



**Um Estudo Sobre Matemáticos e Matemáticas**

**PETMAT**  
**UnB**

**Integrantes do PETMAT**

**Tutora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues**

**Departamento de Matemática**

**Universidade de Brasília**



---

## Conteúdo

---

<b>1</b>	<b>Euclides</b>	<b>11</b>
1.1	Referências . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Arquimedes</b>	<b>15</b>
2.1	Referências . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Isaac Newton</b>	<b>19</b>
3.1	Referências . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Leonhard Euler</b>	<b>27</b>
4.1	Referências . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Joseph Fourier</b>	<b>33</b>
5.1	Referências . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Carl Friedrich Gauss</b>	<b>37</b>
6.1	Referências . . . . .	41
<b>7</b>	<b>Évariste Galois</b>	<b>43</b>
7.1	Referências . . . . .	46
<b>8</b>	<b>Bernhard Riemann</b>	<b>47</b>
8.1	Referências . . . . .	50
<b>9</b>	<b>Sophus Lie</b>	<b>51</b>
9.1	Referências . . . . .	55
<b>10</b>	<b>Georg Cantor</b>	<b>57</b>
10.1	Referências . . . . .	59
<b>11</b>	<b>Henri Poincaré</b>	<b>61</b>
11.1	Referências . . . . .	64
<b>12</b>	<b>David Hilbert</b>	<b>65</b>
12.1	Referências . . . . .	70

<b>13 Emmy Noether</b>	<b>73</b>
13.1 Referências . . . . .	76
<b>14 John von Neumann</b>	<b>77</b>
14.1 Referências . . . . .	81
<b>15 Maria Laura Lopes</b>	<b>83</b>
15.1 Referências . . . . .	85
<b>16 Katherine Johnson</b>	<b>87</b>
16.1 Referências . . . . .	90
<b>17 Alexander Grothendieck</b>	<b>93</b>
17.1 Referências . . . . .	96
<b>18 John Nash</b>	<b>97</b>
18.1 Referências . . . . .	100

---

## Prefácio

---

Os grupos PET (Programa de Educação Tutorial) foram criados com o objetivo de promover a formação ampla dos seus integrantes, desenvolvendo atividades de ensino, pesquisa e extensão. São grupos formados por um professor tutor e por até 12 estudantes bolsistas e 6 estudantes não bolsistas, ambos selecionados por processo seletivo.

O PET Matemática (PETMAT) da Universidade de Brasília (UnB) realiza várias atividades de ensino, pesquisa e extensão.

Entre as atividades desenvolvidas pelo grupo destacamos a PETMAT Pesquisa Coletiva que é um estudo, sobre um tema específico de Matemática, feito por todo o grupo e orientado pela tutora. No ano de 2023, a pesquisa coletiva foi sobre a vida de matemáticos e matemáticas. O presente texto, cuja revisão foi finalizada somente em agosto de 2024, é fruto do trabalho colaborativo entre os integrantes do PETMAT, relacionados a seguir, aos quais registro os meus agradecimentos e os meus parabéns pela conclusão deste texto, em equipe.

Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues  
tutora do PETMAT UnB  
11 de agosto de 2024

PETianos que participaram da escrita do texto

Alex Lacerda Machinena	Anita Boaventura Carneiro
Davi Batisaco Lírio Nunes	Henrique Monteiro Meneses
Hildefonso Mendes Cruz	João Salomão Mota Pereira Lopes
João Vitor Teixeira Moura	Julio Cesar Froes De Oliveira
Lívia Nascimento de Alencar	Liz Gabrielle Sanches Barbero
Matheus Pereira Frota	Pedro Cusinato Loiola Lima
Riquelme Nascimento Dos Santos	Romulo Crisostomo Carvalho

PETianos que participaram da revisão do texto

Matheus Pereira Frota

Orientação

Professora: Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues

---

## Agradecimentos

---

Deixamos registrados os nossos agradecimentos à professora Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues, pela orientação e paciência ao longo do desenvolvimento e produção deste trabalho.





---

## Introdução

---

Este livro é o resultado de um esforço colaborativo realizado pelo PETMAT UnB (Programa de Educação Tutorial do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília), fruto de um projeto que teve início em 2023. A proposta original era tanto uma exploração da vida de matemáticos icônicos quanto uma oportunidade para que os alunos mergulhassem nas histórias daqueles que mais despertavam sua curiosidade e interesse.

Nos primeiros passos do projeto, compilamos uma lista de grandes nomes da matemática. Cada membro do grupo, em duplas, escolheu um matemático para estudar, com o objetivo de compreender não apenas suas contribuições para a ciência, mas também o contexto histórico e pessoal que os rodeava. A relevância das contribuições foi um critério fundamental para a seleção, mas não o único. Decidimos também conceder aos alunos a liberdade para que escolhessem abordar matemáticos que mais os fascinassem, mesmo que isso significasse deixar de lado alguns nomes de maior renome.

Cada dupla foi responsável por reunir material, preparar apresentações e, em seguida, compartilhar suas descobertas com o restante do grupo. Essas apresentações serviram como base para discussões ricas e aprofundadas, onde a vida e as obras dos matemáticos eram analisadas com atenção. Além disso, sob a orientação da professora Luciana de Ávila, as duplas transformaram suas pesquisas em pequenos artigos biográficos, que serviram como base para os capítulos deste livro.

Os textos que você encontrará aqui surgiram inicialmente dos materiais escritos pelos estudantes, mas passaram por um processo de ampla revisão e expansão. Nossa meta foi homogeneizar o estilo e a forma da escrita, criando uma narrativa coesa, acessível e detalhada.

É importante ressaltar que o conteúdo deste livro não é autoral. Cada capítulo está ancorado em uma sólida base de referências, as quais são citadas ao final de cada seção. O objetivo foi criar uma obra que seja ao mesmo tempo informativa e respeitosa com as fontes que a fundamentam. Finalmente, observamos que foi dada mais ênfase à apresentação biográfica do que a exploração mais detalhada das contribuições matemáticas de cada matemático trabalhado.

Convidamos você a conhecer mais o lado humano da matemática ao explorar as vidas desses grandes matemáticos e matemáticas, cujas histórias, por vezes inspiradoras, moldaram o caminho da matemática e das ciências exatas.



# CAPÍTULO 1

---

## Euclides

---

Euclides de Alexandria é o matemático mais proeminente da antiguidade, mais conhecido por seu tratado sobre matemática, *Os Elementos*, um dos livros mais importantes da história. A natureza duradoura de *Os Elementos* faz de Euclides o principal professor de matemática de todos os tempos. No entanto, pouco se sabe sobre a vida de Euclides, exceto que ele ensinou em Alexandria, no Egito. Até mesmo sua data de nascimento é desconhecida. Proclo, o último grande filósofo grego, que viveu por volta de 450 d.C., escreveu que Euclides viveu na época do primeiro Ptolomeu e que Arquimedes, que viveu logo após o primeiro Ptolomeu, mencionou Euclides. Proclo também relatou que Ptolomeu perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto para estudar geometria além dos Elementos, ao que Euclides famosamente respondeu que não havia um caminho real para a geometria. Proclo situou Euclides como mais jovem que o círculo de Platão, mas mais velho que Eratóstenes e Arquimedes, argumentando que Euclides estava em sintonia com a filosofia platônica e fez das figuras platônicas o objetivo final de *Os Elementos*.

Outras informações sobre Euclides fornecidas por autores árabes indicam que Euclides era filho de Naucrates e nasceu em Tiro, mas historiadores de matemática acreditam que isso é fictício e foi inventado pelos autores. Além disso, há uma confusão com Euclides de Mégara, um filósofo que viveu cerca de 100 anos antes do matemático Euclides de Alexandria, o que adiciona outra camada de complexidade na identificação correta.

Voltando à citação de Proclo, o ponto principal é que não há inconsistências na datação fornecida. No entanto, embora não saibamos exatamente a que referência a Euclides na obra de Arquimedes Proclo está se referindo, no que nos chegou, há apenas uma referência a Euclides, e isso ocorre em *Sobre a Esfera e o Cilindro*. A conclusão óbvia, portanto, é que tudo está bem com o argumento de Proclo, e isso foi assumido até ser desafiado por Hjelmslev, que argumentou que a referência a Euclides foi adicionada posteriormente à obra de Arquimedes. Ele observou que não era tradição da época dar tais referências; além disso, há muitos outros lugares em Arquimedes onde seria apropriado referir-se a Euclides, mas não há tal referência. Bulmer-Thomas, no entanto, escreve que, embora não seja mais possível confiar nessa referência, uma consideração geral das obras de Euclides ainda mostra que ele deve ter escrito após alunos de Platão como Eudoxo e antes de Arquimedes.

Atualmente, os historiadores consideram três hipóteses possíveis sobre Euclides:

1. Euclides foi um único personagem histórico que escreveu *Os Elementos* e outras obras atribuídas a ele.
2. Euclides foi o líder de uma equipe de matemáticos que trabalharam em Alexandria, contribuindo para a escrita das “obras completas de Euclides”, mesmo continuando a escrever livros sob seu nome após sua morte.
3. Euclides não foi um personagem histórico. As ‘obras completas de Euclides’ foram escritas por uma equipe de matemáticos em Alexandria que adotou o nome Euclides do personagem histórico Euclides de Mégara.

Há evidências fortes para aceitar a primeira hipótese, que foi aceita sem questionamento por mais de 2000 anos, e há pouca evidência inconsistente com essa hipótese. Mesmo aceitando a primeira hipótese, é provável que Euclides tenha formado uma escola vigorosa de matemática em Alexandria e que seus alunos talentosos possam ter ajudado na redação dos livros.

*Os Elementos* de Euclides, divide-se em 13 Livros, e começa com definições e cinco postulados. Os três primeiros postulados são de construção, enquanto os postulados quatro e cinco são de natureza diferente. O quinto postulado, o famoso postulado das paralelas, estabelece que, se uma linha reta cruzar duas outras linhas retas e formar ângulos internos do mesmo lado menores que dois ângulos retos, essas duas linhas, se estendidas indefinidamente, se encontrarão do lado onde os ângulos são menores que dois ângulos retos. O próprio Euclides parece não estar totalmente satisfeito com este postulado, e muito do seu trabalho sobre a teoria das paralelas aparece cedo em *Os Elementos*.

O Livro 1 contém teoremas básicos de geometria, como o teorema de Pitágoras, e termina com a construção de um pentágono regular. Os três primeiros livros cobrem a geometria plana elementar, enquanto o Livro 4 trata da construção de polígonos regulares. Os Livros 5 e 6 tratam da teoria das proporções de Eudoxo e sua aplicação à geometria. O Livro 7 é sobre teoria dos números elementar e contém o algoritmo euclidiano para encontrar o maior divisor comum de dois números. Os Livros 8 e 9 também tratam da teoria dos números e incluem teoremas sobre sequências geométricas, a soma de uma série geométrica, a existência de infinitos números primos e a formação de números perfeitos.

O Livro 10 trata dos números irracionais, seguindo o trabalho de Teeteto. Há então três livros sobre geometria sólida. O primeiro destes, o Livro 11, fornece definições básicas, enquanto o Livro 12, usando o método da exaustão de Eudoxo, calcula os volumes relativos de cones, pirâmides, cilindros e esferas. O Livro 13 estuda os cinco poliedros regulares e prova que há exatamente cinco. Conclui mostrando que os poliedros regulares cabem exatamente em uma esfera.

Os livros de *Os Elementos* foram usados como livros didáticos em escolas e universidades por quase 2000 anos, um testemunho da alta qualidade da organização do material. Talvez o maior tributo a *Os Elementos* seja o modelo que forneceu para o desenvolvimento do método axiomático rigoroso, não apenas em geometria, mas também em outras áreas da matemática.

Outros livros de Euclides incluem *Data*, que pode ser considerado um apêndice aos primeiros seis livros de *Os Elementos*, tratando da natureza e implicações de informações dadas em problemas geométricos. *Óptica* é o primeiro trabalho grego sobre perspectiva. *A Divisão da Escala* é um trabalho musical. *Fenômenos* é uma introdução à astronomia matemática, enquanto *Sobre Divisões* é um trabalho que sobrevive apenas parcialmente

em tradução árabe, tratando de um problema de dissecação geométrica. Euclides demonstra que tinha uma compreensão profunda dos fundamentos matemáticos da harmonia e das escalas musicais.

Apolônio refere-se a um trabalho de Euclides chamado *Porismos*, três livros de Euclides sobre Cônicas e um livro sobre Locos Superficiais. Pappus também menciona um livro de Euclides chamado *Pseudaria* (ou Livro das Falácias), uma obra destinada a estudantes que precisavam ser alertados contra raciocínios falhos. Pappus também menciona *Porismos* e outro livro chamado *Eutrigonion* (ou Elementos de Triângulos). Embora nenhuma dessas obras tenha sobrevivido, não há dúvida de que todas existiram.

A influência de Euclides em trabalhos futuros é notável. Teão de Alexandria (cerca de 335 - 405 d.C.) escreveu comentários sobre *Os Elementos* e, seguindo as edições de Teão, *Os Elementos* foram universalmente estudados e se tornaram o livro de matemática mais impresso da história. O manuscrito mais antigo sobrevivente de os *Os Elementos* é um fragmento de papiro encontrado em Oxirrinco, que se acredita ter sido escrito por volta de 100 d.C.

## 1.1 Referências

1. *Princeton Companion to Mathematics*. Edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. Princeton University Press, 2008.
2. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid/>



## CAPÍTULO 2

---

### Arquimedes

---

Arquimedes nasceu por volta de 287 a.C. na cidade de Siracusa, na ilha da Sicília. A data exata de nascimento não é conhecida, mas essa é a estimativa mais comum baseada em registros históricos. O pai de Arquimedes era Fídias, um astrônomo. Sabemos apenas esse fato sobre Fídias, pois é Arquimedes quem nos fornece essa informação em uma de suas obras, *O Contador de Areia*. Um amigo de Arquimedes, chamado Heracleides, escreveu uma biografia dele, mas infelizmente essa obra se perdeu. A descoberta desse trabalho perdido ou mesmo de trechos encontrados na escrita de outros autores poderia transformar significativamente nosso conhecimento sobre Arquimedes.

Arquimedes era natural de Siracusa, na Sicília. Alguns autores relatam que ele visitou o Egito e inventou um dispositivo agora conhecido como o parafuso de Arquimedes, uma bomba d'água ainda utilizada em muitas partes do mundo. É bastante provável que, quando jovem, Arquimedes tenha estudado com os sucessores de Euclides em Alexandria. Certamente ele estava totalmente familiarizado com a matemática desenvolvida lá e, o que torna essa suposição ainda mais certa, ele conhecia pessoalmente os matemáticos que trabalhavam lá e enviava seus resultados a Alexandria com mensagens pessoais. Arquimedes tinha uma grande admiração por Conon de Samos, um dos matemáticos de Alexandria, considerando-o não apenas um matemático excepcional, mas também um amigo próximo.

No prefácio de *Sobre Espirais*, Arquimedes relata uma história divertida envolvendo seus amigos em Alexandria. Ele conta que costumava enviar declarações de seus últimos teoremas, mas sem fornecer as provas. Parece que alguns matemáticos de Alexandria reivindicaram esses resultados como se fossem seus, então Arquimedes, na última ocasião em que enviou teoremas, incluiu dois que eram falsos, para que aqueles que afirmam descobrir tudo, mas não apresentam provas, pudessem ser desmascarados.

Além dos prefácios de suas obras, informações sobre Arquimedes chegam até nós através de várias fontes, como histórias de Plutarco, Tito Lívio e outros. Plutarco nos conta que Arquimedes era parente do rei Hierão II de Siracusa. A evidência da amizade de Arquimedes com a família real é reforçada pelo fato de que *O Contador de Areia* foi dedicado a Gelon, filho do rei Hierão.

Na verdade, há várias referências a Arquimedes na escrita da época, pois ele ganhou uma reputação que poucos matemáticos daquela época conseguiram. Isso não se deve a um interesse generalizado por novas ideias matemáticas, mas sim ao fato de que Arqui-

medes inventou muitas máquinas usadas como armas de guerra. Essas máquinas foram particularmente eficazes na defesa de Siracusa quando a cidade foi atacada pelos romanos sob o comando de Marcelo. Inclusive, o próprio Plutarco escreveu sobre como as máquinas de guerra de Arquimedes foram usadas contra os romanos durante o cerco de 212 a.C.

Arquimedes foi persuadido por seu amigo e parente, o rei Hierão, a construir tais máquinas. Arquimedes havia projetado e planejado essas máquinas não como coisas importantes, mas como meros passatempos geométricos. Em conformidade com o desejo e a solicitação do rei Hierão, ele reduziu à prática parte de sua admirável especulação científica, adaptando a verdade teórica ao uso comum, tornando-a mais apreciável para o povo em geral.

Outras invenções de Arquimedes, como a polia composta, também lhe trouxeram grande fama entre seus contemporâneos. Plutarco relata que Arquimedes afirmou, em uma carta ao rei Hierão, que, dada a força, qualquer peso poderia ser movido, e até se vangloriou de que, se houvesse outra Terra, ele poderia removê-la. O rei Hierão, impressionado com isso, pediu-lhe que comprovasse o problema com um experimento real e mostrasse um grande peso movido por um pequeno engenho. Arquimedes então fixou um navio de carga do arsenal do rei, que não poderia ser retirado do cais sem grande esforço e muitos homens; e, carregando-o com muitos passageiros e uma carga completa, sentado a uma certa distância, com pouco esforço, mas apenas segurando o topo da polia com a mão e puxando os cordéis gradualmente, ele arrastou o navio em linha reta, suavemente e uniformemente, como se estivesse no mar.

No entanto, embora Arquimedes tenha alcançado fama por suas invenções mecânicas, ele acreditava que a matemática pura era a única busca digna. Plutarco descreve belamente a atitude de Arquimedes, que acreditava que a matemática pura era superior a todas as outras áreas de estudo, e que a beleza e a grandeza dos assuntos examinados, bem como a precisão e a coerência dos métodos e meios de prova, mereciam nossa admiração.

Sua fascinação pela geometria é descrita por Plutarco da seguinte forma: “Frequentemente, os servos de Arquimedes o levavam para os banhos contra sua vontade e, mesmo lá, ele continuava desenhando figuras geométricas, até nas brasas da lareira. Enquanto o ungiam com óleos e aromas doces, ele desenhava linhas em seu corpo nu, tão absorto estava no prazer que encontrava no estudo da geometria.”

Os feitos de Arquimedes são considerados notáveis. Ele é considerado por muitos historiadores da matemática como um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Arquimedes aperfeiçoou um método de integração que lhe permitiu encontrar áreas, volumes e superfícies de muitos corpos. Muitos afirmam que o trabalho de Arquimedes nos rudimentos do que viria a ser a teoria de integração deu origem ao cálculo infinitesimal, que foi concebido e aperfeiçoado por Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz e Newton. Arquimedes foi capaz de aplicar o método da exaustão, uma forma inicial de integração, para obter uma série de resultados importantes. Arquimedes também forneceu uma aproximação precisa de  $\pi$  e mostrou que poderia aproximar raízes quadradas com precisão. Ele inventou um sistema para expressar números grandes. Em mecânica, Arquimedes descobriu teoremas fundamentais sobre o centro de gravidade de figuras planas e sólidos. Seu teorema mais famoso fornece o peso de um corpo imerso em um líquido, conhecido como o Princípio de Arquimedes.

As obras de Arquimedes que sobreviveram são: *Sobre os Equilíbrios Planos* (dois livros), *Quadratura da Parábola*, *Sobre a Esfera e o Cilindro* (dois livros), *Sobre Espirais*, *Sobre Conoides e Esferoides*, *Sobre Corpos Flutuantes* (dois livros), *Medida do Círculo e O Contador de Areia*. No verão de 1906, J. L. Heiberg, professor de filologia clássica na



Universidade de Copenhague, descobriu um manuscrito do século X que incluía o trabalho de Arquimedes *O Método*. Isso fornece uma visão notável de como Arquimedes descobriu muitos de seus resultados. Porém, não se sabe com certeza a ordem em que Arquimedes escreveu suas obras.

O tratado *Sobre os Equilíbrios Planos* estabelece os princípios fundamentais da mecânica, usando os métodos da geometria. Arquimedes descobriu teoremas fundamentais sobre o centro de gravidade de figuras planas, encontrados neste trabalho. Em particular, ele encontra, no primeiro livro, o centro de gravidade de um paralelogramo, um triângulo e um trapézio. O segundo livro é totalmente dedicado à determinação do centro de gravidade de um segmento de uma parábola. Em *Quadratura da Parábola*, Arquimedes encontra a área de um segmento de uma parábola cortado por qualquer corda.

No primeiro livro de *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Arquimedes mostra que a superfície de uma esfera é quatro vezes a de um grande círculo, encontra a área de qualquer segmento de uma esfera, mostra que o volume de uma esfera é dois terços do cilindro circunscrito e que a esfera é o sólido com a menor área superficial para um dado volume. No segundo livro, Arquimedes usa um método de exaustão para encontrar volumes e superfícies de sólidos em termos de figuras planas e seções desses sólidos.

Em *Sobre Espirais*, Arquimedes resolve problemas em relação a espirais e usa o método de exaustão para encontrar áreas e volumes.

Em *Sobre Conoides e Esferoides*, Arquimedes estuda os volumes de cones e esferas, mostrando que os volumes e superfícies podem ser descritos em termos das seções planas dessas figuras.

Em *Sobre Corpos Flutuantes*, Arquimedes introduz o princípio que leva seu nome. No primeiro livro, ele descreve o método de encontrar o volume de corpos flutuantes e mostra que o peso de um corpo imerso em um líquido é igual ao peso do líquido deslocado. No segundo livro, Arquimedes estabelece o teorema de que um corpo que flutua em um líquido sofre uma força vertical para cima igual ao peso do líquido deslocado.

*O Contador de Areia* fornece uma aproximação das potências de 10 e faz um relato da história do número de grãos de areia necessários para encher o mundo até então conhecido.

*O Método* revela como Arquimedes descobriu muitos de seus resultados. Esse trabalho fornece uma importante visão da matemática de Arquimedes e oferece uma visão geral de como ele conseguiu resolver muitos problemas matemáticos complexos.

Arquimedes foi morto em 212 a.C. durante a captura de Siracusa pelos romanos na Segunda Guerra Púnica, depois que seus esforços para manter os romanos afastados com suas máquinas de guerra falharam. Plutarco relata três versões sobre a morte de Arquimedes que lhe foram transmitidas.

Na primeira versão, Arquimedes estava profundamente concentrado em resolver um problema matemático com um diagrama. Absorvido completamente pelo seu trabalho, ele não percebeu a invasão romana nem a tomada da cidade. Quando um soldado romano se aproximou e ordenou que ele o seguisse até Marcelo, Arquimedes se recusou a ir antes de concluir sua demonstração. Enfurecido pela resistência de Arquimedes, o soldado o matou.

A segunda versão descreve que um soldado romano, correndo em direção a Arquimedes com uma espada desembainhada, ofereceu-lhe a morte. Arquimedes, ao olhar para trás, pediu ao soldado para esperar um momento, para que pudesse concluir o trabalho que estava realizando. Contudo, o soldado, desconsiderando o pedido, matou Arquimedes imediatamente.

