k}{(y - 1)\ln(q_0)} dy \\ &= -\frac{1}{\ln(q_0)} \int_0^1 \frac{1 - y^k}{1 - y} dy \\ &= -\frac{1}{\ln(q_0)} \int_0^1 \sum_{j=0}^{k-1} y^j dy \\ &= -\frac{1}{\ln(q_0)} H_k \end{aligned} \quad (2.21)$$

em que $H_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1}$.

Portanto, de (2.20) e (2.21) provamos (2.17).

□

2.2 Decomposição de Processos Supercríticos

Seja $\{Z_n, n \geq 0\}$ um processo de ramificação supercrítico, ou seja, tal que $m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k > 1$ e suponha que $Z_0 = 1$.

Vimos que por (2.2), segue do Teorema 1.1 que $q = P(\tau < +\infty) < 1$, em que τ é o tempo de extinção do processo $\{Z_n\}_{n \geq 0}$. Assim, como $P(\tau = +\infty) > 0$, então $E\tau = E(\tau | Z_0 = 1) = +\infty$.

Por outro lado, pela Proposição 1.6, vimos que se $p_1 \neq 1$, então os estados não-nulos de um processo são transientes e $P(Z_n \rightarrow +\infty) = 1 - q$. Então, se $p_0 > 0$, temos $0 < q < 1$ e consequentemente $0 < P(Z_n \rightarrow 0) < 1$ e $0 < P(Z_n \rightarrow +\infty) < 1$.

Nesta seção, vamos apresentar uma decomposição do processo de ramificação supercrítico dada em Athreya e Ney [1] que será utilizada para a análise do tempo de extinção de um tipo de processo de ramificação modificado, dependente do tamanho da população introduzido em Athreya e Schuh [2] e que será estudado no Capítulo 3.

Segundo Athreya e Ney [1], o princípio dessa decomposição baseia-se na escolha de uma transformação da função geradora de probabilidade de $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$, de tal forma a obter um processo $\{\hat{Z}_n, n = 0, 1, \dots\}$ supercrítico, que é equivalente em certo sentido à $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$, mas que tem probabilidade de extinção nula, o que pode facilitar a obtenção de muitas propriedades de processos supercríticos, com $0 < q < 1$.

No lema a seguir, apresentamos a função geradora de probabilidades obtida como uma transformação apropriadamente escolhida da função geradora de probabilidades $f(s)$, associada à $\{p_k, k \geq 0\}$.

Lema 2.2. Seja $\{Z_n, n \geq 0\}$ um processo de ramificação supercrítico, com distribuição de descendentes $\{p_k, k \geq 0\}$, e função geradora de probabilidades $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$, tal que $Z_0 = 1$ e $p_0 = f(0) > 0$. Se $q = P(Q)$ é a probabilidade de extinção de $\{Z_n\}$, então a função

$$\hat{f}(s) = \frac{f((1-q)s+q) - q}{1-q}, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (2.22)$$

é uma função geradora de probabilidades tal que $\hat{f}(0) = 0$. Mais ainda, se $\{\hat{Z}_n, n = 0, 1, \dots\}$ é um processo de ramificação com $\hat{Z}_0 = 1$ e função geradora de probabilidades de descendentes $\hat{f}(s)$, então $\{\hat{Z}_n\}$ é um processo supercrítico com probabilidade de extinção $\hat{q} = 0$ e a função geradora de probabilidades de \hat{Z}_n é dada por

$$f_{\hat{Z}_n}(s) = \hat{f}_n(s) = \frac{f_n((1-q)s+q) - q}{1-q}, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (2.23)$$

onde f_n é a n -ésima iteração de f .

Demonstração. Como f é uma função geradora de probabilidades então f também é uma função analítica em $[0, 1]$ e como $g(s) = q + (1-q)s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$, $s \in [0, 1]$, com $a_0 = 1$, $a_1 = 1 - q$ e $a_n = 0, \forall n \geq 2$, segue que $f(g(s))$ é uma função analítica e conseqüentemente $\hat{f}(s)$ é uma função analítica em $[0, 1]$, ou seja,

$$\hat{f}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\pi}_k s^k, \quad \forall s \in [0, 1], \quad (2.24)$$

em que $\hat{\pi}_k = \frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 1, 2, \dots$ e $\hat{\pi}_0 = \hat{f}(0)$. Mas, como $f(1) = 1$, segue que $\hat{f}(1) = \frac{f(1) - q}{1 - q} = 1$.

Logo, $\hat{f}(s)$ é uma função geradora de probabilidades, ou seja, $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\pi}_k = 1$. Além disso, temos $\hat{\pi}_0 = \hat{f}(0) = \frac{f(q) - q}{1 - q} = 0$, pois, como q é a probabilidade de extinção do processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$, pela Proposição 1.4 segue que $f(q) = q$.

Mais ainda, dada a distribuição de probabilidade $\{\hat{\pi}_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ associada à função geradora $\hat{f}(s)$, pelo Teorema da Existência de Kolmogorov, existe um processo de ramificação $\{\hat{Z}_n, n = 0, 1, \dots\}$ cuja distribuição geradora de descendentes é $\{\hat{\pi}_k, k \geq 0\}$. Neste caso, segue que

$$\hat{m} = \hat{f}'(1) = \lim_{s \uparrow 1} \hat{f}'(s) = \lim_{s \uparrow 1} f'((1 - q)s + q) = f'(1) = m > 1,$$

ou seja, o processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ também é um processo supercrítico. Mas, neste caso, como $\hat{\pi}_0 = \hat{f}(0) = 0$, então segue que $\hat{q} = 0$.

Finalmente, pela Proposição 1.3, temos que $f_{\hat{Z}_n}(s) = \hat{f}_n(s)$ e $f_{Z_n}(s) = f_n(s)$, onde f_{Z_n} e f_n são as n -ésimas iterações de \hat{f} e f , respectivamente. Portanto a expressão (2.23) pode ser obtida por indução sobre n .

□

A seguir, apresentamos a decomposição do processo supercrítico $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$, com função geradora de descendentes $f(s)$ e probabilidade de extinção $0 < q < 1$ ($f(0) = p_0 > 0$), na soma de um processo supercrítico, com probabilidade de extinção nula, e um processo subcrítico, seguindo Athreya e Ney [1].

Para isso, considerando (Ω, \mathcal{F}, P) o espaço de probabilidade sobre o qual está definido $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$, defina os eventos

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \in \Omega : Z_n(\omega) \rightarrow \infty, \text{ se } n \rightarrow \infty\} \\ Q &= \{\omega \in \Omega : Z_n(\omega) = 0, \text{ para algum } n \geq 1\}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Assumindo $p_0 = f(0) > 0$, temos $0 < q < 1$, e pela Proposição 1.6, segue que

$$P(A \cup Q) = 1, \text{ com } 0 < P(Q) = q < 1 \text{ e } 0 < P(A) = 1 - q < 1.$$

Note que, com probabilidade um $A = Q^c$.

Dessa forma, podemos decompor

$$Z_n = Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)}, \tag{2.26}$$

com

$$Z_n^{(1)}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega \in Q \\ \text{o número de indivíduos entre os } Z_n(\omega) \text{ que possuem} \\ \text{infinitas gerações de descendentes não-nulas,} & \text{se } \omega \in A \end{cases} \quad (2.27)$$

e

$$Z_n^{(2)}(\omega) \equiv Z_n(\omega) - Z_n^{(1)}(\omega).$$

Note que, se para qualquer $\omega \in \Omega$, $Z_n(\omega)$ indica o número de indivíduos na n -ésima geração do processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$, então se $\omega \in A$, $Z_n^{(1)}(\omega)$ é o número de indivíduos entre os $Z_n(\omega)$ que possuem infinitas gerações de descendentes não-nulas.

Além disso, observe que

- $Z_0^{(1)}(\omega) = 1$ para todo $\omega \in A$, pois estamos assumindo $Z_0 \equiv 1$;
- $P(Z_0^{(1)}(\omega) = 1) = P(A) = 1 - q$
- $Z_n^{(1)}(\omega) \geq Z_{n-1}^{(1)}(\omega)$ para todo $\omega \in A$, pois se $\omega \in A$, $Z_n(\omega) \geq Z_{n-1}(\omega)$.
- Se $p_0 = 0 \forall \omega \in \Omega$, então $Z_n^{(2)}(\omega) \equiv 0$ e $Z_n(\omega) = Z_n^{(1)}(\omega)$
- $Z_n^{(1)}(\omega) = 0, \forall \omega \in Q$ e $Z_n^{(1)}(\omega) > 0, \forall \omega \in A$.

Veremos agora que o processo $\{Z_n^{(1)}, n = 0, 1, \dots\}$ é equivalente a um processo $\{\hat{Z}_n, n = 0, 1, \dots\}$ definido conforme o Lema 2.2 e o processo $\{Z_n^{(2)}, n = 0, 1, \dots\}$ é equivalente a um processo de ramificação subcrítico $\{Z_n^*, n = 0, 1, \dots\}$, em que a equivalência é no sentido de possuírem as mesmas funções de transição de probabilidade. Vale observar que esses processos não são necessariamente definidos sobre o mesmo espaço de probabilidade, como descrevemos a seguir.

Primeiramente, considere a σ -álgebra de subconjuntos de A

$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F} \cap A = \{E \subset A : E = C \cap A, C \in \mathcal{F}\}$$

e $P_A : \mathcal{F}_A \rightarrow \mathbb{R}$ a medida de probabilidade condicionada de A restrita sobre \mathcal{F}_A , ou seja,

$$\forall E \in \mathcal{F}_A, P_A(E) = \frac{P(E)}{P(A)}. \quad (2.28)$$

Por outro lado, dada a função geradora de probabilidades $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ do processo supercrítico $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ definido sobre (Ω, \mathcal{F}, P) , considere a função geradora de probabilidades $\hat{f}(s)$ definida em (2.22), com $q = P(Z_n \rightarrow 0)$.

