SOLUCÃO DAS ATIVIDADES COM MOSAICOS

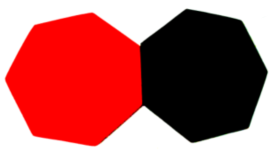
1. Medidas dos ângulos internos dos polígonos regulares convexos, em graus.

Lados	Ângulo interno	Lados	Ângulo interno
3	60	12	150
4	90	15	156
5	108	18	160
6	120	20	162
7	$128\frac{4}{7}$	24	165
8	135	36	170
9	140	42	$171\frac{3}{7}$
10	144	n	$180\ (1-\frac{2}{n})$

2. Cópias congruentes dos seguintes polígonos regulares convexos podem ser unidas por lados concorrentes em volta de um vértice de forma tal que eles rodeiam completamente o vértice sem deixar espaços abertos e sem superposições.

Não é possível fazer mosaico regular com pentágono regular convexo

Não é possível formar mosaico regular com heptágono regular convexo

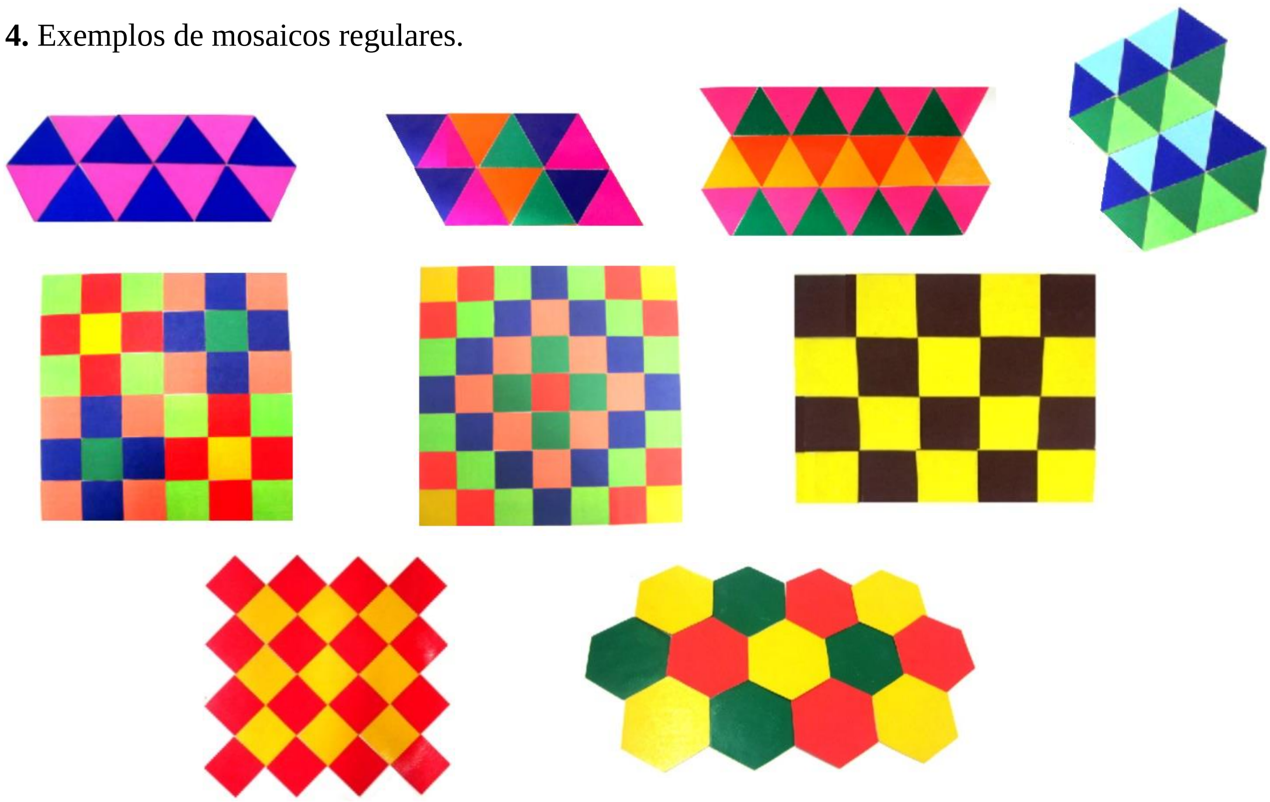


Para rodear um vértice são necessários pelo menos três polígonos iguais; se com três heptágonos existe superposição então isso acontece com qualquer polígono regular convexo com mais de sete lados, pois a medida dos ângulos internos aumenta com o número de lados do polígono.

3. i. Polígonos regulares convexos tais que as medidas dos seus ângulos internos são divisores de 360º: triângulo equilátero, quadrado, hexágono regular convexo.

ii. Seis triângulos equiláteros. Quatro quadrados. Três hexágonos regulares convexos

4. Exemplos de mosaicos regulares.



5. Para que um polígono regular convexo de n lados forme um mosaico é necessário que a medida do ângulo interno do polígono, ou seja, 180 ($1 - \frac{2}{n}$), seja um divisor de 360. Portanto existe um número natural m tal que $180\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{360}{m}$; de onde $\frac{2}{m} + \frac{2}{n} = 1$.
Logo, $(n-2)(m-2) = 4$, onde $m, n \geq 3$. Resultam os pares de soluções: {3,6}, {4, 4} e {6, 3}, onde em cada par o primeiro número indica o número de lados do polígono e o segundo número indica o número de cópias desse polígono em torno de cada vértice da tesselação.
Os únicos mosaicos regulares são os mosaicos achados na Atividade 3.

6. Seja m o número de polígonos regulares concorrendo em um vértice de um mosaico semirregular, logo, $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$, onde m_i é o número de polígonos regulares com ângulo interno igual a θ_i em cada vértice. De onde, $360 = m_1\,\theta_1 + m_2\,\theta_2 + \ldots + m_k\theta_k \geq m\,60$, porque os ângulos dos polígonos regulares convexos que concorrem em um vértice pelo menos medem 60º. Logo, obtemos $3 \leq m \leq 6$. Então, em cada tesselação semirregular existe um mínimo de três e um máximo de seis polígonos regulares concorrentes em cada vértice.

7. Se três polígonos regulares convexos concorrem em um vértice, sem espaços vazios e sem sobreposições, então a soma das medidas dos seus ângulos internos é igual a 360º; se esses polígonos têm *m*, *n* e *p* lados, temos que $180\ (1 - \frac{2}{m}) + 180\ (1 - \frac{2}{n}) + 180\ (1 - \frac{2}{p}) = 360$; de onde $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$. Todas as dez ternas de números soluções da equação anterior estão representadas na seguinte tabela.

Mosaico	Solução	Número	Ângulo interno	Lados
	1	1 1 1	60 $128\frac{4}{7}$ $171\frac{3}{7}$	3 7 42
	2	1 1 1	60 135 165	3 8 24
	3	1 1 1	60 140 160	3 9 18
	4	1 1 1	60 144 156	3 10 15
*	5	1 1 1	60 150 150	3 12 12
	6	1 1 1	90 108 162	4 5 20
*	7	1 1 1	90 120 150	4 6 12
*	8	1 1 1	90 135 135	4 8 8
	9	1 1 1	108 108 144	5 5 10
*	10	3	120	6

(*) indica que essa configuração de polígonos forma uma tesselação do plano.

A solução 10 corresponde a um dos mosaicos regulares. Os arranjos de polígonos restantes tem a característica que a soma de seus ângulos internos em volta de um vértice mede 360º, mas não é possível estender esse padrão a todo o plano.

Os polígonos regulares convexos, em arranjo de três em cada vértice que formam uma tesselação semirregular do plano são:



8. Se quatro polígonos regulares convexos concorrem em um vértice então as somas das medidas dos seus ângulos internos é igual a 360º; se esses polígonos têm *m*, *n*, *p* e *q* lados, temos que $180\,(1 - \frac{2}{m}) + 180\,(1 - \frac{2}{n}) + 180\,(1 - \frac{2}{p}) + 180\,(1 - \frac{2}{q}) = 360$; de onde segue $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$.

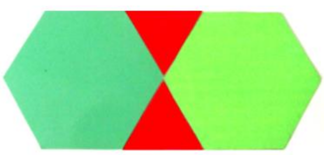
Todos os sete conjuntos de números soluções da equação anterior estão representadas na seguinte tabela.