Na terceira versão, Arquimedes estava carregando instrumentos matemáticos, como

relógios, esferas e ângulos, para Marcelo, com o intuito de medir a magnitude do sol. Alguns soldados, ao verem-no com esses objetos, pensaram que ele carregava ouro e, acreditando que estava escondendo riquezas, o mataram.

Arquimedes valorizava especialmente suas contribuições à geometria, em particular seu trabalho sobre um cilindro circunscrevendo uma esfera. Ele pediu que uma representação desse trabalho, junto com o resultado sobre a razão entre o cilindro e a esfera, fosse inscrita em seu túmulo. Cícero, que esteve na Sicília em 75 a.C., descreveu como procurou o túmulo de Arquimedes. Ele encontrou o local cercado por espinhos e arbustos, mas lembrou-se de versos inscritos no túmulo que indicavam que uma esfera e um cilindro estavam colocados sobre a sepultura de Arquimedes. Após uma busca cuidadosa, Cícero encontrou uma pequena coluna acima dos arbustos, com uma figura de uma esfera e um cilindro. Escravos foram enviados com foices para limpar o local e, quando um acesso foi aberto, eles encontraram o pedestal com uma parte do epigrama ainda legível.

É notável que, imediatamente após a morte de Arquimedes, suas obras matemáticas não eram amplamente conhecidas. Ao contrário dos *Elementos* de Euclides, as obras de Arquimedes não se tornaram de conhecimento geral na antiguidade. No entanto, obras individuais de Arquimedes foram estudadas em Alexandria, onde ele era frequentemente citado por matemáticos renomados como Herão, Pappus e Teão.

Somente no século VI d.C., com a publicação de edições comentadas das obras de Arquimedes por Eutócio, suas notáveis contribuições começaram a ganhar reconhecimento mais amplo. O teste utilizado atualmente para verificar a fidelidade das versões sobreviventes dos tratados de Arquimedes ao texto original é a preservação do dialeto dórico de Arquimedes.

## 2.1 Referências

1. *Princeton Companion to Mathematics*. Edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. Princeton University Press, 2008.
2. <https://www.britannica.com/biography/Archimedes>
3. <https://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20012/Severo/arquimedes>

## CAPÍTULO 3

---

### Isaac Newton

---

A vida de Isaac Newton pode ser dividida em três períodos bastante distintos. O primeiro é sua infância e início da vida adulta, de 1643 até sua nomeação para uma cadeira de professor em 1669. O segundo período, de 1669 a 1687, foi o período altamente produtivo em que ele foi professor lucasiano em Cambridge. O terceiro período (quase tão longo quanto os outros dois combinados) viu Newton como um funcionário público altamente remunerado em Londres, com pouco interesse adicional em pesquisa matemática.

Isaac Newton nasceu na casa de campo de Woolsthorpe, perto de Grantham em Lincolnshire, Inglaterra. Embora, pelo calendário em uso na época de seu nascimento, ele tenha nascido no dia de Natal de 1642, consideramos a data de 4 de janeiro de 1643 nesta biografia, que é a data corrigida do calendário gregoriano, alinhando-a com o calendário atual. (O calendário gregoriano só foi adotado na Inglaterra em 1752.) Isaac Newton veio de uma família de agricultores, mas nunca conheceu seu pai, também chamado Isaac Newton, que morreu em outubro de 1642, três meses antes do nascimento do filho. Embora o pai de Isaac possuísse propriedades e animais que o tornavam um homem bastante rico, ele era completamente não educado e não sabia assinar seu próprio nome.

A mãe de Isaac, Hannah Ayscough, casou-se novamente com Barnabas Smith, o ministro da igreja em North Witham, uma vila próxima, quando Isaac tinha dois anos de idade. O jovem foi então deixado sob os cuidados de sua avó, Margery Ayscough, em Woolsthorpe. Basicamente tratado como um órfão, Isaac não teve uma infância feliz. Seu avô, James Ayscough, nunca foi mencionado por Isaac em sua vida adulta e o fato de James não ter deixado nada para Isaac em seu testamento, feito quando o menino tinha dez anos, sugere que não havia muito afeto entre os dois. Não há dúvida de que Isaac sentia muita amargura em relação à sua mãe e ao seu padrasto, Barnabas Smith. Ao examinar seus pecados aos dezenove anos, Isaac listou: “Ameaçar meu pai e minha mãe Smith de queimá-los e a casa sobre eles.” Após a morte de seu padrasto em 1653, Newton viveu em uma família ampliada composta por sua mãe, sua avó, um meio-irmão e duas meia-irmãs. Logo após esse período, Isaac começou a frequentar a Free Grammar School em Grantham. Embora fosse apenas a cinco milhas de sua casa, Isaac morava com a família Clark em Grantham. No entanto, ele parece ter mostrado pouco talento para o trabalho acadêmico. Seus relatórios escolares o descreviam como preguiçoso e desatento. Sua mãe, agora uma mulher de riqueza e propriedades razoáveis, achava que seu filho

mais velho era a pessoa certa para gerenciar seus assuntos e sua propriedade. Isaac foi retirado da escola, mas logo mostrou que não tinha talento ou interesse em administrar uma propriedade.

Um tio, William Ayscough, decidiu que Isaac deveria se preparar para ingressar na universidade e, tendo convencido sua mãe de que isso era o certo a fazer, Isaac foi autorizado a retornar à Free Grammar School em Grantham em 1660 para completar sua educação escolar. Desta vez, ele morou com Stokes, que era o diretor da escola, e parece que, apesar das sugestões de que ele anteriormente não havia mostrado promessa acadêmica, Isaac deve ter convencido alguns dos que estavam ao seu redor de que ele tinha potencial acadêmico. Algumas evidências apontam que Stokes também convenceu a mãe de Isaac a deixá-lo ingressar na universidade, portanto, é provável que Isaac tenha mostrado mais promessa em sua primeira passagem pela escola do que os relatórios escolares sugerem. Outra peça de evidência vem da lista de pecados de Isaac mencionada acima. Ele lista um de seus pecados como sendo "... colocar meu coração em dinheiro, aprendizado e prazer mais do que em Ti (referindo-se à Deus)...", o que nos diz que Isaac deve ter tido uma paixão pelo aprendizado.

Nada sabemos sobre o que Isaac aprendeu em preparação para a universidade, mas Stokes era um homem capaz e quase certamente deu a Isaac aulas particulares e uma boa formação. Não há evidências de que ele tenha aprendido matemática, mas não podemos descartar a possibilidade de Stokes tê-lo apresentado a *Os Elementos* de Euclides, que ele era bem capaz de ensinar (embora haja evidências mencionadas abaixo de que Newton não leu Euclides antes de 1663). Abundam anedotas sobre a habilidade mecânica que Isaac demonstrou na escola e histórias são contadas sobre sua habilidade em fazer modelos de máquinas, em particular de relógios e moinhos de vento. No entanto, quando biógrafos buscam informações sobre pessoas famosas, sempre há uma tendência das pessoas reportarem o que acham que é esperado delas, e essas anedotas podem ter sido simplesmente inventadas mais tarde por aqueles que acharam que o cientista mais famoso do mundo deveria ter tido essas habilidades na escola.

Newton ingressou no antigo colégio de seu tio, o Trinity College, em Cambridge, em 5 de junho de 1661. Ele era mais velho do que a maioria de seus colegas, mas, apesar de sua mãe estar financeiramente bem, ele ingressou como sizar. Um sizar em Cambridge era um estudante que recebia uma ajuda de custo para despesas universitárias em troca de atuar como servo para outros estudantes. Certamente há alguma ambiguidade em sua posição como sizar, pois ele parece ter se associado a estudantes de "classe superior" em vez de outros sizars. Sugere-se que Newton pode ter tido Humphrey Babington, um parente distante que era Fellow de Trinity, como seu patrono. Esta explicação razoável se encaixa bem com o que se sabe e significa que sua mãe não o submeteu desnecessariamente a dificuldades, como alguns de seus biógrafos afirmam.

O objetivo de Newton em Cambridge era obter um diploma em direito. O ensino em Cambridge era dominado pela filosofia de Aristóteles, mas alguma liberdade de estudo era permitida no terceiro ano do curso. Newton estudou a filosofia de Descartes, Gassendi, Hobbes e, em particular, Boyle. A mecânica da astronomia copernicana de Galileu o atraiu e ele também estudou a Óptica de Kepler. Ele registrou seus pensamentos em um livro que intitulou *Quaestiones Quaedam Philosophicae*. É uma conta fascinante de como as ideias de Newton já estavam se formando por volta de 1664. Ele começou o texto com uma declaração em latim que significa "Platão é meu amigo, Aristóteles é meu amigo, mas meu melhor amigo é a verdade", mostrando-se um pensador livre desde cedo.

Como Newton foi introduzido aos textos matemáticos mais avançados de seu tempo é

um pouco menos claro. De acordo com de Moivre, o interesse de Newton pela matemática começou no outono de 1663, quando ele comprou um livro de astrologia em uma feira em Cambridge e descobriu que não conseguia entender a matemática nele. Tentando ler um livro de trigonometria, ele descobriu que faltava conhecimento de geometria e decidiu ler a edição de Euclides de Barrow. Os primeiros resultados eram tão fáceis que ele quase desistiu, mas ele: "...mudou de ideia quando leu que paralelogramos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais". Voltando ao começo, Newton leu o livro inteiro com um novo respeito. Ele então se voltou para o *Clavis Mathematica* de Oughtred e *La Géométrie* de Descartes. Newton também estudou a obra completa de Viète, publicada em 1646. Outras grandes obras de matemática que ele estudou na época foi um trabalho recém-publicado de van Schooten sobre geometria analítica, que apareceu em dois volumes em 1659-1661. Newton também estudou a *Algebra* de Wallis e parece que seu primeiro trabalho matemático original veio do estudo deste texto. Ele leu o método de Wallis para encontrar um quadrado de área igual a área sob uma parábola e uma hipérbola. Newton fez anotações sobre o tratamento de séries apresentado por Wallis, mas também elaborou suas próprias provas dos teoremas escrevendo: "Assim Wallis faz, mas pode-se fazer assim...". Seria fácil pensar que o talento de Newton começou a emergir com a chegada de Barrow à cadeira lucasiana em Cambridge em 1663, quando ele se tornou Fellow de Trinity College. Certamente a data coincide com o começo dos profundos estudos matemáticos de Newton. No entanto, parece que a data de 1663 é meramente uma coincidência e que foi somente alguns anos depois que Barrow reconheceu o gênio matemático entre seus alunos.

Apesar de algumas evidências de que seu progresso não foi particularmente bom, Newton foi eleito Scholar (título de prestígio dado à alunos de Cambridge que se destacaram em pesquisa) em 28 de abril de 1664 e recebeu seu diploma de bacharel em abril de 1665. Parece que seu gênio científico ainda não havia surgido, mas surgiu repentinamente quando a peste fechou a Universidade no verão de 1665 e ele teve que retornar a Lincolnshire. Lá, em um período de menos de dois anos, enquanto Newton ainda tinha menos de 25 anos, ele começou avanços revolucionários em matemática, óptica, física e astronomia.

Enquanto permanecia em casa, ele lançou as bases para o cálculo diferencial e integral, vários anos antes de sua descoberta independente por Leibniz. O "método das fluxões", como ele o chamou, baseava-se em sua visão crucial de que a integração de uma função é meramente o procedimento inverso de diferenciá-la. Tomando a diferenciação como a operação básica, Newton produziu métodos analíticos simples que unificavam muitas técnicas separadas previamente desenvolvidas para resolver problemas aparentemente não relacionados, como encontrar áreas, tangentes, comprimentos de curvas e máximos e mínimos de funções. O trabalho *De Methodis Serierum et Fluxionum* foi escrito em 1671, mas Newton não conseguiu publicá-lo e só foi publicado em inglês em 1736.

Quando a Universidade de Cambridge reabriu após a peste em 1667, Newton se apresentou como candidato a uma bolsa. Em outubro, ele foi eleito para uma bolsa menor em Trinity College, mas, após ser premiado com seu diploma de mestre, foi eleito para uma bolsa maior em julho de 1668, o que lhe permitiu jantar na Mesa dos Fellows. Em julho de 1669, Barrow tentou garantir que as conquistas matemáticas de Newton se tornassem conhecidas pelo mundo. Ele enviou o texto de Newton, *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (Análise por Séries Infinitas), para Collins em Londres, escrevendo: "[Newton] me trouxe outro dia alguns papéis, nos quais ele anotou métodos de calcular as dimensões de magnitudes semelhantes aos de Mr. Mercator sobre a hipérbola, mas muito gerais; assim como de resolver equações; o que eu suponho que lhe agrada; e eu os envi-

arei a você no próximo envio.”. Collins correspondia com todos os principais matemáticos da época, então a ação de Barrow deveria ter levado a um reconhecimento rápido. Collins mostrou os resultados de Newton a Brouncker, o Presidente da Royal Society (com a permissão do autor), mas depois disso Newton pediu que seu manuscrito fosse devolvido. Collins não pôde dar uma conta detalhada, mas de Sluze e Gregory souberam algo sobre o trabalho de Newton através de Collins. Barrow renunciou à cadeira lucasiana em 1669 para se dedicar à teologia, recomendando que Newton (ainda com apenas 27 anos) fosse nomeado em seu lugar.

O primeiro trabalho de Newton como Professor Lucasiano foi sobre óptica e esse foi o tema de seu primeiro curso de palestras iniciado em janeiro de 1670. Ele havia chegado à conclusão durante os dois anos da peste de que a luz branca não é uma entidade simples. Todo cientista desde Aristóteles havia acreditado que a luz branca era uma entidade única básica, mas a aberração cromática em uma lente de telescópio convenceu Newton do contrário. Quando ele fez passar um feixe fino de luz solar através de um prisma de vidro, Newton observou o espectro de cores que se formava.

Ele argumentou que a luz branca é realmente uma mistura de muitos tipos diferentes de raios, que são refratados em ângulos ligeiramente diferentes, e que cada tipo diferente de raio produz uma cor espectral diferente. Newton foi levado por esse raciocínio à conclusão errônea de que telescópios usando lentes refrativas sempre sofreriam aberração cromática. Ele, portanto, propôs e construiu um telescópio refletor.

Em 1672, Newton foi eleito membro da Royal Society. Também em 1672, Newton publicou seu primeiro artigo científico sobre luz e cor nos *Philosophical Transactions of the Royal Society*. O artigo foi bem recebido no geral, mas Hooke e Huygens se opuseram à tentativa de Newton de provar, apenas por experimentação, que a luz consiste no movimento de pequenas partículas em vez de ondas. A recepção que sua publicação recebeu não fez nada para melhorar a atitude de Newton em relação a tornar seus resultados conhecidos ao mundo. Ele estava sempre dividido em duas direções: havia algo em sua natureza que desejava fama e reconhecimento, mas, ao mesmo tempo, outro lado temia críticas, e o caminho mais fácil para evitar críticas era não publicar nada. Certamente, pode-se dizer que sua reação às críticas foi irracional, e certamente seu objetivo de humilhar Hooke em público por causa de suas opiniões era bastante exagerado. No entanto, talvez devido à já alta reputação de Newton, sua teoria corpuscular predominou até que a teoria das ondas fosse reavivada no século XIX.

As relações de Newton com Hooke deterioraram-se ainda mais quando, em 1675, Hooke alegou que Newton havia roubado alguns de seus resultados ópticos. Embora os dois homens tenham feito as pazes com uma troca de cartas educadas, Newton se retraiu e se afastou da Royal Society, que ele associava a Hooke como um de seus líderes. Ele adiou a publicação de uma conta completa de suas pesquisas ópticas até depois da morte de Hooke em 1703. O *Opticks* de Newton apareceu em 1704. O livro tratava da teoria da luz e cor e de investigações sobre as cores de folhas finas, os “anéis de Newton” e a difração da luz. Para explicar algumas de suas observações, ele teve que usar uma teoria ondulatória da luz em conjunto com sua teoria corpuscular.

Em 1678, Newton parece ter sofrido uma crise nervosa. Sua mãe morreu no ano seguinte e ele se retraiu ainda mais, misturando-se o mínimo possível com as pessoas por vários anos.

Juntamente com a invenção do cálculo, o maior feito de Newton foi seu trabalho em física e mecânica celeste, que culminou na teoria da gravitação universal. Em 1666, Newton já tinha versões iniciais de suas três leis do movimento. Ele também havia descoberto

a lei que dá a força centrífuga em um corpo que se move uniformemente em uma trajetória circular. No entanto, ele não tinha uma compreensão correta da mecânica do movimento circular.

A ideia inovadora de Newton em 1666 foi imaginar que a gravidade da Terra influenciava a Lua, equilibrando sua força centrífuga. A partir de sua lei da força centrífuga e da terceira lei de movimento planetário de Kepler, Newton deduziu sua famosa Lei da Gravitação Universal.

Em 1679, Newton encontrou uma prova de que a lei das áreas de Kepler era uma consequência das forças centrífugas entre corpos celestes e também mostrou que, se a curva orbital é uma elipse sob a ação de forças centrais, então a dependência radial da força é inversamente proporcional ao quadrado da distância do centro. Essa descoberta mostrou a importância física da segunda lei de Kepler.

Em 1684, Halley perguntou a Newton qual órbita um corpo seguiria sob uma força inversamente proporcional ao quadrado, e Newton respondeu imediatamente que seria uma elipse. No entanto, em *De Motu Corporum in Gyrum* ele apenas deu uma prova da recíproca, de que se a órbita é uma elipse, a força é inversamente proporcional ao quadrado. A prova de que forças inversamente proporcionais ao quadrado implicam órbitas de seções cônicas é esboçada nas segunda e terceira edições do famoso *Principia*, mas não na primeira edição. Halley persuadiu Newton a escrever um tratamento completo de sua nova física e suas aplicações à astronomia. Então, em 1687, Newton publicou o *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* ou *Principia*, como costuma ser conhecido.

O *Principia* é reconhecido como o maior livro científico já escrito. Newton analisou o movimento dos corpos em meios resistentes e não resistentes sob a ação de forças centrífugas. Os resultados foram aplicados a corpos em órbita, projéteis, pêndulos e queda livre perto da Terra. Ele demonstrou ainda que os planetas eram atraídos em direção ao Sol por uma força que varia com o inverso do quadrado da distância e generalizou que todos os corpos celestes se atraem mutuamente.

A generalização adicional levou Newton à lei da gravitação universal: "...toda matéria atrai toda outra matéria com uma força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.". Newton explicou uma ampla gama de fenômenos anteriormente não relacionados: as órbitas excêntricas dos cometas, as marés e suas variações, a precessão do eixo da Terra e o movimento da Lua perturbado pela gravidade do Sol. Esse trabalho fez de Newton um líder internacional em pesquisa científica. Os cientistas continentais certamente não aceitaram a ideia de ação à distância e continuaram acreditando na teoria dos vórtices de Descartes, onde as forças agem por contato. No entanto, isso não impediu a admiração universal pela expertise técnica de Newton.

James II tornou-se rei da Grã-Bretanha em 6 de fevereiro de 1685. Ele havia se convertido à igreja católica romana em 1669, mas, quando ascendeu ao trono, teve forte apoio tanto de anglicanos quanto de católicos. No entanto, surgiram rebeliões, que James suprimiu, mas começou a desconfiar dos protestantes e começou a nomear oficiais católicos para o exército. Ele então foi mais além, nomeando apenas católicos como juízes e oficiais de estado. Sempre que um cargo em Oxford ou Cambridge ficava vago, o rei nomeava um católico para preenchê-lo. Newton era um protestante fervoroso e se opunha fortemente ao que via como um ataque à Universidade de Cambridge.

Quando o Rei tentou insistir que um monge beneditino recebesse um diploma sem prestar exames ou fazer os juramentos exigidos, Newton escreveu ao Vice-Chanceler: "Seja corajoso e firme nas Leis e você não pode falhar.". O Vice-Chanceler seguiu o conselho

de Newton e foi demitido do cargo. No entanto, Newton continuou a defender fortemente o caso, preparando documentos a serem usados pela Universidade em sua defesa. Entretanto, Guilherme de Orange havia sido convidado por muitos líderes para trazer um exército à Inglaterra para derrotar James. Guilherme desembarcou em novembro de 1688 e James, ao descobrir que os protestantes haviam abandonado seu exército, fugiu para a França. A Universidade de Cambridge elegeu Newton, agora famoso por sua forte defesa da universidade, como um dos seus dois membros para o Parlamento da Convenção em 15 de janeiro de 1689. Este Parlamento declarou que James havia abdicado e, em fevereiro de 1689, ofereceu a coroa a Guilherme. Newton estava no auge de sua posição - visto como um líder da universidade e um dos matemáticos mais eminentes do mundo. No entanto, sua eleição para o Parlamento pode ter sido o evento que o fez perceber que havia uma vida em Londres que poderia atraí-lo mais do que o mundo acadêmico em Cambridge.

Após sofrer uma segunda crise nervosa em 1693, Newton se aposentou da pesquisa. As razões para essa crise foram discutidas por seus biógrafos e muitas teorias foram propostas: Envenenamento químico como resultado de seus experimentos com alquimia; frustração com suas pesquisas; o término de uma amizade pessoal com Fatio de Duillier, um matemático suíço residente em Londres (e um dos únicos amigos de Newton em toda a sua vida); e problemas decorrentes de suas crenças religiosas. Newton mesmo culpou a falta de sono, mas isso era quase certamente um sintoma da doença e não a causa dela. Há poucas razões para supor que a doença fosse qualquer coisa além de depressão, uma doença mental da qual ele deve ter sofrido durante a maior parte de sua vida, talvez agravada por alguns dos eventos que acabamos de listar.

Newton decidiu deixar Cambridge para assumir um cargo governamental em Londres, tornando-se Guardião da Casa da Moeda em 1696 e Mestre em 1699. No entanto, ele não renunciou a seus cargos em Cambridge até 1701. Como Mestre da Moeda, somando a renda de suas propriedades, vemos que Newton se tornou um homem muito rico. Para muitas pessoas, um cargo como o de Mestre da Moeda teria sido tratado simplesmente como uma recompensa por seus feitos científicos. Newton não o tratou como tal e fez uma forte contribuição ao trabalho da Casa da Moeda. Ele a liderou através do período difícil da transição entre monarquias e foi particularmente ativo em medidas para prevenir a falsificação de moedas.

Em 1703, ele foi eleito presidente da Royal Society e foi reeleito anualmente até sua morte. Foi ordenado cavaleiro em 1705 pela Rainha Anne, o primeiro cientista a ser assim homenageado por seu trabalho. No entanto, a última parte de sua vida não foi fácil, dominada em muitos aspectos pela controvérsia com Leibniz sobre a prioridade nos créditos pela invenção do cálculo.

Dada a fúria que Newton demonstrou ao longo de sua vida quando criticado, não é surpreendente que ele tenha entrado em um temperamento irracional direcionado contra Leibniz. Usando sua posição como Presidente da Royal Society, Newton nomeou um comitê “imparcial” para decidir se ele ou Leibniz seria creditado como o inventor do cálculo. Ele escreveu o relatório oficial do comitê (embora, é claro, não tenha aparecido sob seu nome), que foi publicado pela Royal Society, e então escreveu uma revisão (novamente de maneira anônima), que apareceu nos *Philosophical Transactions of the Royal Society*.