Seja o processo $\{\hat{Z}_n, n \geq 0\}$ definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{P})$, cuja função geradora de probabilidade é $\hat{f}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{p}_k s^k$, ou seja, $\hat{P}_{1k} = \hat{P}(\hat{Z}_{n+1} = k | \hat{Z}_n = 1)$, $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Pelo Lema 2.2, $\{\hat{Z}_n, n = 0, 1, \dots\}$ é um processo supercrítico com $\hat{m} = \hat{f}'(1) = m = f'(1)$ e probabilidade de extinção $\hat{q} = 0$, em que assumimos $Z_0 = 1$ e $\hat{Z}_0 = 1$.

A próxima proposição estabelece a equivalência, no sentido da distribuição dos processos $\{Z_n^{(1)}, n \geq 0\}$ e $\{\hat{Z}_n, n \geq 0\}$.

Proposição 2.3. Os processos estocásticos $\{\hat{Z}_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{P})$, e $\{Z_n^{(1)}, n = 0, 1, 2, \dots\}$, definido sobre (A, \mathcal{F}_A, P_A) , são equivalentes no sentido de possuírem as mesmas distribuições finitas.

Demonstração. Assumimos que $Z_0 = \hat{Z}_0 = 1$. Provaremos a proposição mostrando que o processo $\{Z_n^{(1)}, n = 0, 1, \dots\}$ em (A, \mathcal{F}_A, P_A) é uma Cadeia de Markov com as mesmas probabilidades de transição que o processo $\{\hat{Z}_n, n = 0, 1, \dots\}$. Isto será suficiente, uma vez que $Z_0^{(1)}(\omega) \equiv 1 = \hat{Z}_0(\omega)$, para todo $\omega \in A$, e uma Cadeia de Markov é inteiramente descrita por sua distribuição inicial e suas probabilidades de transição.

Pela definição de $Z_n^{(1)}$, temos que se $\omega \in A$, então $Z_n^{(1)}(\omega) > 0$ para qualquer $n \geq 0$. Para cada $n \geq 1$, todos estes $Z_n^{(1)}(\omega)$ indivíduos e somente eles, dentre os $Z_n(\omega)$ que compõem a n -ésima geração, possuem linhas de descendentes infinitas. Portanto, cada um dos $Z_n^{(1)}(\omega)$ indivíduos gera um número aleatório de descendentes onde ao menos um deve possuir uma linha de descendente infinita.

Além disso, os $Z_n^{(1)}(\omega)$ indivíduos geram descendentes de maneira independente uns dos outros e das gerações anteriores, incluindo $Z_j^{(1)}(\omega), j = 0, 1, \dots, n-1$. E a geração $Z_{n+1}^{(1)}(\omega)$ é gerada somente pelos $Z_n^{(1)}(\omega)$ indivíduos que compartilham a propriedade de possuir linhas de descendência infinita. Logo, $\{Z^{(1)}, n = 0, 1, \dots\}_n$ é uma Cadeia de Markov.

Assim, dado $Z_n^{(1)} = i$, então podemos escrever

$$Z_{n+1}^{(1)} = \sum_{j=1}^i N_j,$$

onde $N_j, j = 1, 2, \dots, i$ denota o número de indivíduos dentre os indivíduos gerados pelo j -ésimo integrante de $Z_n^{(1)}$ que possuem linhas infinitas de descendentes.

Conforme argumentado anteriormente, as variáveis aleatórias N_j são mutuamente independentes e possuem a mesma distribuição que $Z_1^{(1)}$ sobre P_A , ou seja, para todo $k = 0, 1, 2, \dots$

$$P_A(Z_1^{(1)} = k) = P_A(Z_1^{(1)} = k | Z_0^{(1)} = 1) = P_A(N_1 = k).$$

Assim, o processo $\{Z_n^{(1)}, n \geq 0\}$ é um processo de ramificação e resta-nos provar que

$$P_A(Z_1^{(1)} = k) = \hat{P}(\hat{Z}_1 = k) = \hat{\pi}_k, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

De fato, por definição de P_A , em (2.28) como $P(A) = 1$, temos

$$P_A(Z_1^{(1)} = k) = \frac{P(\{Z_1^{(1)} = k\} \cap A)}{(1 - q)}.$$

Contudo, para $k \geq 1$, pela definição de $\{Z_n^{(1)}, n = 0, 1, \dots\}$ segue que

$$\begin{aligned} P(\{Z_1^{(1)} = k\} \cap A) &= P(Z_1^{(1)} = k) \\ &= \sum_{l=k}^{\infty} P(Z_1^{(1)} = k | Z_1 = l) P(Z_1 = l) \\ &= \sum_{l=k}^{\infty} \binom{l}{k} (1 - q)^k q^{l-k} P(Z_1 = l), \end{aligned}$$

onde a última igualdade se deve ao fato de que estamos escolhendo aleatoriamente, com probabilidade $(1 - q) = P(A)$, $k \leq l$ indivíduos que compõem a primeira geração, para assumir a característica de possuir infinitas linhas de descendentes, ou seja, indivíduos cujas linhas de descendência não se extinguem.

Assim, a função geradora de probabilidades de $Z_1^{(1)}$, pode ser escrita, para $s \in [0, 1]$, como

$$\begin{aligned} f_{Z_1^{(1)}}(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} s^k P_A(Z_1^{(1)} = k) \\ &= (1 - q)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{l=k}^{\infty} \binom{l}{k} (1 - q)^k q^{l-k} P(Z_1 = l) \\ &= (1 - q)^{-1} \sum_{l=1}^{\infty} P(Z_1 = l) \sum_{k=1}^l \binom{l}{k} (1 - q)^k s^k q^{l-k} \\ &= (1 - q)^{-1} \sum_{l=1}^{\infty} P(Z_1 = l) [((1 - q)s + q)^l - q^l] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - q)^{-1} [f((1 - q)s + q) - q] \\
&= \hat{f}(s),
\end{aligned}$$

em que a última igualdade segue de (2.23).

Portanto, como $Z_1^{(1)}$ e \hat{Z}_1 possuem a mesma função geradora de probabilidades, possuem a mesma distribuição de descendentes $\{\hat{\pi}_k, k \geq 0\}$.

□

Pela proposição anterior, vimos que o processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ restrito à A , coincide com $\{Z_n^{(1)}, n = 0, 1, \dots\}$ sobre A e é equivalente ao processo $\{\hat{Z}_n, n = 0, 1, \dots\}$.

Na próxima proposição, provamos que o processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ restrito a Q , que coincide com o processo $\{Z_n^{(2)}, n = 0, 1, \dots\}$ é equivalente a um processo de ramificação subcrítico.

Para isso, de maneira análoga à (2.28), considere o espaço de probabilidade (Q, \mathcal{F}_Q, P_Q) onde P_Q é a medida de probabilidade condicional dado Q . Note que $Z_n = Z_n^{(2)}$ quase certamente quando temos $[P_Q]$ sobre Q .

Proposição 2.4. O processo de ramificação supercrítico $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ quando definido sobre (Q, \mathcal{F}_Q, P_Q) é equivalente, no sentido de possuírem as mesmas distribuições finitas, a um processo de ramificação subcrítico $\{Z_n^*, n \geq 0\}$ definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$, com $P^*(Z_0^* = 1)$ e função geradora de probabilidade $f^*(s) = \frac{f(sq)}{q}$, $s \in [0, 1]$ quando $p_0 > 0$.

Demonstração. Como o processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ definido sobre (Ω, \mathcal{F}, P) é uma cadeia de Markov, sua restrição à (Q, \mathcal{F}_Q, P_Q) também satisfaz a propriedade de Markov.

Como assumimos que $Z_0 = 1$, então $P_Q(Z_0 = 1) = 1 = P^*(Z_0^* = 1)$. Assim, basta verificarmos que

$$P_Q(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = P^*(Z_{n+1} = j | Z_n = i), \forall i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Para isso, basta provar que as respectivas funções geradoras das probabilidades de transição são iguais.

De fato, primeiramente pela definição de P_Q temos para $i \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{j \geq 0} P_Q(Z_{n+1} = j | \{Z_n = i\}) s^j &= \sum_{j \geq 0} \frac{P_Q(Z_{n+1} = j, Z_n = i) s^j}{P_Q(\{Z_n = i\})} \\
&= \sum_{j \geq 0} \frac{P(Q | Z_{n+1} = j) P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) P(Z_n = i) s^j}{P(Q | Z_n = i) P(Z_n = i)}
\end{aligned}$$

Agora, como $Q = \{\omega \in \Omega : Z_n(\omega) \rightarrow 0\}$, podemos utilizar o mesmo raciocínio da Observação 1.2 para provar que $P(Q|Z_n = i) = q^i$. Logo, pela Proposição 1.2 segue que

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} P_Q(Z_{n+1} = j | Z_n = i) s^j &= \sum_{j \geq 0} \frac{P_{ij} q^j s^j}{q^i} \\ &= \frac{[f(sq)]^i}{q^i} = [f^*(s)]^i \end{aligned} \quad (2.29)$$

Mas, como $\{Z_n^*\}$ é um processo de ramificação com função geradora de probabilidade de descendentes $f^*(s)$, então pela Proposição 1.2, temos

$$\sum_{j \geq 0} P^*(Z_{n+1}^* = j | Z_n^* = i) s^j = [f^*(s)]^i. \quad (2.30)$$

Assim, de (2.29) e (2.30) segue que

$$P^*(i, j) = P_Q(i, j)$$

e os processos possuem as mesmas distribuições finitas.