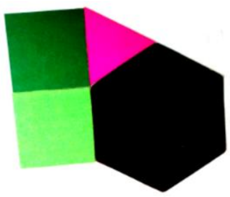
Mosaico	Solução	Número	Ângulo interno	Lados
	11	1 1 1 1	60 60 90 150	3 3 4 12
	12	1 1 1 1	60 90 60 150	3 4 3 12
	13	1 1 1 1	60 60 120 120	3 3 6 6
*	14	1 1 1 1	60 120 60 120	3 6 3 6
*	15	1 1 1 1	60 90 90 120	3 4 4 6
	16	1 1 1 1	60 90 120 90	3 4 6 4
*	17	4	90	4

(*) indica que essa configuração de polígonos forma uma tesselação do plano.

A solução 17 corresponde a um dos mosaicos regulares. Os arranjos de polígonos restantes tem a característica que a soma de seus ângulos internos em volta de um vértice mede 360º, mas não é possível estender esse padrão a todo o plano.

Os polígonos regulares convexos, em arranjo de quatro em cada vértice que formam tesselação semirregular do plano são:





9. Se cinco polígonos regulares convexos concorrem em um vértice então as somas das medidas dos seus ângulos internos é igual a 360º; se esses polígonos têm *m, n, p, q* e *r* lados, temos que

$180\left(1-\frac{2}{m}\right)+180\left(1-\frac{2}{n}\right)+180\left(1-\frac{2}{p}\right)+180\left(1-\frac{2}{q}\right)+180\left(1-\frac{2}{r}\right)=360$; de onde segue

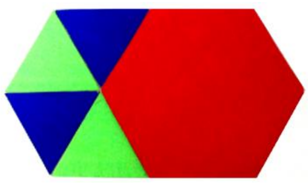
$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}.$$

Todos os três conjuntos de números soluções da equação anterior estão representadas na seguinte tabela.

Mosaico	Solução	Número	Ângulo interno	Lados
*	18	1	60	3
		1	60	3
		1	60	3
		1	60	3
		1	90	6
*	19	1	60	3
		1	60	3
		1	60	3
		1	90	4
		1	90	4
*	20	1	60	3
		1	60	3
		1	90	4
		1	60	3
		1	90	4

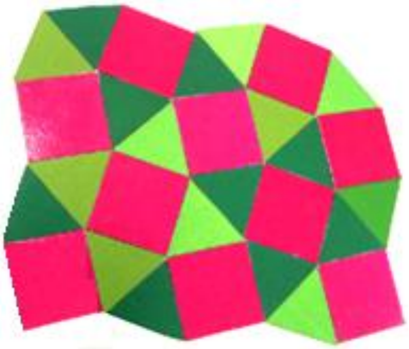
(*) indica que essa configuração de polígonos forma um tesselação do plano.

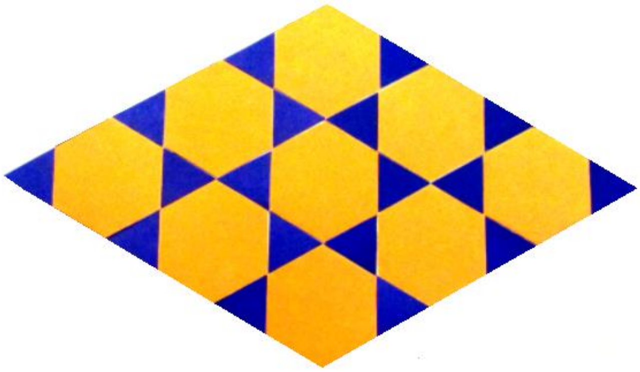
Os polígonos regulares convexos, em arranjo de cinco em cada vértice que formam tesselação semirregular do plano são:

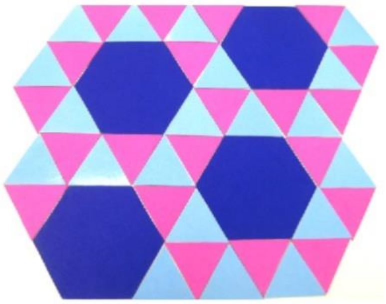


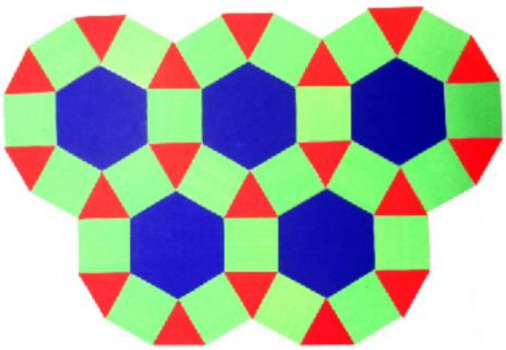
Observação. Completa o quadro de soluções a número 21 que corresponde ao único arranjo possível de seis polígonos regulares convexos em torno de um vértice; sendo este o caso de seis triângulos equiláteros em volta de cada vértice, onde a soma dos seus ângulos concorrentes em cada vértice é igual a 60 x 6 = 360. Este mosaico formado por triângulos equiláteros é um mosaico regular.

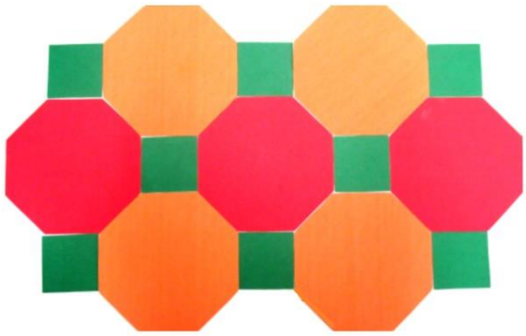
10. Representação dos mosaicos semirregulares no plano.

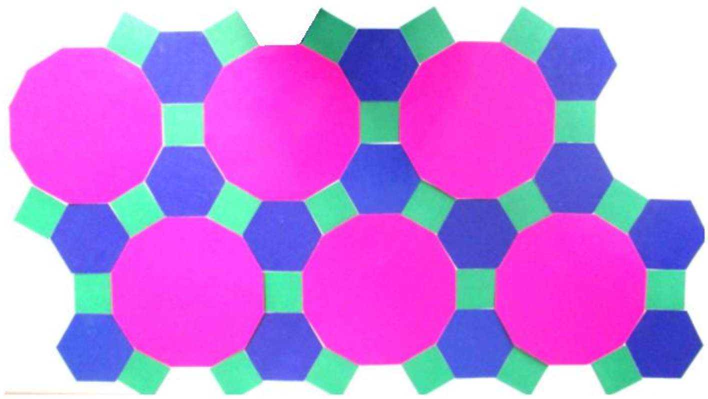




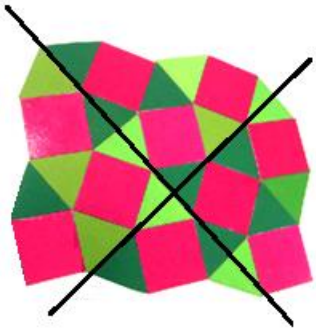


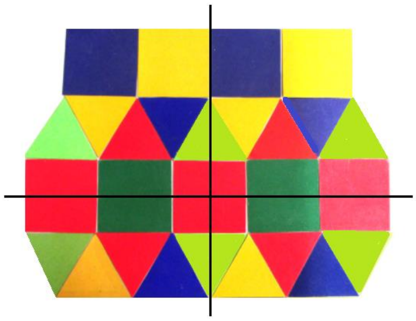


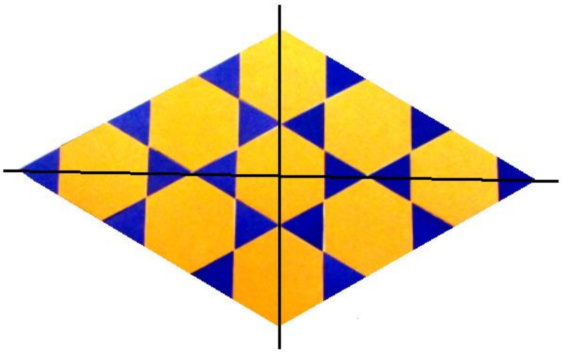


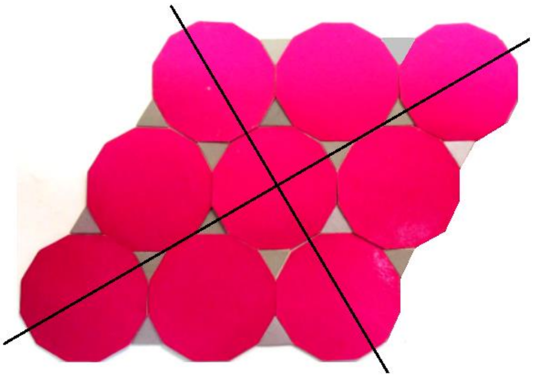


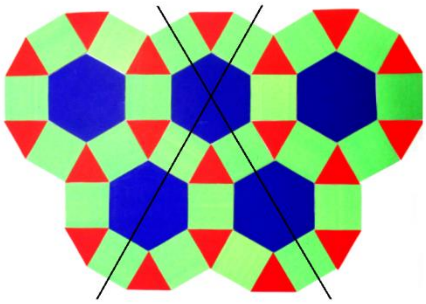
11. Determinação de dois eixos de simetria nos mosaicos semirregulares.