Isaac Newton morreu de causas naturais no dia 20 de março de 1727 (ou 31 de março de 1727, no calendário gregoriano) em Kensington, Londres, Inglaterra. Ele tinha 84 anos na época de sua morte.



## 3.1 Referências

1. *Princeton Companion to Mathematics*. Edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. Princeton University Press, 2008.
2. <https://youtu.be/gMlf1ELvRzc?si=lmtwIJ4s3lmVBb2f>
3. <https://youtu.be/OK1bCqkn6Vk?si=Sjl3DNP3Pyph-P96>
4. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton/>



## CAPÍTULO 4

---

### Leonhard Euler

---

Leonhard Euler nasceu em 15 de abril de 1707 em Basel, Suíça. O pai de Leonhard Euler era Paul Euler. Paul Euler estudou teologia na Universidade de Basel e assistiu às palestras de Jacob Bernoulli lá. Na verdade, Paul Euler e Johann Bernoulli viveram na casa de Jacob Bernoulli enquanto eram alunos de graduação em Basel. Paul Euler se tornou um ministro protestante e casou-se com Margaret Brucker, filha de outro ministro protestante. Seu filho, Leonhard Euler, nasceu em Basel, mas a família se mudou para Riehen quando ele tinha um ano de idade, e foi em Riehen, não longe de Basel, que Leonhard foi criado. Paul Euler tinha, como mencionamos, alguma formação matemática e foi capaz de ensinar ao filho matemática elementar, além de outras disciplinas.

Leonhard foi enviado para a escola em Basel e, durante esse tempo, viveu com sua avó materna. Esta escola era bastante precária, por todos os relatos, e Euler não aprendeu matemática alguma na escola. No entanto, seu interesse por matemática certamente foi despertado pelo ensino de seu pai, e ele leu textos de matemática por conta própria e fez algumas aulas particulares. O pai de Euler queria que seu filho seguisse seus passos na igreja e o enviou para a Universidade de Basel para se preparar para o ministério. Ele entrou na Universidade em 1720, aos 14 anos, inicialmente para obter uma educação geral antes de prosseguir para estudos mais avançados. Johann Bernoulli logo descobriu o grande potencial de Euler para a matemática nas aulas particulares que Euler mesmo providenciou. O relato de Euler em seus escritos autobiográficos não publicados é o seguinte: “ ... Encontrei logo uma oportunidade de ser apresentado a um famoso professor, Johann Bernoulli. ... É verdade que ele estava muito ocupado e se recusou categoricamente a me dar aulas particulares; mas ele me deu um conselho muito mais valioso para começar a ler livros de matemática mais difíceis por conta própria e estudá-los com a maior diligência possível; se eu encontrasse algum obstáculo ou dificuldade, eu tinha permissão para visitá-lo livremente todos os domingos à tarde e ele amavelmente explicava tudo o que eu não conseguia entender...”

Em 1723, Euler completou seu mestrado em filosofia, comparando e contrastando as ideias filosóficas de Descartes e Newton. Ele começou seus estudos de teologia no outono de 1723, seguindo os desejos de seu pai, mas, embora fosse um cristão devoto durante toda a sua vida, ele não conseguiu encontrar o entusiasmo pelo estudo de teologia, grego e hebraico que encontrava na matemática. Euler obteve o consentimento de seu pai para

mudar para matemática, após Johann Bernoulli persuadir seu pai do talento do filho. O fato de que o pai de Euler havia sido amigo de Johann Bernoulli durante a graduação sem dúvida facilitou a tarefa.

Euler concluiu seus estudos na Universidade de Basel em 1726. Ele havia estudado muitas obras matemáticas durante seu tempo em Basel. Elas incluem trabalhos de Varignon, Descartes, Newton, Galileo, van Schooten, Jacob Bernoulli, Hermann, Taylor e Wallis. Em 1726, Euler já tinha um artigo impresso, um curto artigo sobre curvas isócronas. Em 1727, ele publicou outro artigo sobre trajetórias recíprocas e enviou uma inscrição para o Grande Prêmio de 1727 da Academia de Paris sobre o melhor arranjo de mastros em um navio.

O Prêmio de 1727 foi para Bouguer, um especialista em matemática relacionada a navios, mas o ensaio de Euler lhe garantiu o segundo lugar, o que foi uma excelente conquista para o jovem graduado. No entanto, Euler agora tinha que encontrar uma nomeação acadêmica e, quando Nicolaus (II) Bernoulli morreu em São Petersburgo em julho de 1726, criando uma vaga lá, Euler foi oferecido o cargo que o envolveria no ensino de aplicações de matemática e mecânica à fisiologia. Ele aceitou o cargo em novembro de 1726, mas afirmou que não queria viajar para a Rússia até a primavera do ano seguinte. Ele tinha duas razões para adiar. Queria tempo para estudar os tópicos relacionados ao seu novo cargo, mas também tinha uma chance de um cargo na Universidade de Basel, já que o professor de física lá havia morrido. Euler escreveu um artigo sobre acústica, que se tornou um clássico, em sua tentativa de seleção para o cargo, mas não foi escolhido para avançar para a etapa em que os sorteios seriam realizados para tomar a decisão final sobre quem preencheria a cadeira. Quase certamente sua juventude (ele tinha 19 anos na época) estava contra ele. No entanto, essa decisão acabou beneficiando Euler, porque o forçou a se mudar de uma pequena república para um ambiente mais adequado para sua brilhante pesquisa e trabalho tecnológico.

Assim que soube que não seria nomeado para a cadeira de física, Euler deixou Basel em 5 de abril de 1727. Ele viajou pelo Reno de barco, cruzou os estados alemães de carroça postal, e depois de barco de Lübeck, chegando a São Petersburgo em 17 de maio de 1727. Ele havia ingressado na Academia de Ciências de São Petersburgo dois anos após sua fundação por Catarina I, esposa de Pedro, o Grande. Através dos pedidos de Daniel Bernoulli e Jakob Hermann, Euler foi nomeado para a divisão matemática-física da Academia em vez de para o posto de fisiologia que ele havia sido originalmente oferecido. Em São Petersburgo, Euler teve muitos colegas que proporcionaram um ambiente excepcional para ele: Euler estava cercado por um grupo de eminentes cientistas, incluindo o analista e geômetra Jakob Hermann, um parente seu; Daniel Bernoulli, com quem Euler estava conectado não apenas por amizade pessoal, mas também por interesses comuns no campo da matemática aplicada; o versátil erudito Christian Goldbach, com quem Euler discutiu numerosos problemas de análise e teoria dos números; F Maier, trabalhando em trigonometria; e o astrônomo e geógrafo J-N Delisle.

Euler serviu como tenente médico na marinha russa de 1727 a 1730. Em São Petersburgo, ele viveu com Daniel Bernoulli, que, já insatisfeito na Rússia, havia solicitado que Euler lhe trouxesse chá, café, conhaque e outras iguarias da Suíça. Euler tornou-se professor de física na Academia em 1730 e, como isso lhe permitia se tornar um membro pleno da Academia, ele pôde deixar seu cargo na marinha russa.

Daniel Bernoulli ocupava a cadeira sênior em matemática na Academia, mas quando ele deixou São Petersburgo para retornar a Basel em 1733, foi Euler quem foi nomeado para essa cadeira sênior de matemática. A melhoria financeira que veio com essa no-

meação permitiu a Euler casar, o que ele fez em 7 de janeiro de 1734, casando-se com Katharina Gsell, filha de um pintor do Ginásio de São Petersburgo. Katharina, assim como Euler, era de uma família suíça. Eles tiveram 13 filhos ao todo, embora apenas cinco tenham sobrevivido à infância. Euler afirmava que fez algumas de suas maiores descobertas matemáticas enquanto segurava um bebê nos braços e com outras crianças brincando ao redor de seus pés.

Após 1730, Euler realizou projetos estatais lidando com cartografia, educação científica, magnetismo, motores, máquinas e construção naval. O núcleo de seu programa de pesquisa agora também estava definido: teoria dos números; análise, incluindo seus ramos emergentes, equações diferenciais e cálculo das variações; e mecânica. A publicação de muitos artigos e seu livro *Mechanica* (1736-37), que apresentou extensivamente a dinâmica newtoniana sob a forma de análise matemática pela primeira vez, iniciou Euler no caminho para grandes trabalhos matemáticos.

Os problemas de saúde de Euler começaram em 1735, quando ele teve uma febre severa e quase perdeu a vida. No entanto, ele manteve essa notícia oculta de seus pais e membros da família Bernoulli em Basel até ter se recuperado. Em seus escritos autobiográficos, Euler afirma que seus problemas de visão começaram em 1738 devido ao esforço excessivo com seu trabalho cartográfico e que em 1740 ele tinha havia perdido a visão de um olho e corria o risco de perder completamente a visão. No entanto, alguns historiadores argumentam que os problemas de visão de Euler quase certamente começaram antes e que a febre severa de 1735 era um sintoma da tensão ocular. Ele também argumenta que um retrato de Euler de 1753 sugere que, nessa fase, a visão de seu olho esquerdo ainda era boa, enquanto a do olho direito era ruim, mas não completamente cega. Uma hipótese comum é a de que o olho esquerdo de Euler ficou cego devido a uma catarata posterior, e não por tensão ocular.

Até 1740, Euler tinha uma reputação muito alta, tendo ganhado o Grande Prêmio da Academia de Paris em 1738 e 1740. Em ambas as ocasiões, ele compartilhou o primeiro prêmio com outros. A reputação de Euler trouxe uma oferta para ir para Berlim, mas a princípio ele preferiu permanecer em São Petersburgo. No entanto, a turbulência política na Rússia tornou a posição de estrangeiros particularmente difícil e contribuiu para Euler mudar de ideia. Aceitando uma oferta melhor, Euler, a convite de Frederico, o Grande, foi para Berlim, onde uma Academia de Ciências estava planejada para substituir a Sociedade de Ciências. Ele deixou São Petersburgo em 19 de junho de 1741, chegando a Berlim em 25 de julho. Em uma carta a um amigo, Euler escreveu: “Eu posso fazer exatamente o que desejo [referindo-se a sua pesquisa] ... O rei me chama de seu professor, e eu acho que sou o homem mais feliz do mundo.”. Mesmo enquanto estava em Berlim, Euler continuou a receber parte de seu salário da Rússia. Com essa remuneração, ele comprou livros e instrumentos para a Academia de São Petersburgo, continuou a escrever relatórios científicos para eles e educou jovens russos.

Maupertuis foi o presidente da Academia de Berlim quando ela foi fundada em 1744, com Euler como diretor de matemática. Maupertuis o substituiu em sua ausência, e os dois se tornaram grandes amigos. Euler realizou uma quantidade impressionante de trabalhos para a Academia: Ele supervisionou o observatório e os jardins botânicos; selecionou empregados; supervisionou vários assuntos financeiros; e, em particular, gerenciou a publicação de diversos calendários e mapas geográficos, cuja venda era uma fonte de receita para a Academia. O rei também incumbiu Euler de problemas práticos, como o projeto de 1749 para corrigir o nível do Canal de Finow.

Esse não era de forma alguma o limite de suas funções. Ele serviu no comitê da

Academia responsável pela biblioteca e publicações científicas. Atuou como conselheiro do governo em loterias estaduais, seguros, anuidades, pensões e artilharia. Além disso, sua produção científica durante esse período foi fenomenal.

Durante os vinte e cinco anos passados em Berlim, Euler escreveu cerca de 380 artigos. Ele escreveu livros sobre o cálculo das variações; sobre o cálculo das órbitas planetárias; sobre artilharia e balística; sobre análise; sobre construção de navios e navegação; sobre o movimento da lua; palestras sobre cálculo diferencial; e uma publicação científica popular, *Cartas a uma Princesa da Alemanha* (3 vols., 1768-72).

Em 1759, Maupertuis faleceu e Euler assumiu a liderança da Academia de Berlim, embora não o título de Presidente. O rei estava no comando geral, e Euler já não estava em bons termos com Frederico, apesar da boa vontade inicial. Euler, que havia discutido com d'Alembert sobre questões científicas, ficou perturbado quando Frederico ofereceu a presidência da Academia a d'Alembert em 1763. No entanto, d'Alembert recusou-se a se mudar para Berlim, mas a interferência contínua de Frederico na administração da Academia fez Euler decidir que era hora de partir.

Em 1766, Euler retornou a São Petersburgo, e Frederico ficou profundamente irritado com sua partida. Logo após seu retorno à Rússia, Euler tornou-se quase totalmente cego após uma doença. Em 1771, sua casa foi destruída por um incêndio e ele conseguiu salvar apenas a si mesmo e seus manuscritos matemáticos. Uma operação de catarata logo após o incêndio, ainda em 1771, restaurou sua visão por alguns dias, mas Euler parece não ter tomado os cuidados necessários e acabou ficando totalmente cego. Devido à sua memória notável, ele conseguiu continuar com seu trabalho em óptica, álgebra e movimento lunar. Incrivelmente, após seu retorno a São Petersburgo (quando Euler tinha 59 anos), ele produziu quase metade de suas obras totais, apesar da cegueira completa.

Euler, devido a sua condição física, não alcançou esse nível notável de produção sem ajuda. Ele contou com a ajuda de seus filhos, Johann Albrecht Euler, que foi nomeado para a cadeira de física na Academia de São Petersburgo em 1766 (tornando-se seu secretário em 1769), e Christoph Euler, que teve uma carreira militar. Euler também foi auxiliado por outros dois membros da Academia, W. L. Krafft e A. J. Lexell, e pelo jovem matemático N. Fuss, que foi convidado para a Academia da Suíça em 1772. Fuss, que era genro de Euler, tornou-se seu assistente em 1776. Os cientistas que ajudaram Euler não eram meros secretários; ele discutia o esquema geral dos trabalhos com eles, e eles desenvolviam suas ideias, calculando tabelas e, às vezes, construindo exemplos.

Por exemplo, Euler credita Albrecht, Krafft e Lexell pela ajuda em seu trabalho de 775 páginas sobre o movimento da lua, publicado em 1772. Fuss ajudou Euler a preparar mais de 250 artigos para publicação ao longo de um período de cerca de sete anos, no qual atuou como assistente de Euler, incluindo um importante trabalho sobre seguros publicado em 1776.

Em 18 de setembro de 1783, Euler deu uma aula de matemática para um de seus netos, fez alguns cálculos com giz em duas lousas sobre o movimento de balões; depois discutiu com Lexell e Fuss o planeta Urano, recentemente descoberto. Por volta das cinco horas da tarde, ele sofreu um derrame cerebral e disse apenas “Estou morrendo” antes de perder a consciência. Ele morreu por volta das onze horas da noite.

Euler foi o mais prolífico escritor de matemática de todos os tempos e, mesmo após sua morte em 1783, a Academia de São Petersburgo continuou a publicar trabalhos inéditos de Euler por quase 50 anos.

## 4.1 Referências

1. *Princeton Companion to Mathematics*. Edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. Princeton University Press, 2008.
2. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/>
3. <https://www.cs.purdue.edu/homes/wxg/EulerLect.pdf>





---

### Jean-Baptiste Joseph Fourier

---

Jean-Baptiste Joseph Fourier nasceu em 21 de março de 1768 na cidade de Auxerre, França. O pai de Joseph Fourier era um alfaiate em Auxerre. Após a morte de sua primeira esposa, com quem teve três filhos, ele casou-se novamente e Joseph foi o nono dos doze filhos desse segundo casamento. A mãe de Joseph faleceu quando ele tinha nove anos e seu pai morreu no ano seguinte.

Sua primeira escolaridade foi na escola de Pallais, administrada pelo mestre de música da catedral. Lá, Joseph estudou latim e francês e mostrou grande promissor. Em 1780, ingressou na École Royale Militaire de Auxerre, onde inicialmente mostrou talento para a literatura, mas logo, aos treze anos, a matemática tornou-se seu verdadeiro interesse. Aos 14 anos, ele já havia completado o estudo dos seis volumes do *Cours de mathématiques* de Bézout. Em 1783, recebeu o primeiro prêmio pelo seu estudo do *Mécanique en général* de Bossut.

Em 1787, Fourier decidiu se preparar para o sacerdócio e ingressou na abadia beneditina de São Bento-sur-Loire. No entanto, seu interesse pela matemática continuou, e ele correspondeu-se com C. L. Bonard, professor de matemática em Auxerre. Fourier estava inseguro se estava tomando a decisão correta ao se preparar para o sacerdócio. Ele submeteu um artigo sobre álgebra a Montucla em Paris, e suas cartas a Bonard sugerem que ele realmente queria causar um impacto significativo na matemática. Em uma carta, Fourier escreveu: “Ontem foi meu 21<sup>o</sup> aniversário; a essa idade Newton e Pascal já haviam adquirido muitas reivindicações à imortalidade.”

Fourier não fez seus votos religiosos. Tendo deixado São Bento em 1789, ele visitou Paris e leu um artigo sobre equações algébricas na Académie Royale des Sciences. Em 1790, tornou-se professor no colégio beneditino, École Royale Militaire de Auxerre, onde havia estudado. Até esse momento, Fourier estava dividido entre seguir uma vida religiosa ou dedicar-se à pesquisa matemática. No entanto, em 1793, um terceiro elemento surgiu quando ele se envolveu na política e ingressou no Comitê Revolucionário local. Como ele escreveu: “À medida que as ideias naturais de igualdade se desenvolviam, tornou-se possível conceber a sublime esperança de estabelecer entre nós um governo livre, isento de reis e sacerdotes, e libertar desse duplo jugo o solo longamente usurpado da Europa. Eu me apaixonei prontamente por essa causa, na minha opinião a maior e mais bela que qualquer nação já empreendeu.”

Certamente, Fourier ficou descontente com o Terror resultante da Revolução Francesa e tentou renunciar ao comitê. No entanto, isso se mostrou impossível e Fourier ficou firmemente envolvido com a Revolução e incapaz de se retirar. A revolução era um assunto complicado, com muitas facções com objetivos amplamente semelhantes, mas violentamente opostas entre si. Fourier defendeu membros de uma facção enquanto estava em Orléans. Uma carta descrevendo os eventos relata: “O cidadão Fourier, um jovem cheio de inteligência, eloquência e zelo, foi enviado a Loiret. ... Parece que Fourier ... subiu em certas plataformas populares. Ele fala muito bem e, se ele expressou as opiniões da Sociedade de Auxerre, não fez nada censurável.”

Esse incidente teve consequências graves, mas após isso Fourier voltou a Auxerre e continuou a trabalhar no comitê revolucionário e a lecionar no colégio. Em julho de 1794, foi preso devido às acusações relacionadas ao incidente de Orléans e foi encarcerado. Fourier temia ser enviado à guilhotina, mas, após Robespierre também ser guilhotinado, mudanças políticas resultaram na sua libertação.

Mais tarde, em 1794, Fourier foi nomeado para estudar na *École Normale* em Paris. Esta instituição foi criada para a formação de professores e pretendia servir como modelo para outras escolas de formação de professores. A escola abriu em janeiro de 1795, e Fourier foi certamente o mais capaz dos alunos, cujas habilidades variavam amplamente. Ele foi ensinado por Lagrange, que Fourier descreveu como “o primeiro entre os homens de ciência europeus”, e também por Laplace, que Fourier avaliou com menor entusiasmo, e por Monge, que Fourier descreveu como “tendo uma voz alta e sendo ativo, engenhoso e muito erudito.”

Fourier começou a lecionar no *Collège de France* e, mantendo excelentes relações com Lagrange, Laplace e Monge, iniciou novas pesquisas matemáticas. Ele foi nomeado para uma posição na *École Centrale des Travaux Publics*, escola sob a direção de Lazare Carnot e Gaspard Monge, que em breve seria renomeada como *École Polytechnique*. No entanto, as repercussões de sua prisão anterior permaneceram e ele foi preso novamente e encarcerado. Sua liberação foi atribuída a várias causas, incluindo súplicas de seus alunos, pedidos de Lagrange, Laplace ou Monge, ou uma mudança no clima político. De fato, todos esses fatores podem ter desempenhado um papel.

Em 1º de setembro de 1795, Fourier estava de volta ao ensino na *École Polytechnique*. Em 1797, sucedeu Lagrange na cadeira de análise e mecânica. Ele era renomado como um excelente palestrante, mas não parece ter realizado pesquisas originais durante esse tempo.

Em 1798, Fourier juntou-se ao exército de Napoleão em sua invasão ao Egito como conselheiro científico. Monge e Malus também faziam parte da força expedicionária. A expedição foi inicialmente um grande sucesso. Malta foi ocupada em 10 de junho de 1798, Alexandria foi tomada por assalto em 1º de julho e o delta do Nilo foi rapidamente conquistado. No entanto, em 1º de agosto de 1798, a frota francesa foi completamente destruída pela frota de Nelson na Batalha do Nilo, fazendo com que Napoleão se visse confinado à terra que estava ocupando. Fourier atuou como administrador enquanto instituições políticas e administrativas no estilo francês eram estabelecidas. Em particular, ele ajudou a estabelecer instalações educacionais no Egito e realizou explorações arqueológicas.

Enquanto estava no Cairo, Fourier ajudou a fundar o Instituto do Cairo e foi um dos doze membros da divisão de matemática, incluindo Monge, Malus e o próprio Napoleão. Fourier foi eleito secretário do Instituto, posição que manteve durante toda a ocupação francesa do Egito. Fourier também foi encarregado de compilar as descobertas científicas e literárias feitas durante o período no Egito.

Napoleão abandonou seu exército e retornou a Paris em 1799, onde logo assumiu o poder absoluto na França. Fourier voltou à França em 1801 com os restos da força expedicionária e retomou seu cargo de Professor de Análise na *École Polytechnique*. No entanto, Napoleão tinha outras ideias sobre como Fourier poderia servi-lo e escreveu: "... o Prefeito do Departamento de Isère, tendo recentemente falecido, gostaria de expressar minha confiança no cidadão Fourier nomeando-o para este cargo." Fourier não estava feliz com a perspectiva de deixar o mundo acadêmico e Paris, mas não pôde recusar o pedido de Napoleão. Ele foi para Grenoble, onde suas funções como Prefeito eram numerosas e variadas. Seus dois maiores feitos nessa posição administrativa foram supervisionar a drenagem dos pântanos de Bourgoin e supervisionar a construção de uma nova estrada de Grenoble a Turim. Ele também passou muito tempo trabalhando na *Description de l'Égypte*, que só foi concluída em 1810, quando Napoleão fez mudanças, reescrevendo a história em alguns pontos, antes da publicação. Quando uma segunda edição apareceu, todas as referências a Napoleão haviam sido removidas.

Foi durante seu tempo em Grenoble que Fourier realizou seu importante trabalho matemático sobre a teoria do calor. Seu trabalho sobre o tópico começou por volta de 1804 e, em 1807, ele havia completado seu importante artigo *Sobre a Propagação do Calor em Corpos Sólidos*. O artigo foi lido ao Instituto de Paris em 21 de dezembro de 1807, e um comitê composto por Lagrange, Laplace, Monge e Lacroix foi formado para avaliar o trabalho. Embora hoje esse artigo seja altamente considerado, na época causou controvérsia.