Além disso, temos que $f^{*'}(1) = f'(q)$. Ao analisarmos o sinal de $f''(s)$, podemos concluir que ou $p_1 = 1$ e $f''(s) = 0$ ou $p_1 < 1$ e $f''(s) > 0$, fazendo de $f(s)$ estritamente convexa em $[0, 1]$. Assim,

$$f(s) \geq f(q) + f'(q)(s - q) \quad (2.31)$$

onde o lado direito da igualdade é a equação da reta tangente ao ponto (q, q) e a igualdade somente se $s = q$. Como o processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ é supercrítico, então $q < 1$. Portanto, tomando $s = 1$ em (2.31) temos:

$$1 > q + f'(q)(1 - q)$$

e conseqüentemente

$$f'(q) < 1.$$

Portanto, $f^{*'}(1) = f'(q) < 1$ e o processo $\{Z_n^*(\omega), n = 0, 1, \dots\}$ é subcrítico.

□

Observação 2.2. Quando $p_0 = 0$, então o Processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ sobre (Q, \mathcal{F}_Q, P_Q) é nulo e $A = \Omega$. Portanto, nesse caso, $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\} = \{Z_n^{(1)}, n = 0, 1, \dots\}$.

◇

Finalizamos esta seção apresentando um resultado auxiliar de Athreya e Schuh [2], no qual a decomposição apresentada anteriormente é utilizada para a obtenção de uma cota superior para o tempo esperado da primeira visita de um processo supercrítico $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ ao estado 0 ou a um estado maior que uma fronteira K , sendo K um inteiro positivo. Este resultado será utilizado no próximo capítulo para a análise das propriedades do processo de ramificação modificado dependendo de um limitante do tamanho da população apresentado em Athreya e Schuh [2].

Proposição 2.5. Seja $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ um processo de ramificação supercrítico com $Z_0 \equiv j$, $j \in \{1, 2, \dots, K\}$, onde K é um inteiro positivo. Se $T_1 = \min\{n : n \in \mathbb{Z}, Z_n \geq K + 1 \text{ ou } Z_n = 0\}$, então

$$E(T_1) \leq \frac{K}{1 - m^*} + 2K + C(K) \frac{\sqrt{\hat{\pi}_1}}{1 - \sqrt{\hat{\pi}_1}} := C_1 < \infty \quad (2.32)$$

onde $m^* = f^{*'}(1)$ e $\hat{\pi}_1 = \hat{P}(\hat{Z}_1 = 1)$ são conforme o definido nas Proposições 2.3 e 2.4 e $C(K) := \max_{n \in \mathbb{N}} (K \hat{\pi}_1^{n/2})$.

Demonstração. Como o processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ é supercrítico, então, pela Observação 1.2, podemos analisá-lo como uma soma de j processos de ramificação supercríticos $\{\zeta_{n,i}, n \geq 1, 1 \leq i \leq j\}$, independentes e com um único indivíduo inicial, que contabilizam o número de descendentes de cada um dos j indivíduos iniciais.

Para cada processo $\{\zeta_{n,i}, n = 0, 1, \dots\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, defina $\{\zeta_{n,i}^{(1)}, n = 0, 1, \dots\}$ e $\{\zeta_{n,i}^{(2)}, n = 0, 1, \dots\}$ conforme fizemos em (2.25) a (2.27) definidos sobre os espaços $(A_i, \mathcal{F}_{A_i}, P_{A_i})$ e $(Q_i, \mathcal{F}_{Q_i}, P_{Q_i})$, respectivamente, em que $A_i = \{\omega : \zeta_{n,i} \rightarrow +\infty\}$ e $Q_i = \{\omega : \zeta_{n,i} \rightarrow 0\}$.

Seja $H = Q_1 \cap \dots \cap Q_j$.

Como $T_1 = \min\{n \in \mathbb{N} | Z_n \geq K + 1 \text{ ou } Z_n = 0\}$, então para $0 \leq n \leq T_1$, $Z_n = \zeta_{n,1}^{(2)} + \dots + \zeta_{n,j}^{(2)}$ quase-certamente sobre H , onde os processos $\{\zeta_{n,i}^{(2)}, n = 0, 1, \dots\}$ são i.i.d., subcríticos e com função geradora de probabilidade $f^*(s)$, além de possuírem um único indivíduo inicial, ou seja, $\zeta_{0,i}^{(2)} = 1$.

Sejam $\tau_i^{(2)}$ os tempos de extinção dos respectivos processos $\{\zeta_{n,i}^{(2)}, n = 0, 1, \dots\}$. Então pelo Proposição 2.1, como tais processos são subcríticos, temos que

$$E(\tau_i^{(2)}) \leq \frac{1}{1 - m^*} < \infty.$$

Além disso, ou $\max_{1 \leq i \leq j} \tau_i^{(2)} = T_1$, quando todos os processos $\{\zeta_{n,i}^{(2)}, n = 0, 1, \dots\}$ se extinguem antes que a soma ultrapasse K e, neste caso, $Z_{T_1} = 0$ com probabilidade menor ou igual a q^j , ou $Z_{T_1} \geq K + 1$, quando ultrapassamos a fronteira K antes da extinção do processo

$\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$. Em ambos os casos, temos que

$$T_1 \leq \tau_1^{(2)} + \tau_2^{(2)} + \dots + \tau_j^{(2)}.$$

Assim, como $\zeta_{n,i}^{(2)} = \zeta_{n,i}$ sobre H , pela Observação 1.2 segue que

$$E(T_1 I_H) \leq E(\tau_1^{(2)} + \tau_2^{(2)} + \dots + \tau_j^{(2)}) = jE(\tau_i^{(2)}) \leq KE(\tau_i^{(2)}) \leq \frac{K}{1-m^*} < \infty \quad (2.33)$$

Por outro lado, para obter uma cota superior para $E(T_1 I_{H^C})$, observe primeiramente que quase-certamente em H^C existe ao menos um i , $1 \leq i \leq j$, com $\zeta_{n,i}^{(1)} \leq Z_n$ para todo $0 \leq n \leq T_1$, onde $\{\zeta_{n,i}^{(1)}, n = 0, 1, \dots\}$ são processos i.i.d., supercríticos com função geradora de probabilidade $\hat{f}(s)$ e $\zeta_{0,i}^{(1)} = 1$, conforme a Proposição 2.2.

Seja $\tau_i^{(1)} := \min\{n : n \in \mathbb{N}, \zeta_{n,i}^{(1)} \geq K + 1\}$. Para todo $0 \leq n \leq T_1$, os caminhos $\{\zeta_{0,i}^{(1)}, \dots, \zeta_{n,1}^{(1)}\}$ são crescentes, pois pelo Lema 2.2 $\hat{p}_0 = 0$, ou seja, possuem probabilidade de extinção nula.

Logo, como ao decorrer das gerações os caminhos ou aumentam o seu número de indivíduos ou mantém a mesma quantidade da geração anterior, tais caminhos não acessam mais que K diferentes valores antes de assumirem o valor $K + 1$.

Agora, temos que

$$\alpha := P(\zeta_{l+1,i}^{(1)} = k | \zeta_{l,i}^{(1)} = k) \leq (\hat{\pi}_1)^k \leq \hat{\pi}_1, \quad (2.34)$$

uma vez que para manter o número de indivíduos com o passar da geração é necessário que cada indivíduo produza exatamente 1 descendente.

Além disso,

$$\beta := P(\zeta_{l+1,i}^{(1)} \geq k + 1 | \zeta_{l,i}^{(1)} = k) \leq 1. \quad (2.35)$$

Se em um dos caminhos temos que $\tau_i^{(1)} \geq n$, $n = 1, 2, \dots$, então nas n primeiras gerações aumenta-se o seu número de indivíduos com o passar das gerações um máximo de K vezes e mantém-se a mesma quantidade em, no mínimo, $n - K$ vezes antes da n -ésima geração.

Assim, para que $\{\tau_i^{(1)} \geq n\}$ é necessário que os caminhos $\{\zeta_{n,i}^{(1)}, n = 0, 1, \dots\}$ aumentem o número de indivíduos em j oportunidades, $1 \leq j \leq K$, não ultrapassando a fronteira K em nenhum desses aumentos, e os mantenham em $n - j$ oportunidades.

Assim,

$$\{\tau_i^{(1)} \geq n\} \subset \bigcup_{j=1}^K \left\{ \{\zeta_{l,i}^{(1)}\}, 1 \leq l \leq n, \text{ crescem em } j \text{ e se mantêm em } n - j \text{ oportunidades} \right\}$$

Logo, por (2.35) segue

$$P(\{\tau_i^{(1)} \geq n\}) \leq \sum_{j=1}^K \beta^j \alpha^{n-j} \leq \sum_{j=1}^K \hat{\pi}_1^{n-j} \leq \hat{\pi}_1^{n-K} K$$

Agora, podemos escrever para $n \geq 2K$

$$\hat{\pi}_1^{n-K} K = (K \hat{\pi}_1^{n/2}) \hat{\pi}_1^{(n-2K)/2}$$

Mas, $C(K) = \max\{K \hat{\pi}_1^{n/2}\} < +\infty$, pois se $\hat{\pi}_1 = 1$, $K \hat{\pi}_1^{n/2} = K$ e se $\hat{\pi}_1 < 1$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} (K \hat{\pi}_1^{n/2}) = 0$.

