UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA -IE

Brasília, março de 2005.

ÁLGEBRA I

1º período de 2005

(Noturno)

Exercícios de treinamento

Observação: Os problemas que se seguem, marcados por * , são extraídos do livro de L. H. Jacy Monteiro: Elementos de Álgebra - ©1969, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro.

*1) Sejam A, B, C subconjuntos de um conjunto universo E . Verificar as igualdades:

a) $A \cup (Cpt_E(A) \cap B) = A \cup B$,

b) $A \cap (Cpt_E(A) \cup B) = A \cap B$,

c) $A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$,

d) $((A \cap B) \cup (B \cap C)) \cup (C \cap A) = ((A \cup B) \cap (B \cup C)) \cap (C \cup A)$.

*2) Sejam $A, B, C, D \subseteq E$. Utilizar os diagramas de Venn para verificar as igualdades:

a) $A \cap (B \cup (C \cup D)) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)$,

b) $Cpt_E((A \cup (B \cap C))) = Cpt_E(A) \cap (Cpt_E(B) \cup Cpt_E(C))$,

c) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

*3) Para quaisquer 3 conjuntos A, B, C valem:

a) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

b) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (A \cap C)$,

d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

e) $A \setminus (B \setminus A) = A$,

f) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

*4) Sejam A e B subconjuntos de um universo E .

a) Mostrar as equivalências (use diagramas de VENN!)

$$A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff$$

$$\iff A \cap Cpt_E(B) = \emptyset \iff Cpt_E(B) \subseteq Cpt_E(A) .$$

b) $B = Cpt_E(A) \iff A \cup B = E$ e $A \cap B = \emptyset$.

*5) Sejam A, B, C conjuntos .

a) Verificar $A \cup (B \cap A) = A$ e $A \cap (B \cup A) = A$,

b) Se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C$, então $B = C$,

c) Se $A \subseteq C$, então $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

*6) Determinar a interseção de todos os quadrados inscritos num dado círculo de raio r .

7) Determinar os elementos dos seguintes conjuntos:

a) $\mathbf{2}^{\emptyset}$ b) $\mathbf{2}^{2^{\emptyset}}$ c) $\mathbf{2}^{2^{2^{\emptyset}}}$

d) $\mathbf{2}^{\{\clubsuit\}}$ e) $\mathbf{2}^{2^{\{\clubsuit\}}}$ f) $\mathbf{2}^{\{\heartsuit,\spadesuit\}}$ g) $\mathbf{2}^{\{\heartsuit,\spadesuit,\diamondsuit\}}$.

*8) Sejam A e B dois conjuntos . Mostrar:

$$A \subseteq B \iff \mathbf{2}^A \subseteq \mathbf{2}^B .$$

*9) Seja E um conjunto e $\mathfrak{A} = \mathbf{2}^E$. Para $A, B \in \mathfrak{A}$ definamos:

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) .$$

Mostrar as seguintes regras para quaisquer $A, B, C \in \mathfrak{A}$
(usar diagramas de VENN!) :

a) $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

c) $A + B = B + A$,

d) $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$,

e) $A + A = \emptyset$ e $A + \emptyset = A$.

*10) Sejam A, B, C conjuntos . Mostrar :

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

*11) Sejam E e F dois conjuntos. Sejam $A, B \subseteq E$ e $C, D \subseteq F$. Mostrar:

a) $(E \times F) \setminus (A \times C) = [(E \setminus A) \times F] \cup [E \times (F \setminus C)]$,

b) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$,

c) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$.

Dar um exemplo que mostre que a inclusão $\subseteq$ em c) em geral é uma inclusão própria.

12) Determinar $\mathbf{2}^{A\times A}$, isto é, o conjunto de todas as relações de A, quando $A = \{\clubsuit, \diamondsuit\}$.

13) Explicitar a seguinte relação em $\mathbb{Z}$:

$$\rho = \Big\{ (x, y) \;\Big|\; x^2 + y^2 = 169 \Big\} .$$

Mostrar que ρ é simétrica.

14) Explicitar a relação em $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ dada por

$$\rho = \Big\{ (x, y) \;\Big|\; 25x^2 + 9y^2 = 225 \Big\} .$$

Determinar $D(\rho)$ e $I(\rho)$ e a inversa ρ^{-1}.

15) a) Determinar A^B e B^A quando $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{\heartsuit, \spadesuit\}$.
b) Dar exemplos de $\rho \in \mathbf{2}^{B\times A} \setminus A^B$ tal como $\sigma \in \mathbf{2}^{A\times B} \setminus B^A$.

16) Determinar a diagonal δ_A de $A \times A$ quando $A = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit, \nabla, \odot\}$.

17) Determinar todas as relações de equivalência $\varepsilon \in \mathbf{Eq}(A)$ e os respectivos conjuntos quocientes A/ε para

a) $A = \{\heartsuit\}$,

b) $A = \{\heartsuit, \clubsuit\}$,

c) $A = \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$,

d) $A = \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$.

*18) Seja $A = \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$. Construir uma relação $\rho \in \mathbf{2}^{A\times A}$ que é:

a) *simétrica e transitiva, porém não reflexiva*,

b) *reflexiva e transitiva, porém não simétrica*,

c) *reflexiva e simétrica, porém não transitiva*,

d) *reflexiva, porém nem simétrica nem transitiva*,

e) *simétrica, porém nem reflexiva nem transitiva*,

f) *transitiva, porém nem simétrica nem reflexiva*.

19) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos e $\rho, \sigma \in \mathbf{2}^{A \times B}$ relações . Mostrar:

$$\rho \subseteq \sigma \iff \rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}.$$

20) Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto e $\rho \in \mathbf{2}^{A \times A}$. Mostrar:

$$\rho \subseteq \rho^{-1} \iff \rho = \rho^{-1}.$$

*21) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos e seja $\rho \in \mathbf{2}^{A \times B}$. Mostrar:

$$\rho \circ \delta_A = \rho \ \text{ tal como } \ \delta_B \circ \rho = \rho .$$

22) Sejam $A, B, C \neq \emptyset$ conjuntos e sejam ρ, ρ_1, $\rho_2 \in \mathbf{2}^{A \times B}$ tal como σ, σ_1, $\sigma_2 \in \mathbf{2}^{B \times C}$. Mostrar:

a) Se $\rho_1 \subseteq \rho_2$, então $\sigma \circ \rho_1 \subseteq \sigma \circ \rho_2$.

b) Se $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$, então $\sigma_1 \circ \rho \subseteq \sigma_2 \circ \rho$.

23) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos e seja $\rho \in \mathbf{2}^{A \times B}$. Mostrar:

a) $D(\rho) = A \iff \delta_A \subseteq \rho^{-1} \circ \rho$.

b) $I(\rho) = B \iff \delta_B \subseteq \rho \circ \rho^{-1}$.

24) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos e seja $\rho \in \mathbf{2}^{A \times B}$. Mostrar:

a) $\delta_A \supseteq \rho^{-1} \circ \rho \iff$ para todo $y \in I(\rho)$ existe um *único* $x \in A$ tal que $x \ \rho \ y$.

b) $\delta_B \supseteq \rho \circ \rho^{-1} \iff$ para todo $x \in D(\rho)$ existe um *único* $y \in B$ tal que $x \ \rho \ y$.

Juntando-se 22) e 23), temos:

25) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos e seja $\rho \in \mathbf{2}^{A \times B}$. Então :

a) $\rho \in B^A \iff \delta_B \supseteq \rho \circ \rho^{-1}$ e $\delta_A \subseteq \rho^{-1} \circ \rho$

b) $\delta_A = \rho^{-1} \circ \rho \iff D(\rho) = A$ e para todo $y \in I(\rho)$ existe um *único* $x \in A$ tal que $x \ \rho \ y$.

c) $\delta_B = \rho \circ \rho^{-1} \iff I(\rho) = B$ e para todo $x \in D(\rho)$ existe um *único* $y \in B$ tal que $x \ \rho \ y$.

26) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos e seja $\rho \in \mathbf{2}^{A\times B}$. Então :

$$\delta_B = \rho \circ \rho^{-1} \text{ e } \delta_A = \rho^{-1} \circ \rho \quad \Longleftrightarrow \quad \rho \text{ é uma aplicação bijetora}.$$

*27) Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto, $\varepsilon \in \mathbf{2}^{A\times A}$. Mostrar:

$$\varepsilon \in \mathbf{Eq}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \delta_A \subseteq \varepsilon \quad \text{e} \quad \varepsilon \circ \varepsilon^{-1} = \varepsilon\ .$$

*28) Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto, $\rho \in \mathbf{2}^{A\times A}$ e suponhamos ρ é reflexiva e transitiva. Mostrar:

$$\rho = \rho \circ \rho\ .$$

*29) Construir sobre um conjunto A um exemplo de uma relação $\rho \in \mathbf{2}^{A\times A}$, tal que $\rho \circ \rho \subseteq \rho$, porém $\rho \circ \rho \neq \rho$.