Havia duas razões para o descontentamento do comitê com o trabalho. A primeira objeção, feita por Lagrange e Laplace em 1808, dizia respeito às expansões de funções de Fourier como séries trigonométricas, o que agora chamamos de séries de Fourier. Esclarecimentos adicionais por Fourier ainda não conseguiram convencê-los. Como é apontado, "Todos esses trabalhos são escritos com uma clareza exemplar - do ponto de vista lógico, e não caligráfico - que sua incapacidade de convencer Laplace e Lagrange ... fornece um bom índice da originalidade das ideias de Fourier." A segunda objeção foi feita por Biot contra a derivação das equações de transferência de calor de Fourier. Fourier não fez referência ao artigo de 1804 de Biot sobre o tópico, embora o artigo de Biot estivesse certamente incorreto. Laplace e, posteriormente, Poisson, tinham objeções semelhantes.

O Instituto estabeleceu como tema de concurso de prêmio o tema da propagação do calor em corpos sólidos para o prêmio de matemática de 1811. Fourier apresentou seu artigo de 1807 junto com trabalhos adicionais sobre o resfriamento de sólidos infinitos e calor terrestre e radiante. Apenas uma outra entrada foi recebida e o comitê responsável pela decisão sobre a concessão do prêmio, composto por Lagrange, Laplace, Malus, Haüy e Legendre, concedeu o prêmio a Fourier. O relatório, no entanto, não foi completamente favorável e afirmava: "... a maneira como o autor chega a essas equações não está isenta de dificuldades e sua análise para integrá-las ainda deixa a desejar em termos de generalidade e até mesmo rigor."

Com esse relatório um tanto misto, não houve movimento em Paris para publicar o trabalho de Fourier.

Quando Napoleão foi derrotado e estava a caminho do exílio em Elba, sua rota deveria passar por Grenoble. Fourier conseguiu evitar esse confronto difícil ao enviar uma mensagem de que seria perigoso para Napoleão. Quando soube da fuga de Napoleão de Elba e que ele estava marchando em direção a Grenoble com um exército, Fourier ficou extremamente preocupado. Ele tentou persuadir o povo de Grenoble a se opor a Napoleão e a dar sua lealdade ao Rei. No entanto, quando Napoleão entrou na cidade por um portão,

Fourier deixou a cidade apressadamente por outro.

Napoleão ficou irritado com Fourier, que esperava que o recebesse com entusiasmo. Fourier conseguiu reverter a situação a seu favor com ambos os lados e Napoleão nomeou-o Prefeito do Rhône. No entanto, Fourier logo renunciou ao receber ordens, possivelmente de Carnot, para remover todos os administradores com simpatias realistas. No entanto, ele não poderia ter rompido completamente com Napoleão e Carnot, pois em 10 de junho de 1815, Napoleão lhe concedeu uma pensão de 6000 francos, a partir de 1<sup>o</sup> de julho. No entanto, Napoleão foi derrotado em 1<sup>o</sup> de julho e Fourier não recebeu nenhum dinheiro. Ele retornou a Paris.

Fourier foi eleito para a Académie des Sciences em 1817. Em 1822, Delambre, que era o Secretário da seção matemática da Académie des Sciences, faleceu e Fourier, juntamente com Biot e Arago, candidatou-se ao cargo. Após a retirada de Arago, a eleição deu a Fourier uma vitória fácil. Logo após Fourier se tornar Secretário, a Académie publicou seu ensaio premiado *Théorie analytique de la chaleur* em 1822. No entanto, isso não foi uma manobra política de Fourier, pois Delambre havia providenciado a impressão antes de sua morte.

Durante seus últimos oito anos em Paris, Fourier retomou suas pesquisas matemáticas e publicou uma série de artigos, alguns em matemática pura e outros sobre tópicos matemáticos aplicados. Sua vida não foi isenta de problemas, já que sua teoria do calor ainda provocava controvérsia. Biot reivindicou prioridade sobre Fourier, uma alegação que Fourier demonstrou ser falsa com facilidade. No entanto, Poisson atacou tanto as técnicas matemáticas de Fourier quanto reivindicou ter uma teoria alternativa. Fourier escreveu o *Précis Historique* em resposta a essas alegações, mas, embora o trabalho tenha sido mostrado a vários matemáticos, nunca foi publicado.

As opiniões de Fourier sobre as alegações de Biot e Poisson são expressas da seguinte forma: “Depois de contestar os vários resultados, [Biot e Poisson] agora reconhecem que são exatos, mas protestam que inventaram outro método de expô-los e que esse método é excelente e verdadeiro. Se eles tivessem iluminado esse ramo da física com visões importantes e gerais e aperfeiçoado muito a análise das equações diferenciais parciais, se tivessem estabelecido um elemento principal da teoria do calor por experimentos finos... teriam o direito de julgar meu trabalho e corrigi-lo. Eu me submeteria com muito prazer... Mas não se expandem os limites da ciência apresentando, sob uma forma dita diferente, resultados que não se encontraram e, acima de tudo, antecipando-se ao verdadeiro autor na publicação.”

O trabalho de Fourier forneceu o impulso para trabalhos posteriores sobre séries trigonométricas e a teoria das funções de uma variável real.

## 5.1 Referências

1. HERIVEL, J. *Joseph Fourier: The Man and the Physicist*. Oxford University Press, 1975
2. <https://www.gutenberg.org/files/16775/16775-h/16775-h.htm>
3. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fourier/>

## CAPÍTULO 6

---

### Johann Carl Friedrich Gauss

---

Carl Friedrich Gauss nasceu em 30 de abril de 1777, na cidade de Brunswick (Braunschweig), no Ducado de Brunswick-Lüneburg, no que hoje é a Alemanha. Seu pai foi Gebhard Dietrich Gauss, um trabalhador de origem humilde que atuava como jardineiro e pedreiro. Dorothea Gauss, sua mãe, foi uma mulher de pouca instrução, mas que apoiou o desenvolvimento intelectual do filho. Com sete anos, Carl Friedrich Gauss começou a escola primária, e seu potencial foi notado quase imediatamente. Seu professor, Büttner, e seu assistente, Martin Bartels, ficaram impressionados quando Gauss somou instantaneamente os números inteiros de 1 a 100 ao perceber que a soma era de 50 pares de números, cada par somando 101.

Em 1788, Gauss iniciou sua educação no Gymnasium com a ajuda de Büttner e Bartels, onde aprendeu alemão literário e latim. Após receber uma bolsa de estudos do Duque de Brunswick-Wolfenbüttel, Gauss ingressou no Collegium Carolinum de Brunswick em 1792. Na academia, Gauss descobriu de forma independente a lei de Bode, o teorema binomial e a média aritmético-geométrica, além da lei da reciprocidade quadrática e o teorema dos números primos.

Em 1795, Gauss deixou Brunswick para estudar na Universidade de Göttingen. Seu professor lá foi Kästner, a quem Gauss frequentemente ridicularizava. Seu único amigo conhecido entre os alunos foi Farkas Bolyai. Eles se encontraram em 1799 e corresponderam-se por muitos anos.

Gauss saiu de Göttingen em 1798 sem diploma, mas já havia feito uma de suas descobertas mais importantes: a construção de um heptadecágono regular com régua e compasso. Esse foi o avanço mais significativo nesse campo desde a época da matemática grega e foi publicado como Seção VII do famoso trabalho de Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*.

Gauss retornou a Brunswick, onde recebeu seu diploma em 1799. Após o Duque de Brunswick concordar em continuar a bolsa de estudos de Gauss, ele pediu que Gauss apresentasse uma dissertação de doutorado na Universidade de Helmstedt. Gauss já conhecia Pfaff, que foi escolhido como seu orientador. A dissertação de Gauss foi uma discussão sobre o teorema fundamental da álgebra.

Com a bolsa para sustentá-lo, Gauss não precisou procurar um emprego e se dedicou à pesquisa. Ele publicou o livro *Disquisitiones Arithmeticae* no verão de 1801. O livro tinha sete seções, sendo que todas, exceto a última, eram dedicadas à teoria dos números.

Em junho de 1801, Zach, um astrônomo que Gauss conhecera dois ou três anos antes, publicou as posições orbitais de Ceres, um novo "pequeno planeta" descoberto por G. Piazzi, um astrônomo italiano, em 1º de janeiro de 1801. Infelizmente, Piazzi só conseguiu observar 9 graus de sua órbita antes que ela desaparecesse atrás do Sol. Zach publicou várias previsões de sua posição, incluindo uma de Gauss que diferia significativamente das outras. Quando Ceres foi redescoberta por Zach em 7 de dezembro de 1801, estava quase exatamente onde Gauss havia previsto. Embora ele não tenha revelado seus métodos na época, Gauss usou seu método de aproximação pelos mínimos quadrados.

Em junho de 1802, Gauss visitou Olbers, que havia descoberto Pallas em março daquele ano, e Gauss investigou sua órbita. Olbers solicitou que Gauss fosse nomeado diretor do novo observatório proposto em Göttingen, mas nenhuma ação foi tomada. Gauss começou a corresponder com Bessel, que ele só conheceu pessoalmente em 1825, e com Sophie Germain.

Gauss casou-se com Johanna Ostoff em 9 de outubro de 1805. Apesar de ter uma vida pessoal feliz pela primeira vez, seu benfeitor, o Duque de Brunswick, foi morto lutando pelo exército prussiano. Em 1807, Gauss deixou Brunswick para assumir a posição de diretor do observatório de Göttingen.

Gauss chegou a Göttingen no final de 1807. Em 1808, seu pai morreu e, um ano depois, sua esposa Johanna faleceu após dar à luz seu segundo filho, que também morreu pouco depois dela. Gauss ficou devastado e escreveu para Olbers pedindo um refúgio por algumas semanas, para reunir novas forças nos braços de sua amizade — forças para uma vida que só tem valor porque pertence a meus três pequenos filhos. Gauss casou-se pela segunda vez no ano seguinte, com Minna, a melhor amiga de Johanna. Embora tivessem três filhos, esse casamento parecia ser mais por conveniência para Gauss.

O trabalho de Gauss nunca pareceu sofrer com sua tragédia pessoal. Ele publicou seu segundo livro, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, em 1809, um importante tratado de dois volumes sobre o movimento dos corpos celestes. No primeiro volume, ele discutiu equações diferenciais, seções cônicas e órbitas elípticas, enquanto no segundo volume, a parte principal do trabalho, ele mostrou como estimar e, em seguida, refinar a estimativa da órbita de um planeta. As contribuições de Gauss para a astronomia teórica cessaram após 1817, embora ele continuasse fazendo observações até a idade de 70 anos.

Muito do tempo de Gauss foi dedicado a um novo observatório, concluído em 1816, mas ele ainda encontrou tempo para trabalhar em outros temas. Suas publicações durante esse período incluem *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, um tratamento rigoroso de séries e uma introdução à função hipergeométrica, *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, um ensaio prático sobre integração aproximada, *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen*, uma discussão sobre estimadores estatísticos, e *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata*. Este último trabalho foi inspirado por problemas geométricos e estava principalmente preocupado com a teoria do potencial. Na verdade, Gauss ficou cada vez mais interessado em geodésia na década de 1820.

Gauss foi solicitado em 1818 para realizar um levantamento geodésico do estado de Hanover (geodésia é a ciência de medir e representar a geometria, gravidade e orientação espacial da Terra em uma região). Gauss aceitou com prazer e assumiu pessoalmente o comando do levantamento, fazendo medições durante o dia e reduzindo-as à noite, usando sua extraordinária capacidade mental para cálculos. Ele escrevia regularmente para Schumacher, Olbers e Bessel, relatando seu progresso e discutindo problemas.

Devido ao levantamento, Gauss inventou o heliotrópio, que funcionava refletindo os raios solares usando um design de espelhos e um pequeno telescópio. No entanto, linhas de base imprecisas foram usadas para o levantamento e uma rede insatisfatória de triângulos. Gauss frequentemente se perguntava se teria sido melhor ter seguido outra ocupação, mas ele publicou mais de 70 artigos entre 1820 e 1830.

Em 1822, Gauss ganhou o Prêmio da Universidade de Copenhague com *Theoria attractionis...* juntamente com a ideia de mapear uma superfície sobre outra de modo que as duas sejam similares em suas menores partes. Este artigo foi publicado em 1825 e levou à publicação mais tardia de *Untersuchungen über Gegenstände der Höheren Geodäsie* (1843 e 1846). O artigo *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (1823), com seu suplemento (1828), foi dedicado à estatística matemática, em particular ao método dos mínimos quadrados.

Desde o início dos anos 1800, Gauss tinha interesse na questão da possível existência de uma geometria não euclidiana. Ele discutiu esse tópico extensivamente com Farkas Bolyai e em sua correspondência com Gerling e Schumacher. Em uma resenha de livro em 1816, ele discutiu provas que deduziam o axioma das paralelas a partir dos outros axiomas euclidianos, sugerindo que ele acreditava na existência de uma geometria não euclidiana, embora fosse um tanto vago. Gauss confidenciou a Schumacher que acreditava que sua reputação sofreria se admitisse publicamente que acreditava na existência de tal geometria.

Em 1831, Farkas Bolyai enviou a Gauss o trabalho de seu filho János Bolyai sobre o assunto. Gauss respondeu que ... louvar isso significaria louvar a mim mesmo. Novamente, uma década depois, quando foi informado sobre o trabalho de Lobachevsky sobre o assunto, elogiou seu caráter "genuinamente geométrico", enquanto em uma carta a Schumacher em 1846, afirma que tinha as mesmas convicções há 54 anos, indicando que ele conhecia a existência de uma geometria não euclidiana desde os 15 anos de idade (o que parece improvável).

Gauss tinha um grande interesse em geometria diferencial e publicou muitos artigos sobre o assunto. *Disquisitiones generales circa superficies curva* (1828) foi seu trabalho mais renomado nesse campo. De fato, esse artigo surgiu de seus interesses geométricos, incluindo um estudo da superfície de uma esfera e a medição de sua curvatura. Nesse trabalho, ele introduziu a famosa noção de curvatura gaussiana de uma superfície. Ele provou que essa curvatura é invariante sob deformações locais, ou seja, se duas superfícies têm curvaturas gaussianas idênticas em pontos correspondentes, então essas superfícies são locais geometricamente semelhantes. Essa teoria foi mais tarde expandida por Riemann.

O período de 1817 a 1832 foi particularmente angustiante para Gauss. Ele acolheu sua mãe doente em 1817, que permaneceu até sua morte em 1839, enquanto ele discutia com sua esposa e sua família sobre se deveriam se mudar para Berlim. Ele havia recebido uma oferta de posição na Universidade de Berlim, e Minna e sua família estavam ansiosos para se mudar para lá. No entanto, Gauss nunca gostou de mudanças e decidiu ficar em Göttingen. Em 1831, a segunda esposa de Gauss faleceu após uma longa doença.

Em 1831, Wilhelm Weber chegou a Göttingen como professor de física, ocupando a cadeira de Tobias Mayer. Gauss conhecia Weber desde 1828 e apoiou sua nomeação. Gauss havia trabalhado em física antes de 1831, publicando *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*, que continha o princípio do menor constrangimento, e *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii*, que discutia forças de atração. Esses artigos foram baseados na teoria do potencial de Gauss, que se revelou de grande importância em seu trabalho com física. Mais tarde, ele passou a acreditar que sua teoria

do potencial e seu método dos mínimos quadrados forneciam ligações vitais entre a ciência e a natureza.

Em 1832, Gauss e Weber começaram a investigar a teoria do magnetismo terrestre depois que Alexander von Humboldt tentou obter a assistência de Gauss para fazer uma grade de pontos de observação magnética ao redor da Terra. Gauss ficou animado com essa perspectiva e, até 1840, havia escrito três artigos importantes sobre o assunto: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* (1832), *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus* (1839) e *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte* (1840). Esses artigos abordaram as teorias atuais sobre o magnetismo terrestre, incluindo as ideias de Poisson, medida absoluta para a força magnética e uma definição empírica do magnetismo terrestre. O princípio de Dirichlet foi mencionado sem prova.

*Allgemeine Theorie* mostrou que só podem existir dois polos no globo e provou um teorema importante, que dizia respeito à determinação da intensidade do componente horizontal da força magnética, juntamente com o ângulo de inclinação. Gauss usou a equação de Laplace para auxiliá-lo em seus cálculos e acabou especificando um local para o polo Sul magnético.

Humboldt havia elaborado um calendário para observações de declinação magnética. No entanto, uma vez que o novo observatório magnético de Gauss (concluído em 1833, livre de todos os metais magnéticos) foi construído, ele procedeu a alterar muitos dos procedimentos de Humboldt, o que desagradou bastante a Humboldt. No entanto, as mudanças de Gauss obtiveram resultados mais precisos com menos esforço.

Gauss e Weber alcançaram muito em seus seis anos juntos. Eles descobriram as leis de Kirchhoff, além de construir um dispositivo de telégrafo primitivo que poderia enviar mensagens a uma distância de 5000 pés. No entanto, isso foi apenas um passatempo agradável para Gauss. Ele estava mais interessado na tarefa de estabelecer uma rede mundial de pontos de observação magnética. Essa ocupação produziu muitos resultados concretos. O *Magnetischer Verein* e seu jornal foram fundados, e o atlas de geomagnetismo foi publicado, enquanto o próprio jornal de Gauss e Weber, no qual seus resultados foram publicados, funcionou de 1836 a 1841.

Em 1837, Weber foi forçado a deixar Göttingen quando se envolveu em uma disputa política e, a partir desse momento, a atividade de Gauss diminuiu gradualmente. Ele ainda produziu cartas em resposta às descobertas de outros cientistas, geralmente comentando que conhecia os métodos há anos, mas nunca sentiu a necessidade de publicar. Às vezes, ele parecia extremamente satisfeito com os avanços feitos por outros matemáticos, particularmente os de Eisenstein e Lobachevsky.

Gauss passou os anos de 1845 a 1851 atualizando o fundo de pensão de viúvas da Universidade de Göttingen. Esse trabalho lhe deu experiência prática em assuntos financeiros, e ele conseguiu fazer sua fortuna através de investimentos astutos em títulos emitidos por empresas privadas.

Dois dos últimos alunos de doutorado de Gauss foram Moritz Cantor e Dedekind. Dedekind fez uma descrição refinada de seu supervisor: ... geralmente ele se sentava em uma atitude confortável, olhando para baixo, ligeiramente curvado, com as mãos cruzadas sobre o colo. Ele falava com bastante liberdade, de forma muito clara, simples e direta: mas quando queria enfatizar um novo ponto de vista ... então ele levantava a cabeça, voltava-se para alguém ao seu lado e o olhava com seus belos e penetrantes olhos azuis durante o discurso enfático. ... Se ele passava de uma explicação de princípios para o desenvolvimento de fórmulas matemáticas, então se levantava e, em uma postura bastante



ereta, escrevia em um quadro ao seu lado com sua caligrafia peculiarmente bonita: ele sempre conseguia, através de economia e arranjo deliberado, fazer uso de um espaço relativamente pequeno. Para exemplos numéricos, cuja conclusão cuidadosa ele valorizava especialmente, trazia os dados necessários em pequenos pedaços de papel.

Gauss apresentou sua palestra de jubileu de ouro em 1849, cinquenta anos após seu diploma ter sido concedido pela Universidade de Helmstedt. Era apropriadamente uma variação de sua dissertação de 1799. Da comunidade matemática, apenas Jacobi e Dirichlet estavam presentes, mas Gauss recebeu muitas mensagens e homenagens.

A partir de 1850, o trabalho de Gauss foi novamente quase todo de natureza prática, embora ele tenha aprovado a tese de doutorado de Riemann e assistido à sua palestra de qualificação. Seu último intercâmbio científico conhecido foi com Gerling. Ele discutiu um pêndulo de Foucault modificado em 1854. Ele também conseguiu assistir à inauguração da nova ligação ferroviária entre Hannover e Göttingen, mas isso se revelou sua última saída. Sua saúde deteriorou-se lentamente e Gauss faleceu em seu sono na manhã de 23 de fevereiro de 1855.

## 6.1 Referências

1. *The Princeton Companion to Mathematics*. Edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. Princeton University Press, 2008.
2. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gauss/>.
3. BELL, E. T. *Men of Mathematics*. Simon and Schuster, 1937.



## CAPÍTULO 7

---

### Évariste Galois

---

Évariste Galois nasceu em 25 de outubro de 1811 em Bourg-la-Reine, na região da Île-de-France, na França. O pai de Évariste Galois, Nicholas Gabriel Galois, e sua mãe, Adelaide Marie Demante, eram ambos inteligentes e bem-educados em filosofia, literatura clássica e religião. No entanto, não há sinais de qualquer habilidade matemática na família de Galois. Sua mãe foi sua única professora até ele completar 12 anos, ensinando-lhe grego, latim e religião, transmitindo também seu próprio ceticismo ao filho. O pai de Galois era uma figura importante na comunidade e, em 1815, foi eleito prefeito de Bourg-la-Reine.

O ponto de partida dos eventos históricos que desempenhariam um papel importante na vida de Galois foi, sem dúvida, a tomada da Bastilha em 14 de julho de 1789. A partir desse momento, a monarquia de Luís XVI enfrentou grandes dificuldades, à medida que a maioria dos franceses se unia em uma tentativa de destruir os privilégios da igreja e do estado.

Apesar das tentativas de compromisso, Luís XVI foi julgado após tentar fugir do país. Após a execução do rei em 21 de janeiro de 1793, seguiu-se um reinado de terror com muitos julgamentos políticos. No final de 1793, havia 4.595 prisioneiros políticos em Paris. No entanto, a França começou a ter melhores momentos, pois seus exércitos, sob o comando de Napoleão Bonaparte, venceram várias batalhas.

Napoleão tornou-se primeiro cônsul em 1800 e, em 1804, tornou-se imperador. Os exércitos franceses continuaram a conquistar a Europa enquanto o poder de Napoleão se consolidava cada vez mais. Em 1811, Napoleão estava no auge de seu poder. Em 1815, o governo de Napoleão terminou. A campanha fracassada na Rússia em 1812 foi seguida por derrotas, e os aliados entraram em Paris em 31 de março de 1814. Napoleão abdicou em 6 de abril e Luís XVIII foi instalado como rei pelos aliados. O ano de 1815 viu os famosos cem dias: Napoleão entrou em Paris em 20 de março, foi derrotado em Waterloo em 18 de junho e abdicou pela segunda vez em 22 de junho. Luís XVIII foi reinstalado como rei, mas morreu em setembro de 1824, e Carlos X tornou-se o novo rei.

Galois estava na escola nessa época. Ele se matriculou no Liceu de Louis-le-Grand como interno na 4<sup>a</sup> classe em 6 de outubro de 1823. Mesmo durante seu primeiro semestre, houve uma pequena rebelião e 40 alunos foram expulsos da escola. Galois não estava envolvido e, durante 1824-25, seu desempenho escolar foi bom e ele recebeu vários prêmios. No entanto, em 1826, Galois foi solicitado a repetir o ano porque seu trabalho em retórica

não estava no padrão exigido.