Assim, podemos calcular

$$\begin{aligned} E(\tau_i^{(1)}) &= \sum_{n \geq 1} P(\tau_i^{(1)} \geq n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{2K} P(\tau_i^{(1)} \geq n) + \sum_{n=2K+1}^{\infty} P(\tau_i^{(1)} \geq n) \\ &\leq 2K + C(K) \sum_{n=2K+1}^{\infty} \hat{\pi}_1^{(n-2K)/2} \\ &= 2K + C(K) \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{\hat{\pi}_1^l} \\ &= 2K + C(K) \frac{\sqrt{\hat{\pi}_1}}{1 - \sqrt{\hat{\pi}_1}} < \infty. \end{aligned}$$

Logo, como $T_1 \leq \tau_i^{(1)}$ sobre H^C , segue que

$$E(T_1 I_{H^C}) \leq 2K + C(K) \frac{\sqrt{\hat{\pi}_1}}{1 - \sqrt{\hat{\pi}_1}} < +\infty. \quad (2.36)$$

□

Capítulo 3

Um Processo de Ramificação Dependente do Tamanho da População

O processo de ramificação de Galton-Watson, estudado nos capítulos anteriores, assume como hipótese principal que a lei que rege a reprodução dos indivíduos a cada geração (distribuição de probabilidade de descendentes) permaneça a mesma independentemente da evolução do tamanho da população de indivíduos.

No entanto, em muitas situações práticas, essa hipótese não pode ser considerada. Por exemplo, em modelos aplicados à biologia (veja Klebaner [9], Levina e Pyatetskii [11] e Vasil'ev [14]), tais como, no estudo de formação de células de sangue ou células da medula óssea, ou ainda, no estudo da evolução de uma colônia de bactérias, a reprodução de um indivíduo depende do número de indivíduos presentes, ou do tamanho da população. Também, em reações químicas em que a distribuição de probabilidade do número de reações pode depender da quantidade de agentes reagentes presentes.

Nesse sentido, muitos desses fenômenos de reprodução em que as populações não são capazes de controlar sua reprodução de acordo com o tamanho da população ou as populações em que o tamanho da população governa as leis de probabilidade de descendentes, podem ser modelados por processos conhecidos como *processos de ramificação dependentes do tamanho da população* (veja, por exemplo, Jagers [5], Klebaner [9], entre outros).

Neste capítulo, nós estudamos uma classe especial de processos de ramificação dependentes do tamanho da população, apresentado por Athreya e Schuh em [2]. Nesse caso, o comportamento do processo $\{Z_n, n \geq 0\}$ é regido por uma fronteira K , $K \in \{1, 2, \dots\}$ de tal forma que a cadeia se comporta conforme um processo de ramificação supercrítico, ou seja, de tal forma que o número médio de descendentes é maior do que 1, enquanto $Z_n \leq K$ e após o processo cruzar a fronteira K , quando $Z_n \geq K + 1$, ele passa a se comportar como um

processo subcrítico ou crítico, de tal forma que o número médio de descendentes passa a ser menor ou igual a 1.

Especificamente, tal processo pode ser descrito da seguinte forma:

Definição 3.1. Um processo de ramificação $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ regido por uma fronteira K , $K \in \mathbb{N}$, é uma cadeia de Markov tal que:

- (i) para $Z_n = i \leq K$ o processo $\{Z_{n+j}, j \geq 1\}$ se comporta conforme um processo de ramificação supercrítico, onde cada um dos i indivíduos gera descendentes de maneira independente uns dos outros e de acordo com uma distribuição $(\pi_j)_{j \geq 0}$ e com média $M = \sum_{j \geq 1} j\pi_j > 1$, que pode ser infinita;
- (ii) para $Z_n = i \geq K + 1$ o processo $\{Z_{n+j}, j \geq 1\}$ se comporta conforme um processo de ramificação crítico ou subcrítico, onde cada um dos i indivíduos gera descendentes de maneira independente uns dos outros e de acordo com uma distribuição $(p_j)_{j \geq 0}$ e com média $m = \sum_{j \geq 1} jp_j \leq 1$, onde consideramos $p_1 < 1$ se $m = 1$.

Além disso, as distribuições $(\pi_j)_{j \geq 0}$ e $(p_j)_{j \geq 0}$ são homogêneas, ou seja, não mudam de acordo com n . Iremos desconsiderar os casos triviais em que $p_0 = 1$ e/ou $\pi_0 = 1$.

Assim, na Seção 3.1 abordamos o problema de determinar a probabilidade de extinção do processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ descrito na Definição 3.1 e apresentamos em detalhes o resultado obtido por Athreya e Schuh [2] que estabelece que, com probabilidade 1, a cadeia atinge o estado 0 (extinção) em um tempo finito.

Na Seção 3.2, estudamos o valor esperado do tempo de extinção, apresentamos os resultados obtidos em Athreya e Schuh [2] que estabelecem condições para a finitude de tempo esperado de extinção.

As referências bibliográficas utilizadas neste capítulo são: [1], [2], [5], [9], [10], [11], [13] e [14].

3.1 Probabilidade de Extinção

Considere o processo de ramificação $\{Z_n, n \geq 0\}$ regido por uma fronteira K , conforme descrito na Definição 3.1.

Naturalmente, um questionamento que surge é se neste novo tipo de processo prevalecerá o comportamento proveniente dos processos críticos e subcríticos, cuja extinção é certa conforme apresentado no Capítulo 1, ou dos processos supercríticos, onde existe uma probabilidade positiva de não se atingir o estado zero em tempo finito. Para analisar a

probabilidade de extinção do processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ Athreya e Schuh [2] propuseram a separação do processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ em *ciclos*, definidos entre os tempos em que $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ se torna supercrítico após ter deixado de ser, retornando novamente para um valor de população menor do que a fronteira K estabelecida. Assim, uma vez que $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ regressa para o estado em que se torna um processo supercrítico, podemos considerar um novo processo a partir daí com as mesmas características do processo inicial.

Especificamente, seja

$$T_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : Z_n \geq K + 1 \text{ ou } Z_n = 0\}, \quad (3.1)$$

ou seja, T_1 é o tempo em que o processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ excede a fronteira K pela primeira vez ou atinge o estado de extinção também pela primeira vez. Note que, como T_1 é um tempo de parada relativo a $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$, a variável aleatória Z_{T_1} está bem definida.

Agora, considere o caso $Z_{T_1} \geq K + 1$. Como $\{Z_{T_1+n}, n = 0, 1, \dots\}$ evolui além da fronteira K como um processo crítico ou subcrítico, onde a probabilidade de extinção é certa, então Z_{T_1+n} atingirá o conjunto de estados $\{0, 1, 2, \dots, K\}$ com probabilidade 1. Logo, podemos definir

$$D_1 \equiv \begin{cases} \min\{n : n \geq 1, Z_{T_1+n} \leq K\}, & \text{quando } Z_{T_1} \geq K + 1 \\ 0, & \text{quando } Z_{T_1} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Ou seja, se o processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ atingiu em T_1 um estado $k \geq K + 1$, antes de atingir o estado 0, então D_1 é o tempo de primeira visita, após o tempo T_1 , a algum estado em $\{0, 1, 2, \dots, K\}$. Caso contrário, se $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ atingiu pela primeira vez em T_1 o estado 0, antes de ultrapassar a fronteira K , então D_1 é igual a zero.

Assim, dizemos que no tempo $T_1 + D_1$ o Processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ completou seu *primeiro ciclo*, ou sendo extinto ou se comportando como um processo supercrítico ao final.

Se $Z_{T_1+D_1} \neq 0$, ou seja, ao final do primeiro ciclo o processo não atingiu a extinção, o processo inicia seu *segundo ciclo* com $Z_{T_1+D_1}$ ($\in \{1, 2, \dots, K\}$) indivíduos iniciais. Podemos analisar o segundo ciclo como um novo processo que se inicia a partir do momento $T_1 + D_1$. Este ciclo pode ser tratado da mesma forma que o primeiro e independentemente deste, uma vez que só depende do seu número de indivíduos iniciais e de suas probabilidades de transição. De maneira análoga, definimos o *terceiro ciclo*, *quarto ciclo*, e assim em diante. Portanto, podemos definir tempos aleatórios $T_2, D_2, T_3, D_3, \dots, T_n, D_n, \dots$, respectivamente.

No caso em que se $Z_{T_1+D_1} = 0$, então $(T_i, D_i) = (0, 0)$ para todo $i \geq 2$. O mesmo vale quando os demais $T_n + D_n$, $n \geq 2$, em que o processo alcançou o estado 0.

Uma vez que os tempos $T_n + D_n$ marcam os pontos onde o processo pode entrar no estado 0, temos que o tempo de extinção $T \equiv \min\{n : n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\}$ pode ser escrito como

$$T = T_1 + D_1 + \cdots + T_{n^*} + D_{n^*}, \text{ onde } n^* = \min\{n : n \in \mathbb{N}, Z_{T_1+D_1+\cdots+T_n+D_n} = 0\} \quad (3.3)$$

O objetivo agora é determinar a probabilidade de extinção do processo $\{Z_n\}$ dado que o processo iniciou com j indivíduos, isto é, $Z_0 = j \in \mathbb{N}$, que pode ser escrita como

$$q_j = P(Z_n = 0 \text{ para algum } n \geq 1 | Z_0 = j) = P(T < +\infty | Z_0 = j). \quad (3.4)$$

Athreya e Schuh [2] obtiveram que o processo atinge a extinção com probabilidade 1 para qualquer estado inicial $j \in \mathbb{N}$. É o que apresentamos no teorema a seguir.

Teorema 3.1. Seja $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}_{n \geq 0}$ um processo de ramificação regido por uma fronteira K e T o seu tempo de extinção. Então, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$q_j \equiv P(T < \infty | Z_0 = j) = 1$$

e conseqüentemente, $q = P(T < +\infty) = 1$. Ou seja, o processo regido por uma fronteira K se extingue em tempo finito com probabilidade 1.

Demonstração.

Primeiramente, considere o caso em que $Z_0 = j$, com $j \leq K$. Denote por P_j a medida de probabilidade condicional dado $Z_0 = j$.