30) Construir sobre um conjunto A uma relação não-reflexiva $\rho \in \mathbf{2}^{A\times A}$, tal que $\rho = \rho \circ \rho$.

31) Seja A um conjunto, $\varepsilon \in \mathbf{Eq}(A)$, $\gamma \in (A/\varepsilon)^A$ a aplicação canónica. Refletir sobre as seguintes equivalências:

a) γ é constante $\Longleftrightarrow$ $\varepsilon = A \times A$.

b) γ é injetora $\Longleftrightarrow$ $\varepsilon = \delta_A$.

*32) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos, $\varphi \in B^A$. Para toda parte $X \subseteq A$ indicamos por $\varphi(X) = \{\varphi(x) \mid x \in X\} \subseteq B$, a imagem de X sob φ. Sejam $X_1, X_2 \subseteq A$. Mostrar (refletir sobre) as seguintes afirmações:

a) Se $X_1 \subseteq X_2$, então $\varphi(X_1) \subseteq \varphi(X_2)$,

b) $X_1 \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(X_1) \neq \emptyset$,

c) $\varphi(X_1 \cup X_2) = \varphi(X_1) \cup \varphi(X_2)$,

d) $\varphi(X_1 \cap X_2) \subseteq \varphi(X_1) \cap \varphi(X_2)$,

e) $\varphi(X_1 \setminus X_2) \supseteq \varphi(X_1) \setminus \varphi(X_2)$.

*33) Com as notações de 31), verificar:

a) φ é injetora $\Longleftrightarrow$ $\varphi(X_1 \cap X_2) = \varphi(X_1) \cap \varphi(X_2)$ para todas as partes $X_1, X_2 \subseteq A$,

b) φ é sobrejetora $\Longleftrightarrow$ $\varphi(Cpt_A(X)) = Cpt_B(\varphi(X))$ para toda parte $X \subseteq A$.

*34) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos, $\varphi \in B^A$. Para toda parte $Y \subseteq B$ coloquemos $\varphi^{-1}(Y) = \{ x \in A \mid \varphi(x) \in Y \} \subseteq A$. $\varphi^{-1}(Y)$ é a *imagem recíproca* de Y por φ. Refletir sobre as seguintes propriedades:

a) $\varphi(\varphi^{-1}(Y) \subseteq Y$ para toda parte $Y \subseteq B$,

b) $\varphi^{-1}(\varphi(X) \supseteq X$ para toda parte $X \subseteq A$.

Se Y, Y_1, Y_2 são partes quaisquer de B, mostrar:

c) se $Y_1 \subseteq Y_2$, então $\varphi^{-1}(Y_1) \subseteq \varphi^{-1}(Y_2)$,

d) $\varphi^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = \varphi^{-1}(Y_1) \cup \varphi^{-1}(Y_2)$;

e) $\varphi^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = \varphi^{-1}(Y_1) \cap \varphi^{-1}(Y_2)$;

f) $\varphi^{-1}(\mathbf{C}_B(Y)) = \mathbf{C}_A(\varphi^{-1}(Y))$,

g) $\varphi(\varphi^{-1}(Y)) = Y \cap I(\varphi)$.

*35) Com as notações anteriores, mostrar:

$$\varphi \text{ é sobrejetora} \iff \varphi^{-1}(Y) \neq \emptyset \text{ para toda parte } Y \text{ de } B.$$

*36) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos, $\varphi \in B^A$, $\psi \in A^B$. Mostrar:

a) Se $\psi \circ \varphi$ é injetora, então φ é injetora.

b) Se $\varphi \circ \psi$ é sobrejetora, então φ é sobrejetora.

*37) Sejam $A, B, C \neq \emptyset$ conjuntos, $\varphi \in B^A$, $\psi \in C^B$, $\omega \in A^C$ e consideremos as compostas

$$\omega \circ \psi \circ \varphi, \quad \psi \circ \varphi \circ \omega, \quad \varphi \circ \omega \circ \psi .$$

a) Mostrar: Se duas dessas compostas são sobrejetoras e a terceira é injetora, então φ, ψ, ω são bijeções.

b) Mostrar: Se duas dessas compostas são injetoras e a terceira é sobrejetora, então φ, ψ, ω são bijeções.

38) Seja $E \neq \emptyset$ um conjunto e $B \subseteq E$. Para todos os $X, Y \in \mathfrak{A} = \mathbf{2}^E$ definamos

$$X \sim Y \iff X \cap B = Y \cap B .$$

a) Porquê $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathfrak{A}$?

b) Descrever a classe de equivalência $\bar{X}$ de $X \in \mathfrak{A}$.

c) Mostrar que

i) $\sim\, = \delta_{\mathfrak{A}} \iff B = E$, ii) $\sim\, = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \iff B = \emptyset$.

39) Seja $A = \{1, 2, 3\}, B = \{\heartsuit, \spadesuit\}$. Explicitar os conjuntos

$$A^B\,,\ \ B^A\,,\ \ \mathbf{Sob}(A, B)\,,\ \ \mathbf{Inj}(B, A)\,,\ \ \mathbf{S}_A \ \text{ e } \ \mathbf{S}_B\,.$$

40) Seja $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\varphi \in A^A$. Mostrar a equivalência das seguintes afirmações:

a) $\varphi \in \mathbf{Inj}(A, A)$

b) $\varphi \in \mathbf{Sob}(A, A)$

c) $\varphi \in \mathbf{Bij}(A, A)$.

Isto é, $\mathbf{Inj}(A, A) = \mathbf{Sob}(A, A) = \mathbf{Bij}(A, A)$ $(= \mathbf{S}_A)$ para qualquer conjunto *finito* A.
Dar exemplos que isto não continua verdade se A é infinito.

41) Seja $A = I\!R$, $B = \{a, b, c, d\}$. Para todo $x \in A$ definamos

$$\varphi(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x \leq -2 \\ b, & \text{se } -2 < x \leq 3 \\ c, & \text{se } x > 3\,. \end{cases}$$

Para todos os $x, y \in A$ coloquemos

$$x\ \varepsilon_{\varphi}\ y \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = \varphi(y)\,.$$

Explicitar o conjunto $\varphi(A) \subseteq B$, o conjunto quociente A/ε_{φ}, a aplicação canónica $\gamma \in (A/\varepsilon_{\varphi})^A$ e a bijeção $\psi \in (\varphi(A))^{A/\varepsilon_{\varphi}}$ que satisfaz

$$\varphi = \psi \circ \gamma\,.$$

*42) Consideremos a estrutura algébrica $\big(E; \top\big)$ com $E = Z\!\!\!Z$, $\top \in E^{E \times E}$ definida por $a \top b = a - b$ para todos os $a, b \in E$.
Mostrar que $\big(E; \top\big)$ não é nem associativa, nem comutativa, nem tem elemento neutro.

*43) Seja $E = I\!R \setminus \{0\}$, a operação interna $\top \in E^{E \times E}$ definida por $a \top b = \dfrac{a}{b}$. para todos os $a, b \in E$.
Mostrar que $\big(E; \top\big)$ não é nem associativa, nem comutativa, nem tem elemento neutro.

*44) Seja $E \neq \emptyset$ um conjunto, $* \in E^{E \times E}$ uma operação interna de E com elemento neutro e. Mostrar que $\big(E; *\big)$ é comutativa e associativa, se e somente se

$$(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$$

para todos os $a, b, c, d \in E$.

*45) Seja $E = \{1,2,3\}$.

a) Determinar $\left|E^{E \times E}\right|$.

b) Determinar o subconjunto $X \subseteq E^{E \times E}$ das operações em E que admitem 1 *como elemento neutro*.

c) Deteminar todas as operações *comutativas* em E que admitem 1 como elemento neutro.

46) Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto, $\rho, \sigma \in \mathbf{2}^{A \times A}$ duas relações reflexivas. Mostrar que $\sigma \circ \rho$ é reflexiva.

47) Seja $A = \{1,2,3\}$. Dar um exemplos de duas relações $\varepsilon, \eta \in \mathbf{Eq}(A)$, tais que $\eta \circ \varepsilon$ não é relação de equivalência, mostrando assim que $\mathbf{Eq}(A)$ não é $\circ$-fechado.

48) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos, $\varphi \in B^A$. Mostrar a equivalência das seguintes afirmações:

a) $\varphi \in \mathbf{Bij}\,(A,B)$

b) existe *única* $\psi \in A^B$ com $\psi \circ \varphi = \delta_A$

c) existe *única* $\omega \in A^B$ com $\varphi \circ \omega = \delta_B$.

Particularmente, no caso $A = B$ temos:

49) Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto, $\varphi \in E = A^A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\varphi \in \mathbf{S}_A$

b) existe *única* $\psi \in A^A$ com $\psi \circ \varphi = \delta_A$

c) existe *única* $\omega \in A^A$ com $\varphi \circ \omega = \delta_A$.