Fevereiro de 1827 foi um ponto de virada na vida de Galois. Ele se matriculou em sua primeira aula de matemática, a classe de Hypolyte Vernier (1800-1875). Ele rapidamente se apaixonou pela matemática, e seu diretor de estudos notou que a paixão pela matemática o dominava, sugerindo que seria melhor para ele se seus pais permitissem que ele estudasse apenas essa disciplina. Ele acreditava que Galois estava perdendo tempo na escola e nada fazia além de atormentar seus professores e sobrecarregar-se de punições.

Os relatórios escolares de Galois começaram a descrevê-lo como singular, excêntrico, original e fechado. É interessante que talvez o matemático mais original que já existiu fosse criticado por ser original. Vernier relatou, no entanto, que Galois tinha inteligência e progresso marcantes, mas não apresentava bem suas ideias.

Em 1828, Galois fez o exame de admissão à École Polytechnique, mas falhou. Era a principal universidade de Paris e Galois certamente desejava ingressar nela por razões acadêmicas. No entanto, ele também queria ingressar nessa escola por causa dos fortes movimentos políticos entre seus alunos, já que Galois seguia o exemplo de seus pais em ser um ardente republicano.

De volta a Louis-le-Grand, Galois se matriculou na aula de matemática de Louis Richard. No entanto, ele trabalhou cada vez mais em suas próprias pesquisas e cada vez menos em seus trabalhos escolares. Ele estudou a “Géométrie” de Legendre e os tratados de Lagrange. Como Richard relatou, Galois era um aluno que trabalhava apenas nos mais altos níveis da matemática.

Em abril de 1829, Galois teve seu primeiro artigo de matemática publicado, sobre frações contínuas, nos “Annales de mathématiques”. Em 25 de maio e 1 de junho, ele submeteu artigos sobre a solução algébrica de equações à Academia de Ciências. Cauchy foi nomeado revisor do artigo de Galois.

A tragédia atingiu Galois em 2 de julho de 1829, quando seu pai cometeu suicídio. O padre de Bourg-la-Reine falsificou o nome do prefeito Galois em epigramas maliciosos dirigidos aos próprios parentes de Galois. O pai de Galois era um homem de bom coração, e o escândalo que se seguiu foi mais do que ele podia suportar. Ele se enforcou em seu apartamento em Paris, a poucos passos de Louis-le-Grand, onde seu filho estava estudando. Galois foi profundamente afetado pela morte de seu pai, e isso influenciou muito a direção que sua vida tomou.

Algumas semanas após a morte de seu pai, Galois apresentou-se para o exame de admissão à École Polytechnique pela segunda vez. Pela segunda vez, ele falhou, talvez em parte porque fez o exame nas piores circunstâncias possíveis, tão pouco tempo após a morte de seu pai, e em parte porque ele nunca foi bom em comunicar suas ideias matemáticas profundas. Galois então resignou-se a ingressar na École Normale, que era um anexo de Louis-le-Grand, e para isso ele teve que fazer os exames de Baccalauréat, algo que ele poderia ter evitado ao ingressar na École Polytechnique.

Ele foi aprovado, recebendo seu diploma em 29 de dezembro de 1829. Seu examinador em matemática relatou que Galois às vezes era obscuro ao expressar suas ideias, mas era inteligente e mostrava um notável espírito de pesquisa. Seu examinador de literatura relatou que Galois foi o único aluno que respondeu mal, não sabendo absolutamente nada. Esse examinador ficou surpreso ao ouvir sobre a extraordinária capacidade de Galois para a matemática, pois acreditava que ele tinha pouca inteligência.

Galois enviou a Cauchy mais trabalhos sobre a teoria das equações, mas depois soube pelo Bulletin de Férussac de um artigo póstumo de Abel que sobrepunha-se a uma parte de seu trabalho. Galois então seguiu o conselho de Cauchy e submeteu um novo artigo

“Sobre a condição para que uma equação seja solúvel por radicais” em fevereiro de 1830. O artigo foi enviado a Fourier, o secretário da Academia de Paris, para ser considerado para o Grande Prêmio em matemática. Fourier morreu em abril de 1830 e o artigo de Galois nunca foi encontrado e, portanto, nunca foi considerado para o prêmio.

Galois, após ler o trabalho de Abel e Jacobi, trabalhou na teoria das funções elípticas e integrais abelianas. Com o apoio de Jacques Sturm, ele publicou três artigos no *Bulletin de Férussac* em abril de 1830. No entanto, soube em junho que o prêmio da Academia seria concedido postumamente a Abel e conjuntamente a Jacobi, e seu próprio trabalho nunca foi considerado.

Julho de 1830 viu uma revolução. Carlos X fugiu da França. Houve tumultos nas ruas de Paris, e o diretor da *École Normale*, M. Guigniault, trancou os alunos para evitar que participassem. Galois tentou escalar o muro para se juntar aos tumultos, mas falhou. Em dezembro de 1830, M. Guigniault escreveu artigos de jornal atacando os alunos, e Galois respondeu na *Gazette des Écoles*, atacando M. Guigniault por suas ações de trancar os alunos na escola. Por essa carta, Galois foi expulso e juntou-se à Artilharia da Guarda Nacional, um ramo republicano da milícia. Em 31 de dezembro de 1830, a Artilharia da Guarda Nacional foi abolida por Decreto Real, já que o novo rei, Louis-Phillipe, a considerava uma ameaça ao trono.

Duas publicações menores, um resumo nos *Annales de Gergonne* (dezembro de 1830) e uma carta sobre o ensino de ciências na *Gazette des Écoles* (2 de janeiro de 1831), foram as últimas publicações durante sua vida. Em janeiro de 1831, Galois tentou retornar à matemática. Ele organizou algumas aulas de matemática em álgebra superior, que atraíram 40 alunos na primeira reunião, mas depois disso os números rapidamente diminuíram. Galois foi convidado por Poisson a submeter uma terceira versão de seu memorial sobre equações à Academia, e ele o fez em 17 de janeiro de 1831.

Houve então um incidente no Banquete de 9 de maio, onde uma garrafa de vinho foi levantada e alguém exclamou “Ao rei Louis-Phillipe”, e Galois levantou uma faca e disse: “Ao rei Louis-Phillipe, se ele trair”. Ele foi preso no dia seguinte, acusado de usar roupas ilegais (o antigo uniforme da Artilharia) e carregar armas. Ele foi julgado em 15 de junho, mas com a ajuda de seu advogado, foi absolvido.

Em 14 de julho, Dia da Bastilha, Galois foi preso novamente. Novamente, ele estava vestindo o uniforme da Artilharia da Guarda Nacional, o que era considerado ilegal. Ele também estava portando um rifle carregado, várias pistolas e uma adaga. Galois foi enviado de volta à prisão de Sainte-Pélagie. Enquanto estava na prisão, ele recebeu uma rejeição de seu memorial. Poisson relatou que o argumento de Galois não era suficientemente claro nem suficientemente desenvolvido para que pudessem julgar seu rigor. No entanto, Poisson encorajou Galois a publicar um relato mais completo de seu trabalho. Enquanto estava na prisão de Sainte-Pélagie, Galois tentou suicidar-se esfaqueando-se com uma adaga, mas os outros prisioneiros o impediram. Enquanto estava bêbado na prisão, ele se abriu aos companheiros de cela, expressando seu profundo anseio por alguém para amar e lamentando a perda de seu pai.

Em março de 1832, uma epidemia de cólera varreu Paris, e os prisioneiros, incluindo Galois, foram transferidos para a pensão *Sieur Faultrier*. Lá, ele aparentemente se apaixonou por *Stephanie-Felice du Motel*, a filha do médico residente. Depois de ser libertado em 29 de abril, Galois trocou cartas com *Stephanie*, e é claro que ela tentou distanciar-se do caso.

O nome *Stephanie* aparece várias vezes como uma nota marginal em um dos manuscritos de Galois.

Galois lutou um duelo com Perscheux d'Herbinville em 30 de maio, sem razão clara para o duelo, mas certamente ligado a Stephanie. Uma nota marginal no manuscrito que Galois escreveu na noite anterior ao duelo diz que havia algo a completar em sua demonstração, mas ele não teve tempo. É isso que levou à lenda de que ele passou sua última noite escrevendo tudo o que sabia sobre teoria de grupos. Embora interessante, esta história, porém, parece ter sido exagerada.

Galois foi ferido no duelo e foi abandonado por d'Herbinville e seus próprios auxiliares, sendo encontrado por um camponês. Ele morreu no hospital Cochin em 31 de maio de 1832 e seu funeral foi realizado em 2 de junho. Foi também o foco de um comício republicano, e motins se seguiram que duraram vários dias.

O irmão de Galois e seu amigo Chevalier copiaram seus artigos matemáticos e os enviaram a Gauss, Jacobi e outros. Era desejo de Galois que Jacobi e Gauss dessem suas opiniões sobre seu trabalho. Não existe registro de qualquer comentário feito por esses dois matemáticos. No entanto, os artigos chegaram a Liouville, que, em setembro de 1843, anunciou à Academia que havia encontrado nos artigos de Galois uma solução concisa, tão correta quanto profunda, do problema de decidir se uma equação irreduzível de grau primo é solúvel por radicais. Liouville publicou esses artigos de Galois em seu *Journal* em 1846.

A teoria que Galois delineou nesses artigos é agora chamada de teoria de Galois, e possui aplicações fundamentais em álgebra e teoria dos números.

## 7.1 Referências

1. *Princeton Companion to Mathematics*. Edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. Princeton University Press, 2008.
2. Stewart, Ian. *Galois Theory*. 3rd edition. Chapman and Hall/CRC, 2004.
3. <https://palmer.wellesley.edu/~ivolic/pdf/Classes/MATH306GaloisTheorySpring12/Handouts/GaloisBio.pdf>.

---

### Georg Friedrich Bernhard Riemann

---

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em 17 de setembro de 1826 em Breselenz, no Reino de Hannover, que atualmente faz parte da Alemanha. O pai de Bernhard Riemann, Friedrich Bernhard Riemann, era um ministro luterano. Friedrich Riemann casou-se com Charlotte Ebell e Bernhard foi o segundo de seus seis filhos, dois meninos e quatro meninas. Friedrich Riemann atuou como professor para seus filhos e ensinou Bernhard até que ele completou dez anos. Nessa época, um professor de uma escola local chamado Schulz auxiliou na educação de Bernhard.

Em 1840, Bernhard entrou diretamente na terceira classe do Lyceum em Hannover. Enquanto estava no Lyceum, ele morava com sua avó, mas, em 1842, sua avó faleceu e Bernhard mudou-se para o Johanneum Gymnasium em Lüneburg. Bernhard parece ter sido um bom, mas não excepcional, aluno que trabalhou arduamente nas disciplinas clássicas, como hebraico e teologia. Ele demonstrou um interesse particular em matemática e o diretor do Gymnasium permitiu que Bernhard estudasse textos de matemática de sua própria biblioteca. Em uma ocasião, ele emprestou a Bernhard o livro de Legendre sobre a teoria dos números e Bernhard leu o livro de 900 páginas em seis dias.

Na primavera de 1846, Riemann matriculou-se na Universidade de Göttingen. Seu pai o havia encorajado a estudar teologia e, assim, ele ingressou na faculdade de teologia. No entanto, ele assistiu a algumas palestras de matemática e perguntou ao pai se poderia transferir-se para a faculdade de filosofia para que pudesse estudar matemática. Riemann estava sempre muito próximo de sua família e nunca teria mudado de curso sem a permissão de seu pai. Essa permissão foi concedida e Riemann então fez cursos de matemática com Moritz Stern e Gauss.

Pode-se pensar que Riemann estava no lugar certo para estudar matemática em Göttingen, mas, na época, a Universidade de Göttingen ainda não era um grande centro de matemática. Gauss lecionava para Riemann, mas ele estava apenas oferecendo cursos elementares e não há evidências de que, nesse momento, ele reconhecesse o gênio de Riemann. Stern, no entanto, certamente percebeu que ele tinha um aluno notável e mais tarde descreveu Riemann nessa época dizendo que ele “já cantava como um canário.”

Riemann mudou-se de Göttingen para a Universidade de Berlim na primavera de 1847 para estudar sob Steiner, Jacobi, Dirichlet e Eisenstein. Esse foi um período importante para Riemann. Ele aprendeu muito com Eisenstein e discutiu o uso de variáveis complexas

na teoria das funções elípticas. No entanto, a principal pessoa a influenciar Riemann nessa época foi Dirichlet. O matemático Felix Klein, que escreveu sobre o desenvolvimento da matemática no século XIX, escreve sobre Riemann: “Riemann estava ligado a Dirichlet pela forte simpatia interna de um modo de pensamento semelhante. Dirichlet amava tornar as coisas claras para si mesmo em uma base intuitiva; junto com isso, ele dava análises agudas e lógicas das questões fundamentais e evitava cálculos extensos sempre que possível. Seu modo de trabalhar era adequado para Riemann, que o adotou e trabalhou de acordo com os métodos de Dirichlet.”

O trabalho de Riemann sempre foi baseado em um raciocínio intuitivo que caía um pouco abaixo do rigor necessário para tornar as conclusões absolutamente precisas. No entanto, as ideias brilhantes que seus trabalhos contêm são muito mais claras porque seu trabalho não está excessivamente preenchido com cálculos extensos. Foi durante seu tempo na Universidade de Berlim que Riemann desenvolveu sua teoria geral das variáveis complexas, que formou a base de alguns de seus trabalhos mais importantes.

Em 1849, ele retornou a Göttingen e sua tese de doutorado, supervisionada por Gauss, foi submetida em 1851. No entanto, não foi apenas Gauss que influenciou fortemente Riemann nessa época. Weber havia retornado de Leipzig para assumir uma cátedra de física em Göttingen durante o tempo que Riemann estava em Berlim, e Riemann foi seu assistente por 18 meses. Além disso, Listing havia sido nomeado professor de física em Göttingen em 1849. Através de Weber e Listing, Riemann obteve uma sólida formação em física teórica e, com Listing, importantes ideias em topologia que influenciaram sua pesquisa pioneira.

A tese de Riemann estudou a teoria das variáveis complexas e, em particular, o que agora chamamos de superfícies de Riemann. Portanto, ela introduziu métodos topológicos na teoria das funções complexas. O trabalho baseia-se nas fundações da teoria das variáveis complexas de Cauchy, construídas ao longo de muitos anos, e também nas ideias de Puiseux sobre pontos de ramificação. No entanto, a tese de Riemann é uma peça de trabalho notavelmente original que examinou propriedades geométricas de funções analíticas, mapeamentos conformes e a conectividade das superfícies.

Na prova de alguns dos resultados em sua tese, Riemann usou um princípio variacional que ele mais tarde chamou de Princípio de Dirichlet, uma vez que o aprendeu nas palestras de Dirichlet em Berlim. O Princípio de Dirichlet, no entanto, não se originou com Dirichlet, pois Gauss, Green e Thomson também o utilizaram anteriormente. A tese de Riemann, uma das peças mais notáveis de trabalho original a aparecer em uma tese de doutorado, foi examinada em 16 de dezembro de 1851. Em seu relatório sobre a tese, Gauss descreveu Riemann como tendo: “uma originalidade gloriosamente fértil”.

Por recomendação de Gauss, Riemann foi nomeado para um posto em Göttingen e trabalhou para sua Habilitação, o grau que lhe permitiria se tornar um professor. Ele passou trinta meses trabalhando em sua dissertação de Habilitação, que tratava da representabilidade de funções por séries trigonométricas. Ele também forneceu as condições para que uma função tenha uma integral, o que agora chamamos de condição de integrabilidade de Riemann. Na segunda parte da dissertação, ele examinou o problema que descreveu nestas palavras:

Para completar sua Habilitação, Riemann teve que dar uma palestra. Ele preparou três palestras, duas sobre eletricidade e uma sobre geometria. Gauss teve que escolher uma das três para Riemann entregar e, contra as expectativas de Riemann, Gauss escolheu a palestra sobre geometria. A palestra de Riemann *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, proferida em 10 de junho de 1854, tornou-se um clássico da



matemática.

A palestra de Riemann tinha duas partes. Na primeira parte, ele apresentou o problema de como definir um espaço geométrico de dimensão  $n$  e acabou fornecendo uma definição do que hoje chamamos de variedade riemanniana. Na verdade, o principal ponto desta parte da palestra de Riemann foi a definição do tensor de curvatura. A segunda parte da palestra de Riemann levantou questões profundas sobre a relação da geometria com o mundo em que vivemos. Ele perguntou qual era a dimensão do espaço real e qual geometria descrevia o espaço real. A palestra estava muito à frente de seu tempo para ser apreciada pela maioria dos cientistas da época. Entre o público de Riemann, parece que apenas Gauss foi capaz de apreciar a profundidade dos pensamentos de Riemann. A palestra superou todas as expectativas de seu orientador e o surpreendeu muito. Ao retornar à reunião da faculdade, Gauss falou com grande louvor e raro entusiasmo a Wilhelm Weber sobre a profundidade dos pensamentos apresentados por Riemann.

Mais ainda, essa profundidade não foi totalmente compreendida até sessenta anos depois: A teoria geral da relatividade justificou esplendidamente seu trabalho. No aparato matemático desenvolvido a partir do discurso de Riemann, Einstein encontrou a estrutura para adequar suas ideias físicas, sua cosmologia e cosmogonia, e o espírito do discurso de Riemann era exatamente o que a física precisava.

Assim, esse trabalho brilhante deu a Riemann o direito de começar a lecionar. Em outubro de 1854, ele começou a trabalhar em suas palestras sobre equações diferenciais parciais. As cartas de Riemann para seu pai, a quem Riemann estimava profundamente, estavam cheias de recordações sobre as dificuldades que encontrou. Embora apenas oito alunos tenham assistido às palestras, Riemann estava completamente feliz. Gradualmente, ele superou sua timidez natural e estabeleceu uma boa relação com seu público.

A cadeira de Gauss em Göttingen foi preenchida por Dirichlet em 1855. Na época, houve uma tentativa de conseguir para Riemann uma cadeira pessoal, mas isso falhou. No entanto, dois anos depois, ele foi nomeado professor e, no mesmo ano, 1857, outra de suas obras-primas foi publicada. O artigo *Teoria das Funções Abelianas* foi o resultado de um trabalho realizado ao longo de vários anos e contido em um curso de palestras que ele deu para três pessoas em 1855-56. Um dos três era Dedekind, que conseguiu tornar a beleza das palestras de Riemann disponível ao publicar o material após a morte precoce de seu companheiro.

O artigo sobre funções abelianas continuou de onde sua dissertação de doutorado havia parado e desenvolveu ainda mais a ideia de superfícies de Riemann e suas propriedades topológicas. Ele examinou funções multivaloradas e univaloradas sobre uma superfície de Riemann e resolveu problemas gerais de inversão que haviam sido resolvidos para integrais elípticas por Abel e Jacobi. No entanto, Riemann não foi o único matemático trabalhando em tais ideias. Klein escreve que Weierstrass apresentou um primeiro tratamento das funções abelianas gerais à Academia de Berlim em 1857, o artigo de Riemann sobre o mesmo tema apareceu no *Jornal de Crelle*, Volume 54. Continha tantos conceitos inesperados e novos que Weierstrass retirou seu artigo e, na verdade, não publicou mais nada sobre o tema.

Em 1859, Dirichlet faleceu e Riemann foi nomeado para a cadeira de matemática em Göttingen em 30 de julho. Poucos dias depois, ele foi eleito para a Academia de Ciências de Berlim. Ele havia sido proposto por três matemáticos de Berlim, Kummer, Borchardt e Weierstrass. A proposta deles dizia: “Antes do aparecimento de seu trabalho mais recente (*Teoria das Funções Abelianas*), Riemann era quase desconhecido para os matemáticos. Esta circunstância desculpa um pouco a necessidade de um exame mais detalhado de seus

trabalhos como base de nossa apresentação. Consideramos nosso dever chamar a atenção da Academia para nosso colega, a quem recomendamos não como um jovem talento que dá grande esperança, mas sim como um investigador totalmente maduro e independente em nossa área de ciência, cujo progresso ele tem promovido de maneira significativa.”

Um membro recém-eleito da Academia de Ciências de Berlim tinha que relatar suas pesquisas mais recentes e Riemann enviou um artigo que se tornou um clássico da matemática: *Sobre o número de primos menores que uma dada magnitude*, outro de seus grandes trabalhos que mudaram a direção da pesquisa matemática de maneira muito significativa. Nele, Riemann examinou a função zeta que hoje leva seu nome, mas que já havia sido considerada por Euler. Riemann considerou uma questão muito diferente da que Euler havia considerado, pois ele analisou a função zeta como uma função complexa em vez de uma função real. No artigo, ele afirmou que a função zeta tinha infinitas raízes não triviais e que parecia provável que todas tivessem parte real igual a  $\frac{1}{2}$ . Esta é a famosa Hipótese de Riemann que continua sendo um dos problemas mais importantes e não resolvidos da matemática.

Riemann estudou a convergência da representação em série da função zeta e encontrou uma equação funcional para a função zeta. O principal objetivo do artigo era fornecer estimativas para o número de primos menores que um dado número. Muitos dos resultados que Riemann obteve foram posteriormente provados por Hadamard e de la Vallée Poussin.

Em junho de 1862, Riemann casou-se com Elise Koch, que era amiga de sua irmã. Eles tiveram uma filha. No outono do ano de seu casamento, Riemann contraiu um resfriado forte que evoluiu para tuberculose. Ele nunca teve boa saúde ao longo de sua vida e, na verdade, seus sérios problemas de saúde provavelmente remontam de muito antes do resfriado. De fato, sua mãe havia morrido quando Riemann tinha 20 anos, enquanto seu irmão e três irmãs morreram jovens. Riemann tentou combater a doença indo para o clima mais quente da Itália.

O inverno de 1862-63 foi passado na Sicília e depois ele viajou pela Itália, passando um tempo com Betti e outros matemáticos italianos que haviam visitado Göttingen. Ele retornou a Göttingen em junho de 1863, mas sua saúde logo deteriorou e ele retornou à Itália. Depois de passar de agosto de 1864 a outubro de 1865 no norte da Itália, Riemann voltou a Göttingen para o inverno de 1865-66 e, em seguida, retornou a Selasca nas margens do Lago Maggiore em 16 de junho de 1866. Dedekind escreve que: “Sua força declinou rapidamente, e ele mesmo sentiu que seu fim estava próximo. Mas ainda assim, no dia anterior à sua morte, descansando sob uma figueira, sua alma cheia de alegria com a paisagem gloriosa, ele trabalhou em seu trabalho final que, infelizmente, ficou incompleto”.

## 8.1 Referências

1. *Princeton Companion to Mathematics*. Edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. Princeton University Press, 2008.
2. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann/>

## CAPÍTULO 9

---

### Marius Sophus Lie

---

Marius Sophus Lie nasceu em 17 de dezembro de 1842, na cidade de Nordfjordeid, na Noruega. O pai de Sophus Lie era Johann Herman Lie, um ministro luterano. Seus pais tiveram seis filhos, e Sophus era o mais jovem dos seis. Sophus frequentou a escola pela primeira vez na cidade de Moss, um porto no sudeste da Noruega, no lado oriental do Oslofjord. Em 1857, ele ingressou na Escola Particular de Latim de Nissen em Christiania (a cidade que se tornou Kristiania e depois Oslo em 1925). Enquanto estava nessa escola, ele decidiu seguir uma carreira militar, mas sua visão não era suficientemente boa, então abandonou a ideia e entrou na Universidade de Christiania.