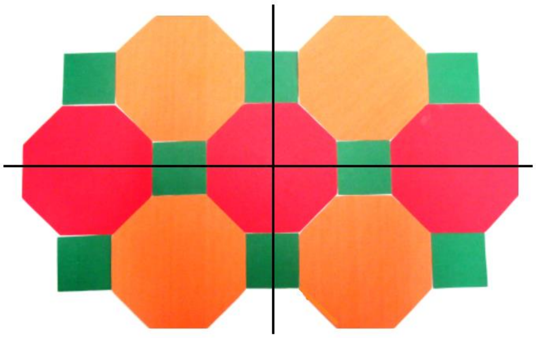


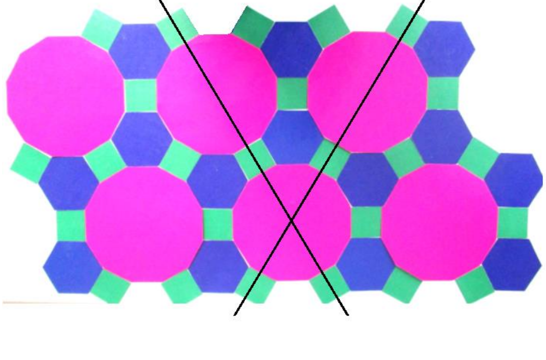






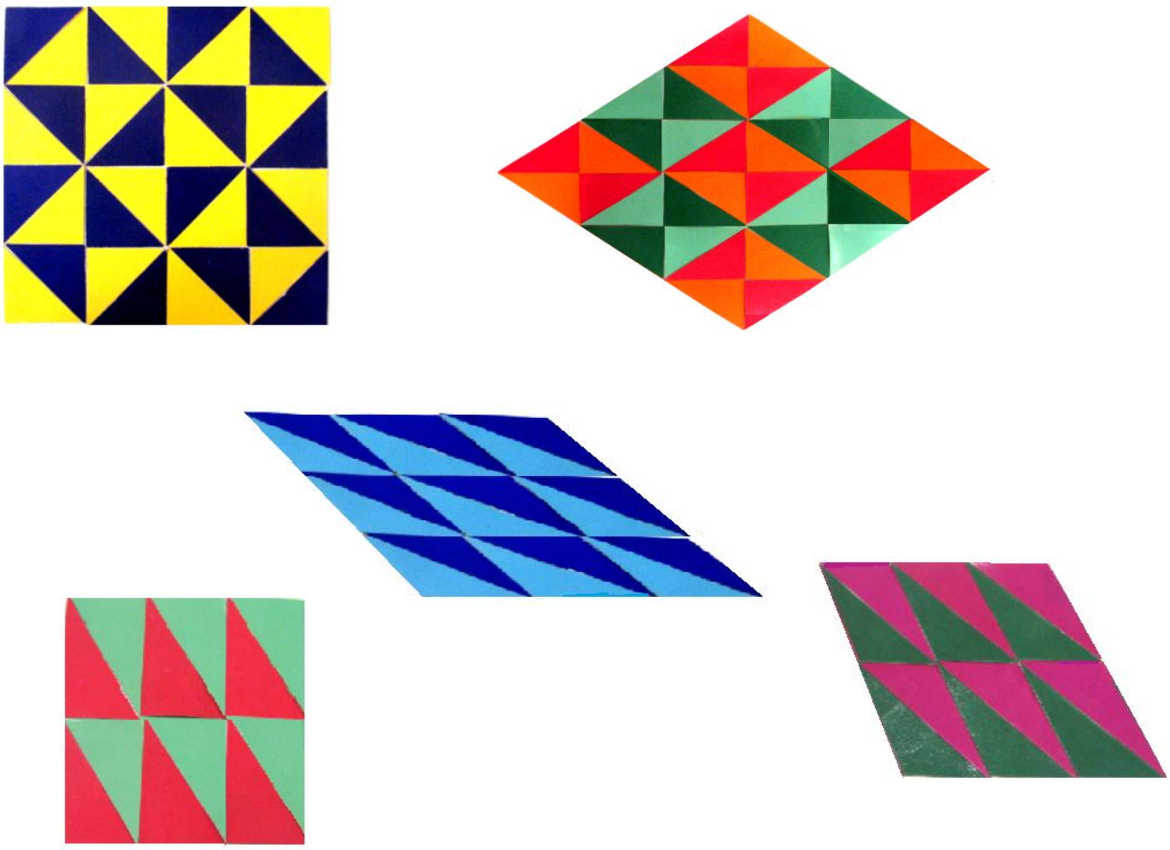




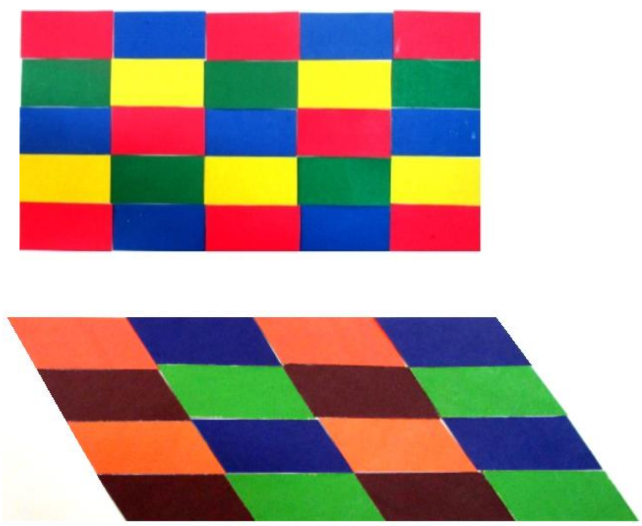


O mosaico semirregular formado por hexágonos regulares convexos e triângulos equiláteros é o único dos oito mosaicos semirregulares que não tem eixo de simetria.

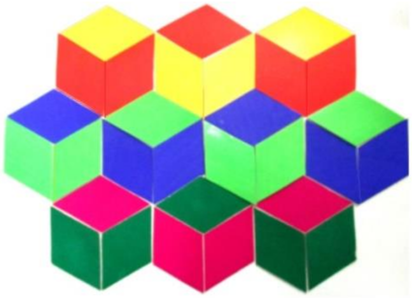
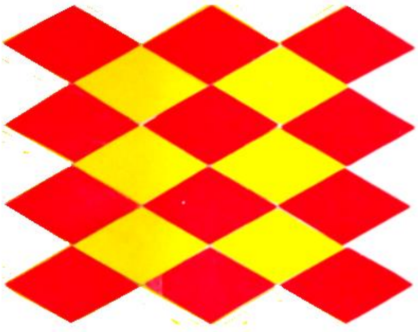
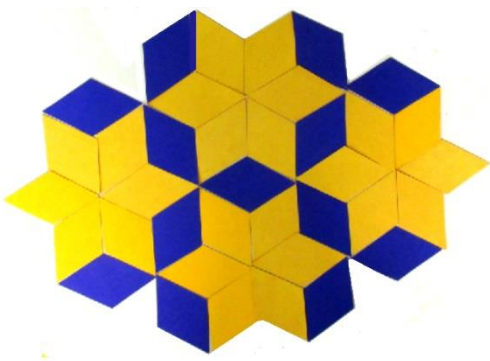
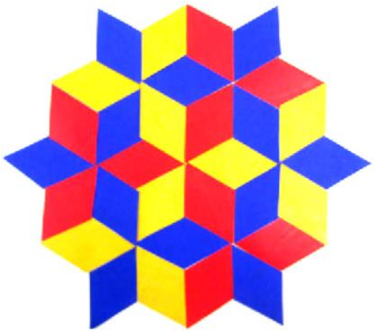
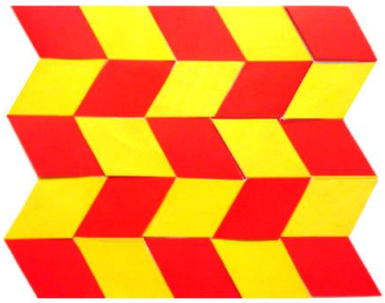
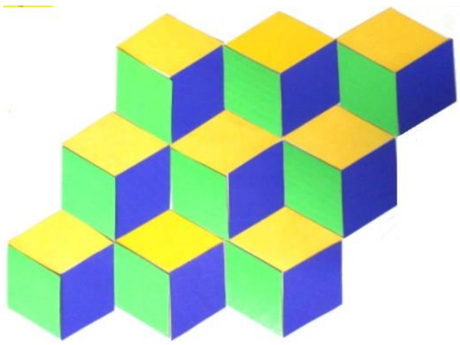
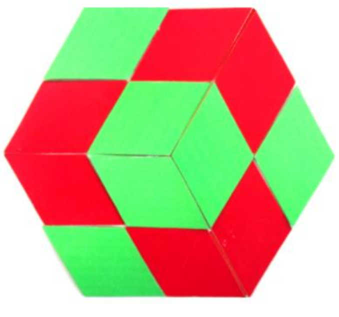
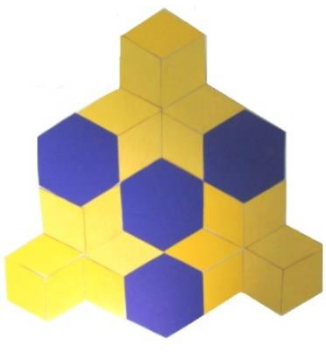
12. Formação de mosaicos unicelulares lado a lado com triângulos.