Seja T_1 o tempo de parada definido em (3.1). Então, segue que $P_j(Z_{T_1+1} = 0 | Z_{T_1} = 0) = 1$ e

$$\begin{aligned} P_j(Z_{T_1+1} = 0 | Z_{T_1} \geq K+1) &= \sum_{h=K+1}^{\infty} P_j(Z_{T_1+1} = 0, Z_{T_1} = h | Z_{T_1} \geq K+1) \\ &= \sum_{h=K+1}^{\infty} \frac{P_j(Z_{T_1+1} = 0, Z_{T_1} = h)}{P_j(Z_{T_1} \geq K+1)} \\ &= \sum_{h=K+1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^K P_j(Z_{T_1+1} = 0, Z_{T_1} = h, Z_{T_1-1} = i)}{\sum_{i=1}^K P_j(Z_{T_1} \geq K+1, Z_{T_1-1} = i)}. \end{aligned}$$

Mas, pela Definição 3.1(ii), a partir do tempo $K+1$, o processo passa a ser governado como um processo de ramificação crítico ou subcrítico com distribuição de descendência $\{p_k, k \geq 0\}$. Logo, como T_1 é um tempo de parada relativo a $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$, temos que neste caso $\{Z_{T_1+n}, n = 0, 1, \dots\}$ é uma cadeia de Markov com probabilidades de transição $P_j(Z_{T_1+1} = k | Z_{T_1} = h) = p_k^{*h}$, como em (1.10), em que p_k^{*h} indica a k -ésima convolução de

$p = \{p_k, k \geq 0\}$ e P_j indica a medida de probabilidade condicionada à $\{Z_0 = j\}$, neste caso com $j \geq K + 1$.

Logo, obtemos

$$P(Z_{T_1+1} = 0 | Z_{T_1} \geq K + 1) = \sum_{h=K+1}^{\infty} p_0^h \left(\frac{\sum_{i=1}^K P(Z_{T_1} = h, Z_{T_1-1} = i)}{\sum_{i=1}^K P(Z_{T_1} \geq K + 1, Z_{T_1-1} = i)} \right). \quad (3.5)$$

Um resultado conhecido para somas finitas garante que dadas duas seqüências finitas de número positivos a_1, a_2, \dots, a_k e b_1, b_2, \dots, b_k temos que

$$\min_i \frac{a_i}{b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^k a_i}{\sum_{i=1}^k b_i} \leq \max_i \frac{a_i}{b_i}.$$

Logo, utilizando tal resultado duas vezes em (3.5), primeiramente para o quociente das somas em i , podemos obter

$$P_j(Z_{T_1+1} = 0 | Z_{T_1} \geq K + 1) \geq \sum_{h=K+1}^{\infty} p_0^h \frac{P_j(Z_{T_1} = h, Z_{T_1-1} = i_0)}{P_j(Z_{T_1} \geq K + 1, Z_{T_1-1} = i_0)} \quad (3.6)$$

para $i_0 \leq K$ tal que o quociente atinge seu mínimo.

Agora, pela Definição 3.1(i), se $Z_{T_1-1} = i_0 \leq K$, temos que o processo $\{Z_{T_1-1+n}, n \geq 1\}$ é uma cadeia de Markov com probabilidade de transição $P_j(Z_{T_1} = k | Z_{T_1-1} = i_0) = P(Z_{T_1} = k | Z_{T_1-1} = i_0) = \pi_k^{*i_0}$.

Assim, de (3.6) segue que

$$P_j(Z_{T_1+1} = 0 | Z_{T_1} \geq K + 1) = \sum_{h=K+1}^{\infty} p_0^h \pi_h^{*i_0} \frac{\sum_{l=1}^{\infty} P_j(Z_{l-1} = i_0, Z_{l-2} \leq K, \dots, Z_1 \leq K)}{\sum_{l=1}^{\infty} P_j(Z_l \geq K + 1, Z_{T_1-1} = i_0)} \quad (3.7)$$

Para obter um limitante superior do quociente no lado direito da desigualdade acima, denotemos para $1 \leq i, j \leq K$ e para todo $k \geq K + 1$

$$\lambda_{i,j}(k) = P(Z_{T_1} = k | Z_{T_1-1} = i, Z_0 = j).$$

Então, podemos escrever, usando a definição de T_1 em (3.1):

$$\begin{aligned}
\lambda_{ij}(k) &= \frac{\sum_{l=1}^{\infty} P(Z_{T_1} = k, Z_{T_1-1} = i, Z_0 = j, T_1 = l)}{\sum_{l=1}^{\infty} P(Z_{T_1-1} = i, Z_0 = j, T_1 = l)} \\
&= \frac{\sum_{l=1}^{\infty} P(Z_l = k, Z_{l-1} = i, 0 < Z_{l-2} \leq K, \dots, 0 < Z_1 \leq K, Z_0 = j)}{\sum_{l=1}^{\infty} P(\{Z_l \geq K+1\}, Z_{l-1} = i, 0 < Z_{l-2} \leq K, \dots, 0 < Z_1 \leq K, Z_0 = j)} \\
&\leq \frac{\sum_{l=1}^{\infty} P(Z_l = k | Z_{l-1} = i) P(Z_{l-1} = i, Z_{l-2} \leq K, \dots, Z_1 \leq K, Z_0 = j)}{\sum_{l=1}^{\infty} P(Z_l \geq K+1, Z_{l-1} = i, Z_{l-2} \leq K, \dots, Z_1 \leq K, Z_0 = j)}
\end{aligned}$$

e usando, como anteriormente, (i) da Definição 3.1, podemos concluir que

$$\lambda_{i,j}(k) \leq \pi_k^{*i} \frac{\sum_{l=1}^{\infty} P(Z_{l-1} = i, Z_{l-2} \leq K, \dots, Z_1 \leq K, Z_0 = j)}{\sum_{l=1}^{\infty} P(Z_l \geq K+1, Z_{l-1} = i, Z_{l-2} \leq K, \dots, Z_1 \leq K, Z_0 = j)}, \quad (3.8)$$

em que o quociente do lado direito é positivo.

Agora, associado a $\{\lambda_{ij}(k), k \geq K+1\}$ temos a função geradora

$$g_{i,j}(s) = \sum_{h=K+1}^{\infty} \lambda_{i,j}(h) s^h, \quad 0 \leq s \leq 1$$

para cada $1 \leq i, j \leq K$.

Assim, usando (3.8) em (3.7), podemos escrever

$$\begin{aligned}
P_j(Z_{T_1+1} = 0 | Z_{T_1} \geq K+1) &\geq \sum_{h=K+1}^{\infty} p_0^h \lambda_{i_0, j_0}(h) \\
&= g_{i_0, j_0}(p_0) \\
&\geq \min_{i,j} \{g_{i,j}(p_0) : 1 \leq i, j \leq K\} := \lambda
\end{aligned}$$

Ou seja, para $j \geq K+1$,

$$P_j(Z_{T_1+1} = 0 | Z_{T_1} \geq K+1) \geq \lambda \quad (3.9)$$

com $0 < \lambda \leq 1$, pois $p_0 > 0$.

Dessa forma, como, pela definição de T_1 , temos que $Z_{T_1} \geq K$ ou $Z_{T_1} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} P_j(Z_{T_1+D_1} = 0) &= P_j(Z_{T_1+D_1} = 0, Z_{T_1} \geq K+1) + P_j(Z_{T_1+D_1} = 0, Z_{T_1} = 0) \\ &\geq P_j(Z_{T_1+1} = 0, Z_{T_1} \geq K+1) + P_j(Z_{T_1+1} = 0, Z_{T_1} = 0) \\ &= P_j(Z_{T_1+1} = 0 | Z_{T_1} \geq K+1) P_j(Z_{T_1} \geq K+1) + \\ &\quad + P_j(Z_{T_1+1} = 0 | Z_{T_1} = 0) P_j(Z_{T_1} = 0). \end{aligned}$$

Então, por (3.9), como $0 < \lambda \leq 1$, segue que

$$P_j(Z_{T_1+D_1} = 0) \geq \lambda \left(P_j(Z_{T_1} \geq K+1) + P_j(Z_{T_1} = 0) \right) = \lambda$$

e, conseqüentemente,

$$P_j(Z_{T_1+D_1} \in \{1, 2, \dots, K\}) \leq 1 - \lambda.$$

Logo, como os ciclos em um processo de ramificação com fronteira K são independentes entre si, para cada $n \geq 1$ temos que

$$\begin{aligned} P_j(Z_{T_1+D_1+\dots+T_n+D_n} \in \{1, \dots, K\}) &= P_j(Z_{T_1+D_1} \in \{1, \dots, K\}) \dots P_j(Z_{T_n+D_n} \in \{1, \dots, K\}) \\ &\leq (1 - \lambda)^n. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Finalmente, por (3.4) e (3.3), temos

$$\begin{aligned} q_j &= P(T < +\infty | Z_0 = j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(T = T_1 + D_1 + \dots + T_n + D_n | Z_0 = j) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_{T_1+D_1+T_2+D_2+\dots+T_n+D_n} \in \{1, 2, \dots, K\} | Z_0 = j) \end{aligned}$$

Assim, de (3.10), segue que, para $j \geq K+1$,

$$1 \geq q_j \geq 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \lambda)^n = 1,$$

já que $0 < \lambda \leq 1$. Ou seja, $q_j = 1$, para $j \geq K+1$.

Por outro lado, se $Z_0 = j$ com $j \geq K+1$, então pela Definição 3.1, o processo começa se comportando como um processo crítico ou subcrítico. Logo, atinge com probabilidade 1 o conjunto $\{0, 1, \dots, K\}$ e, conseqüentemente, ou o processo atingirá o conjunto $\{1, 2, \dots, K\}$ em tempo finito ou se extinguirá em tempo finito. No primeiro caso, podemos analisar o processo a partir do momento em que atinge o conjunto $\{1, 2, \dots, K\}$, ou seja, iniciando-se a

partir de um comportamento supercrítico. A partir daí, o procedimento se resume ao caso visto anteriormente em que $Z_0 = j, j \leq K$.

