Iniciação Científica

Júlio César Froes de Oliveira

August 2023

1 Introdução

Neste presente documento, objetiva-se estudar o resultado abordado na referência principal (VUKMAN, 1987), que se concentra na equação funcional de Cauchy, que é baseado no estudo (KUREPA, 1964), para anéis com divisão com característica diferente de dois.
A didática deste estudo se iniciará com definições necessárias para abordagem geral do resultado, com sua apresentação, posteriormente. No entanto, supõe-se que conhecimentos iniciais de grupos e aplicações são triviais. Todo lema, teorema ou colorário será seguido de sua demonstração, assim certifica-se a formalidade matemática necessária.

2 Definições

2.1 Anéis

Um conjunto, dotado de duas leis de composição interna, se

1. Denotando a primeira dessas leis de composição interna como adição $(+)$, o conjunto A é um grupo abeliano;
2. Denotando a segunda lei de composição interna por multiplicação $(\cdot)$, esta é associativa;
3. A multiplicação se distribui na soma;

2.2 Potenciação nos Anéis

Seja A um anel e $a \in A$ e $n \in \mathbb{N}^*$, define-se a^n como:

$$a^1 := a$$

$$a^n := a^{n-1}a$$

Segue, que

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

2.3 Subanéis

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Se $L \subset A, L \neq \emptyset$ é um subanel se, e somente se

1. L é fechado para ambas as operações de A;

2. $(L, +, \cdot)$ também é um anel;

2.4 Mais definições

1. Um anel é chamado anel com identidade se ele tem uma identidade na multiplicação: se existe um elemento e tal que $ae = ea = a$

2. Um anel é chamado comutativo se $\cdot$ é comutativo.

3. Um anel é chamado domínio de integridade se é um anel comutativo com identidade diferente de 0 onde $ab = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$

4. Um anel A é chamado anel com divisão (skew field) se todos os elementos não nulos de A formam um grupo sobre $\cdot$.

5. Um anel com divisão comutativo é chamado corpo.

2.5 Característica

Se A é um anel arbitrário e existe um inteiro positivo n tal que $nr = 0$ para todo $r \in A$, então o menor inteiro n que satisfaz essa propriedade é chamado de característica de A e A é dito que tem característica n. Se não existe um inteiro positivo n, a característica de A é 0.

3 Sobre o estudo

Com as definições concedidas acima, podemos seguir sobre os estudos dos resultados da referência.

Teorema: Seja A um anel com divisão de característica diferente de 2 e seja uma aplicação $f : A \to A$ uma aplicação aditiva que vale a relação:

$$f(a) = -a^2 f(a^{-1}) \tag{1}$$

para todo $a \in A$. Então, temos $f(a) = 0$ para todo $a \in A$.

Queremos provar o teorema acima, usando a identidade abaixo.

$$(ab - ba)af(a) = a(ab - ba)f(a) \tag{2}$$

Logo, vamos provar esta identidade, que exige uma sequência de passos.

$$(ab - ba)a = a(ab - ba) \tag{3}$$

para todo par $a, b \in A$.

Note que, se $f(a) = -a^2 f(a^{-1}) \implies f(a) = 0$, então $f(1) = -1^2 f(1^{-1}) \implies f(1) = 0$, e com o mesmo argumento temos o mesmo resultado para $f(0) = 0$. Mas, se assumirmos que $a \neq 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$a^2 = a - (a^{-1} + (1-a)^{-1})^{-1}$$

Aplicando $f(a)$ nos dois lados da igualdade acima, temos

$$f(a^2) = f(a) - f((a^{-1} + (1-a)^{-1})^{-1})$$

$$= f(a) + (a^{-1} + ((1-a)^{-1})^{-1})^2 f(a^{-1} + (1-a)^{-1})$$

$$= f(a) - a^2(1-a)^2 a^{-2} f(a) - a^2(1-a)^2(1-a)^{-2} f(1-a)$$

$$= f(a) - (1-a)^2 f(a) - a^2(f(1) - f(a))$$

$$= f(a) - (1-a)^2 f(a) - a^2 f(a) = 2af(a)$$

Portanto

$$f(a^2) = 2af(a) \tag{4}$$

Agora, se usar a equação (3), mas no lugar de a, usarmos a + b, temos que:

$$f((a+b)^2) = 2(a+b)f((a+b))$$

$$f(a^2 + b^2 + ab + ba) = 2af(a+b) + 2bf(a+b)$$

$$f(a^2) + f(b^2) + f(ab+ba) = 2af(a) + 2af(b) + 2bf(a) + 2bf(b)$$

$$f(ab+ba) = 2af(b) + 2bf(a), a, b \in A \tag{5}$$

Segue da equação (4), portanto, que

$$f(a(ab+ba) + (ab+ba)a) = 2af(ab+ba) + 2(ab+ba)f(a) = 4a^2 f(b) + 6abf(a) + 2baf(a)$$