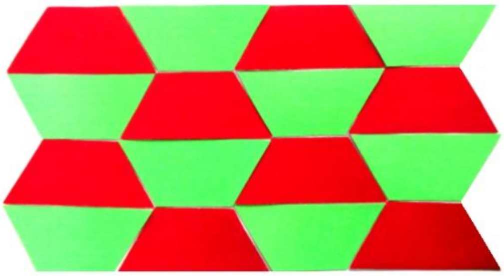
13. Formação de mosaicos unicelulares lado a lado com retângulos e com paralelogramos.

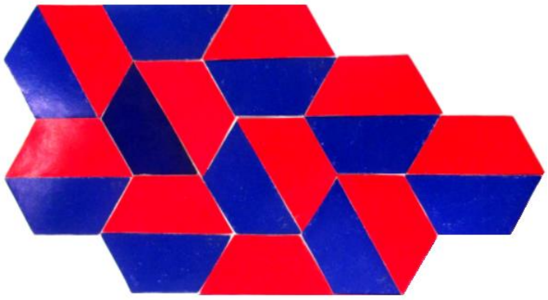


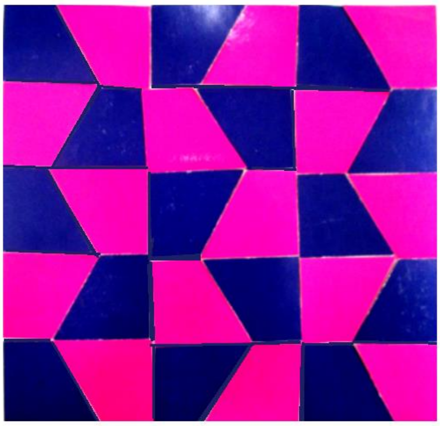
14. Representação de pavimentações unicelulares lado a lado onde as peças são losangos ou rombos.

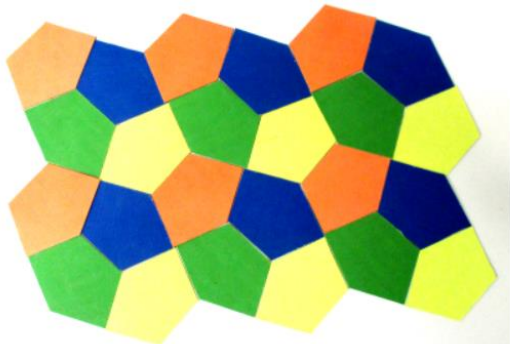
15. Formação de mosaicos unicelulares lado a lado com quadriláteros convexos que não são paralelogramos.

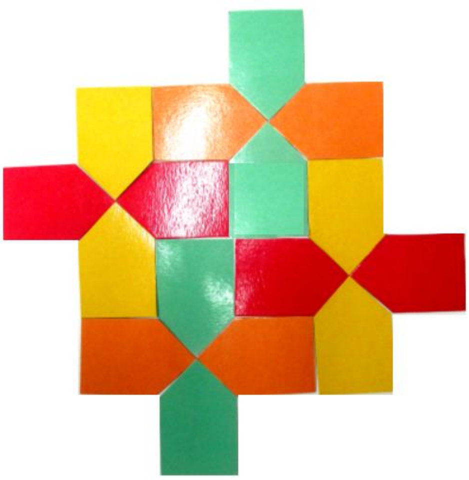




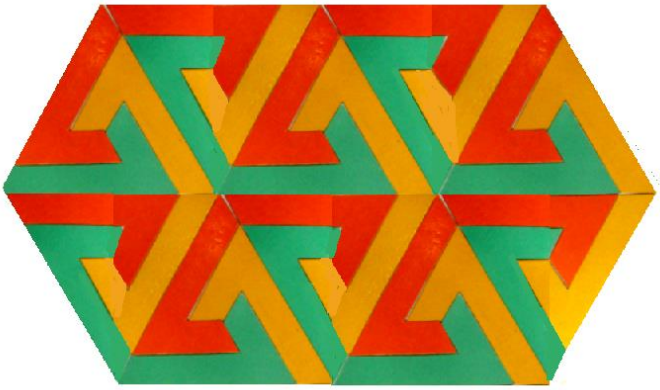


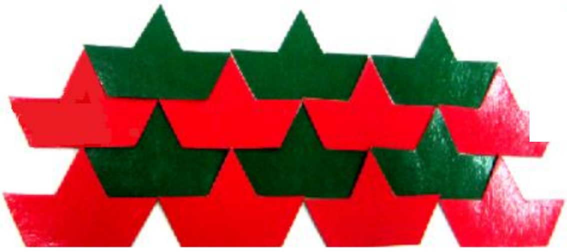
16. Formação de pavimentações do plano unicelulares lado a lado com os pentágonos irregulares convexos dados.