Portanto, para cada $j \in \mathbb{N}$, provamos que

$$q_j = P(T < +\infty | Z_0 = j) = 1.$$

□

3.2 Tempo Esperado de Extinção

Considere o processo de ramificação $\{Z_n, n \geq 0\}$ regido por uma fronteira K , conforme descrito na Definição 3.1.

Nesta seção vamos apresentar os resultados obtidos por Athreya e Schuh [2] que estabelecem condições sob as quais o valor esperado do tempo de extinção é finito ou infinito.

Para isso, seja T o tempo de extinção do processo $\{Z_n, n \geq 0\}$, ou seja,

$$T = \min\{n \geq 1 : Z_n = 0\}.$$

Utilizando a decomposição de $\{Z_n, n \geq 0\}$ em ciclos descrita na seção anterior, Athreya e Schuh obtiveram, primeiramente, condições suficientes, sob a função geradora de probabilidade de descendentes, para que ET seja finita, cujo resultado apresentamos no teorema a seguir.

Teorema 3.2. Sejam $T \equiv \min\{n : n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\}$ o tempo de extinção de um processo de ramificação $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ regido por uma fronteira K e $f(s) = \sum_{j \geq 0} p_j s^j, 0 \leq s \leq 1$, a função geradora de probabilidades da distribuição de descendência $(p_j)_{j \geq 0}$. Sejam também $1 < M < \infty$ e $m \leq 1$ as médias de nascimento do processo quando este se comporta como supercrítico e subcrítico ou crítico, respectivamente. Se

$$I \equiv \int_0^1 \frac{1-s}{f(s)-s} ds < \infty, \quad (3.11)$$

então, $E(T) < \infty$.

Demonstração. A ideia da prova consiste em utilizar a decomposição (3.3) e estimar a esperança de T utilizando a esperança dos tempos de parada T_n e $D_n, n \geq 1$, definidos em (3.1) e (3.2).

Primeiramente, vamos analisar ED_1 .

Para isso, considere τ o tempo de extinção do único indivíduo. Pela Proposição 2.1, se $m = \sum k p_k < 1$ então $E\tau < +\infty$ e pela Proposição 2.2 se $m = 1$ e (3.11) é satisfeita então $E\tau < +\infty$. Logo, sob as hipóteses assumidas, temos

$$E\tau < +\infty. \quad (3.12)$$

Agora, suponha que $Z_{T_1} = k \geq K + 1$. Removendo a fronteira K no processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$, temos que $\{Z_{T_1+n}, n = 0, 1, \dots\}$ se comporta como um processo subcrítico ou crítico com k indivíduos iniciais. Logo, podemos analisar tal processo como a soma de processos com um único indivíduo inicial, ou seja

$$Z_{T_1+n} = \zeta_n^{(1)} + \dots + \zeta_n^{(k)},$$

onde $\{\zeta_n^{(i)}, n = 0, 1, \dots\}$, para cada $1 \leq i \leq k$, são processos de ramificação críticos ou subcríticos, independentes todos com distribuição de descendência $(p_j)_{j \geq 0}$.

Observe que o processo $\{\zeta_n^{(1)} + \dots + \zeta_n^{(k)}, n = 0, 1, \dots\}$ é extinto quando todos os processos $\{\zeta_n^{(i)}, n = 0, 1, \dots\}$ atingirem o estado absorvente 0. Se τ_i é o tempo de extinção do processo $\{\zeta_n^{(i)}, n = 0, 1, \dots\}$, então a extinção da soma dos processos ocorre em $\max\{\tau_1, \dots, \tau_k\}$, onde tal valor é claramente menor ou igual a $\tau_1 + \dots + \tau_k$.

Assim, o tempo para o processo $\{Z_{T_1+n}, n = 0, 1, \dots\}$ atingir o conjunto $\{0, 1, \dots, K\}$, ou seja, D_1 , não pode ser maior que o tempo para $\{\zeta_n^{(i)}, n = 0, 1, \dots\}$ ser extinto, uma vez que o segundo é um caso particular do primeiro. Logo,

$$D_1 \leq \max\{\tau_1, \dots, \tau_k\} \leq \tau_1 + \dots + \tau_k.$$

e, pela monotonicidade da esperança, segue que

$$E(D_1 | Z_{T_1} = k) \leq E(\tau_1 + \dots + \tau_k) = kE(\tau_1) := kE(\tau) \quad (3.13)$$

e

$$E(D_1 | Z_{T_1} = 0) = 0.$$

Por outro lado, das propriedades de esperança condicional, como $P(Z_{T_1} \geq K+1) > 0$, pois $\pi_0 \neq 1$, então

$$\begin{aligned} E(D_1|Z_{T_1} \geq K+1) &= \frac{E(D_1 I_{(Z_{T_1} \geq K+1)})}{P(Z_{T_1} \geq K+1)} \\ &= \sum_{k \geq K+1} \frac{E(D_1 I_{(Z_{T_1}=k)})}{P(Z_{T_1} \geq K+1)} \\ &= \sum_{k \geq K+1} \frac{E(D_1|Z_{T_1}=k)P(Z_{T_1}=k)}{P(Z_{T_1} \geq K+1)}. \end{aligned}$$

Então, por (3.13), segue que

$$E(D_1|Z_{T_1} \geq K+1) \leq E(\tau) \sum_{k \geq K+1} \frac{kP(Z_{T_1}=k)}{P(Z_{T_1} \geq K+1)}. \quad (3.14)$$

Agora, de maneira análoga do que foi feito na demonstração do Teorema 3.1, se considerarmos para cada $1 \leq i, j \leq K$,

$$\lambda_{i,j}(k) = P(Z_{T_1} = k | Z_{T_1-1} = i, Z_0 = j), \quad \forall k \geq K+1,$$

então da Regra da Probabilidade Total, segue que

$$\begin{aligned} P(Z_{T_1} = k) &= \sum_{1 \leq i, j \leq K} \lambda_{i,j}(k) P(Z_{T_1-1} = i, Z_0 = j) \\ &\leq \max_{1 \leq i, j \leq K} \lambda_{i,j}(k) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Assim, definindo para cada $1 \leq i, j \leq K$,

$$g_{ij}(s) = \sum_{k=K+1}^{\infty} \lambda_{i,j}(k) s^k, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

como na demonstração do Teorema 3.1, então substituindo (3.15) em (3.14), como $E\tau < \infty$ por (3.12),

$$\begin{aligned} E(D_1|Z_{T_1} \geq K+1) &\leq \frac{E(\tau) \max \left\{ \sum_{k \geq K+1} k \lambda_{i,j}(k) : 1 \leq i, j \leq K \right\}}{P(Z_{T_1} \geq K+1)} \\ &= \frac{E(\tau) \max \{g'_{i,j}(1^-) : 1 \leq i, j \leq K\}}{P(Z_{T_1} \geq K+1)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mas, pela definição de T_1 em (3.1) e do processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ segue que

$$\lambda_{i,j}(k) = P(Z_{T_1} = k | Z_{T_1-1} = i, Z_0 = j) = \pi_k^{*i}$$

e, em consequência,

$$g'_{i,j}(1^-) = \sum_{h \geq K+1} \lambda_{i,j}(h)h = \sum_{h \geq K+1} \pi_k^{*i}h \leq \sum_{h=0}^{\infty} \pi_k^{*i}h = M^i < \infty.$$

Assim,

$$\max\{g'_{i,j}(1^-), 1 \leq i, j \leq K\} < \infty$$

e de (3.16) segue que

$$E(D_1 | Z_{T_1} \geq K+1) < \infty.$$

Como $E(D_1 | Z_{T_1} = 0) = 0$, concluímos que então $E(D_1) < \infty$.

Agora, observe que $P(T > T_1 + D_1) = P(Z_{T_1+D_1} \in \{1, 2, \dots, K\})$ e, como observamos na demonstração do Teorema 3.1, os ciclos do processo com fronteira K são independentes e distribuídos juntamente, então de (3.3) e da Identidade de Wald apresentada no Lema 2.2, segue que

$$E(T) \leq E(T_1 + D_1 + \dots + T_{n^*} + D_{n^*}) = E(T_1 + D_1)E(n^*), \quad (3.17)$$

onde n^* é o menor n tal que $Z_{T_1+D_1+\dots+T_n+D_n} = 0$. Mas, por (3.10), segue que

$$E(n^*) = \sum_{k \geq 1} P(n^* \geq k) = \sum_{k \geq 1} P(Z_{T_1+D_1+T_2+D_2+\dots+T_n+D_n} \in \{1, 2, \dots, K\}) \leq \sum_{k \geq 1} (1 - \lambda)^k.$$

Logo, substituindo em (3.17) e utilizando (2.30) da Proposição 2.5, podemos escrever

$$\begin{aligned} E(T) &\leq E(T_1 + D_1) \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda)^k \\ &\leq (C_1 + E(D_1))(1 - \lambda) \frac{1}{\lambda} \\ &= (C_1 + E(D_1)) \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) < \infty, \end{aligned}$$

pois $C_1 < \infty$, $E(D_1) < \infty$ e $0 < \lambda \leq 1$.

□

Para um caso especial em que $p_0 + p_1 = 1$ e $p_1 < 1$, Athreya e Schuh [2], obtiveram uma condição necessária e suficiente para $ET < +\infty$, dependendo somente da distribuição de descendência $(\pi_k)_{k \geq 0}$ do processo supercrítico, podendo, neste caso, $M = +\infty$.