50) Seja a estrutura algébrica $(\mathbb{Z}, \top)$ definida por

$$a \top b = b^3a^3 - 2b^2a^3 - 29ba^3 + 30a^3 + 3ab^3 - 6ab^2 - 87ab + 91a \ .$$

Mostrar que existem 3 elementos neutros à direita em $\mathbb{Z}$.

51) Sejam $e_1\,, e_2\,, \dots, e_n \in \mathbb{Z}$ distintos. Construir infinitas operações distintas $\top_1\,, \top_2\,, \dots \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ que tenham exatamente os elementos $e_1\,, e_2\,, \dots, e_n$ como neutros à esquerda.

52) Mostrar: $\mathbf{Sob}\,(\mathbb{N}, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \emptyset$ e também $\mathbf{Sob}\,(\mathbb{N}, \mathbf{2}^{\mathbb{N}}) = \emptyset$,

particularmente, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ são conjuntos não enumeráveis.

53) Mostrar que
$$\mathcal{F} = \Big\{ X \subseteq I\!N \;\Big|\; |X| < \infty \Big\} ,$$
i.e. a família dos subconjuntos *finitos* de $I\!N$, é enumerável.

54) Mostrar o axioma da escolha para o conjunto $A = \mathbb{Z}$, isto é:
Se $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{2}^{\mathbb{Z}}$ com $\emptyset \notin \mathcal{F}$, então existe $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathcal{F}}$, tal que $\alpha(X) \in X$ para todo $X \in \mathcal{F}$.

55) Seja $A = I\!R$ e $\mathcal{F} = \{ (a,b) \mid a,b \in I\!R,\ a < b \}$ = a família de todos os intervalos abertos limitados não vazios de $I\!R$. Dar infinitos exemplos distintos de funções de escolha $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow I\!R$.

56) No plano $\mathbf{P} = I\!R^2$ consideremos a família
$$\mathcal{F} = \Big\{ X \;\Big|\; X \text{ é o interior de um círculo em } \mathbf{P} \Big\} .$$
Dar (em palavras) um exemplo de uma função de escolha $\alpha \in \mathbf{P}^{\mathcal{F}}$.

57) No plano $\mathbf{P} = I\!R^2$ consideremos a família
$$\mathcal{F} = \Big\{ X \;\Big|\; X \text{ é o interior de um triângulo não-degenerado em } \mathbf{P} \Big\} .$$
Dar (em palavras) exemplos de pelo menos duas funções de escolha distintas $\alpha \in \mathbf{P}^{\mathcal{F}}$.

58) Seja $E \neq \emptyset$ um conjunto, $\mathfrak{A} = \mathbf{2}^E$. Determinar, para cada uma das seguintes estruturas algébricas, os elementos neutros, e o conjunto dos elementos inversíveis:

a) $\big(\mathfrak{A}; \cap\big)$

b) $\big(\mathfrak{A}; \cup\big)$

c) $\big(\mathfrak{A}; +\big)$ onde $+ \in \mathfrak{A}^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}}$ é a operação definida no exercício *9).

59) Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Mostrar:

a) Se A contém pelo menos dois elementos, então o monóide $\big(A^A;\ \circ\big)$ não é comutativo.

b) Se A contém pelo menos três elementos, então o grupo simétrico $\big(\mathbf{S}_A;\ \circ\big)$ não é comutativo.

60) Seja $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in I\!R \right\}$ o conjunto das 2x2-matrizes sobre $I\!R$. A composição interna $\top \in M^{M \times M}$ seja a multiplicação comum de matrizes, isto é, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$.
Mostrar que $\top$ é associativa, porém não é comutativa. Determinar o elemento

neutro de $(M, \top)$ e caracterizar os elementos inversíveis de M. Como é calculado o inverso de um elemento inversível $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$?

61) Seja $\big(E\,;\top\big)$ um monóide, e seu elemento neutro e seja $a \in E$. Mostrar: Se a possui um inverso à direita (esquerda), então a é regular à direita (esquerda).

62) Seja $\big(E\,;\top\big)$ um semigrupo, seja $a \in E$ e consideremos a aplicação $\xi_a \in E^E$ definida por $\xi_a(x) = x \top a \;\; \forall\, x \in E$. Mostrar:

a) $\xi_a \circ \xi_b = \xi_{b \top a}$ para todos os $a, b \in E$.

b) Se E possuir um neutro e'' à direita, então $\xi_{e''} = \delta_E$.

c) a é regular à direita $\iff$ ξ_a é injetora.

63) Seja $\big(E\,;\top\big)$ um semigrupo, seja $a \in E$ e consideremos a aplicação $\lambda_a \in E^E$ definida por $\lambda_a(x) = a \top x \;\; \forall\, x \in E$. Mostrar:

a) $\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{a \top b}$ para todos os $a, b \in E$.

b) Se E possuir um neutro e' à esquerda, então $\lambda_{e'} = \delta_E$.

c) a é regular à esquerda $\iff$ λ_a é injetora.

Observação: As aplicações ξ_a e λ_a chamam-se as *translações à direita e à esquerda de* E *pelo elemento* a, respectivamente.

64) Seja $\big(E\,;\top\big)$ um semigrupo. Mostrar:

a) Vale $\xi_a \circ \lambda_b = \lambda_b \circ \xi_a$ para todos os $a, b \in E$.

b) $\xi_a = \lambda_a \iff a \in \mathbf{Z}(E)$.

65) Seja $\big(E\,;\top\big)$ um monóide *finito*, e seu elemento neutro e seja $a \in E$. Mostrar: Se a é regular à direita (esquerda), então a possui um inverso à esquerda (direita).
Dar um exemplo que mostre que isso não continua valido em geral quando $|E|$ é infinito.

66) Seja $\big(E\,;\top\big)$ um monóide. Consideremos as aplicações $\Xi, \Gamma \in (E^E)^E$ definidas por $\Xi(a) = \xi_a$ e $\Gamma(a) = \lambda_a$ para todos os $a \in E$. Mostrar que Ξ e Γ são injetoras.

*67) Seja $\big(E\,;\top\big)$ um monóide, e seu elemento neutro. Seja $\emptyset \neq A \subseteq E$ e $\mathbf{C}_E(A) = \{\, x \in E \mid x \top a = a \top x \;\; \forall\, a \in A \,\}$ seu centralizador. Mostrar:

a) $\forall\, \emptyset \neq A, B \subseteq E$ vale $\mathbf{C}_E(A) \cap \mathbf{C}_E(B) = \mathbf{C}_E(A \cup B)$.

b) $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq E \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{C}_E(A) \supseteq \mathbf{C}_E(B)$,

c) $e \in \mathbf{Z}(E) = \mathbf{C}_E(E) \subseteq \mathbf{C}_E(A) \ \ \forall\, \emptyset \neq A \subseteq E$.

d) $\mathbf{C}_E(A)$ é fechado com respeito a $\top$.

e) $\forall\, \emptyset \neq A \subseteq E$ temos $A \subseteq \mathbf{C}_E(\mathbf{C}_E(A))$.

f) $\forall\, \emptyset \neq A \subseteq E$ temos $\mathbf{C}_E(\mathbf{C}_E(\mathbf{C}_E(A))) = \mathbf{C}_E(A)$.

Construir exemplo que mostre que em e) em geral não vale a igualdade.

68) Seja $\big(E\,;\top\big)$ um monóide. Mostrar que

$$\mathbf{C}_{E^E}(\Gamma(E)) = \Xi(E) \quad \text{tal como} \quad \mathbf{C}_{E^E}(\Xi(E)) = \Gamma(E)$$

69) Sejam $\big(E\,;\top\big)$ e $\big(F\,;\perp\big)$ monóides, e e f seus elementos neutros e consideremos o produto CARTESiano

$$M = E \times F = \Big\{(x,y)\ \Big|\ x \in E, y \in F\Big\}\,.$$

Para quaisquer $(x_1\,,\,y_1)\,,\,(x_2\,,\,y_2) \in M$ definamos

$$(x_1\,,\,y_1) * (x_2\,,\,y_2) = (x_1 \top x_2\,,\,y_1 \perp y_2)\,. \qquad \text{Mostrar:}$$

a) $(M,*)$ é um monóide. Qual é seu elemento neutro?

b) $(a,b) \in M$ é regular à direita (à esquerda) $\iff$ ambos, a e b são regulares à direita (à esquerda).

c) $(a,b) \in M$ é inversível à direita (à esquerda) $\iff$ ambos, a e b são inversíveis à direita (à esquerda).

d) $\mathbf{U}(M) = \mathbf{U}(E) \times \mathbf{U}(F)$. e) $\mathbf{Z}(M) = \mathbf{Z}(E) \times \mathbf{Z}(F)$.