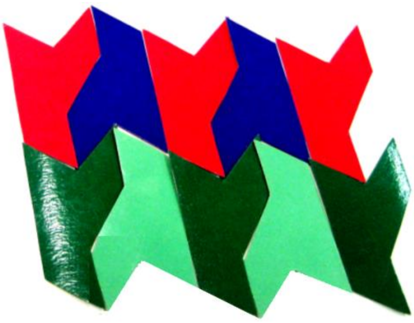


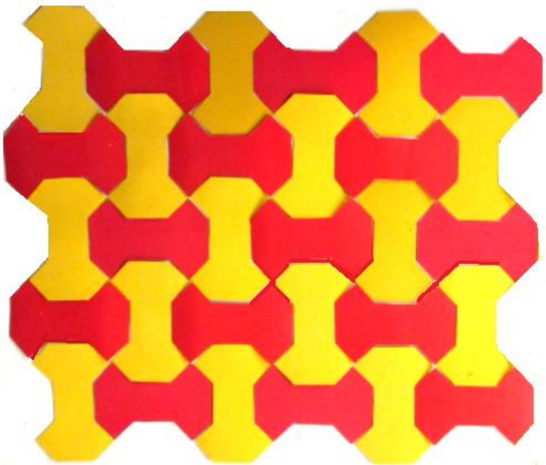


17. Construção de mosaicos unicelulares lado a lado com os polígonos irregulares não convexos dados.

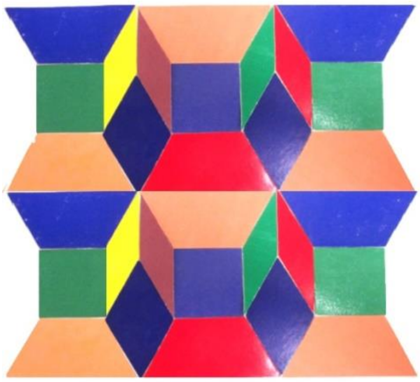


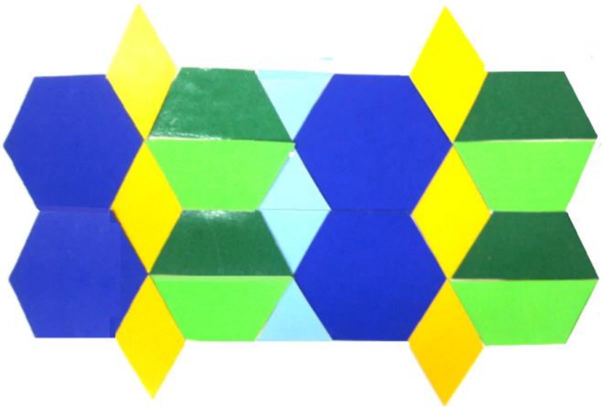




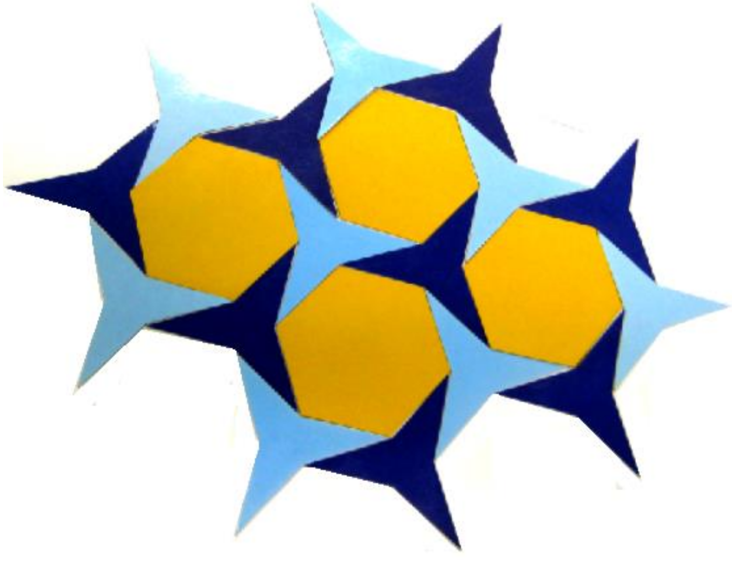


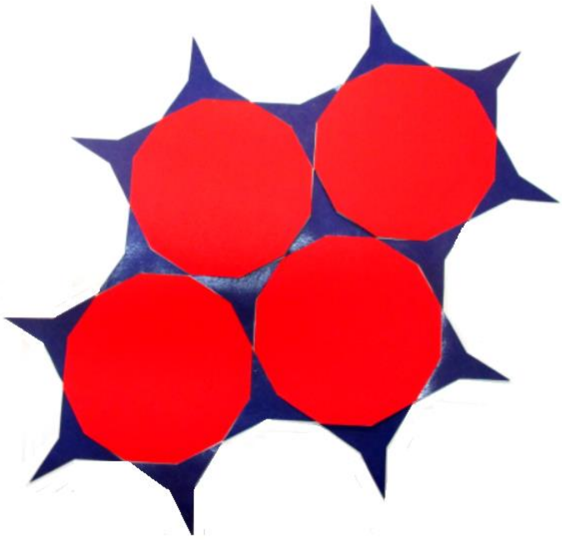
18. Construção de exemplos de tesselações lado a lado com diferentes tipos de polígonos convexos.



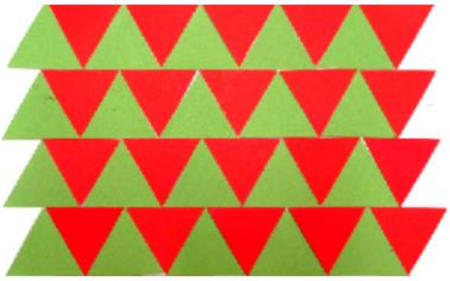


19. Representação de mosaicos lado a lado formados por polígonos regulares convexos e por polígonos irregulares convexos.

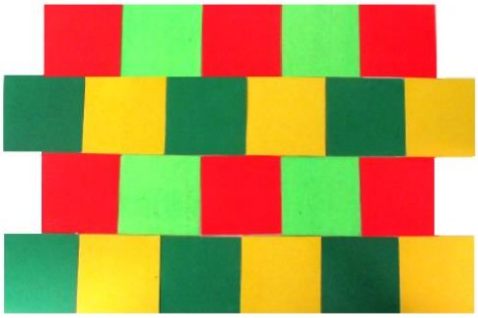




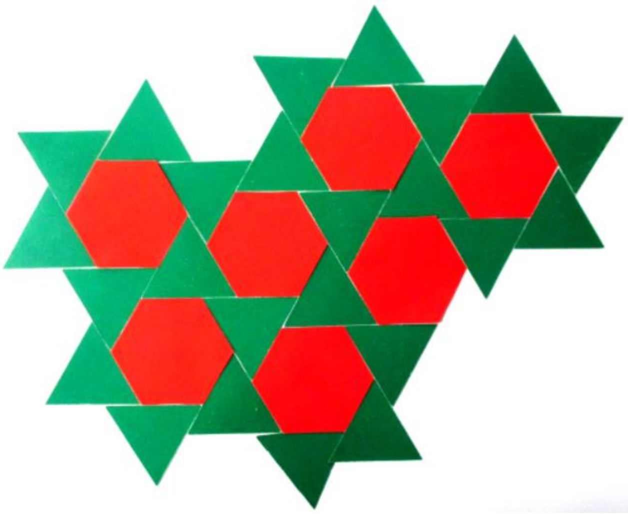
20.i. Representação de mosaico unicelular não lado a lado formado por triângulos.



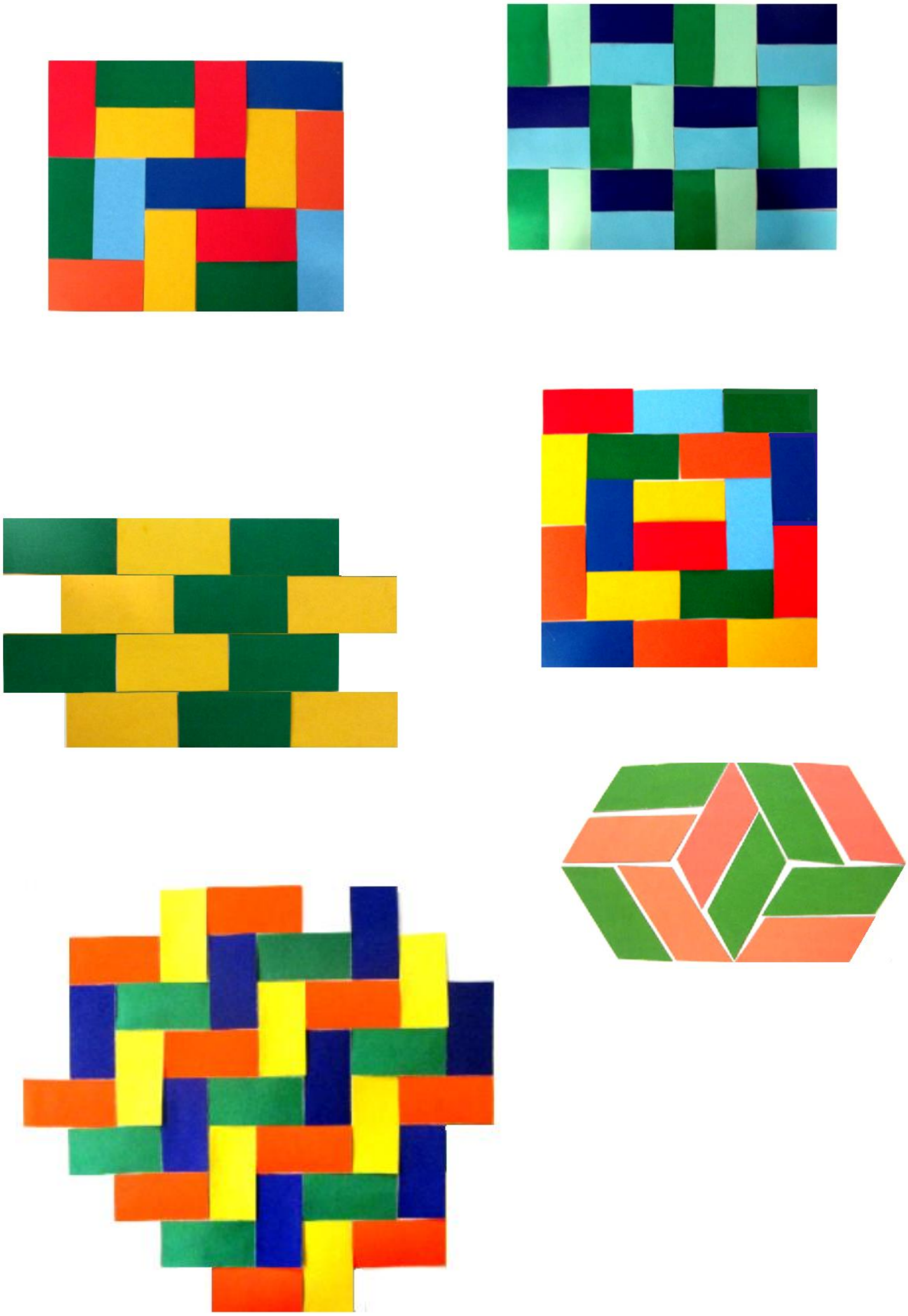
ii. Representação de mosaico unicelular não lado a lado formado por quadrados.