Na universidade, Lie estudou um curso abrangente de ciências. Certamente havia alguma matemática nesse curso, e Lie assistiu a palestras de Ludwig Sylow em 1862. Embora não fosse membro do corpo docente permanente, Sylow ministrou um curso, substituindo Broch, no qual explicou o trabalho de Abel e Galois sobre equações algébricas. Lie também assistiu a palestras de Carl Bjercknes sobre matemática, então ele certamente teve professores de considerável qualidade, mas se formou em 1865 sem ter demonstrado grande habilidade para a matéria ou grande gosto por ela.

Seguiu-se um período em que Lie não conseguia decidir qual área seguir e ele ensinava alunos enquanto tentava tomar sua decisão. A única coisa que sabia que queria era uma carreira acadêmica e pensou por um tempo que a astronomia poderia ser o tópico certo. Ele aprendeu um pouco de mecânica, ponderou se botânica, zoologia ou física poderiam ser as disciplinas certas e, em geral, ficou bastante confuso. No entanto, há sinais de que a partir de 1866 ele começou a ler cada vez mais matemática e os registros da biblioteca da Universidade de Christiania mostram claramente que seus interesses estavam se voltando continuamente nessa direção.

Foi durante o ano de 1867 que Lie teve sua primeira brilhante ideia matemática nova. Veio a ele no meio da noite e, cheio de empolgação, correu para ver seu amigo Ernst Motzfeldt, acordou-o e exclamou: “Eu encontrei, é bastante simples!”. Ele agora sabia qual carreira queria e seria justo dizer que, a partir daquele momento, Lie se tornou um matemático. O tipo de matemática que Lie estudaria tornou-se mais claramente definido durante 1868, quando ele leu avidamente artigos sobre geometria de Plücker e Poncelet. A ideia monumental de Plücker de criar novas geometrias escolhendo figuras além dos pontos - na verdade, retas - como elementos do espaço permeou todo o trabalho de Lie.

Lie escreveu um breve artigo matemático em 1869, que publicou às suas próprias custas, baseado na inspiração que teve em 1867. Ele escreveu uma exposição mais detalhada, mas o mundo da matemática estava muito cauteloso para aceitar rapidamente as noções revolucionárias de Lie. A Academia de Ciências de Christiania estava relutante em publicar seu trabalho e, nesse estágio, Lie começou a desesperar-se quanto à aceitação no mundo matemático. Seu amigo Motzfeldt fez um trabalho excelente em encorajar Lie a continuar com suas ideias matemáticas e o avanço ocorreu mais tarde em 1869, quando o *Jornal de Crelle* aceitou seu artigo. Ele enviou cartas a dois matemáticos prussianos, Reye e Clebsch, ainda tentando ganhar reconhecimento para suas ideias. O artigo no *Jornal de Crelle*, no entanto, provou ser vital, pois, com base no artigo, Lie foi concedida uma bolsa para viajar e encontrar os principais matemáticos do mundo na época.

Partindo no final do ano de 1869, Lie foi para a Prússia e visitou Göttingen e depois Berlim. Em Berlim, conheceu Kronecker, Kummer e Weierstrass. Lie não se sentiu atraído pelo estilo da matemática de Weierstrass, que dominava Berlim. Seus interesses se encaixavam mais com Kummer, e Lie fez palestras sobre seus próprios resultados no seminário de Kummer e foi capaz de corrigir alguns erros que Kummer havia cometido em seu trabalho sobre congruências lineares de grau 3. O mais importante para Lie, no entanto, foi o fato de que em Berlim ele conheceu Felix Klein. Era fácil ver que esses dois encontrariam imediatamente um terreno comum em matemática, já que Klein havia sido aluno de Plücker, e Lie, embora nunca tenha conhecido Plücker, sempre disse que se sentia como aluno de Plücker. Apesar do vínculo comum através da geometria linear de Plücker, Lie e Klein eram bastante diferentes em caráter, como Freudenthal aponta: “Lie e Klein tinham caracteres bastante diferentes como seres humanos e matemáticos: o algébrico Klein estava fascinado pelas peculiaridades de problemas encantadores; o analista Lie, partindo de casos especiais, procurava entender um problema em sua devida generalização.”

Foi em Berlim que Lie desenvolveu uma nova autoconfiança em sua habilidade matemática. Ele recebeu grandes elogios de Kummer e obteve respostas de Reye e Clebsch às suas cartas anteriores, o que o encorajou muito. Lie escreveu para seu amigo Motzfeldt em Christiania dizendo: “...nos anos de 1864-68, realmente subestimei meu próprio poder mental”. Na primavera de 1870, Lie e Klein estavam novamente juntos em Paris. Lá, encontraram Darboux, Chasles e Camille Jordan. Jordan parece ter conseguido um sucesso de uma forma que Sylow não conseguiu, pois Jordan fez Lie perceber a importância da teoria dos grupos para o estudo da geometria, algo que acabou se mostrando revolucionário para a matemática. Lie começou a desenvolver ideias que mais tarde apareceriam em seu trabalho sobre grupos de transformação. Ele começou a discutir com Klein essas novas ideias sobre grupos e geometria e mais tarde colaborou com Klein na publicação de vários artigos. Esse trabalho conjunto teve como um de seus resultados a caracterização da geometria por Klein em seu Programa de Erlangen de 1872 como propriedades invariantes sob uma ação de grupo. Enquanto estava em Paris, Lie descobriu as transformações de contato.

Lie e Klein pensavam profundamente sobre matemática em Paris quando a situação política entre a França e a Prússia estava se deteriorando. A popularidade de Napoleão III, o imperador francês, estava diminuindo na França e ele pensou que uma guerra com a Prússia poderia mudar suas fortunas políticas, já que seus conselheiros lhe disseram que o Exército Francês poderia derrotar a Prússia. Bismarck, o chanceler prussiano, viu uma guerra com a França como uma oportunidade para unir os estados germânicos do sul. Com ambos os lados sentindo que a guerra era vantajosa para eles, a Guerra Franco-Prussiana

tornou-se inevitável. Em 14 de julho, Bismarck enviou um telegrama que enfureceu o governo francês e, em 19 de julho, a França declarou guerra à Prússia. Para Klein, um cidadão prussiano que estava em Paris quando a guerra foi declarada, havia apenas uma possibilidade: Ele tinha que retornar rapidamente a Berlim.

No entanto, Lie era norueguês e achava as discussões matemáticas em Paris muito estimulantes. Decidiu permanecer, mas ficou ansioso quando a ofensiva alemã encontrou apenas uma resposta francesa ineficaz. Em agosto, o exército alemão encurralou parte do exército francês em Metz e Lie decidiu que era hora de partir, planejando ir para a Itália. Ele chegou a Fontainebleau, mas lá foi preso como espião alemão, com suas anotações matemáticas sendo assumidas como mensagens codificadas secretas. Só após a intervenção de Darboux, Lie foi liberado da prisão. O exército francês havia se rendido em 1<sup>o</sup> de setembro e, em 19 de setembro, o exército alemão começou a bloquear Paris. Lie fugiu novamente para a Itália e, de lá, voltou a Christiania via Alemanha para que pudesse se encontrar e discutir matemática com Klein.

Em 1871, Lie tornou-se assistente em Christiania, tendo obtido uma bolsa de estudos, e também ensinou na Escola Particular de Latim de Nissen em Christiania, onde havia sido aluno. Ele submeteu uma dissertação intitulada *Sobre uma classe de transformações geométricas* (originalmente escrita em norueguês) para seu doutorado, que lhe foi concedido em julho de 1872. A dissertação continha ideias de seus primeiros resultados publicados no *Jornal de Crelle* e também o trabalho sobre transformações de contato, um caso especial dessas transformações sendo uma transformação que mapeia uma linha em uma esfera, que ele havia descoberto enquanto estava em Paris.

Era claro que Lie era um matemático notável e a Universidade de Christiania reagiu de maneira muito positiva, criando uma cátedra para ele em 1872. O famoso matemático norueguês Abel havia morrido mais de 40 anos antes disso (cerca de 14 anos antes de Lie nascer), mas, apesar da curta carreira de Abel, suas obras completas ainda não haviam sido publicadas na época. Era natural que matemáticos noruegueses assumissem a tarefa e, entre 1873 e 1881, Sylow e Lie prepararam uma edição das obras completas de Abel. Lie, no entanto, sempre alegou que a maior parte do trabalho foi feito por Sylow. Outro evento que ocorreu dentro de dois anos após Lie ser nomeado para sua cátedra foi seu casamento. Ele casou-se com Anna Birch e eles tiveram uma filha e dois filhos.

Lie havia começado a examinar equações diferenciais parciais, esperando encontrar uma teoria que fosse análoga à teoria de Galois das equações algébricas. Lie considerava a a teoria das equações diferenciais como sendo a disciplina mais importante da matemática moderna. Ele examinou suas transformações de contato considerando como elas afetavam um processo, devido a Jacobi, de gerar novas soluções de equações diferenciais a partir de uma solução dada. Isso levou à combinação das transformações de uma maneira que Lie chamou de grupo infinitesimal, mas que não é um grupo sob a nossa definição atual, em vez disso, trata-se do que hoje é chamado de álgebra de Lie. Foi durante o inverno de 1873-74 que Lie começou a desenvolver sistematicamente o que se tornou sua teoria dos grupos de transformações contínuas, mais tarde chamados de grupos de Lie, abandonando sua intenção original de examinar equações diferenciais parciais. Mais tarde, Killing examinou as álgebras de Lie associadas aos grupos de Lie. Ele fez isso de forma bastante independente de Lie (e não de uma maneira que Lie considerou satisfatória), e foi Cartan quem completou a classificação das álgebras de Lie semissimples em 1900.

Embora Lie estivesse produzindo matemática altamente inovadora, ele se sentia cada vez mais triste pela falta de reconhecimento que estava recebendo no mundo matemático. Uma razão era, sem dúvida, seu isolamento em Christiania, mas uma segunda razão era

que seus artigos não eram facilmente compreendidos, em parte devido ao seu estilo de escrita e em parte porque sua intuição geométrica excedia muito a de outros matemáticos. Klein, percebendo os problemas, teve a excelente ideia de enviar Friedrich Engel a Christiania para ajudar Lie.

Engel havia recebido seu doutorado em Leipzig em 1883, tendo estudado sob Adolph Mayer e escrito uma tese sobre transformações de contato. Klein reconheceu que ele era o homem certo para ajudar Lie e, a pedido de Klein, Engel começou a trabalhar com Lie em Christiania a partir de 1884. Ele trabalhou com Lie por nove meses, saindo em 1885. Engel então foi nomeado para Leipzig e, quando Klein deixou a cátedra em Leipzig em 1886, Lie foi nomeado para sucedê-lo. A colaboração entre Engel e Lie continuou por nove anos, culminando com a publicação conjunta do grande trabalho *Theorie der Transformationsgruppen* em três volumes entre 1888 e 1893. Este foi o principal trabalho de Lie sobre grupos contínuos de transformações.

Em Leipzig, a vida de Lie era bastante diferente daquela em Christiania. Ele estava agora em foco na comunidade matemática e estudantes de muitos países vinham para estudar com ele. No entanto, ele tinha uma carga de ensino muito mais pesada. As palestras de Lie sobre sua própria pesquisa foram altamente avaliadas pelos alunos, em contraste com suas palestras obrigatórias um tanto impopulares sobre tópicos padrão. Os alunos diziam que ele preferia fazer desenhos e argumentos intuitivos em vez de dar provas rigorosas. No entanto, em Leipzig, Lie era atormentado por uma constante saudade de casa. Sendo um homem de atividades ao ar livre, ele sentia falta das florestas e montanhas da Noruega.

No final da década de 1880, o relacionamento de Lie com Engel se deteriorou. Em 1892, a amizade de longa data entre Lie e Klein se rompeu e, no ano seguinte, Lie atacou publicamente Klein dizendo: “Não sou aluno de Klein, nem o contrário é o caso, embora isso possa estar mais próximo da verdade”. É difícil compreender exatamente como se deu esse contexto, de acordo com as dificuldades mentais que Lie sofreu em 1889. A defesa de Klein do comportamento de Lie, referindo-se à relação íntima entre genialidade e loucura, realmente criou uma explicação amplamente aceita que sobreviveu até o presente.

A verdade é que o comportamento de Lie não era totalmente irracional, como foi retratado, mas era de fato motivado pela maneira como tanto Engel quanto Klein haviam se comportado. Acredita-se que Lie mudou sua atitude em relação a Engel porque ainda sentia falta de reconhecimento, embora soubesse que estava em uma classe diferente como matemático criativo em comparação a Engel. Lie retornou a Christiania em 1898 para assumir um cargo especialmente criado para ele. Ele produziu um relatório sobre quem deveria ocupar sua cátedra e, apesar de Engel ser um dos principais pesquisadores na sua área de pesquisa, Lie avaliou que lhe faltava criatividade.

Uma opinião frequente sobre a doença mental de Lie é a de que foi causada por excesso de trabalho. Outros historiadores apontam por que o comportamento de Lie em relação a Klein, com o rompimento final em 1892, não foi irracional: O Programa de Erlangen de Klein de 1872 não chamou muita atenção; na verdade, foi Lie, em vez de Klein, quem influenciou o desenvolvimento matemático previsto por este Programa. Klein decidiu republicar o Programa e também escrever sobre suas origens (nas quais Lie estava muito envolvido), mas Lie discordou fortemente das opiniões de Klein sobre o que aconteceu no passado. Também ficou claro que Klein queimou todas as cartas que havia recebido de Lie até 1877 (rompendo assim um acordo mútuo anterior entre eles).

Lie reagiu atacando publicamente Klein no Prefácio do terceiro volume de sua *Theorie der Transformationsgruppen* em 1893. Certamente Lie era um homem irritado, mas

estava atacando alguém que ocupava um papel tão proeminente no cenário mundial da matemática que o ataque sempre foi mais provável de recair sobre Lie do que realmente ferir Klein. Já a pesquisa atual está mostrando Lie sob uma luz muito melhor sobre esse assunto (e portanto Klein sob uma luz menos favorável) do que o relatado anteriormente e todas as indicações são de que pesquisas futuras provarão ainda mais favoráveis a Lie.

Talvez um indicativo do amor de Lie por sua terra natal seja o fato de que ele continuou a ocupar sua cátedra em Christiania desde sua primeira nomeação em 1872, estando oficialmente de licença enquanto ocupava a cátedra em Leipzig. No entanto, sua saúde já estava se deteriorando quando ele retornou para uma cátedra em Christiania em 1898 e ele morreu de anemia perniciosa em fevereiro de 1899, pouco depois de assumir o cargo.

## 9.1 Referências

1. *Princeton Companion to Mathematics*. Edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. Princeton University Press, 2008.
2. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lie/>
3. <https://math.mit.edu/~helgason/sophus-lie.pdf>





---

### Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor

---

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu em 3 de março de 1845 em São Petersburgo, na Rússia e foi filho do comerciante dinamarquês Georg Waldemar Cantor e da musicista russa Maria Anna Bohm. Ele era o mais velho de 6 irmãos e, assim como seus pais, ele era um amante das artes e foi considerado um excelente violinista. Além disso, Cantor foi criado como um protestante.

Em 1856, quando Cantor tinha 11 anos, sua família se mudou para a Alemanha, porque seu pai ficou doente e eles queriam um clima mais ameno. Lá, Cantor estudou no ginásio e se formou em 1860 com notas excelentes. Seus tutores perceberam que ele era brilhante em matemática, principalmente em trigonometria.

Depois do ginásio, Cantor ingressou na Politécnica de Zurique em 1862. Entretanto, ele pediu permissão para o pai, ainda em 1862, para estudar matemática na Universidade, ficando muito feliz quando seu pai consentiu. Ele estudou na politécnica de Zurique até 1863, ano do falecimento de seu pai. Depois disso, Cantor transferiu seus estudos para a Universidade de Berlim, onde fez amizade com Hermann Schwarz e assistiu aulas de matemáticos célebres como Leopold Kronecker, Karl Weierstrass e Ernst Kummer. Ele também estudou na Universidade de Gottingen no verão de 1866, onde ele completou sua primeira tese sobre teoria dos números. Em 1867 ele completou o doutorado.

Ainda em Berlim, Cantor se envolveu com uma sociedade de matemática estudantil, que ele presidiu nos anos de 1864–65. Ele também fez parte de um grupo de matemáticos que se encontravam semanalmente em uma casa de vinho. Depois que ele recebeu o doutorado, ele deu aula em uma escola para meninas em Berlim. Em 1868 ele entrou no Seminário de Schellbach para professores de matemática. Durante esse tempo, ele trabalhou na sua habilitação, que é uma qualificação extra de pós-doutorado, na época um requisito necessário para dar aula nas universidades alemãs. Em 1869 ele apresentou sua tese em Halle sobre teoria dos números e recebeu sua habilitação.

Ele foi nomeado para a Universidade de Halle em 1869, antes mesmo de apresentar sua tese da habilitação, e continuou trabalhando em dissertações sobre teoria dos números e análise, inclinando-se cada vez mais para a última. Foi nesse período que Cantor decidiu se aprofundar em trigonometria e começou a refletir sobre a unicidade da representação de uma função como série trigonométrica, um problema apresentado a ele por Eduard Heine, um veterano da área, que o desafiou a resolvê-lo. Esse era um problema difícil que

chamou a atenção de matemáticos como Heine, Lipschitz e Riemann.

Em Abril de 1870, Cantor resolveu o problema provando a unicidade da representação. Em 1873, usando seu famoso argumento diagonal, Cantor provou que os números racionais são contáveis. No fim de 1873, Cantor provou que os números algébricos também são contáveis e provou um dos mais célebres resultados de toda a matemática: Os números reais não são contáveis

Em 1882 começou a conversar com Magnus Gosta Mittag-Leffler e logo passou a publicar no periódico de Leffler, o *Acta Matemática*. Mas as obras de Cantor eram continuamente ridicularizadas por Kronecker. Em 1890, Cantor fundou a Associação dos Matemáticos da Alemanha, onde ele publicou, pela primeira vez, seu argumento da diagonalização e se reconciliou com Kronecker. No entanto, os laços com Kronecker nunca se estabilizaram e isso persistiu ao longo do resto da vida de Cantor.

Cantor foi promovido a professor extraordinário em 1872 e a professor titular em 1879, mas Cantor queria uma cadeira de mais prestígio na Universidade de Berlim. Kronecker ficava cada vez mais desconfortável com a ideia de ter Cantor como um colega, percebendo ele como um “corruptor da juventude” por ensinar suas ideias para os jovens matemáticos. Além disso, Kronecker, até sua morte em 1891, discordava fundamentalmente dos trabalhos de Cantor e, devido a postura e influência de Kronecker, Cantor acreditava seria impossível melhorar sua posição em Berlim.

Em 9 de agosto de 1874, Cantor se casou com Vally Gutman, uma amiga de sua irmã, com quem teve seis filhos. Eles passaram a lua de mel na Suíça, onde Cantor passou grande parte do tempo em conversas com o matemático Richard Dedekind, que viria a ser um dos grandes nomes da álgebra e teoria dos números no século XIX.

Em 1881, Eduard Heine, colega de Cantor da Universidade de Halle, morreu. A fim de preencher a vaga disponível, Cantor sugeriu que a vaga fosse oferecida, nessa ordem, para Richard Dedekind, Heinrich Weber, e Franz Martens, mas todos eles recusaram as ofertas, para o infortúnio de Cantor. Quem ficou com a cadeira foi Friedrich Wanderin, mas Cantor e ele nunca foram próximos.

Em 1882, as correspondências matemáticas com Dedekind chegaram ao fim, provavelmente porque Dedekind recusou a cadeira de Halle. Também em 1882, ele começou a conversar com Magnus Gosta Mittag-Leffler, e logo passou a publicar no periódico de Leffler, o *Acta Matemática*. Mas as obras de Cantor eram continuamente ridicularizadas por Kronecker. Em suas publicações na revista de Leffler, Cantor percebeu que sua teoria de conjuntos não estava tendo a aceitação que ele esperava.

No fim de maio de 1884, Cantor teve sua primeira crise depressiva. Ele se recuperou algumas semanas depois, mas ele estava menos confiante agora. Ele escreveu para Leffler no fim de junho: “... Eu não sei quando retornarei para a continuação dos meus trabalhos científicos. No momento, eu não consigo fazer nada com isso e me limito ao dever necessário das minhas palestras; como eu seria mais feliz por ser cientificamente ativo, se eu tivesse o frescor mental.”

Acreditava-se que a depressão de Cantor foi causada por preocupações referentes ao suposto fracasso das suas teorias matemáticas na época, e como resultado da sua relação com Kronecker. Atualmente, um melhor entendimento sobre a depressão nos mostra que esses pontos não foram as causas de sua depressão, mas a depressão foi um agravante dessas particularidades.

As preocupações com a matemática começaram a causar problemas à saúde mental de Cantor naquela época. Em 1885, Leffler pediu para Cantor retirar um artigo que ele submeteu para sua revista, sob o pretexto de que esse artigo estava “... cerca de cem

anos á frente de seu tempo”. Assim, a correspondência entre os dois chegou ao fim, o estado mental de Cantor se agravou, e o desenvolvimento da sua teoria de conjuntos quase cessou.

Cantor passou então a trilhar dois novos caminhos. Ele começou a discutir os aspectos filosóficos da sua teoria com vários filósofos e começou a trabalhar na ideia de fundar a Associação dos Matemáticos da Alemanha, que foi fundada em 1890. A primeira reunião ocorreu em setembro de 1891, quando foi eleito o primeiro presidente, cargo que ocupou até 1893. Foi também em 1890 que Cantor se reconciliou com Kronecker. No entanto, os laços com Kronecker nunca se estabilizaram por completo e o drama dessa relação conturbada persistiu ao longo do resto da vida de Cantor.

Os últimos artigos relevantes de Cantor apareceram em 1895 e 1897, ano em que Cantor foi para o Congresso Internacional de Matemáticos em Zurique, onde descobriu alguns paradoxos na teoria dos conjuntos e encontrou novamente Dedekind. Eles renovaram os laços, visando resolver esses paradoxos. Mas, devido a problemas psicológicos, Cantor parou de escrever para Dedekind em 1899.

Em 16 de dezembro de 1899 o filho mais novo de Cantor morreu. Desse período até o fim de sua vida, ele lutou contra depressão. Ele continuou a dar aula, mas tinha que parar com frequência, devido à sua saúde, e foi frequentemente internado em sanatórios quando seus ataques eram mais intensos.

Em 1913, Cantor se aposentou e passou os últimos anos de sua vida doente, vivendo com pouca comida e na pobreza, situação que se agravou com o começo da Primeira Guerra Mundial em 1914. Em junho de 1917 ele entrou, pela última vez, em um sanatório e escreveu, continuamente, à sua esposa pedindo permissão para voltar para casa. Ele morreu de ataque cardíaco em 6 de Janeiro de 1918 internado no sanatório.