70) Considere $\varphi, \xi, \eta \in \big(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}\,;\ \circ\ \big)$ definidas por

$$\varphi(x) = x^4,\ \ \xi(x) = x+1 \ \text{ e } \ \eta(x) = |x+1| \ \ \forall\, x \in \mathbb{Z}\,.$$

Mostrar:

a) $\xi \neq \eta,\ \ \varphi \circ \xi \neq \xi \circ \varphi,\ \ \varphi \circ \eta \neq \eta \circ \varphi$,

b) $\varphi \circ \xi = \varphi \circ \eta$, tal como $\xi \circ \varphi = \eta \circ \varphi$, isto é, φ não é regular, nem à esquerda, nem à direita.

71) Mostrar: $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \circ) = \{\,\delta_{\mathbb{R}}\,\}$ (i.e. a identidade $\delta_{\mathbb{R}}$ é a *única* função que comuta com todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$).

Sugestão: Se $\delta_{\mathbb{R}} \neq \varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $\varphi(x_0) \neq x_0$, considere a função constante $\psi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definida por $\psi(x) = x_0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ e mostre que φ e ψ não comutam.

72) Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto, $\big(\mathbf{S}_A\,;\,\circ\,\big)$ o grupo simétrico sobre A. Para $\emptyset \neq B \subseteq A$ consideremos

$$V_B = \Big\{\pi \in \mathbf{S}_A \;\Big|\; \pi(x) = x \;\forall\, x \in B\Big\} \quad \text{e}$$

$$W_B = \Big\{\pi \in \mathbf{S}_A \;\Big|\; \pi(x) \in B \;\text{ e }\; \pi^{-1}(x) \in B \;\forall\, x \in B\Big\}\;.$$

Mostrar:

a) V_B e W_B são subgrupos de $\mathbf{S}_A$.

b) $V_B \trianglelefteq W_B$

73) Consideremos o grupo simétrico $\mathbf{S}_{I\!N}$ e o subconjunto $H \subseteq \mathbf{S}_{I\!N}$ definido por

$$H = \Big\{\pi \in \mathbf{S}_{I\!N} \;\Big|\; \pi(x) \neq x \,\text{para somente finitos}\, x \in I\!N\Big\}\;.$$

Mostrar que H é um *subgrupo normal* de $\mathbf{S}_{I\!N}$.

74) Seja $\big(E\,;\top\big)$ um monóide e $\big(\mathbf{U}(E)\,;\top\big)$ o grupo dos seus elementos inversíveis. Seja S um subgrupo de $\mathbf{U}(E)$. Definamos $\varepsilon_S \in \mathbf{2}^{E\times E}$ por: $\forall\, x, y \in E$:

$$x\,\varepsilon_S\,y \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\, a \in S \;\text{ tal que }\; a \top x = y\;. \quad \text{Mostrar:}$$

a) $\varepsilon_S \in \mathbf{Eq}(E)$

b) Se $x \in E$, então a classe de equivalência de x modulo ε_S é
$$\bar{x} = S{\top}x = \{\,a{\top}x \mid a \in S\,\}\,.$$

c) $\varepsilon_S = \delta_E \quad\Longleftrightarrow\quad S = \{\,e\,\}$.

75) Seja $\big(E\,;\top\big)$ um monóide e $\mathbf{U}(E)$ o grupo dos seus elementos inversíveis, S um subgrupo de $\mathbf{U}(E)$, $\varepsilon_S \in \mathbf{Eq}(E)$ definida como em 72). Suponhamos ainda $S \subseteq \mathbf{Z}(E)$. Mostrar:

a) $\varepsilon_S \in \mathbf{Cg}(\,E\,;\,\top\,)$.

b) Seja $\bar{E} = E/\varepsilon_S = \{\,\bar{x} \mid x \in E\,\} = \{\,S \top x \mid x \in E\,\}$
e $(\bar{E}, \bar{\top})$ o monóide quociente. Mostrar: $\bar{e} = S$ é o neutro de $\bar{E}$
e vale $\mathbf{U}(\bar{E}) = \overline{\mathbf{U}(E)} = \{\,S{\top}x \mid x \in \mathbf{U}(E)\,\}$.

76) Aplique 75) ao monóide $(\mathbb{Z}, \cdot)$ e $S = \mathbf{U}(\mathbb{Z}) = \{\,1, -1\,\}$.

77) Seja $\big(G\,;\,\cdot\,\big)$ um grupo. Mostrar: A aplicação $\pi \in G^G$, definida por $\pi(x) = x^{-1}$ é uma permutação de G.

78) Seja G um grupo multiplicativo. Seja $a \in G$ e sejam $\lambda_a, \xi_a, \pi \in G^G$ definidas por

$$\xi_a(x) = xa, \quad \lambda_a(x) = ax, \quad \pi(x) = x^{-1} \;\; \forall\, x \in G\,.$$

Mostrar: $$\lambda_{a^{-1}} \circ \pi = \pi \circ \xi_a$$

79) Mostrar: A estrutura algébrica $\big(\mathbb{Q}\,;+\,,\,\cdot\,\big)$ é simples, isto é,

$$\mathbf{Cg}(\,\mathbb{Q}\,;\,+\,,\,\cdot\,) = \{\,\delta_{\mathbb{Q}},\,\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\}\,.$$

80) Seja $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ o conjunto das 2x2-matrizes sobre $\mathbb{R}$ munido da adição $+$ e multiplicação $\cdot$ comuns de matrizes.
Mostrar que $\big(M\,;+\,,\,\cdot\,\big)$ é uma estrutura algébrica simples.

Sugestão: Se $\delta_M \neq \kappa \in \mathbf{Cg}(\,M\,;\,+\,,\,\cdot\,)$, tentar mostrar por etapas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \kappa \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e por fim $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \kappa \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ para todas as matrizes.

81) Mostrar que a estrutura algébrica $\big(\mathbb{R}\,;+\big)$ não é simples.

Sugestão: Defina $\kappa \in \mathbf{2}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ por $\forall x,y \in \mathbb{R}$:

$$x\,\kappa\,y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}\,.$$

e mostre $\kappa \in \mathbf{Cg}(\,\mathbb{R}\,;\,+\,) \setminus \{\,\delta_{\mathbb{R}}\,,\,\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$.

82) Mostrar: O grupo simétrico $\big(\mathbf{S}_{\mathbb{N}}\,;\,\circ\,\big)$ não é simples.

O grupo simétrico de grau 3 indicamos em seguida por

$$G = \mathbf{S}_3 = \{\mathbf{1}\,,\,\tau_1\,,\,\tau_2\,,\,\tau_3\,,\,\sigma\,,\,\rho\,\}$$

onde

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

83) Considere $G = \mathbf{S}_3$ e o subgrupo $H = \{\mathbf{1}, \tau_3\}$ de G e as equivalências $\varepsilon_{_H}, \eta_{_H} \in \mathbf{Eq}(G)$ definidas por

$$\forall\, x, y \in G : \quad \begin{cases} x\, \varepsilon_{_H}\, y & \Longleftrightarrow \quad x^{-1}y \in H \\ x\, \eta_{_H}\, y & \Longleftrightarrow \quad xy^{-1} \in H \end{cases}$$

Determinar os conjuntos quocientes $G/\varepsilon_{_H}$ e $G/\eta_{_H}$ e justificar que H não é subgrupo normal de G.

84) Seja $G = \mathbf{S}_3$ e $N = \{\mathbf{1}, \sigma, \rho\}$. Mostrar que $N \trianglelefteq G$, $\{\mathbf{1}\} \neq N \neq G$. Portanto $\mathbf{S}_3$ não é um grupo simples.

85) Seja $\big(G;\ \cdot\ \big)$ um grupo, $H \leq G$, $g \in G$ e consideremos

$$g^{-1}Hg = \Big\{ g^{-1}xg \ \Big|\ x \in H \Big\} \ .$$

Mostrar que $g^{-1}Hg$ é um subgrupo de G.
Observação: $g^{-1}Hg$ chama-se o *subgrupo conjugado* de H por g.

86) Seja G um grupo e $H \leq G$. Mostrar a equivalência das seguintes afirmações:

a) $H \trianglelefteq G$, isto é, $gH = Hg$ para todos os $g \in G$.
b) $g^{-1}Hg \subseteq H \quad \forall\, g \in G$.
c) $g^{-1}Hg = H \quad \forall\, g \in G$.

87) Seja G um grupo, H, K subgrupos de G. Mostrar:

a) $H \cap K \leq G$
b) Se $H, K \trianglelefteq G$, então $H \cap K \trianglelefteq G$.
c) Se $K \trianglelefteq G$, então $H \cap K \trianglelefteq H$.

88) Mostrar: Num grupo abeliano (=comutativo), todo subgrupo é normal.

Generalize 88) para:

89) Seja G um grupo, $\mathbf{Z}(G)$ seu centro e $H \leq \mathbf{Z}(G)$. Mostrar que $H \trianglelefteq G$.

90) Comprove através de um exemplo: Um subgrupo comutativo de um grupo G não precisa ser normal em G.