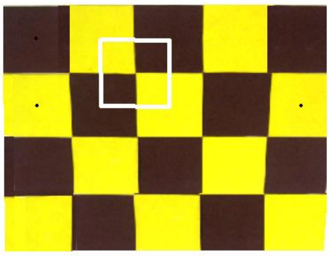
21. Construção de mosaico não lado a lado formado com dois tipos de polígonos regulares.

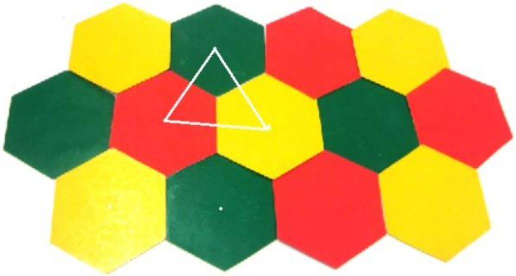


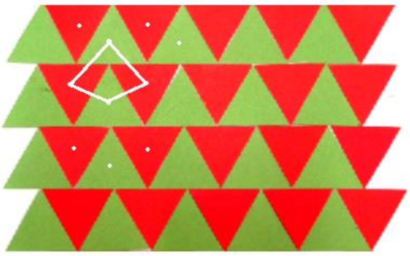
22. Representação de mosaicos unicelulares não lado a lado formados com paralelogramos congruentes.

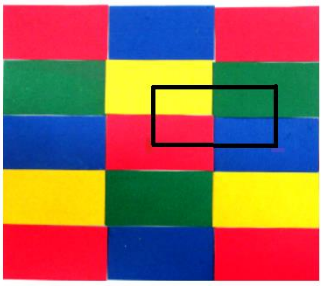


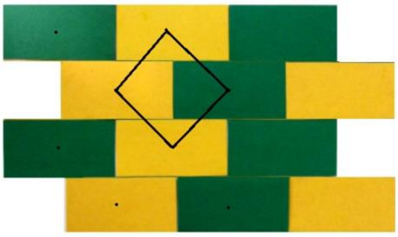
23. Construção dos polígonos dos centros em mosaicos das Atividades 4, 13, 20 e 22.

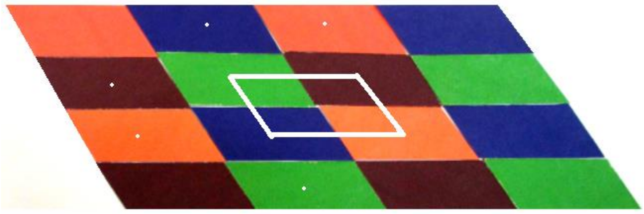




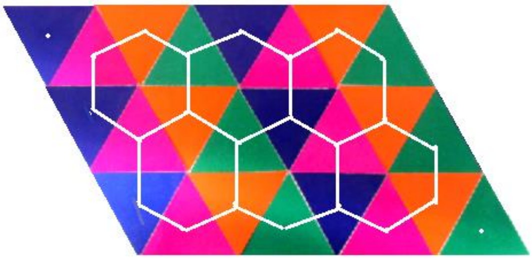






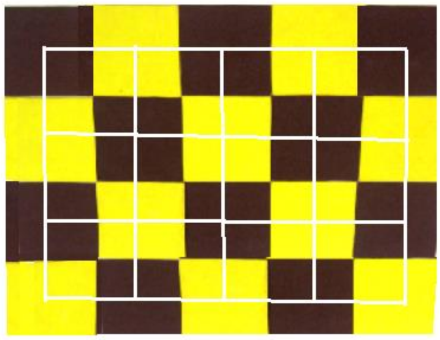


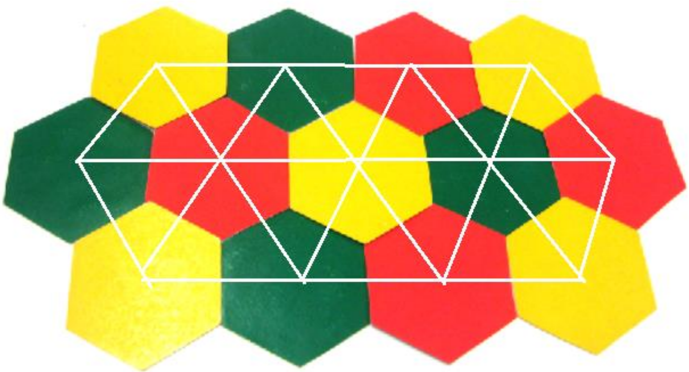
24. Construção e identificação da pavimentação dual de cada uma das pavimentações regulares.



A pavimentação regular formada por triângulos equiláteros tem uma pavimentação dual formada por hexágonos regulares convexos.

A pavimentação regular formada por quadrados tem uma pavimentação dual formada por quadrados.

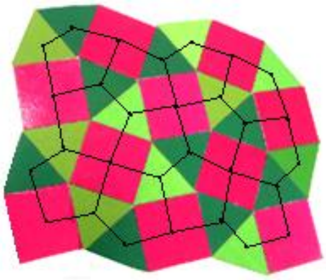


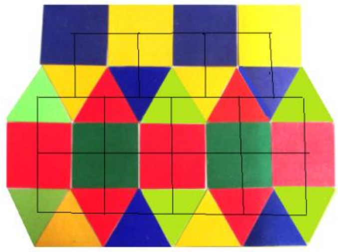


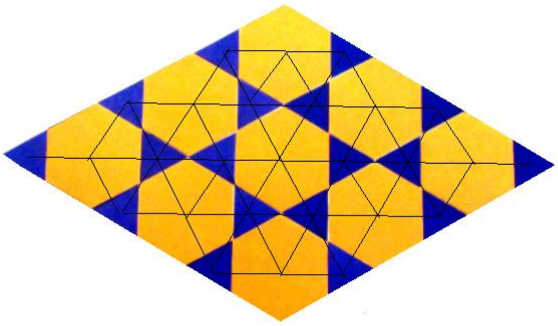
A pavimentação regular formada por hexágonos regulares convexos tem uma pavimentação dual formada por triângulos equiláteros.

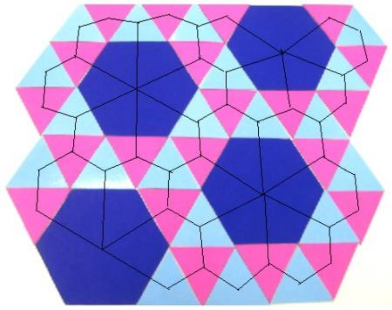
Conclusão. As pavimentações duais das pavimentações regulares também são todas elas pavimentações regulares.

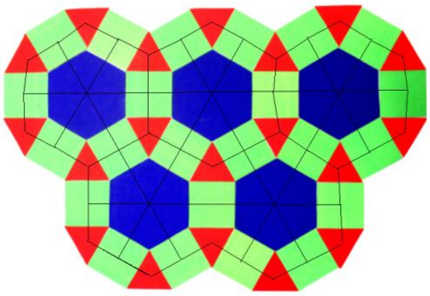
25. Construção da pavimentação dual de cada uma das pavimentações semirregulares.