Atualmente, Cantor é amplamente reconhecido como o fundador da teoria dos conjuntos moderna. Ele desenvolveu conceitos fundamentais, como o de conjunto, união, interseção e cardinalidade. Ele também introduziu a ideia de conjuntos infinitos e suas propriedades, o que levou a uma redefinição do conceito de infinito na matemática. Outra das contribuições mais significativas de Cantor foi sua definição de cardinalidade, um conceito que tenta formalizar a noção do tamanho de um conjunto. Ele estabeleceu que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se houver uma correspondência biunívoca entre eles, um conceito fundamental na matemática moderna. Cantor também estendeu o conceito de números além dos números naturais, racionais e reais para incluir os números transfinitos. Ele propôs uma hierarquia de números infinitos, classificando-os em diferentes ordens de infinitude. Finalmente, Cantor é creditado pela primeira demonstração da enumerabilidade dos números racionais e dos números algébricos, e da não enumerabilidade dos reais.

## 10.1 Referências

1. [https://www.researchgate.net/publication/273119436\\_History\\_of\\_George\\_cantor](https://www.researchgate.net/publication/273119436_History_of_George_cantor)
2. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor/>
3. <https://www.britannica.com/biography/Georg-Ferdinand-Ludwig-Philipp-Cantor>



## CAPÍTULO 11

---

### Henri Poincaré

---

Jules Henri Poincaré nasceu a 29 de abril de 1854, em Nancy, a capital do ducado de Lorena, França, em uma família com inclinações acadêmicas e artísticas. O pai de Henri Poincaré era Léon Poincaré e a sua mãe Eugénie Launois e tinham 26 e 24 anos de idade, respetivamente, quando Henri nasceu. O pai de Henri era professor de medicina na Universidade de Nancy. A sua mãe, Eugénie Launois, vinha de uma família rica da cidade provincial de Arrancy, na região de Mosela, também em Lorena. Era uma mulher viva e inteligente, esposa atenciosa e mãe carinhosa dos seus dois filhos, Henri e Aline.

Poincaré quando pequeno era ambidestro e míope; durante a sua infância teve uma coordenação muscular pobre e esteve gravemente doente durante algum tempo com difteria. Recebeu instrução especial da sua mãe talentosa e destacou-se na composição escrita quando ainda estava no primário.

Durante o inverno de 1859, Henri, que tinha cinco anos, adoeceu. O seu pai diagnosticou a sua doença como difteria, na época uma doença potencialmente fatal que não tinha cura. Poincaré sobreviveu, mas ficou incapaz de andar ou falar. A paralisia das pernas passou rapidamente, mas falar continuou a ser difícil durante muito tempo. Este período de doença durou nove meses.

Em 1862, Poincaré entrou para o Liceu de Nancy (que passou a chamar-se Liceu Henri Poincaré em sua honra). Passou onze anos no Liceu e, durante esse período, revelou-se um dos melhores alunos em todas as disciplinas que estudou. Henri foi descrito pelo seu professor de matemática como um “monstro da matemática” e ganhou os primeiros prêmios no concours général, uma competição entre os melhores alunos de todos os liceus de França.

Além da sua inteligência excepcional, Henri tinha também uma memória excecional. O seu orientador de tese e mais tarde colega Gaston Darboux observou que provavelmente não se sabia muito bem o quanto Henri Poincaré sabia quando era jovem. Bastava-lhe ler um livro uma vez para conhecer todo o seu conteúdo; ele conseguia lembrar em que página e em que linha dessa página se encontrava um termo específico do livro.

Durante anos, depois de uma viagem ao estrangeiro, conseguia recitar todas as estações em que o comboio tinha parado e, além disso, os nomes de todas as cidades e dos hotéis onde tinham ficado. Com uma tal memória, não é de admirar que tenha conseguido dominar as suas lições na escola sem copiar elas no caderno.

Poincaré entrou para a *École Polytechnique* em 1873, graduando-se em 1875. Estava muito à frente de todos os outros alunos em matemática, mas, talvez não surpreendentemente, dada a sua fraca coordenação, tinha um desempenho abaixo da média em educação física e artes. A música era outro dos seus interesses mas, embora gostasse de a ouvir, as suas tentativas de aprender piano enquanto estava na *École Polytechnique* não foram bem sucedidas.

Poincaré lia muito, começando com escritos científicos populares e progredindo para textos mais avançados. Com sua memória notável ele retinha muito de todos os textos que lia, mas não como quem aprende por memorização mas de uma forma visual. A sua capacidade de visualizar o que ouvia revelou-se particularmente útil quando assistia às aulas, já que a sua visão era tão fraca que não conseguia ver os símbolos que os professores escreviam no quadro.

Em novembro de 1875, Poincaré, então com 21 anos, continuou seus estudos na *École des Mines de Paris*. Poincaré termina a escola de minas com sucesso, mas só tinha interesse por alguns temas, nomeadamente a mineralogia. Sem qualquer esforço, continua a ser um dos dos melhores alunos, mas perde o interesse pelas classificações.

A *École des Mines* organizava excursões de vários dias para os seus alunos, mas, regra geral, havia duas estadias mais longas num país estrangeiro durante o curso. No verão de 1877, no final do segundo ano, Poincaré viajou para a *Áustria e Hungria*. Durante essa viagem, escreveu dois relatórios, um sobre as minas de carvão da Hungria e o outro sobre a indústria do estanho. Em junho de 1878, os estudos de Poincaré na *École des Mines* chegam ao fim.

O período que vai do verão de 1878 até dezembro de 1879 é um período agitado Poincaré. Tinha de completar os seus estudos na *École des Mines*, terminar e defender a sua dissertação de matemática, e também encontrar um emprego. Em 28 de março de 1879, graduou-se como engenheiro de minas e foi nomeado inspetor de minas em Vesoul no leste de França. Pediu uma nomeação que o colocasse não muito longe de Nancy.

Chegou a Vesoul a 3 de abril de 1879, com quase 25 anos de idade, tendo como principal principal responsabilidade as minas de Ronchamp, a cerca de 30 quilômetros de Vesoul. Como engenheiro de minas, o trabalho de Poincaré consistia em avaliar as minas quanto à sua capacidade de produção e segurança, incluindo a integridade estrutural, a ventilação, a localização e a localização e eliminação de gases inflamáveis.

Durante os primeiros meses, o trabalho de descer às minas e redigir relatórios era rotineiro. No entanto, na recém-inaugurada mina de Magny, ocorreu uma explosão no início da manhã de 1 de setembro de 1879. Dos 22 homens do turno, 16 morreram na explosão a 650 metros de profundidade.

Enquanto decorria a operação de resgate, Henri Poincaré desceu à mina para iniciar a sua investigação. Num extenso relatório, descreveu o sistema de ventilação e de galerias da mina, sugerindo como possível causa da explosão uma lâmpada de segurança perfurada que tinha sido encontrada (a luz necessária para o trabalho de desprendimento do carvão do veio era fornecida por lâmpadas de segurança; não havia, evidentemente, eletricidade).

Durante todas as atividades desses anos, as pesquisas matemáticas de Poincaré nunca foram interrompidas. Poincaré escreveu uma dissertação curta e em um curto período de tempo sobre equações diferenciais. Os examinadores foram um pouco críticos em relação ao trabalho. Elogiaram os resultados no início do trabalho, mas depois disseram que: "... o resto da tese é um pouco confuso e mostra que o autor ainda não conseguiu expressar as suas ideias de uma forma clara e simples. No entanto, tendo em conta a grande dificuldade do tema e o talento demonstrado, o corpo docente recomenda que seja

concedido a M Poincaré o grau de Doutor com todos os privilégios.”

Imediatamente após receber seu doutorado, Poincaré foi nomeado professor de Análise na Universidade de Caen. Os relatórios sobre o seu ensino em Caen não são totalmente elogiosos, referindo-se ao seu estilo de ensino por vezes desorganizado. Permanece apenas dois anos na Universidade de Caen, antes de ser nomeado para uma cátedra na Faculdade de Ciências de Paris, em 1881. Em 1886, Poincaré é nomeado para a cátedra de Física Matemática e Probabilidade em Sorbonne.

Poincaré foi um cientista preocupado com muitos aspectos da matemática, da física e da filosofia, e é frequentemente descrito como o último universalista da matemática.

Contribuiu para numerosos ramos da matemática, da mecânica celeste, da mecânica dos fluidos, da teoria da relatividade especial e da filosofia da ciência. Grande parte da sua investigação envolveu interações entre diferentes tópicos matemáticos e a sua ampla compreensão de vários campos do conhecimento permitiu-lhe atacar os problemas de muitos ângulos diferentes.

Antes dos 30 anos, desenvolveu o conceito de funções automórficas, que são funções de uma variável complexa invariantes sob um grupo de transformações caracterizadas algebricamente por relações de termos lineares. A ideia surgiu de forma indireta a partir do trabalho da sua tese de doutoramento sobre equações diferenciais. Os seus resultados aplicavam-se apenas a classes restritas de funções e Poincaré queria generalizar esses resultados mas, para isso, procurou uma classe de funções em que não existissem soluções. Isto conduziu-o a funções que designou por funções fuchsianas, em homenagem a Lazarus Fuchs, mas que mais tarde foram designadas por funções automórficas. Ele teve essa ideia, de acordo com um relato seu em *Ciência e Método* (1905): “ No momento em que coloquei o pé no degrau, ocorreu-me a ideia, sem que nada nos meus pensamentos anteriores parecesse ter aberto caminho para isso, de que a transformação que eu tinha usado para definir as funções Fuchsianas era idêntica às da geometria não-euclidiana”.

Numa correspondência entre Klein e Poincaré foram trocadas muitas ideias profundas e o desenvolvimento da teoria das funções automórficas beneficiou muito. No entanto, os dois grandes matemáticos não se mantiveram em boas relações, parecendo que Klein ficou aborrecido com as boas opiniões de Poincaré sobre o trabalho de Fuchs

O *Analysis situs* de Poincaré, publicado em 1895, é um dos primeiros tratamentos sistemáticos da topologia. Pode dizer-se que Poincaré foi o criador da topologia algébrica e, em 1901, afirmou que as suas investigações em muitas áreas diferentes, como as equações diferenciais e integrais múltiplas, o tinham conduzido à topologia. Durante 40 anos, depois de Poincaré ter publicado o primeiro dos seus seis artigos sobre topologia algébrica em 1894, essencialmente todas as ideias e técnicas nesta área se basearam no seu trabalho. A Conjectura de Poincaré permaneceu como um dos problemas mais desafiantes na topologia algébrica até ser resolvida por Grigori Perelman em 2002.

Na matemática aplicada, estudou ótica, eletricidade, telegrafia, elasticidade, termodinâmica, teoria do potencial, teoria quântica, teoria da relatividade e cosmologia. No domínio da mecânica celeste, estudou o problema dos três corpos e as teorias da luz e das ondas electromagnéticas. É reconhecido como codescobridor, com Albert Einstein e Hendrik Lorentz, da teoria da relatividade especial.

As outras obras importantes de Poincaré sobre mecânica celeste incluem *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* em três volumes publicados entre 1892 e 1899 e *Leçons de mécanique céleste* (1905). No primeiro destes volumes, o seu objetivo era caracterizar completamente todos os movimentos de sistemas mecânicos, invocando uma analogia com o escoamento de fluidos. Mostrou também que as expansões em série anteriormente

utilizadas no estudo do problema dos 3 corpos eram convergentes, mas não em geral uniformemente convergentes, pondo assim em dúvida as provas de estabilidade de Lagrange e Laplace.

Poincaré é também considerado o criador da teoria das funções analíticas de várias variáveis complexas. Iniciou as suas contribuições para este tópico em 1883 com um trabalho em que utilizou o princípio de Dirichlet para provar que uma função meromórfica de duas variáveis complexas é um quociente de duas funções inteiras. Trabalhou também em geometria algébrica, dando contribuições fundamentais em artigos escritos em 1910-11.

Henri Poincaré morreu a 17 de julho de 1912. Durante o seu último ano de vida, esteve muito ativo, participando em conferências internacionais e cumprindo muitas outras obrigações. No sábado, 6 de julho, estava numa reunião discutindo sobre teoria dos grupos; depois dessa reunião, disse ao seu amigo Paul Appell: “Amanhã vou entrar no hospital”. O motivo para isso é por conta de um problema na próstata que Poincaré tinha desde 1908. A operação aconteceu 9 de julho e parecia ter sido bem sucedida. Uma semana depois, uma embolia pôs um fim súbito na sua vida.

## 11.1 Referências

1. VERHULST, Ferdinand. *Henri Poincaré: Impatient Genius*. 1. ed. New York: Springer, 2012.
2. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poincar/>



## CAPÍTULO 12

---

### David Hilbert

---

David Hilbert foi um matemático alemão dos séculos XIX e XX. Ele descobriu, bem como desenvolveu, ideias fundamentais em todas as áreas da matemática, que incluíam a teoria dos invariantes, a teoria algébrica dos números, a física matemática, os fundamentos da geometria, onde se considera ter tido a maior influência desde Euclides, e os fundamentos da matemática, onde é conhecido como um dos fundadores da teoria da prova e da lógica matemática.

Hilbert nasceu em 23 de janeiro de 1862, na província da Prússia, Reino da Prússia. Não está claro se ele nasceu em Königsberg ou Znamensk, mas acabou crescendo em Königsberg. Ele foi o primeiro filho de Otto Hilbert e Maria-Therese Erzmänn. Otto era filho de um juiz, que era um Conselheiro Privado de alto escalão, e ele próprio se tornou juiz.

Ele viveu sua vida seguindo um padrão: percorrer o mesmo caminho todos os dias e sair de Königsberg apenas uma vez por ano para férias em família. Portanto, não é nenhuma surpresa que acabou sendo bastante rígido com Hilbert. Maria veio de uma família de comerciantes e era fascinada por filosofia, astronomia e números primos. Portanto, acredita-se que ela teve um grande impacto na forma como os interesses de Hilbert foram moldados. Ambos os pais eram de fé protestante, sendo Otto especialmente devoto.

Embora fosse comum as crianças começarem a frequentar a escola aos 6 anos, Hilbert só frequentou a escola aos 8, então sua mãe provavelmente o ensinou em casa até então. Aos 8 anos, ele começou a frequentar o Collegium Fridericianum em um programa júnior por dois anos antes de entrar oficialmente na escola em 1872, aos 10 anos. Esta escola era considerada uma das melhores de Königsberg, mas a ênfase da educação estava em línguas, como o latim e o grego. Portanto, tanto a matemática quanto a ciência acabaram ficando em segundo plano.

A abordagem de aprendizagem na escola era memorizar grandes quantidades de material, e Hilbert era bastante fraco nisso. Assim, ele não brilhou muito na escola e não foi muito feliz lá. Sete anos depois de entrar na escola, em setembro de 1879, ele se transferiu para o Wilhelm Gymnasium, que dava muito mais ênfase à matemática e estava com um humor muito melhor.

Aqui, ele recebeu pontuações fenomenais, e foi afirmado em um relatório final que

ele sempre demonstrou um interesse muito vivo e uma compreensão penetrante pela matemática. Ele dominou todo o material ensinado na escola de maneira muito agradável e soube aplicá-lo com segurança e engenhosidade. No início de 1880, Hilbert formou-se em Wilhelm e quase imediatamente matriculou-se na Universidade de Königsberg para estudar matemática e obter seu doutorado.

Enquanto estudava na universidade, Hilbert fez dois amigos notáveis que também obtiveram seu doutorado na universidade. Hermann Minkowski, um matemático alemão principalmente do século XIX, notável por criar e desenvolver a geometria dos números, e Adolf Hurwitz, um matemático alemão dos séculos XIX e XX, notável por seu trabalho em álgebra, análise, geometria e teoria dos números. Esses três impulsionaram-se mutuamente para alcançar grandes alturas matemáticas.

No primeiro semestre em Königsberg, Hilbert fez cursos de cálculo integral, teoria dos determinantes e curvatura de superfícies. No segundo semestre, estudou na Universidade de Heidelberg, assistindo a palestras ministradas por Lazarus Fuchs, um matemático alemão notável por suas contribuições para equações diferenciais lineares. Ao retornar a Königsberg no semestre seguinte, Hilbert assistiu a palestras ministradas por Heinrich Weber, um matemático alemão principalmente do século XIX, que se destacou por seu trabalho em álgebra, teoria dos números e análise.

As palestras em que Hilbert participou eram sobre teoria de funções e teoria dos números. Em 1883, Ferdinand von Liedemann, um matemático alemão dos séculos XIX e XX, notável por sua prova de que  $\pi$  é um número transcendental, foi nomeado para um cargo na Universidade de Königsberg para substituir Weber, e Liedemann acabou se tornando orientador da tese de Hilbert. Em dezembro de 1884, Hilbert foi submetido a um exame oral para sua tese de doutorado.

Liedemann sugeriu que Hilbert estudasse propriedades invariantes de certas formas algébricas, e os supervisores ficaram impressionados com a grande originalidade de Hilbert. Ele concebeu uma abordagem que Liedemann não havia concebido. Minkowski comentou após ler a tese: “Estudei seu trabalho com grande interesse e me alegrei com todos os processos pelos quais os pobres invariantes tiveram que passar antes de conseguirem desaparecer. Eu não teria suposto que um teorema matemático tão bom pudesse ter sido obtido em Königsberg”.

Em fevereiro de 1885, Hilbert passou pela fase final de seu doutorado, passando com louvor. Depois de receber o doutorado, passou o mês seguinte fazendo e passando no Staatsexamen, exame que permite lecionar em escolas.

Herwitz, ao discutir temas de pesquisa, sugeriu que Hilbert fizesse uma visita a Felix Klein, um matemático alemão que se destacou por seu trabalho em teoria de grupos, análise complexa e geometria não euclidiana. Hilbert acabou indo visitá-lo em Leipzig, assistindo a algumas palestras de Klein. Foi aqui que ele conheceu Eduard Thudy, um matemático alemão conhecido por seu trabalho em teoria invariante de formas ternárias, bem como em trigonometria esférica.

Klein instruiu a dupla a visitar Paris para discutir a teoria dos invariantes, dando sugestões sobre com quais matemáticos parisienses conversar, que incluíam Henri Poincaré, Camille Jordan e Charles Hémit, que aparentemente foi extraordinariamente amigável e hospitaleiro quando conversaram com ele.

Depois de voltar para Königsberg na primavera de 1886, Hilbert preparou-se para apresentar seu trabalho de habilitação em teoria dos invariantes para poder lecionar na Universidade de Königsberg. Klein tentou alertar Hilbert que Königsberg pode ser um lugar difícil para submeter sua habilitação, mas Hilbert não se preocupou e acabou se

tornando funcionário lá pelos nove anos seguintes.

Ele foi Privatdozent\* até 1892, tornando-se professor extraordinário por um ano, antes de ser nomeado professor titular em 1893. Cerca de dois anos depois de começar a trabalhar na Universidade de Königsberg, fez uma viagem matemática para obter o máximo de exposição a matemática de ponta que pôde. Ele visitou Berlim pela primeira vez, conhecendo Leopold Kronecker, um matemático alemão do século XIX, notável por seu trabalho em teoria dos números e álgebra, bem como suas fortes críticas a George Cantor, e Karl Weierstrauss, frequentemente citado como o pai da análise moderna.

Em seguida, Hilbert visitou Leipzig, onde conheceu Paul Gordon, que era o maior especialista em teoria invariante na época. A última visita foi a Göttingen, provavelmente para conversar sobre matemática com Klein, que havia aceitado um cargo de professor na Universidade de Göttingen dois anos antes, um dos centros de pesquisa mais fortes do mundo na época. Klein queria que Hilbert trabalhasse em Göttingen há alguns anos e, em 1895, conseguiu contratar Hilbert como professor de matemática da universidade, onde permaneceria pelo resto de sua carreira.

Em 1902, a Universidade de Berlim ofereceu sua cátedra a Hilbert, mas ele recusou depois de persuadir Göttingen a criar outra cátedra de matemática para Minkowski. Enquanto estava em Göttingen, Hilbert cercou-se de alguns dos matemáticos mais importantes do século 20, que incluíam Ernst Zermelo, um lógico alemão que fez contribuições fundamentais para a fundação da matemática, mais notavelmente a teoria axiomática dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel; John von Neumann, um matemático e físico húngaro-americano, mais notável por suas contribuições para a criação da bomba atômica e assistente de Hilbert em determinado momento; Emmy Noether, uma matemática alemã notável por suas contribuições fundamentais à álgebra abstrata (Hilbert a defendia contra a misoginia desenfreada que enfrentava em outras experiências), e Alonzo Church, um americano notável por suas imensas contribuições à lógica matemática e aos fundamentos da ciência teórica da computação. Hilbert teve um total de 69 alunos de doutorado que orientou. Entre eles, Hermann Weil, um matemático e físico alemão notável por suas contribuições à teoria dos números, e Felix Bernstein, mais notável por provar o teorema de Schröder-Bernstein, um resultado central na teoria de conjuntos.

O trabalho de Hilbert sobre funções invariantes levou a uma prova do teorema das bases finitas. Vinte anos antes, Paul Gordon demonstrou o teorema da finitude dos geradores para formas binárias usando uma abordagem computacional complexa.

Muitos matemáticos tentaram e não conseguiram generalizar o resultado, e Hilbert chegou à conclusão de que um caminho diferente precisava ser seguido para a generalização. Ele seguiu o caminho de mostrar a existência de um conjunto finito de geradores de invariantes de quânticos para qualquer número de variáveis, sendo um quântico um polinômio homogêneo com coeficientes constantes de grau  $n$  em  $m$  variáveis independentes. Sua prova baseou-se na lei do meio excluído e em uma extensão infinita, com a lei do meio excluído afirmando que, para qualquer proposição, ou essa proposição é verdadeira ou sua negação é verdadeira.

O uso desta lei revelou-se problemático em algumas escolas de pensamento, como os construtivistas, que se opuseram veementemente a ela. Afirmou Hilbert: “tirar o princípio do meio excluído do matemático é o mesmo que proibir ao boxeador o uso dos punhos”. Hilbert enviou seus resultados para o *Mathematische Annalen*, o principal jornal matemático da época. Gordon foi o editor principal e acabou rejeitando o resultado de

---

\*Serve para designar professores que receberam uma habilitação (livre-docência), mas que não receberam a cátedra de ensino ou de pesquisa.

Hilbert, dizendo: “isso não é matemática, é teologia”.

No final das contas, Klein garantiu a Hilbert que seria de fato publicado, sem quaisquer alterações, reconhecendo o quão poderoso era esse resultado. O reconhecimento de Klein motivou Hilbert a estender seu método em um segundo artigo, fornecendo estimativas sobre o grau máximo do conjunto mínimo de geradores. Klein ficou tão impressionado com isso, disse a Hilbert, que sem dúvida este é o trabalho mais importante sobre álgebra geral que os *Annalen* já publicou. Depois de algum tempo, Gordon cedeu à sua desaprovação, dizendo: “Convenci-me de que até a teologia tem os seus méritos”.

Em 1899, Hilbert publicou *Fundamentos de Geometria*, onde propôs um conjunto formal de 21 axiomas, chamados de axiomas de Hilbert. Eles substituem os axiomas euclidianos tradicionais, evitando as fragilidades identificadas nos de Euclides.