91) Seja G um grupo, $\emptyset \neq X \subseteq G$ e consideremos

$$\mathbf{N}_G(X) = \Big\{ g \in G \ \Big|\ Xg = gX \Big\}$$

tal como

$$\mathbf{C}_G(X) = \Big\{ g \in G \ \Big|\ xg = gx \ \ \forall\, x \in X \Big\} \ .$$

Mostrar:

a) $\mathbf{C}_G(X) \leq \mathbf{N}_G(X) \leq G$.

b) $\mathbf{C}_G(X) \trianglelefteq \mathbf{N}_G(X)$.

Observação: $\mathbf{N}_G(X)$ chama-se o *normalizador*, $\mathbf{C}_G(X)$ o *centralizador* do conjunto X em G.
Sugestão para b): Por 86) deve ser mostrado: $g^{-1}\mathbf{C}_G(X)g \subseteq \mathbf{C}_G(X) \ \ \forall\, g \in \mathbf{N}_G(X)$, isto é, $g^{-1}cg \in \mathbf{C}_G(X)$ para todos os $g \in \mathbf{N}_G(X)$ e todos os $c \in \mathbf{C}_G(X)$.

92) Determinar $\mathbf{N}_G(X)$ e $\mathbf{C}_G(X)$ no caso $G = \mathbf{S}_3$ para os subconjuntos

a) $X = \{\tau_1\}$

b) $X = \{\rho\,, \sigma\}$

c) $X = \{\tau_1\,, \rho, \sigma\}$.

d) $X = \{\tau_1\,, \tau_2\,, \tau_3\}$.

93) Seja $\big(G;\ \cdot\ \big)$ um grupo. Mostrar:
Se $x^2 = 1$ para todos os $x \in G$, então G é comutativo.

Se $\big(G;\ \cdot\ \big)$ é um grupo e $\emptyset \neq X\,, Y \subseteq G$, indicamos o conjunto produto por

$$XY = \Big\{ xy \ \Big|\ x \in X,\ y \in Y \Big\}$$

e o conjunto inverso por

$$X^{-1} = \Big\{ x^{-1} \ \Big|\ x \in X \Big\} \ .$$

94) Seja G um grupo.

a) Para todo $\emptyset \neq X \subseteq G$ e todo $g \in G$, a aplicação $\varphi : X \longrightarrow X^{-1}g$ definida por $\varphi(x) = x^{-1}g \ \ \forall\, x \in X$, é uma bijeção entre X e $X^{-1}g = \{x^{-1}g \mid x \in X\}$.

b) Para quaisquer $\emptyset \neq X, Y \subseteq G$ temos $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$.

95) Seja G um grupo, $\emptyset \neq X \subseteq G$. Mostrar:

$$X \leq G \quad \iff \quad XX^{-1} \subseteq X \ .$$

96) Seja G um grupo finito, $X, Y \subseteq G$, tais que $|X| + |Y| > |G|$. Mostrar: $G = XY$.
Sugestão: Para mostrar que todo $g \in G$ é da forma $g = xy$ com $x \in X$ e $y \in Y$, use 94) a).

97) Seja $G = \mathbf{S}_3$, $H = \{\mathbf{1}, \tau_2\}$, $K = \{\mathbf{1}, \tau_3\}$. Mostrar que $HK \neq KH$. Além do mais, HK e KH não são subgrupos de G.

98) Seja G um qualquer grupo, $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$. Mostrar:

a) $HN = NH$ é um subgrupo de G

b) Se também $H \trianglelefteq G$, então $HN \trianglelefteq G$.

99) Seja G um qualquer grupo e H, K dois subgrupos de G. Mostrar: HK é um subgrupo de G $\iff$ $HK = KH$.

100) Seja G um grupo. $\forall\, x, y \in G$ definamos:

$$x \,\varepsilon\, y \quad \iff \quad \exists\ g \in G \text{ com } y = g^{-1}xg\,. \quad \text{Mostrar :}$$

a) $\varepsilon \in \mathbf{Eq}(G)$

b) A classe de equivalência de $x \in G$ modulo ε é o conjunto

$$x^G = \left\{ g^{-1}xg \;\middle|\; g \in G \right\}.$$

x^G chama-se a *classe de conjugação de* x *em* G.

c) Seja $x \in G$. Temos

$$x^G = \{x\} \text{ é um conjunto unitário} \quad \iff \quad x \in \mathbf{Z}(G)\,.$$

d) $\varepsilon \in \mathbf{Cg}(\,G;\ \cdot\ ) \quad \iff \quad \varepsilon = \delta_G \quad \iff \quad G$ é comutativo.

101) Seja $G = \mathbf{S}_3$, $\varepsilon \in \mathbf{Eq}(G)$ a relação definida em 100). Determinar o conjunto quociente $G/\varepsilon = \left\{ x^G \;\middle|\; x \in G \right\}$, isto é, o conjunto das classes de conjugação de G.

102) Para $a, b \in I\!R$ com $a \neq 0$ consideremos $\varphi_{a,b} \in I\!R^{I\!R}$ definida por

$$\varphi_{a,b}(x) = ax + b \qquad \forall\, x \in I\!R\,.$$

Mostrar:

a) $\varphi_{a,b} \in \left(\mathbf{S}_{I\!R};\ \circ\ \right)$, isto é, as $\varphi_{a,b}$ são permutações de $I\!R$ $\forall\, a, b \in I\!R$, $a \neq 0$.

b) $G = \{\varphi_{a,b} \mid a, b \in I\!R,\ a \neq 0\}$ é subgrupo de $\mathbf{S}_{I\!R}$ e valem:

i) $\varphi_{a,b} \circ \varphi_{c,d} = \varphi_{ac,ad+b}$ $\forall\, a, b, c, d \in I\!R,\ a, c \neq 0$.

ii) O neutro de G é $\varphi_{1,0}$.

iii) $(\varphi_{a,b})^{-1} = \varphi_{1/a,-b/a}$.

c) $H = \{\varphi_{a,0} \mid 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$ é subgrupo não normal de G, enquanto $N = \{\varphi_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\} \trianglelefteq G$.

d) $H \cap N = \{\varphi_{1,0}\}$ e $NH = G$.

103) Comprovar através de um exemplo: $X \trianglelefteq N \trianglelefteq G$ não necessariamente implica em $X \trianglelefteq G$ (normalidade não é transitiva)!
Sugestão: Seja $G = \{\varphi_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$ o grupo de 102).
Estude $X = \{\varphi_{1,b} \mid b \in \mathbb{Z}\} \trianglelefteq N \trianglelefteq G$.

104) Considere $G = \big(\mathbb{R}; +\big)$, o grupo aditivo dos números reais e seja $H = \big(\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\};\ \cdot\ \big)$, o grupo multiplicativo dos números reais positivos. Dar exemplos de infinitos isomorfismos distintos

$$\varphi : G \longrightarrow H \quad \text{e seus inversos}.$$

105) Mostrar: Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um grupo G_n que contém exatamente n elementos.
Sugestão: Considere o conjunto de números complexos

$$G_n = \left\{ cos\ \tfrac{2\pi k}{n} + i \cdot sen\ \tfrac{2\pi k}{n} \ \middle|\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

(onde $i = \sqrt{-1}$) sob multiplicacao usual de números complexos.

106) Explicitar os grupos $\big(G_n;\ \cdot\ \big)$ obtidos em 105) para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

107) Considere o grupo aditivo $\big(\mathbb{Z}; +\big)$ dos números inteiros e o grupo multiplicativo $\big(\mathbb{C} \setminus \{0\};\ \cdot\ \big)$ dos números complexos não-nulos. Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja

$$\varphi_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

definida por

$$\varphi_n(k) = cos\ \tfrac{2\pi k}{n} + i \cdot sen\ \tfrac{2\pi k}{n} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

a) Mostrar que φ_n é um homomorfismo.

b) Determinar a imagem $\varphi_n(\mathbb{Z})$ e o núcleo $Nuc\,\varphi_n$.

c) Mostrar que o grupo $\big(G_n;\ \cdot\ \big)$ de 105) é isomorfo com o grupo aditivo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dos restos modulo n.

108) Seja $n \in \mathbb{N}$ e consideremos o grupo G_n de 105) tal como

$$M_n = \left\{ \begin{pmatrix} cos\ \frac{2\pi k}{n} & sen\ \frac{2\pi k}{n} \\ -sen\ \frac{2\pi k}{n} & cos\ \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} \ \middle|\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

sob multiplicação usual de matrizes. Mostrar que G_n e M_n são grupos isomorfos.

109) Seja $n \in I\!N$ e consideremos

$$R_n = \Big\{ \overline{k} \;\Big|\; 1 \leq k \leq n;\ n, k \text{ são relativamente primos} \Big\}$$

onde $\overline{k} = k + n\mathbb{Z}$ é a classe dos restos de k modulo n. Mostrar que $\Big(R_n\,;\ \cdot\ \Big)$ é um grupo. $|\,R_n\,| = ?$

110) a) Explicitar os grupos $\Big(R_n\,;\ \cdot\ \Big)$ de 109) para $n = 1, 2, 3, \ldots, 16$.

b) Quais entre os grupos $R_1, R_2, \ldots, R_{16}$ são isomorfos?