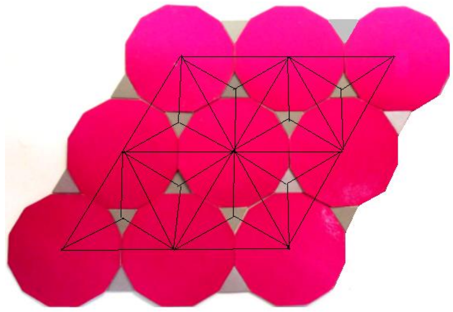


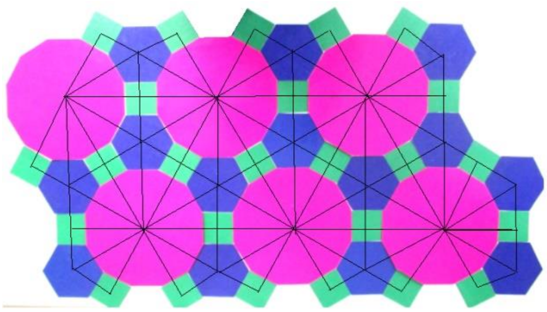


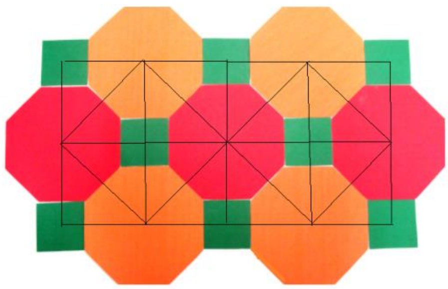






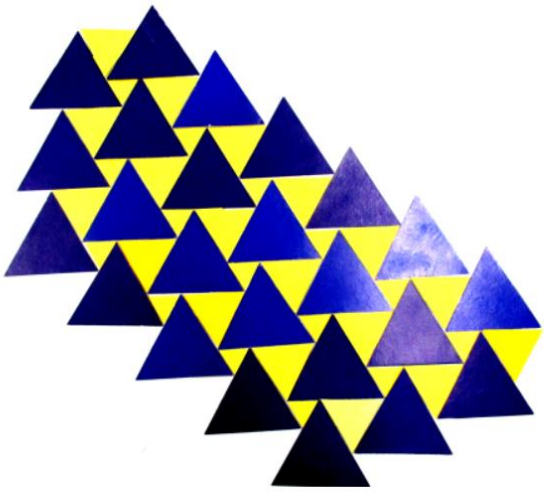




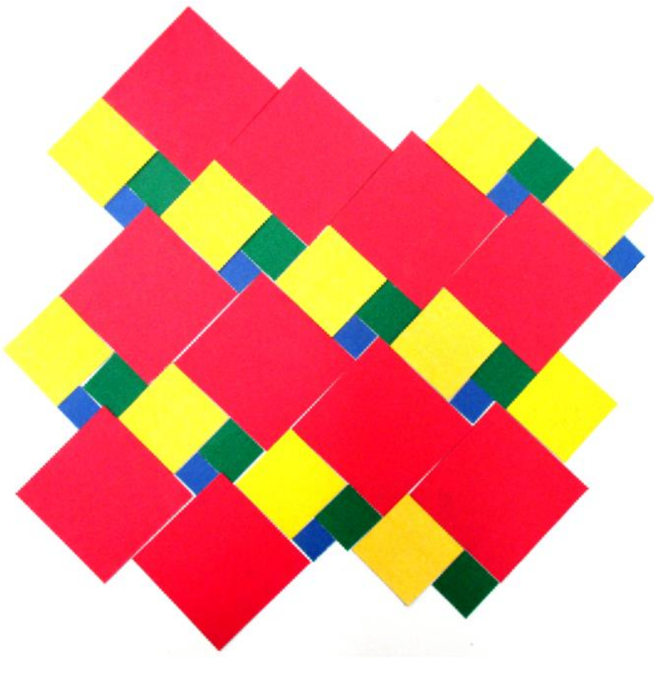


26. Representação de pavimentações do plano formadas com polígonos regulares do mesmo tipo e de dois ou mais tamanhos diferentes.

Mosaico formado com triângulos equiláteros de três tamanhos.



Mosaico formado com quadrados de quatro tamanhos.



27. Análise e classificação das peças ou polígonos que formam os mosaicos e classificação das tesselações do plano representadas nas seguintes gravuras.

- Mosaico irregular formados por quadrados congruentes e por triângulos retângulos isóscele congruentes.

- Mosaicos irregulares formados por quadrados de três tamanhos e por triângulos retângulos isósceles congruentes.

- Mosaico regular formado por triângulos equiláteros.

- Mosaicos irregulares não lado a lado, formados por quadrados de dois tamanhos, por triângulos retângulos isósceles de dois tamanhos e por retângulos congruentes.

- Mosaicos irregulares não lado a lado, formados por quadrados de dois tamanhos e por triângulos retângulos isósceles de dois tamanhos.

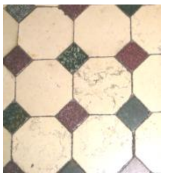
- Mosaico irregular não lado a lado, formado por quadrados de dois tamanhos e por triângulos retângulos isósceles congruentes.

- Mosaico irregular não lado a lado, formado por quadrados de dois tamanhos, por triângulos retângulos isósceles congruentes e por retângulos congruentes.

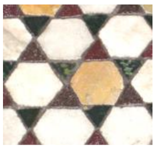
- Mosaico irregular não lado a lado, formado por triângulos retângulos isósceles de dois tamanhos, por retângulos congruentes e por losangos congruentes.

- Mosaico irregular não lado a lado, formado por triângulos equiláteros congruentes e por hexágonos regulares convexos congruentes.

- Mosaico semirregular formado por quadrados congruentes e por octógonos regulares convexos congruentes.

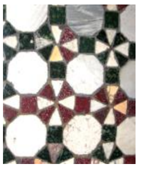


- Mosaico irregular lado a lado formado por triângulos equiláteros congruentes e por hexágonos regulares convexos congruentes.

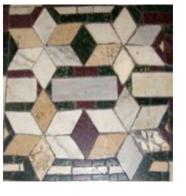


- Mosaico irregular não lado a lado, formado por triângulos equiláteros congruentes, triângulos retângulos isósceles congruentes, hexágonos regulares convexos congruentes e retângulos congruentes.

- Mosaico irregular lado a lado formado por quadrados congruentes, por triângulos isósceles congruentes e por octógonos congruentes.

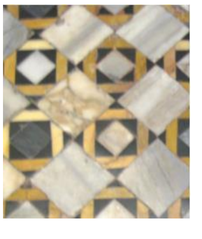


- Mosaico irregular não lado a lado formado por triângulos retângulos isósceles congruentes, por retângulos congruentes, por losangos congruentes e por trapézios retângulos de dois tamanhos.

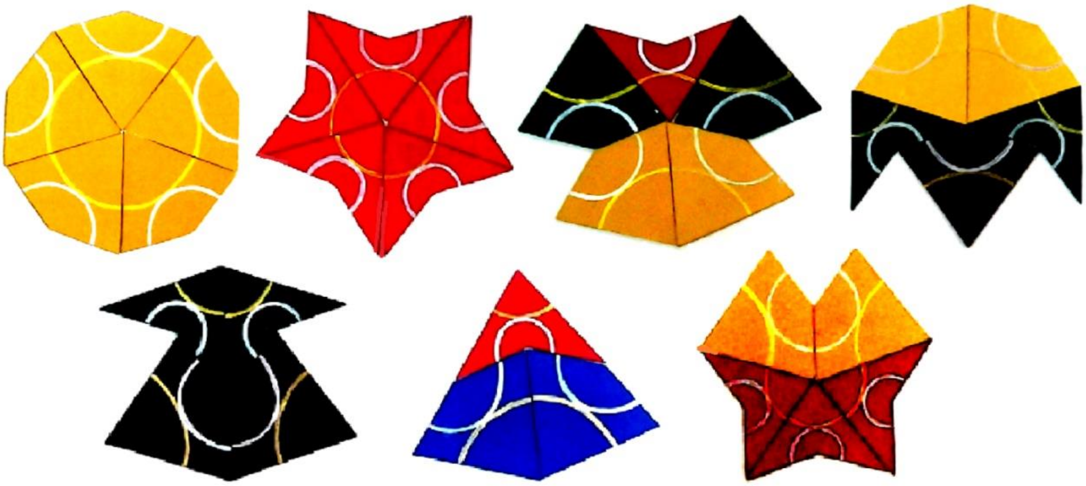


- Mosaico irregular não lado a lado formado por triângulos equiláteros congruentes, losangos congruentes e hexágonos regulares convexos congruentes.