Por outro lado

$$f(a(ab+ba) + (ab+ba)a) = f(a^2b + ba^2 + 2aba) = 2a^2 f(b) + 4baf(a) + 2f(aba)$$

Relacionando as duas igualdades:

$$f(aba) = a^2 f(b) + 3abf(a) - baf(a) \tag{6}$$

Na equação (5), se colocarmos $a + c$ no lugar de a, temos

$$f((a+c)b(a+c)) = (a+c)^2 f(b) + 3(a+c)bf(a+c) - b(a+c)f(a+c)$$

E, também:

$$f(aba) + f(cbc) + f(abc + cba) =$$

$$= a^2 f(b) + 3abf(a) - baf(a) + c^2 f(b) + 3cbf(c) - bcf(c) + (ac+ca)f(b) + 3abf(c) + 3cbf(a) - baf(c) - bcf(a)$$

Usando (5), temos

$$f(abc + cba) = (ac+ca)f(b) + 3abf(c) + 3cbf(a) - baf(c) - bcf(a) \tag{7}$$

Onde a,b,c são elementos arbitrários do anel A. Seja

$$X = f(ab(ab) + (ab)ba)$$

De (6), temos:

$$X = (a(ab) + (ab)a)f(b) + 3abf(ab) - baf(ab) + 3ab^2 f(a) - babf(a)$$

Por outro lado, como $X = f((ab)^2 + ab^2 a)$, usando (3) e (5), temos:

$$X = f((ab)^2) + f(ab^2 a) = 2abf(ab) + a^2 f(b^2) + 3ab^2 f(a) - b^2 af(a) = 2abf(ab) + 2a^2 bf(b) + 3ab^2 f(a) - b^2 af(a)$$

Comparando os dois resultados, obtemos:

$$(ab - ba)f(ab) = a(ab - ba)f(b) + b(ab - ba)f(a) \tag{8}$$

Substituindo a por $a + c$ em (8), temos:

$$((a + c)b - b(a + c))f((a + c)b) = (a + c)((a + c)b - b(a + c))f(b) + b((a + c)b - b(a + c))f((a + c))$$

$$\implies ((ab-ba)+(cb-bc))(f(ab)+f(cb)) = (a(ab-ba)+c(ab-ba)+a(cb-bc)+c(cb-bc))f(b)+(b(ab-ba)+b(cb-bc))(f(a)+f(c)$$

Usando (7), obtemos:

$$(cb - bc)f(ab) + (ab - ba)f(cb) = c(ab - ba)f(b) + a(cb - bc)f(b) + b(cb - bc)f(a) + b(ab - ba)f(c)$$

Se, na igualdade acima, $b = a$, temos:

$$(ca - ac)f(a^2) = 2a(ca - ac)f(a)$$

E através de (3), (2) está provado. Além disto, através do lema 1.1.9 em (**??**), temos que, em um anel A com divisão e característica diferente de 2, se um elemento $a \in A$ comuta com $ab - ba, \forall b \in A$, então $a \in Z(A) \implies ax = xa, \forall x \in A$. Portanto, suponha que $f(a) \neq 0$, o que implica, por (2), $a(ac - ca) = (ac - ca)a \implies a \in Z(A)$. Tome, então, $b \in A$ mas $b \notin Z(A)$, por (2) $f(b) = 0$ e $a + b \notin Z(A) \implies f(a + b) = 0 \implies f(a) = 0$, o que contradiz nossa suposição e, assim, o teorema está demonstrado.

Referências

KUREPA, S. The cauchy functional equation and scalar product in vector spaces. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Društvo Mat. Fiz. Hrvatske*, v. 19, p. 23–36, 1964.

VUKMAN, J. A note on additive mappings in noncommutative fields. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 36, n. 3, p. 499–502, 1987.