111) Seja $\Big(\mathbb{Z}\,; + \Big)$ o grupo aditivo dos inteiros, $\varepsilon\ :\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$\varepsilon(x) = -x \qquad \forall\, x \in \mathbb{Z}\,.$$

a) Mostrar que $\varepsilon \in \mathbf{aut}\Big(\mathbb{Z}\,; + \Big)$.

b) Mostrar que

$$\mathbf{aut}\Big(\mathbb{Z}\,; + \Big) = \{\, \delta_{\mathbb{Z}}\,,\ \varepsilon \,\}$$

é o grupo de *todos* os automorfismos de $\Big(\mathbb{Z}\,; + \Big)$.

Sugestão para b): Seja $\varphi \in \mathbf{aut}\Big(\mathbb{Z}\,; + \Big)$ qualquer. Mostrar que $\varphi(1) = \pm 1$ e concluir daí que $\varphi \in \{\, \delta_{\mathbb{Z}}\,,\ \varepsilon \,\}$

112) Seja $G = \Big(I\!R; + \Big)$ o grupo aditivo dos números reais e seja $A = \Big(I\!R \setminus \{\,0\,\};\ \cdot\ \Big)$ o grupo multiplicativo dos números reais não-nulos. Para todo $a \in A$ consideremos a aplicação

$$\varphi_a\ :G \longrightarrow G$$

definida por

$$\varphi_a(x) = ax \qquad \forall\, x \in G\,.$$

a) Mostrar que $\varphi_a \in \mathbf{aut}(G) \quad \forall\, a \in A$.

b) Considerando-se a aplicação

$$\Omega\ :\ A \longrightarrow \mathbf{aut}(G) \ \text{ definida por } \ \Omega(a) = \varphi_a \qquad \forall\, a \in A\,,$$

mostrar que Ω é um monomorfismo do grupo $\Big(A; \cdot \Big)$ para o grupo $\Big(\mathbf{aut}(G);\ \circ\ \Big)$.

113) Seja $H = \Big(\{\, x \in I\!R \mid x > 0 \,\};\ \cdot\ \Big)$ tal como $A = \Big(I\!R \setminus \{\,0\,\};\ \cdot\ \Big)$. Construir um monomorfismo

$$\Omega : \Big(A;\ \cdot\ \Big) \longrightarrow \Big(\mathbf{aut}\, H;\ \circ\ \Big)\,.$$

114) Seja $\big(E\,;\top_1\,,\dots,\,\top_r\big)$ uma estrutura algébrica com r composições. No grupo simétrico $\big(\mathbf{S}_E\,;\,\circ\,\big)$ sobre E consideremos

$$\begin{array}{ccc}
U_1 = \Big\{\varphi\in\mathbf{S}_E & \Big| \ \varphi(a\top_1 b)=\varphi(a)\top_1\varphi(b) & \forall\, a,b\in E\Big\} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
U_i = \Big\{\varphi\in\mathbf{S}_E & \Big| \ \varphi(a\top_i b)=\varphi(a)\top_i\varphi(b) & \forall\, a,b\in E\Big\} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
U_r = \Big\{\varphi\in\mathbf{S}_E & \Big| \ \varphi(a\top_r b)=\varphi(a)\top_r\varphi(b) & \forall\, a,b\in E\Big\}\,.
\end{array}$$

Mostrar que os U_i são subgrupos de $\mathbf{S}_E$ para $1\le i\le r$ e vale

$$\bigcap_{i=1}^{r} U_i=\mathbf{aut}\big(E\,;\top_1\,,\dots,\,\top_r\big)\,.$$

115) Consideremos o seguinte conjunto de números complexos:

$$G=\Big\{cos\,\alpha+i\cdot sen\,\alpha\ \Big|\ \alpha\in\mathbb{R}\Big\}$$

a) Mostrar que $\big(G;\,\cdot\,\big)$ é um grupo comutativo.

b) Dar uma condição necessária e suficiente sobre α para que $z=cos\,\alpha+i\cdot sen\,\alpha\in G$ tenha ordem finita.

c) G possui subgrupos finitos de cada ordem n (ver 105)).

116) Seja $\big(G;\,\cdot\,\big)$ um grupo *comutativo* e consideremos

$$\mathbf{T}(G)=\Big\{x\in G\ \Big|\ x\text{ tem ordem finita}\Big\}\,.$$

a) Mostrar que $\mathbf{T}(G)$ é um subgrupo de G.

b) Mostrar que todo elemento diferente do neutro de $G/\mathbf{T}(G)$ tem ordem infinita.

117) Mostrar: Num grupo não-comutativo G, o produto ab de dois elementos $a,b\in G$ de ordens finitas, pode ter ordem infinita.
Sugestão: Determinem as ordens dos elementos a,b e ab do grupo simétrico $G=\mathbf{S}_{\mathbb{Z}}$ onde

$$a: x\longrightarrow -x \quad\text{tal como}\quad b: x\longrightarrow -x+1\quad\forall\, x\in\mathbb{Z}\,.$$

Portanto: Num grupo não comutativo G, o conjunto

$$\mathbf{T}(G)=\Big\{x\in G\ \Big|\ x\text{ tem ordem finita}\Big\},$$

em geral não é subgrupo de G.

118) Seja $\big(G;\ \cdot\ \big)$ o grupo de 117). Mostrar que o conjunto

$$X = \{\,\mathbf{1}\,\} \cup \Big\{ z \in G \;\Big|\; z \text{ tem ordem infinita} \Big\}$$

é fechado a inversos, porém não forma um subgrupo.

119) Seja $\big(G;\ \cdot\ \big)$ o grupo de 115). Construir um epimorfismo

$$\varphi : \big(I\!R; +\big) \longrightarrow \big(G;\ \cdot\ \big)$$

tal que $Nuc\,\varphi = \mathbb{Z}$. Concluir que $\big(G;\ \cdot\ \big)$ é isomorfo com $\big(I\!R/\mathbb{Z}\,; +\big)$

120) Seja G um grupo, H um subgrupo, N um subgrupo normal e ψ um automorfismo de G. Mostrar:

a) $\psi(H)$ é um subgrupo de G e vale

$$\psi(H) \cong H\ .$$

b) $\psi(N)$ é um subgrupo normal de G e vale

$$G/\psi(N) \cong G/N\,.$$

121) Seja G um grupo, H um subgrupo de G. Consideremos

$$G/\eta_{_H} = \Big\{ xH \;\Big|\; x \in G \Big\} \quad \text{e} \quad G/\varepsilon_{_H} = \Big\{ Hx \;\Big|\; x \in G \Big\}\,,$$

i.e. os conjuntos das classes laterais à esquerda e à direita, respectivamente. Definindo-se

$$\Omega :\ G/\eta_{_H} \longrightarrow G/\varepsilon_{_H}$$

por

$$\Omega(xH) = Hx^{-1} \quad \forall\, x \in G\,,$$

mostrar que Ω é uma bijeção entre os dois conjuntos.
Porquê não pode ser definido $\Omega(xH) = Hx$?

122) Explicitar um isomorfismo $\Omega : \mathbf{S}_A \longrightarrow \mathbf{S}_B$ no caso

$$A = \{\,1, 2, 3\,\}\,, \quad B = \{\,a, b, c\,\}$$

tendo em vista que

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

é uma bijeção entre A e B.

123) Considere qualquer intervalo real aberto $F = (a\,, b)$ com $a < b$. Introduzir em F uma composição $\perp$, tal que $\big(F\,;\perp\big)$ seja um grupo isomorfo com $\big(I\!\!R\,;+\big)$.

124) Sejam G e H dois grupos isomorfos e suponhamos

$$\psi : G \longrightarrow H$$

é um isomorfismo. Construir um isomorfismo

$$\Omega : \big(\,\mathbf{aut}\,G\,;\ \circ\ \big) \longrightarrow \big(\,\mathbf{aut}\,H\,;\ \circ\ \big)\ .$$

125) Dar um exemplo de dois grupos não-isomorfos G e H, tal que

$$\mathbf{aut}(G) \cong \mathbf{aut}(H)\,.$$

Sugestão: Estudem por exemplo os pares de grupos G_1 e G_2 ou G_3 e G_4 de 105).

126) Seja G um grupo, H um subgrupo de G. Mostrar a equivalência das seguintes afirmações:

a) H é normal em G e o grupo quociente G/H é comutativo

b) $x^{-1}y^{-1}xy \in H$ para todos os elementos $x, y \in G$.

127) Seja G um grupo, H um subgrupo de G de índice $|G : H| = 2$. Mostrar que $H \trianglelefteq G$.

128) Dar um exemplo de um grupo G e um subgrupo $H \leq G$ de índice $|G : H| = 3$ tal que $H \ntrianglelefteq G$.

Anéis e corpos

129) Seja $1 < n \in I\!\!N$ um número não primo. Mostrar: O anel $\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,;+\,,\ \cdot\big)$ possui divisores de zero não-triviais.