Para a demonstração desse resultado, necessitamos do seguinte resultado auxiliar, também apresentado em Athreya e Schuh [2], para processos supercríticos.

Lema 3.1. (i) Seja $(\pi_j)_{j \geq 0}$ uma função de descendência relativa a um processo de ramificação supercrítico. Então

$$L_M = \sum_{j=2}^{\infty} (\ln j) \pi_j < \infty \iff \sum_{j=2}^{\infty} (\ln j) \pi_j^{*i} < \infty \quad (3.18)$$

para todo $i \geq 2$.

(ii) Sejam $\{\zeta_n^{(i)}, n = 0, 1, \dots\}$, $1 \leq i \leq K$, onde $K \in \mathbb{N}$, processos de ramificação independentes e subcríticos com distribuição de descendência $(p_j)_{j \geq 0}$, $\zeta_{0,i} = 1$. Se τ_i é o tempo de extinção do processo $\{\zeta_n^{(i)}, n = 0, 1, \dots\}$ e $\tilde{\tau}_j = \max\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j\}$, $1 \leq j \leq K$, então

$$E \tilde{\tau}_j \leq K E \tau_1 < +\infty. \quad (3.19)$$

Demonstração.

(i) Seja $(\pi_j)_{j \geq 0}$ uma função de probabilidade tal que $\sum_{j=0}^{\infty} j \pi_j > 1$. Considere $Y_1, \dots, Y_i \geq 0$ variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $(\pi_j)_{j \geq 0}$.

Por um lado suponha que $L_M = \sum \ln j \pi_j < +\infty$. Então $Y_1 + \dots + Y_i$ tem distribuição $(\pi_j^{*i})_{j \geq 0}$. Assim, como $\ln(1+a+b) \leq \ln(1+a) + \ln(1+b)$, e Y_1, \dots, Y_i são identicamente distribuídas, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} \ln(j) \pi_j^{*i} &\leq \sum_{j=2}^{\infty} (\ln(1+j)) \pi_j^{*i} \leq E(\ln(1+Y_1 + \dots + Y_i)) \\ &\leq E(\ln(1+Y_1) + \dots + \ln(1+Y_i)) \\ &= iE(\ln(1+Y_1)). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Agora, como $\frac{\ln(1+j)}{\ln(j)} \rightarrow 1$ quando $j \rightarrow \infty$, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\ln(1+j) \leq (1+\varepsilon) \ln j, \forall j \geq n.$$

Assim, tomando $N > n$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{j=N}^{\infty} \ln(1+j)\pi_j &\leq \sum_{j=N}^{\infty} (1+\varepsilon)\ln(j)\pi_j \\ &\leq (1+\varepsilon) \sum_{j=2}^{\infty} \ln(j)\pi_j = (1-\varepsilon)L_M < \infty. \end{aligned}$$

e de (3.20) segue que

$$\sum_{j=2}^{\infty} \ln(j)\pi_j^{*i} \leq iE(\ln(1+Y_1)) \leq i(1-\varepsilon)L_M < \infty$$

Por outro lado, suponha que $\sum_{j=2}^{\infty} \ln(j)\pi_j^{*i} < \infty$. Então, usando

$$\begin{aligned} L_M &= \sum_{j=2}^{\infty} \ln(j)\pi_j \leq \sum_{j=2}^{\infty} \ln(1+j)\pi_j \\ &\leq E(\ln(1+Y_1)) \\ &\leq E(\ln(1+Y_1+\dots+Y_i)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\ln(1+j))\pi_j^{*i}. \end{aligned}$$

Agora, usando argumentos semelhantes aos usados anteriormente, como $\frac{\ln(1+j)}{\ln j} \rightarrow 1$, podemos obter que

$$\sum_{j=2}^{\infty} \ln(j)\pi_j^{*i} < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \ln(1+j)\pi_j^{*i} < \infty$$

Portanto, $L_M < +\infty$.

- (ii) Uma vez que o máximo de uma coleção finita de variáveis aleatórias é sempre menor ou igual à soma destas variáveis, e como $E\tau_k = \sum_{j=0}^{\infty} jp_j, \forall k = 1, \dots, j$, temos que para $1 \leq j \leq K$,

$$E(\tilde{\tau}_j) = E(\max\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j\}) \leq E(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_j) = jE(\tau_1) \leq KE(\tau_1) < \infty,$$

pois, como pela Proposição 2.1, uma vez que o Processo $\{\zeta_n^{(1)}, n = 0, 1, \dots\}$ é subcrítico com um indivíduo inicial, o seu tempo de extinção τ_1 é finito.

□

Teorema 3.3. Seja $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ um processo de ramificação regido por uma fronteira K , como descrito na Definição 3.1, tal que $p_0 + p_1 = 1$ e $p_1 < 1$. Então

$$(i) \quad L_M = \sum_{j=2}^{\infty} \ln(j)\pi_j < \infty \Rightarrow E(T) < \infty;$$

$$(ii) \quad L_M = \infty \Rightarrow E(T) = \infty;$$

Demonstração. Utilizando a decomposição (3.3) e seguindo os mesmos argumentos do Teorema 3.2, basta analisarmos ED_1 , em que D_1 é definido em (3.2).

Primeiramente, pelos argumentos usados na demonstração do Teorema 3.2, temos para $k \geq K + 1$

$$E(D_1 | Z_{T_1} = k) \leq E(\max\{\tau_1, \dots, \tau_k\}) := E_k \quad (3.21)$$

em que $\tau_i = \min\{n : n \in \mathbb{N}, \zeta_n^{(i)} = 0\}$ e $E_k = E(\zeta_n^{(1)} + \dots + \zeta_n^{(k)})$, com distribuição de descendência $(p_k)_{k \geq 0}$. Lembrando que dado que $Z_{T_1} = k$, então $Z_{T_1+n} = \zeta_n^{(1)} + \dots + \zeta_n^{(i)}$ e $E_k = E(\tilde{\tau} | Z_{T_1} = k)$ em que $\tilde{\tau} = \min\{n : n \in \mathbb{N}, Z_{T_1+n} = 0\}$.

Assim, pelo Lema 2.1, temos que

$$-\frac{1}{\ln(1-p_0)}H_k \leq E_k \leq 1 - \frac{1}{\ln(1-p_0)}H_k \quad (3.22)$$

em que $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}$.

Logo, podemos escrever

$$1 \leq \frac{\ln(1-p_0)E_k}{-H_k} \leq \frac{\ln(1-p_0)}{-H_k} + 1$$

e como, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1-p_0)E_k}{-H_k} = 1,$$

ou seja,

$$E_k \sim -(1/\ln(1-p_0))H_k, \quad (3.23)$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Agora, por outro lado, podemos escrever

$$\begin{aligned} \ln(k) &= \int_1^k \frac{1}{x} dx = \sum_{i=1}^{k-1} \int_i^{i+1} \frac{1}{x} dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \int_i^{i+1} \frac{1}{i} dx \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} = H_{k-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \ln(k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \int_i^{i+1} \frac{1}{x} dx \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} \int_i^{i+1} \frac{1}{i+1} dx \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1} = H_k - 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\ln(k+1)}{\ln(k)} \leq \frac{H_k}{\ln(k)} \leq \frac{\ln(k)+1}{\ln(k)},$$

e como $\ln(k+1) \sim \ln(k)$, quando $k \rightarrow \infty$, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{H_k}{\ln(k)} = 1 \text{ ou seja, } H_k \sim \ln(k). \quad (3.24)$$

Assim, usando (3.23) e (3.24) em (3.22), concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_k}{\ln(k)} = -\frac{1}{\ln(1-p_0)}.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$-\frac{1}{\ln(1-p_0)} \ln(k) \leq E_k \leq \varepsilon - \frac{1}{\ln(1-p_0)} \ln(k), \forall k \geq n_0$$

e, conseqüentemente, podemos determinar constantes $0 < C_3 < C_2$ tais que

$$C_3 \ln(k) < E_k < C_2 \ln(k) \quad (3.25)$$

Com isso, podemos provar os itens (i) e (ii).

(i) Suponha que $L_M = \sum_{j=2}^{\infty} \ln j \pi_j < +\infty$. Usando (3.25) em (3.21) temos

$$E(D_1 | Z_{T_1} = k) \leq C_2 \ln(k).$$

Além disso, $E(D_1 | Z_{T_1} = 0) = 0$. Agora, como $P(Z_{T_1} \geq K+1) > 0$, pois $\pi_0 \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned} E(D_1 | Z_{T_1} \geq K+1) &= \sum_{k \geq K+1} \frac{E(D_1 I_{(Z_{T_1}=k)})}{P(Z_{T_1} \geq K+1)} \\ &= \sum_{k \geq K+1} \frac{E(D_1 | Z_{T_1} = k) P(Z_{T_1} = k)}{P(Z_{T_1} \geq K+1)} \\ &\leq C_2 \sum_{k \geq K+1} \frac{P(Z_{T_1} = k) \ln(k)}{P(Z_{T_1} \geq K+1)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Mas, seguindo o mesmo raciocínio da demonstração do Teorema 3.1, temos que

$$\begin{aligned} P(Z_{T_1} = k) &= \sum_{1 \leq i, j \leq K} P(Z_{T_1} = k | Z_{T_1-1} = i, Z_0 = j) P(Z_{T_1-1} = i, Z_0 = j) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq K} \lambda_{i,j}(k) P(Z_{T_1-1} = i, Z_0 = j) \\ &\leq \max_{1 \leq i, j \leq K} \lambda_{i,j}(k), \end{aligned}$$

em que $\lambda_{i,j}(k) = P(Z_{T_1} = k | Z_{T_1-1} = i, Z_0 = j)$, $\forall k = 1, \dots, K$.