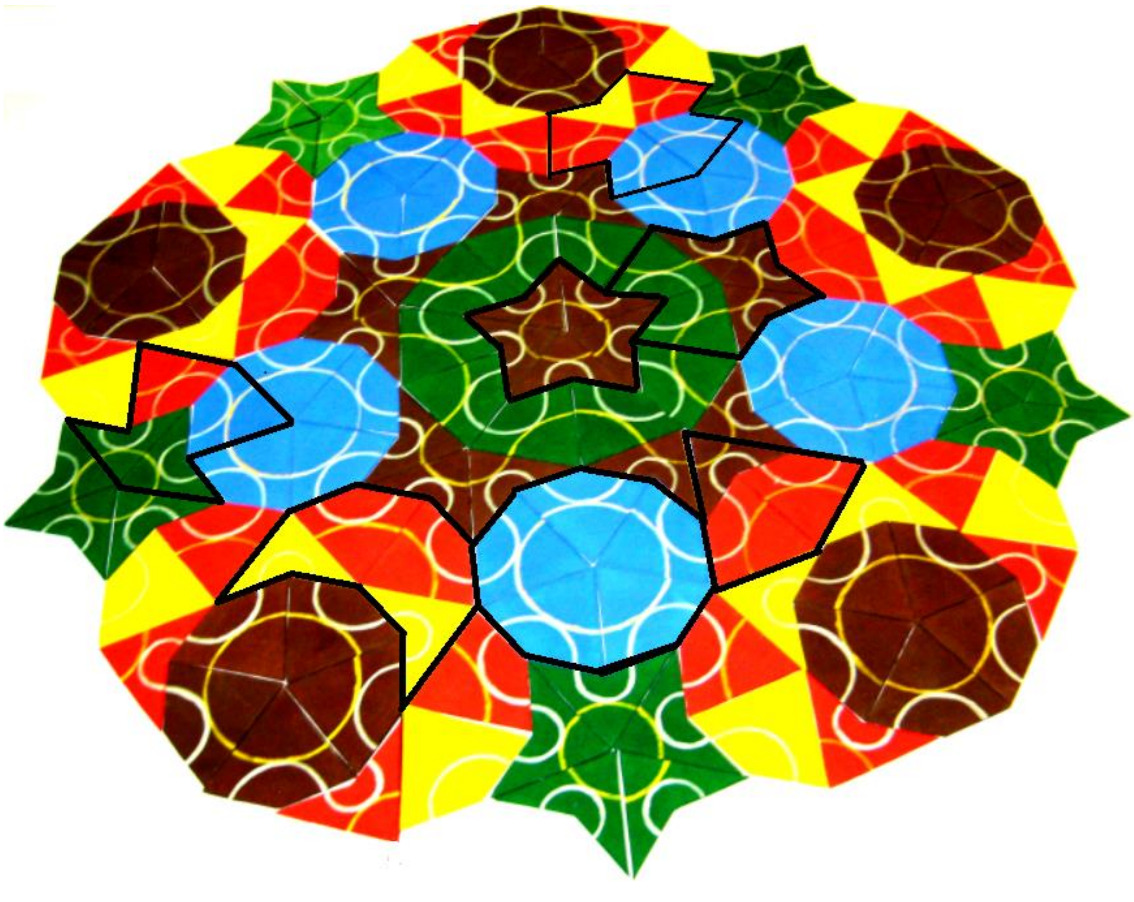
- Mosaico irregular não lado a lado, formado por triângulos retângulos de dois tamanhos, por quadrados de dois tamanhos e por trapézios isósceles congruentes.



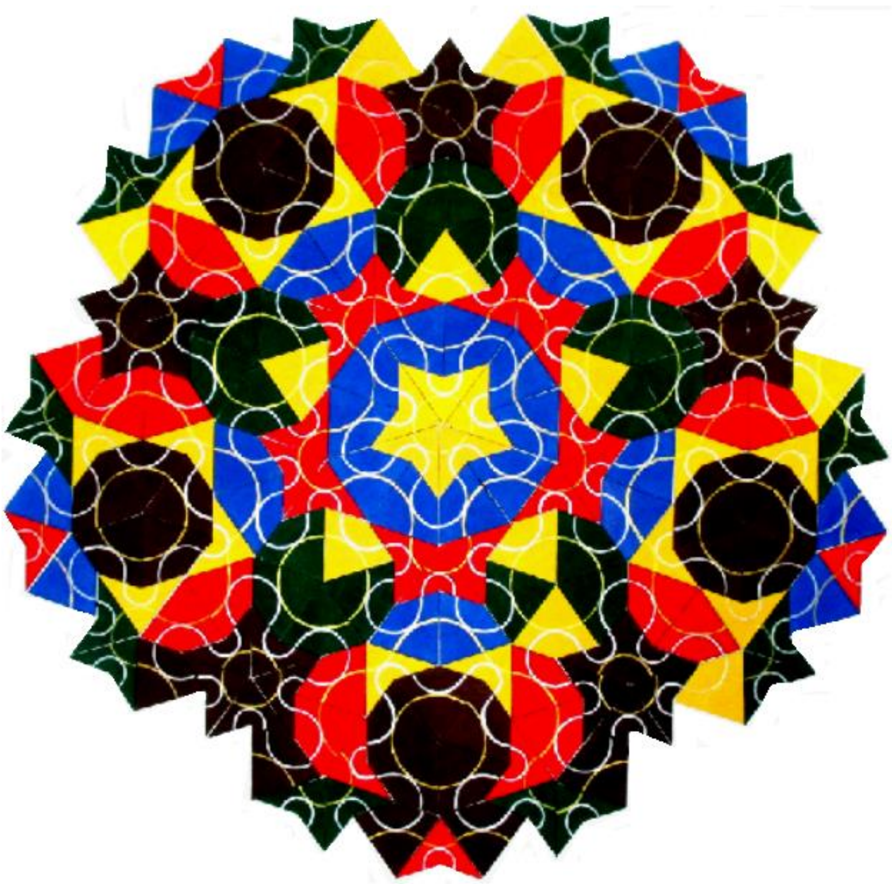
28. i. Representação dos sete arranjos possíveis dos polígonos dardo e pipa de Penrose em volta de um vértice.



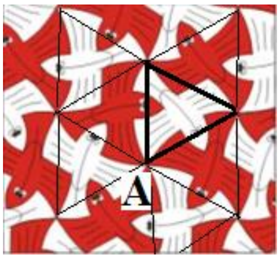
ii. Identificação dos sete arranjos das peças dardo e pipa de (i) no seguinte mosaico de Penrose, destacados em cor preta na ilustração.



29. Construção de exemplos de mosaicos não periódicos formados com cópias congruentes dos polígonos de Penrose dardo e pipa.

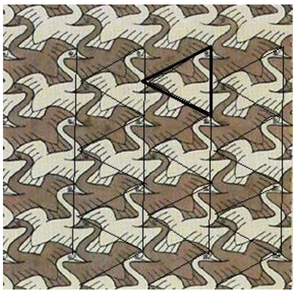


30. Determinação do polígono base para a construção das figuras que cobrem o plano nas seguintes obras de M. C. Escher e das simetrias desses mosaicos de M. C. Escher.



Célula: polígono base é o triângulo equilátero

Simetrias:
- Translação.
- Rotação de ordem seis com centro em A.

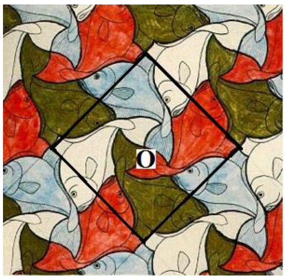


Célula: polígono base é o triângulo equilátero

Simetrias:
- Translação.
- Reflexão deslizante.

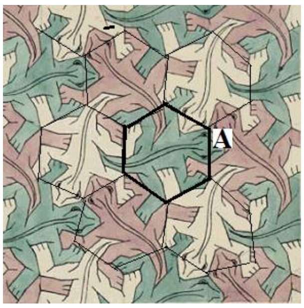
Célula: polígono base é o quadrado

Simetrias:
- Translação.
- Central com centro O ou rotacional de ordem dois.



Célula: polígono base é o quadrado

Simetrias:
- Translação.
- Rotacional de ordem quatro com centro O.



Célula: polígono base é o hexágono regular convexo

Simetrias:
- Translação.
- Rotacional de ordem três com centro A.