130) Seja $\big(A\,;+\,,\ \cdot\ \big)$ um domínio de integridade, $\mathbf{1}$ a identidade dele e seja $S \neq \{\,0\,\}$ um subanel de A. Mostar: Se S possuir uma identidade e, então $e = \mathbf{1}$.

131) Determinar todos os subanéis S de $A = \big(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}\,;+\,,\ \cdot\big)$. Quais deles possuem uma identidade (qual)? Quais deles são corpos?

132) Seja $\big(A\,;+\,,\ \cdot\ \big)$ um domínio de integridade. Mostrar: As únicas soluções da equação $x^2 = 1$ são $x = \pm 1$.

133) Determinar as soluções da equação $x^2 = 1$ no anel $A = \big(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\,; + , \cdot \big)$.

134) Seja $\big(A; + , \cdot \big)$ um anel comutativo com $\mathbf{1}$. Seja I um ideal de A . Mostrar a equivalência das seguintes afirmações:

a) O anel I possui uma identidade e .

b) Existe exatamente um ideal J de A tal que

$$I \cap J = \{\,0\,\} \ \text{ e } I + J = A\ .$$

Sugestão: Para "a) $\Rightarrow$ b)" : Considere $J = (\mathbf{1} - e)A$
Para "b) $\Rightarrow$ a)" : Escreva $\mathbf{1} = e + f$ com $e \in I$ e $f \in J$.

135) Seja $\big(C\,; + , \cdot \big)$ um corpo . Para todos os $a, b \in C$ com $b \neq 0$, coloquemos

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}\ .$$

Mostrar as seguintes regras para todos os $a, b, c, d \in C$ com $b, d \neq 0$:

a) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

b) $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

c) $$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}; \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

d) $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

e) $$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad \text{se } a \neq 0$$

f) $$\frac{a/b}{d} = \frac{a}{bd}$$

g) $$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}\ , \quad \text{se também } c \neq 0\ .$$

136) Seja $\big(C\,; + , \cdot \big)$ um corpo, G um subgrupo finito do grupo multiplicativo $\big(C \setminus \{\,0\,\}; \ \cdot \ \big)$. Mostrar:

a) Se $|G| \geq 2$, então $\sum\limits_{x \in G} x = 0$.

b) $\prod\limits_{x \in G} x = 1$, se $-1 \notin G$, enquanto $\prod\limits_{x \in G} x = -1$ se $-1 \in G$.

Sugestão: Para a): Seja $s = \sum_{x \in G} x$. Escolha $1 \neq a \in G$ e prove que $as = s$.
Para b): Em G vale $x^2 = 1 \iff x = \pm 1$. Além disso, $(x^{-1})^{-1} = x$ para todos os $x \in G$.

137) Seja $2 \leq n \in I\!N$. Mostrar

$$\sum_{k=0}^{n-1} cos\,\frac{2\pi k}{n} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} sen\,\frac{2\pi k}{n} \;=\; 0\,.$$

Sugestão: Aplique 136 a) ao subgrupo

$$G = \left\{ \; cos\,\tfrac{2\pi k}{n} + i \cdot sen\,\tfrac{2\pi k}{n} \;\middle|\; k = 0, \ldots, n-1 \;\right\}$$

de $\Big(\mathbb{C} \setminus \{0\};\ \cdot\ \Big)$.

Anéis de Boole

138) Seja E um conjunto, $\mathfrak{A} = \mathbf{2}^E = \{ X \mid X \subseteq E \}$ o conjunto das partes de E. Para $X, Y \in A$ definamos

$$X + Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \quad \text{(comparar 9))}$$

tal como

$$X \cdot Y = X \cap Y\,.$$

Mostrar:

(i) $\big(A; +\,,\ \cdot \big)$ é um anel comutativo com identidade.

(ii) $X = -X$ tal como $X^2 = X \quad \forall\, X \in A$.

Observação : $\big(A; +\,,\ \cdot \big)$ chama-se o anel de Boole sobre o conjunto E.

139) Seja E um conjunto, $B = \{0,1\}^E = \{\beta_X \mid X \subseteq E\}$ o conjunto das funções características sobre E, (i.e. $\beta_X(x) = 0$, se $x \notin X$ e $\beta_X(x) = 1$, se $x \in X$). Introduzir em B uma adição $+$ e uma multiplicação $\cdot$ de tal maneira que $\big(B; +\,,\ \cdot \big)$ seja um anel isomorfo ao anel de Boole $\big(\mathbf{2}^E; +\,,\ \cdot \big)$ de 138).

140) Seja E um conjunto, $\big(\mathbf{2}^E; +\,,\ \cdot\ \big)$ o anel de Boole sobre E. Seja $C \in \mathbf{2}^E$. Mostrar:

(i) O ideal principal de $\mathbf{2}^E$ gerado por C é

$$(C) = \left\{ X \;\middle|\; X \subseteq C \right\}.$$

(ii)
$$\mathbf{2}^E/(C) \cong \mathbf{2}^{E\setminus C} \ .$$

Sugestão para (ii): Estudar a aplicação $\varphi : \mathbf{2}^E \longrightarrow \mathbf{2}^{E\setminus C}$ definida por $\varphi(X) = X \cap (E \setminus C) \quad \forall\, X \in \mathbf{2}^E$.

141) Seja $E \neq \emptyset$ um conjunto, $x \in E$ e $P_x = E \setminus \{x\}$. Mostrar:

$$\mathbf{2}^E/(P_x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ .$$

142) Seja $\big(A; + , \cdot\big)$ um anel tal que

$$x^2 = x \quad \forall\, x \in A \ .$$

Mostrar que A é comutativo e vale $x = -x \quad \forall\, x \in A$.
Sugestão: Calcular $(x+x)^2$ e $(x+y)^2$.
Observação: Um elemento e de um anel A chama-se *idempotente* se $e^2 = e$. Num qualquer anel $\big(A; + , \cdot\big)$, o elemento 0, e a identidade $\mathbf{1}$ (se tiver), são elementos idempotentes (triviais) .
138) diz que num anel de Boole $\mathbf{2}^E$ sobre um conjunto E todo elemento é idempotente .
142) diz que um anel com todo elemento idempotente, necessariamente é comutativo .

143) Seja $\big(A; + , \cdot\big)$ um anel comutativo com elemento identidade $\mathbf{1}$ e seja $e \in A$ um elemento idempotente . Mostrar :

a) Também $\mathbf{1} - e$ é idempotente, vale
$$e(\mathbf{1} - e) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{1} - (\mathbf{1} - e) = e \, .$$
b) Se $e \in A \setminus \{\mathbf{1}, 0\}$, então e é um divisor de zero não-trivial .
c) Se A é um domínio de integridade, então os únicos elementos idempotentes de A são 0 e $\mathbf{1}$.

Observação : Um par de elementos $(e\, , \mathbf{1} - e)$ onde e é idempotente, chama-se um par de *idempotentes ortogonais* .

144) Mostar : Os únicos idempotentes do anel $A = \big(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}\, ; + , \cdot\big)$ são $\overline{0}$ e $\overline{1}$ (apesar de A conter divisores de zero!) .

145) a) Determinar os elementos idempotentes do anel $A = \big(\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}\, ; + , \cdot\big)$.
b) Determinar todos os pares de idempotentes ortogonais do anel $A = \big(\mathbb{Z}/231\mathbb{Z}\, ; + , \cdot\big)$.

146) Seja $\big(A;+\,,\,\cdot\big)$ um anel comutativo com $\mathbf{1}$ e seja $x\in\mathbf{U}(A)$.
Mostrar: x não pode ser um divisor de zero.

147) Seja $\big(A;+\,,\,\cdot\big)$ um anel comutativo com $\mathbf{1}$. Mostrar

$$\mathbf{U}(A)=A\setminus\big(\bigcup_{A\neq I\trianglelefteq A} I\big)\,.$$

Em palavras: São exatamente as unidades de A que não estão contidos em nenhum ideal próprio de A.
Exemplo:

$$\{1,-1\}=\mathbb{Z}\setminus\big(\bigcup_{2\leq n\in\mathbb{N}} n\mathbb{Z}\big)$$

148) Seja $\big(A;+\,,\,\cdot\big)$ um anel e suponhamos, A possui uma *única* identidade à esquerda e, isto é $ex=x\quad\forall\,x\in A$. Mostrar que e é a identidade bilateral de A.
Sugestão: Suponhamos $xe=x\quad\forall\,x\in A$ não é verdade. Então existe $x_0\in A$ tal que $x_0e\neq x_0$. Considere $f=e+x_0-x_0e$ e mostre que f é uma outra identidade à esquerda de A.