Assim, de (3.26) segue

$$\begin{aligned} E(D_1 | Z_{T_1} \geq K+1) &\leq C_2 \max_{1 \leq i, j \leq K} \sum_{k \geq K+1} \frac{\lambda_{i,j}(k) \ln(k)}{P(Z_{T_1} \geq K+1)} \\ &= \frac{C_2}{P(Z_{T_1} \geq K+1)} \max_{1 \leq i, j \leq K} \left\{ \sum_{k \geq K+1} \ln(k) \lambda_{i,j}(k) \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Mas, por (3.8) na demonstração do Teorema 3.1, temos

$$\lambda_{i,j}(k) \leq \pi_k^{*i} \frac{\sum_{l=1}^{\infty} P(Z_{l-1} = i, Z_{l-2} \leq K, \dots, Z_1 \leq K, Z_0 = j)}{\sum_{l=1}^{\infty} P(Z_l \geq K+1, Z_{l-1} = i, Z_{l-2} \leq K, \dots, Z_1 \leq K, Z_0 = j)} := \pi_k^{*i} \alpha(i, j, k),$$

com $0 < \alpha(i, j, k) < \infty$. Consequentemente, de (3.27) obtemos

$$E(D_1 | Z_{T_1} \geq K+1) \leq \frac{C_2}{P(Z_{T_1} \geq K+1)} \max_{1 \leq i, j \leq K} \left\{ \alpha(i, j, k) \sum_{k \geq K+1} \ln(k) \pi_k^{*i} \right\}.$$

Agora, como por hipótese $L_M < +\infty$, pelo Lema 3.1 temos que a série $\sum_{k \geq K+1} \ln(k) \pi_k^{*i} < +\infty$ para cada $1 \leq i \leq K$. Logo, temos $E(D_1 | Z_{T_1} \leq K+1) < \infty$ e como $E(D_1 | Z_{T_1} = 0)$ segue que $ED_1 < +\infty$. Portanto, usando (3.17) e os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 3.2, concluímos que $ET < +\infty$.

(ii) Por outro lado, suponha que $L_M = \sum_{j \geq 2} \ln j \pi_j = +\infty$. Utilizando argumentos semelhantes aos usados na demonstração de (i), podemos obter

$$P(Z_{T_1} = k) \geq \min_{1 \leq i, j \leq K} \lambda_{i,j}(k)$$

e usando a desigualdade (3.25), escrevemos

$$\begin{aligned} E(D_1 | Z_{T_1} \geq K+1) &= \sum_{k \geq K+1} \frac{E(D_1 | Z_{T_1} = k) P(Z_{T_1} = k)}{P(Z_{T_1} \geq K+1)} \\ &\geq C_3 \min_{1 \leq i, j \leq K} \sum_{k \geq K+1} \lambda_{i,j}(k) \ln(k) - \sum_{k \geq K+1} E_k \frac{P(Z_{T_1} = k)}{P(Z_{T_1} \geq K+1)}. \end{aligned}$$

Mas, por (ii) do Lema 3.1, temos que $-E_k \geq -KE(\tau_1)$ e que $E(\tau_1) < +\infty$.

Logo, obtemos

$$\begin{aligned} E(D_1 | Z_{T_1} \geq K+1) &\geq C_3 \min_{1 \leq i, j \leq K} \sum_{k \geq K+1} \lambda_{i,j}(k) \ln(k) - \sum_{k \geq K+1} KE(\tau_1) \frac{P(Z_{T_1} = k)}{P(Z_{T_1} \geq K+1)} \\ &= C_3 \min_{1 \leq i, j \leq K} \sum_{k \geq K+1} \lambda_{i,j}(k) \ln(k) - KE(\tau_1). \end{aligned}$$

Mas, usando as mesmas ideias da demonstração do Teorema 3.1 podemos obter, neste caso, que $\sum_{k \geq K+1} \lambda_{i,j}(k) \ln(k) = +\infty$. Logo, obtemos que $E(D_1 | Z_{T_1} \geq K+1) = +\infty$ e como $E(D_1 | Z_{T_1} = 0) = 0$, segue que $ED_1 = +\infty$.

Portanto, como $T \geq D_1$ segue que $ET = +\infty$.

□

Finalizamos este capítulo com o resultado de Athreya e Schuh [2], no qual obtemos que no caso $\pi_0 = 0$ e $m = 1$, a condição (3.11) do Teorema 3.2 é necessária e suficiente para que $ET < +\infty$.

Teorema 3.4. Seja $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ um processo de ramificação, regido por uma fronteira K , conforme descrito na Definição 3.1, e com $\pi_0 = 0$. Suponha que $(p_j)_{j \geq 0}$ é uma distribuição associada a um processo crítico, ou seja, $m = 1$, com função geradora de probabilidade $f(s)$. Então, $ET < +\infty$ se, e somente se,

$$I = \int_0^1 \frac{1-s}{f(s)-s} ds < \infty.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.2, já provamos que se $m \leq 1$ e $I < +\infty$ então $ET < +\infty$.

Para provar a recíproca, basta provarmos que se $I = +\infty$ então $ET = +\infty$.

Primeiramente, pelo Teorema 3.1, como $m = 1$ temos que $P(T < +\infty) = 1$. Agora, a condição $\pi_0 = 0$ nos garante que tal extinção só pode ocorrer enquanto o processo se comporta como um processo crítico, passando de algum $k \geq K + 1$ para o estado absorvente 0 (com probabilidade p_0^k).

Nós iremos analisar o Processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ por meio de um processo $\{\rho_n, n = 0, 1, \dots\}$, que é caracterizado pela função geradora de probabilidade $f(s)$, que representa o comportamento crítico de $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ e com um único indivíduo inicial ($\rho_0 = 1$).

Assumindo $I = +\infty$, como $m = 1$, pela Proposição 2.2 segue que $E(\tau_\rho) = \infty$, onde τ_ρ é o tempo de extinção do processo $\{\rho_n, n = 0, 1, \dots\}$.

Podemos construir $\{\rho_n, n = 0, 1, \dots\}$ a partir de $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$. Uma vez que $\{Z_{T_1+n}, n = 0, 1, \dots\}$ se comporta como a soma de processos de ramificação independentes com a mesma função geradora de descendentes $f(s)$ e com um único indivíduo inicial para $n = 0, 1, \dots, D_1$, podemos realizar nossa construção seguindo as seguintes etapas:

Passo 1) Escolha aleatoriamente um dos $Z_{T_1} \geq K + 1$ indivíduos presentes na geração T_1 do processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ e defina

$$\rho_n, n = 0, 1, \dots, D_1$$

como sendo o número dos descendentes gerados por esse indivíduo. Assim, como estamos na linhagem de apenas um único indivíduo, temos $\rho_n \leq Z_{T_1+n}$ para todo $n = 0, \dots, D_1$.

Passo 2) Como $Z_{T_1+D_1} \leq K$, então ou $\rho_{D_1} = 0$ ou $\rho_{D_1} = j \in \{1, \dots, K\}$. No segundo caso, escolha j indivíduos aleatoriamente de $Z_{T_1+D_1+T_2}$ e defina

$$\rho_{D_1+n}, n = 0, \dots, D_2$$

como sendo o número dos descendentes desses j indivíduos.

Ou seja, $\{\rho_{D_1+n}, n = 0, 1, \dots\}$ agora está definido para $0 \leq n \leq D_1 + D_2$. Podemos repetir o Passo 2 para defini-lo para os tempos seguintes.

Como $\{\rho_n, n = 0, 1, \dots\}$ se extingue no mais tardar no tempo T , que é a extinção de todo o processo $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$, temos que τ_ρ e conseqüentemente

$$E(\tau_\rho) \leq E(T).$$

Mas $E(\tau_\rho) = \infty$, uma vez que $\{\rho_n, n = 0, 1, \dots\}$ é um processo crítico sobre as condições de $I = \infty$ e partindo de um único indivíduo inicial. Logo, segue que $E(T) = \infty$.

□

Bibliografia

- [1] Athreya, K. B. & Ney (1972). *Branching processes*. Springer.
- [2] Athreya, K. B. & Schuh, H.-J. (2016). A galton-watson process with a threshold. *Journal of Applied Probability*, 53(2), 614–621.
- [3] Chung, K. L. & Zhong, K. (2001). *A course in probability theory*. Academic press.
- [4] Harris, T. E. et al. (1963). *The theory of branching processes*, volume 6. Springer Berlin.
- [5] Jagers, P. (1996). Population-size-dependent branching processes. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 9(4), 449–457.
- [6] Jagers, P. et al. (1975). *Branching processes with biological applications*. Wiley.
- [7] James, B. R. (2002). Probabilidade: Um curso em nível intermediário, 2a. edição. *IMPA, Rio de Janeiro*.
- [8] Kannan, D. (1979). *An introduction to stochastic processes*. Technical report.
- [9] Klebaner, F. C. (1983). Population-size-dependent branching process with linear rate of growth. *Journal of Applied Probability*, 20(2), 242–250.
- [10] Klebaner, F. C. (1984). Geometric rate of growth in population-size-dependent branching processes. *Journal of applied probability*, 21(1), 40–49.
- [11] Levina, L., Leontovich, A., & Pyatetskii-Shapiro, I. (1968). On regulative branching process. *Problemy Pederaci Informatsii*, 4, 72–82.
- [12] Lima, E. L. (1999). Curso de análise, volume 1 of projeto euclides. *Rio de Janeiro*.
- [13] Seneta, E. (1967). The galton-watson process with mean one. *Journal of Applied Probability*, 4(3), 489–495.
- [14] Vasil'ev, A. (1968). Control of the numbers of a cell population consisting of cells of two types. *Problemy Peredachi Informatsii*, 4(4), 84–85.
- [15] Williams, D. (1991). *Probability with martingales*. Cambridge university press.