149) Considere o anel $A=\big(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}\,;+\,,\,\cdot\big)$. Completar o preenchimento dos quadros de adição e multiplicação para A:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$								
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$								
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$								
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$								
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$								
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$								
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$								
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$								

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$								
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$								
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$								
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$								
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$								
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$								
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$								
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$								

150) Considere o corpo $C=\big(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}\,;+\,,\,\cdot\big)$. Preencher os quadros de adição e multiplicação para C:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$										
$\overline{2}$	$\overline{2}$										
$\overline{3}$	$\overline{3}$										
$\overline{4}$	$\overline{4}$										
$\overline{5}$	$\overline{5}$										
$\overline{6}$	$\overline{6}$										
$\overline{7}$	$\overline{7}$										
$\overline{8}$	$\overline{8}$										
$\overline{9}$	$\overline{9}$										
$\overline{10}$	$\overline{10}$										

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$									
$\overline{3}$	$\overline{3}$									
$\overline{4}$	$\overline{4}$									
$\overline{5}$	$\overline{5}$									
$\overline{6}$	$\overline{6}$									
$\overline{7}$	$\overline{7}$									
$\overline{8}$	$\overline{8}$									
$\overline{9}$	$\overline{9}$									
$\overline{10}$	$\overline{10}$									

151) Seja $C = \big(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}\,;+\,,\,\cdot\big)$. Resolver todas as 12 equações

$$\overline{a}\,\overline{x} = \overline{1} \ \text{ quando } \ \overline{0} \neq \overline{a} \in C\ .$$

O teorema binomial para anéis comutativos

152) Seja $\big(A;+\,,\,\cdot\big)$ um anel comutativo, $a, b \in A$ dois elementos e seja $n \in \mathbb{N}$. Mostrar, por indução sobre n, o teorema binomial

$$(a+b)^n = a^n \ + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ + b^n$$

onde $\displaystyle \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

153) Seja $\big(A;+\,,\,\cdot\big)$ um anel comutativo com elemento identidade $\mathbf{1}$. Interpretando-se $x^0 = \mathbf{1} \in A \quad \forall\ x \in A$, o enunciado do teorema binomial de 158) pode ser simplificado para

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

154) Sejam $\big(A;+\,,\,\cdot\big)$ e $\big(B;+\,,\,\cdot\big)$ dois anéis e consideremos o produto CARTESiano

$$A \times B = \Big\{\ (a,b)\ \Big|\ a \in A,\ b \in B\ \Big\}\ ,$$

munido da adição

$$(a,b) + (c,d) = (a+c\ ,\ b+d)$$

e multiplicação

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac\ ,\ bd)$$

onde $(a,b)\ ,\ (c,d) \in A \times B$. Mostrar:

(i) $\big(A\times B\,;+\,,\,\cdot\big)$ é um anel.

(ii) $\big(A\times B\,;+\,,\,\cdot\big)$ é comutativo $\iff$ $\big(A;+\,,\,\cdot\big)$ e $\big(B\,;+\,,\,\cdot\big)$ ambos são anéis comutativos.

(iii) $\big(A\times B\,;+\,,\,\cdot\big)$ é um anel com identidade (qual?) $\iff$ $\big(A;+\,,\,\cdot\big)$ e $\big(B\,;+\,,\,\cdot\big)$ ambos são anéis com identidades.

(iv) Se $A\neq\{0\}\neq B$, então $\big(A\times B\,;+\,,\,\cdot\big)$ possui divisores de zero não-triviais. Em particular, $\big(A\times B\,;+\,,\,\cdot\big)$ não pode ser um corpo.

155) Seja $\big(A;+\,,\,\cdot\big)$ um anel e sejam I e J dois ideais em A.
Mostrar: O anel quociente $\dfrac{A}{I\cap J}$ é isomorfo a um subanel de $A/I\times A/J$.
Sugestão: Considere a aplicação

$$\varphi : A \longrightarrow A/I\times A/J$$

definida por $\varphi(x)=(x{+}I\ ,\ x{+}J)\quad\forall\,x\in A$.

156) Sejam $\big(C_1\,;+\,,\,\cdot\big)$ e $\big(C_2\,;+\,,\,\cdot\big)$ dois corpos e consideremos o produto CARTESiano

$$A=C_1\times C_2,$$

munido da adição e multiplicação como em 154). Sejam

$$I_1=\Big\{(a,0)\ \Big|\ a\in C_1\Big\}\quad\text{e}\quad I_2=\Big\{(0,b)\ \Big|\ b\in C_2\Big\}\ .$$

Mostrar que I_1 e I_2 são dois ideais de A e que

$$\Big\{A\,,\,I_1\,,\,I_2\,,\,\{0\}\Big\}$$

é o conjunto de *todos* os ideais de A.

157) Seja $\big(A;+\,,\,\cdot\big)$ um domínio de integridade, I,J dois ideais $\neq\{0\}$ de A. Mostrar que $I\cap J\neq\{0\}$.

158) Seja

$$K=\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\Big\{\ a+b\sqrt{3}\ \Big|\ a,b\in\mathbb{Q}\ \Big\},$$

considerando-se em K a adição e multiplicação usuais de números reais.
Mostrar que $\big(K\,;+\,,\,\cdot\big)$ é um corpo.
Qual é o inverso de $0\neq a+b\sqrt{3}\in K$?

159) Seja $C = \left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\,;+\,,\ \right)$ e consideremos o produto CARTESiano

$$K = \left\{ \ (\overline{a},\overline{b}) \ \middle| \ \overline{a},\overline{b} \in C \ \right\} \ ,$$

munido da adição

$$(\overline{a},\overline{b}) + (\overline{c},\overline{d}) = (\overline{a}+\overline{c}\ ,\ \overline{b}+\overline{d})$$

e da multiplicação

$$(\overline{a},\overline{b})\cdot(\overline{c},\overline{d}) = (\overline{a}\,\overline{c} + \overline{3}\,\overline{b}\,\overline{d}\ ,\ \overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{d})\ .$$

Mostrar que $\left(K\,;+\,,\ \cdot \right)$ é um corpo com 25 elementos.
Qual é a identidade de K e qual é o inverso de $(\overline{0},\overline{0}) \neq (\overline{a},\overline{b}) \in K$?
Sugestão: Compare com 158), observando que $\overline{x}^2 \neq \overline{3} \quad \forall\, \overline{x} \in C$.

160) Seja $C = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,;+\,,\ \right)$ e consideremos o produto CARTESiano

$$K = \left\{ \ (\overline{a},\overline{b}) \ \middle| \ \overline{a},\overline{b} \in C \ \right\} \ ,$$

munido da adição

$$(\overline{a},\overline{b}) + (\overline{c},\overline{d}) = (\overline{a}+\overline{c}\ ,\ \overline{b}+\overline{d})$$

e da multiplicação

$$(\overline{a},\overline{b})\cdot(\overline{c},\overline{d}) = (\overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{d}\ ,\ \overline{b}\,\overline{d} + \overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{d})\ .$$

Mostrar que $\left(K\,;+\,,\ \cdot \right)$ é um corpo com 4 elementos.
Qual é o inverso de $(\overline{0},\overline{0}) \neq (\overline{a},\overline{b}) \in K$?
Sugestão: Preencher os quadros de adição e multiplicação para K:

$+$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{0})$				
$(\overline{1},\overline{0})$				
$(\overline{0},\overline{1})$				
$(\overline{1},\overline{1})$				

$\cdot$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{1},\overline{0})$			
$(\overline{0},\overline{1})$			
$(\overline{1},\overline{1})$			

161) Mostrar:

a) O único automorfismo do anel $\left(\mathbb{Z}\,;+\,,\ \cdot \right)$ dos inteiros é o automorfismo idêntico.
Porquê o automorfismo $\quad x \to -x \quad$ do grupo aditivo $\left(\mathbb{Z}\,;+ \right)$ (ver 111)) não é um automorfismo do anel $\left(\mathbb{Z}\,;+\,,\ \cdot \right)$?

b) O único automorfismo do corpo $\left(\mathbb{Q};+\,,\ \cdot \right)$ dos números racionais é o automorfismo idêntico.

162) Seja $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \Big\{ a + b\sqrt{3} \;\Big|\; a, b \in \mathbb{Q} \Big\}$, o corpo de 158). Mostrar:
A aplicação

$$\varphi : K \longrightarrow K \quad \text{definida por} \quad \varphi(a + b\sqrt{3}) = a - b\sqrt{3}\,,$$

é um automorfismo (não-idêntico) de $\Big(K\,; +\,,\ \cdot \Big)$.

163) Mostrar: O único automorfismo do corpo $\Big(\mathbb{R}; +\,,\ \cdot \Big)$ dos números reais é o automorfismo idêntico.
Sugestão: Se $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um qualquer automorfismo, mostrar

i) $\varphi(x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$.

ii) $a > 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(a) > 0$ (use que a é um quadrado).

iii) $a < b \quad \Longrightarrow \quad \varphi(a) < \varphi(b)$.

iv) Se fosse $a \neq \varphi(a)$, por exemplo $a < \varphi(a)$, considere $x \in \mathbb{Q}$ com $a < x < \varphi(a)$ e tire uma contradição.