Os axiomas sofreram algumas alterações de publicação para publicação, sendo finalizados na 7ª edição. Os axiomas unificaram a geometria simples e a geometria sólida de Euclides em um sistema, e a abordagem de Hilbert sinalizou a mudança para a axiomatização moderna. Na obra, ele argumentou que os axiomas não são tomados como verdades evidentes.

A geometria pode tratar coisas, mas não é necessário atribuir nenhum significado explícito aos conceitos indefinidos. Elementos como ponto, linha, plano, etc. poderiam ser substituídos por outros objetos, como mesas, cadeiras, copos de cerveja, etc. São seus relacionamentos definidos que são discutidos.

Em 1900, Hilbert apresenta uma lista de 23 problemas não resolvidos no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris. Esta é geralmente considerada a compilação de problemas abertos mais bem-sucedida e profundamente considerada já produzida por um matemático. Foi fundamental na formação da matemática como a conhecemos no século XX.

Ao fazer seu discurso, Hilbert enfatizou que o que ele produziu foi apenas uma amostra de problemas, e que definitivamente existiam outros problemas muito importantes que não constavam da lista. Uma enorme quantidade de trabalho foi desenvolvido para resolver estes problemas, sendo que alguns foram resolvidos em apenas alguns anos, outros demoraram muito mais tempo e alguns ainda não foram resolvidos.

Alguns dos maiores problemas não resolvidos da lista são a Hipótese do Continuum, que afirma que não existe nenhum conjunto cuja cardinalidade esteja estritamente entre a dos inteiros e a dos números reais. A Conjectura de Goldbach, que afirma que todo número inteiro par maior que 2 pode ser expresso como uma soma de dois primos. E a Hipótese de Riemann, que afirma que todo zero não trivial da função zeta de Riemann tem parte real  $\frac{1}{2}$ .

A lista de problemas abriu o caminho para o desenvolvimento da escola formalista, sendo o pensamento formalista uma ideia em que a matemática é uma manipulação de símbolos de acordo com regras formais acordadas e, portanto, uma atividade autônoma de pensamento. Hilbert criou o “programa de Hilbert” em 1920, o que levou a este movimento. Ele queria que a matemática fosse formulada sobre uma base lógica sólida e completa, acreditando, em princípio, que isso poderia ser feito mostrando que toda a matemática decorre de um sistema finito de axiomas corretamente escolhido, e que alguns desses axiomas de sistemas são provavelmente consistentes de alguma forma, como o  $\epsilon$  no cálculo.

Então, por que Hilbert embarcou nessa aventura? Além de querer um apoio mais forte e rigoroso na matemática, ele também tentava combater a visão filosófica popular da época da ignorabilidade, a ideia de que o conhecimento científico é limitado, que era

uma questão ativa no pensamento alemão. Na verdade, ele escreveu em 1919 que só pode ser assim e de nenhuma outra forma. Infelizmente, o programa de Hilbert desmoronou quando o teorema da incompletude de Kurt Gödel foi publicado em 1931.

Gödel é considerado um dos lógicos mais importantes que já existiu. A incompletude de Gödel mostrou, em última análise, que qualquer sistema formal não contraditório não pode demonstrar a sua completude através dos seus próprios axiomas. O programa de Hilbert, embora mal sucedido, trouxe grandes conquistas na teoria da prova, como esclarecer a consistência no que se refere a teorias de interesse central para a matemática, orientar a lógica no curso da classificação, o desenvolvimento da teoria da recursão e, em seguida, a lógica matemática como uma disciplina autônoma na década de 30.

Hilbert foi predominantemente um matemático puro até 1912. Seu amigo Minkowski continuou tentando empurrar Hilbert cada vez mais para a física, conseguindo pelo menos fazer com que Hilbert estudasse sozinho por algum tempo e assistisse a algumas palestras. Ele começou com a teoria cinética dos gases, passando para a teoria elementar da radiação e a teoria molecular da matéria.

Em 1912, Hilbert estudava quase exclusivamente física. No verão de 1915, o interesse de Hilbert pela física concentrou-se na relatividade geral, por isso ele convidou Einstein para ir a Göttingen para ministrar uma semana de palestras sobre o assunto. Einstein vinha trabalhando vigorosamente nas equações de campo e, quando descobriu que Hilbert também estava trabalhando nelas, redobrou seus esforços.

Em novembro daquele ano, Einstein publicou vários artigos que abrangiam as equações de campo da gravitação. De forma independente, Hilbert publicou *The Foundations of Physics*, que foi uma derivação axiomática das equações de campo. Dado que as primeiras descobertas de muitos problemas ocorreram com Einstein, Hilbert creditou-o totalmente como o criador da teoria, evitando quaisquer disputas.

Hilbert também teve grande influência na mecânica quântica com o uso de espaços de Hilbert, que são espaços vetoriais abstratos completos que possuem a estrutura de um produto interno que permite medir comprimento e ângulo. Completo significa que existem limites suficientes no espaço para permitir o uso das técnicas de cálculo. Von Neumann, em 1926, mostrou que se os estados quânticos fossem entendidos como vetores em um espaço de Hilbert, eles corresponderiam à teoria da função de onda de Schrödinger e às matrizes de Heisenberg.

Hilbert descobriu que grande parte da matemática dos físicos costumava ser desleixada. Embora eles precisassem usar matemática bastante avançada para provar sua teoria, grande parte dela parecia difícil de entender devido à má exposição. Então, ele embarcou em uma busca para desenvolver uma teoria matemática coerente para o que descobriu, sendo citado como supostamente disse: “A física é muito difícil para os físicos”.

Ricard Courant considerou essas contribuições tão importantes que adicionou Hilbert como coautor de seu trabalho *Methods of Mathematical Physics*, publicado em 1924, embora Hilbert não tenha contribuído diretamente.

Agora falando um pouco mais pessoalmente de Hilbert, foi batizado e criado como calvinista na Igreja Evangélica Prussiana. Mais tarde, ele deixou a igreja tornando-se agnóstico e argumentou que a verdade matemática era independente da existência de Deus ou de quaisquer outras suposições a priori.

Hilbert se casou com sua prima de segundo grau, Kitee Yerosh, em 12 de outubro de 1892. Yerosh era filha de um comerciante de Königsberg, mas era bastante franca, tendo uma independência que correspondia à de Hilbert. Os dois tiveram um filho em 1893, chamado Franz.

Franz sofreu de uma doença mental desconhecida durante toda a vida, e seu intelecto inferior foi uma terrível decepção para Hilbert. Foi também motivo de angústia para os matemáticos e estudantes de Groningen, que presumivelmente esperavam que uma forte linhagem matemática fosse levada adiante com Franz. Apesar de como Hilbert se sentia em relação a Franz, ele era conhecido por ser surpreendentemente amigável.

Quando chegou como novo professor em Groningen, ele irritou os professores mais antigos ao ir ao salão de bilhar local e jogar com pessoas que eram mais novas que ele. Ele idolatrava muitos de seus alunos e fazia questão de passear com eles, conversando informalmente sobre problemas matemáticos. Ele considerava Minkowski seu melhor e mais verdadeiro amigo e, portanto, com a morte de Minkowski em 1909, isso poderia explicar por que Hilbert investiu ainda mais em física do que já havia investido, para “continuar a tocha de Minkowski”, por assim dizer.

Em 1925, Hilbert desenvolveu anemia perniciosa, uma deficiência de vitaminas cujo principal sintoma é a fadiga. Infelizmente, era intratável na época. Eugene Wigner, um físico húngaro-americano, que recebeu o Prêmio Nobel de Física por suas contribuições à teoria do núcleo atômico e das partículas elementares, e também assistente de Hilbert, descreveu Hilbert como sujeito a uma enorme fadiga e como ele parecia bastante velho .

Mesmo depois de ser diagnosticado e tratado, Wigner o descreveu como “dificilmente um cientista” depois de 1925, e certamente não como um Hilbert. Dada esta infeliz doença, ele se aposentou da pesquisa em 1930, ainda servindo como editor do *Mathematische Annalen* até 1939, função que assumiu em 1902, e ainda deu palestras ocasionais até 1934. Sua última palestra foi durante o semestre de inverno de 1933 a 1934, dando uma palestra por semana sobre os fundamentos da geometria.

Quando terminou de lecionar, ele nunca mais pisou em uma instituição acadêmica pelo resto de seus dias, devido à ascensão do partido nazista. Hilbert testemunhou muitos dos professores proeminentes de Göttingen serem expurgados da universidade devido a esta ascensão, todos os quais partiram para outros países. Certa vez, Hilbert frequentou um banquete e sentou-se ao lado do novo ministro da educação nazista, Bernhard Rust. Rust perguntou, “É mesmo verdade, professor, que o seu instituto sofreu muito com a partida dos judeus e dos seus amigos?” Hilbert respondeu, “Sofreu? Não, Herr Minister, não sofreu. Ele simplesmente deixou de existir”. Por esses motivos, apesar de ter se tornado cidadão honorário de Königsberg ao se aposentar e ainda viver com sua esposa e filho, o fim de sua vida foi bastante triste e solitário.

No início de 1942, Hilbert caiu e quebrou o braço enquanto caminhava em Göttingen, tornando-o quase completamente inativo, e parece ser um fator importante em sua morte, um ano após o incidente. Ele morreu em 14 de fevereiro de 1943, aos 81 anos, em Göttingen, deixando esposa e filho. Ele também foi enterrado em Göttingen, mas devido a basicamente todos os amigos e colegas de trabalho de Hilbert terem deixado a Alemanha, apenas cerca de 10 pessoas compareceram ao seu funeral.

O epitáfio em sua lápide em Göttingen consiste nas famosas frases que ele falou na conclusão do seu discurso de aposentadoria para a Sociedade Alemã de Cientistas e Físicos em 8 de setembro de 1930: “Devemos saber. Saberemos.”. As palavras foram dadas em resposta à máxima latina: “Ignoramus et ignorabimus” ou “Não sei, não saberemos.”

## 12.1 Referências

1. *Princeton Companion to Mathematics*. Edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. Princeton University Press, 2008.

2. [https://pt.wikipedia.org/wiki/David\\_Hilbert](https://pt.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert)
3. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/>





## CAPÍTULO 13

---

### Emmy Noether

---

Amalie Emmy Noether nasceu em 23 de março de 1882, em Erlangen, na Alemanha. Ela ficou conhecida pelas suas importantes contribuições nos campos da álgebra abstrata e na física teórica. Emmy revolucionou o estudo de anéis, corpos e álgebras, além de ter criado o Teorema de Noether, que explica a conexão entre a simetria na física e as leis de conservação de energia.

Sua mãe era Ida Amalia Kaufmann Noether, que veio de uma família judia rica na Alemanha. Seu pai era o matemático Max Noether, professor na universidade de Erlangen, trabalhando principalmente na teoria de funções algébricas.

Noether não teve grandes incentivos para se dedicar a vida acadêmica, ela foi ensinada a cozinhar e limpar, como a maioria das garotas da época, e também teve aulas de piano, porém ela não demonstrava nenhum interesse verdadeiro por nenhuma das atividades.

Além do alemão, Emmy também era fluente em francês e inglês. Em 1900, ela prestou os exames para poder lecionar estes idiomas, conseguindo uma nota geral de Sehr Gut (Muito bom), recebendo a permissão para ser professora. No mesmo ano ela passou a ensinar na escola de meninas da Baviera, porém acabou largando o cargo para continuar seus estudos na universidade de Erlangen, onde o pai lecionava.

Inicialmente, Noether teve muitos problemas para conseguir continuar seus estudos, já que não era permitido que mulheres estudassem na universidade de Erlangen, foi apenas em 1902 que a reitoria da universidade permitiu a educação mista. Noether era uma das duas únicas mulheres em todo campus e mesmo com a permissão de educação mista, ela não era permitida em todas as turmas, precisando permitir permissão individual para cada professor, mas apesar dos obstáculos, Emmy conseguiu se graduar em 14 de julho de 1903.

No período entre 1903-1904, ela estudou na universidade de Göttingen, que era um centro de pesquisa matemática renomado na época. Em Göttingen, ela teve aulas com grandes nomes da matemática, como Felix Klein, David Hilbert e Hermann Minkowski, ganhando reconhecimento entre eles.

Ao voltar para Erlangen, ela passou a focar apenas na matemática, escrevendo sua tese de doutorado *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form* (Em Sistemas Completos de Invariantes para Formas Biquadráticas Ternárias) sob a supervisão de Paul Gordan, a tese foi bem recebida na comunidade científica, porém

Noether classificava sua tese como “uma droga”.

Ela passou os próximos anos ensinando na universidade de Erlangen, ocasionalmente substituindo o pai, foi nesse período que ela conheceu Ernst Fischer, que foi o responsável por apresentá-la aos estudos de Hilbert sobre álgebra, marcando o início do interesse de Noether sobre a álgebra abstrata.

Em 1915, Emmy foi convidada por David Hilbert e Felix Klein a retornar à universidade de Gottingen. Os dois matemáticos queriam que ela se juntasse ao corpo docente da universidade, porém os membros das faculdades de história e filosofia objetaram. Eles insistiam que uma mulher não podia se tornar Privatdozent, um título concedido para professores universitários na Alemanha. Um membro inclusive disse que seria vergonhoso se os soldados voltassem para a universidade e encontrassem uma mulher dando aulas.

Em seus primeiros anos em Gottingen, ela não tinha posição oficial e não recebia salário, sua família era quem pagava sua estadia e seu material acadêmico. A maioria de suas aulas eram dadas sob o nome de Hilbert, onde ela só oferecia assistência. Foi durante esse período que ela conseguiu provar o teorema que posteriormente ficou conhecido como teorema de Noether, que mostra que a lei de conservação de um sistema está diretamente ligada com a simetria do sistema de um sistema físico.

Foi nessa época, especificamente em 1920, que ela começou seus trabalhos inovadores na álgebra. Em colaboração com Werner Schmeidler, ela publicou seu artigo sobre a teoria ideal dos anéis, onde ela definia os ideais à esquerda e à direita em um anel. Um ano depois, ela publicou o artigo *Idealtheorie in Ringbereichen* (Teoria dos Ideais de Anéis) que analisa, para os ideais, a condição da cadeia ascendente, foi esse artigo que deu origem ao termo Anel Noetheriano. Ela também influenciou outros matemáticos nesse período, como o holandês Bartel Leendert Van Der Wearden.

Com Gottingen se tornando um centro de pesquisa matemática e física cada vez mais importante, muitos matemáticos de diferentes regiões do mundo foram até a universidade, um desses matemáticos foi o topologista russo Pavel Alexandrov. Pavel e Emmy rapidamente se tornaram amigos e passaram a trabalhar juntos, Emmy até tentou conseguir um cargo para ele na universidade, mas só conseguiu uma bolsa de estudos para ele na Fundação Rockefeller. Os dois continuaram próximos, comumente discutindo as diferenças entre a álgebra e a topologia, Alexandrov a chamava de Der Noether, usando o artigo alemão masculino como sinal de afeto e respeito.

Quando ele retornou para Moscou, Noether foi convidada a ir para a Universidade Estatal de Moscou, onde ela continuou seu trabalho Alexandrov. Ela continuou sua pesquisa e lecionou aulas de álgebra abstrata e geometria algébrica. Ela também trabalhou com os topologistas Lev Pontryagin e Nikolai Tchebotariov, fazendo contribuições a teoria de Galois.

Apesar de nunca ter se envolvido diretamente, Emmy era muito interessada em política e demonstrou apoio a Revolução Russa, ficando feliz ao ver os avanços soviéticos na ciência e na matemática. Esse apoio trouxe problemas para ela quando retornou a Alemanha, fazendo com que ela fosse despejada da pensão onde vivia depois que os demais moradores reclamaram de viver sob o mesmo teto de uma judia com tendências marxistas.

Em 1932, Emmy Noether e Emil Artin receberam o Prêmio Memorial Ackermann-Teubner por suas contribuições à matemática, o prêmio foi visto como um reconhecimento oficial ao trabalho de Noether. Porém, seus colegas da universidade Gottingen expressaram descontentamento por ela não ter sido indicada para a Academia de Ciência de Gottingen e por não ter sido promovida ao cargo de Ordentlicher Professor.

Em novembro do mesmo ano, Emmy Noether foi convidada a fazer um discurso so-

bre “sistemas hipercomplexos em suas relações com a álgebra comutativa e a teoria dos números” no Congresso Internacional de Matemáticos em Zurique.

Com Adolf Hitler se tornando chanceler alemão em 1933, a atividade nazista no país aumentou. Na universidade de Gottingen, a Associação de Estudantes de Gottingen começou um movimento de ataque e violência contra judeus na universidade, falando que os arianos queriam professores arianos, não judeus.

No começo de seu mandato, Hitler criou a Lei para a Restauração da Função Pública Profissional, que retirou os judeus e funcionários suspeitos de todos os cargos públicos a menos que mostrassem sua lealdade à Alemanha. Ainda no começo do ano, Emmy teve seu direito de lecionar em Gottingen revogado, ela aceitou a demissão calmamente e mesmo sem a permissão de dar aulas, ela reunia alunos em seu apartamento para discutir teorias clássicas.

Sabendo da situação de Noether, seu amigo Pavel Alexandrov tentou conseguir uma cadeira na Universidade Estatal de Moscou para ela, sua tentativa foi mal sucedida, porém ambos continuaram mantendo contato através de cartas. Ainda em 1933, Emmy foi contatada pelo Bryn Mawr College, nos Estados Unidos e pelo Somerville College da Universidade de Oxford na Inglaterra, depois de uma série de negociações, Emmy acabou sendo contratada pelo Bryn Mawr College, se mudando para os Estados Unidos.

Emmy começou seus trabalhos em Bryn Mawr ainda em 1933, recebendo total apoio do presidente da faculdade Marion Edwards Park e de Anna Wheeler, uma estudante de Gottingen que se tornou amiga próxima de Noether. Em 1934, ela passou a lecionar no instituto de estudos avançados, em Princeton, uma universidade exclusiva para homens, onde ela continuou lecionando até sua morte em 1935.

Em abril de 1935, os médicos descobriram um tumor em sua pelve, marcando logo uma cirurgia para a remoção. Durante a operação, eles descobriram um cisto ovariano e outros dois tumores benignos em seu útero, Noether inicialmente apresentou uma boa recuperação à cirurgia, porém em 14 de abril, ela ficou inconsciente e faleceu. Nem os médicos souberam dizer exatamente o que causou sua morte.

Muitos matemáticos importantes prestaram suas homenagens à ela, seus amigos em Bryn Mawr fizeram um memorial na faculdade e suas cinzas foram enterradas nos gramados da universidade. Albert Einstein, Pavel Alexandrov, Van Der Waerden e Weyl se juntaram para fazer uma homenagem escrita para Emmy Noether.

As contribuições de Noether para a álgebra e para a topologia foram essenciais para a matemática, além do Teorema Noether que influenciou diretamente a física teórica e os sistemas dinâmicos. O matemático Hermann Weyl descreveu seu trabalho em três fases:

1. O período de dependência relativa, 1907-1919, Noether lidou primariamente com invariantes algébricos e diferenciais, começando com sua tese *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form*. Seu trabalho se tornou mais geral e abstrato conforme ela se familiarizava com o trabalho de David Hilbert. Após se mudar para Göttingen em 1915, ela produziu seu trabalho seminal em Física, o Teorema de Noether.
2. A segunda fase, 1920-1926, foi marcada pelo desenvolvimento da sua teoria de anéis e ideais, onde ela publicou seu artigo *Idealtheorie in Ringbereichen*, onde surgiu o conceito fundamental de Anel Noetheriano.
3. O estudo de álgebras não comutativas, suas representações por transformações lineares e sua aplicação ao estudo de corpos numéricos comutativos e suas aritméticas, 1927-1934.

## 13.1 Referências

1. *Princeton Companion to Mathematics*. Edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. Princeton University Press, 2008.
2. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Emmy\\_Noether](https://pt.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether)
3. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Universidade\\_de\\_G%C3%B6ttingen](https://pt.wikipedia.org/wiki/Universidade_de_G%C3%B6ttingen)
4. <https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/matematicos/Noether-E>

## CAPÍTULO 14

---

### John von Neumann

---

John von Neumann nasceu János von Neumann, em 28 de dezembro de 1903, na cidade de Budapeste, Hungria. Quando criança, era chamado de Jancsi, uma forma diminutiva de János, e mais tarde foi chamado de Johnny nos Estados Unidos. Seu pai, Max Neumann, era um banqueiro de alto nível e ele foi criado em uma família extensa, morando em Budapeste, onde, quando criança, aprendeu idiomas com as governantas alemãs e francesas que eram empregadas. Embora a família fosse judaica, Max Neumann não seguia as práticas rigorosas dessa religião e o lar parecia misturar tradições judaicas e cristãs.

Também vale a pena explicar como o filho de Max Neumann adquiriu o “von” para se tornar János von Neumann. Max Neumann estava elegível para solicitar um título hereditário devido à sua contribuição para a economia húngara bem-sucedida na época e, em 1913, ele pagou uma taxa para adquirir um título, mas não mudou seu nome. Seu filho, no entanto, usou a forma alemã von Neumann, onde o “von” indicava o título.

Quando criança, von Neumann mostrou ter uma memória incrível. Com seis anos, ele já conseguia trocar piadas com seu pai em grego clássico. A família Neumann às vezes entretinha convidados com demonstrações da habilidade de Johnny em memorizar listas telefônicas. Um convidado escolhia uma página e coluna da lista telefônica aleatoriamente. O jovem Johnny lia a coluna algumas vezes e, em seguida, devolvia o livro ao convidado. Ele podia responder a qualquer pergunta feita a ele ou recitar nomes, endereços e números em ordem.

Em 1911, von Neumann entrou no Gymnasium Luterano. A escola tinha uma forte tradição acadêmica que parecia contar mais do que a afiliação religiosa, tanto aos olhos dos Neumann quanto aos da escola. Seu professor de matemática rapidamente reconheceu o gênio de von Neumann e uma tutoria especial foi organizada para ele. A escola tinha outro matemático notável um ano à frente de von Neumann, a saber, Eugene Wigner.

A Primeira Guerra Mundial teve relativamente pouco efeito na educação de von Neumann, mas, após o fim da guerra, Béla Kun controlou a Hungria por cinco meses em 1919 com um governo comunista. A família Neumann fugiu para a Áustria, já que os afluentes estavam sendo atacados. No entanto, após um mês, eles retornaram para enfrentar os problemas de Budapeste. Quando o governo de Kun falhou, o fato de ter sido composto em grande parte por judeus significou que os judeus foram culpados. Tais situações são desprovidas de lógica e o fato de os Neumann terem se oposto ao governo de Kun não os

salvou da perseguição.

Em 1921, von Neumann completou sua educação no *Gymnasium Luterano*. Seu primeiro artigo de matemática, escrito em colaboração com Fekete, o assistente da Universidade de Budapeste que o havia tutorado, foi publicado em 1922. No entanto, Max Neumann não queria que seu filho seguisse um assunto que não lhe trouxesse riqueza. Max Neumann pediu a Theodore von Kármán que falasse com seu filho e o convencesse a seguir uma carreira em negócios. Talvez von Kármán fosse a pessoa errada para solicitar tal tarefa, mas, no final, todos concordaram com o compromisso de estudar química na universidade.

A Hungria não era um país fácil para aqueles de ascendência judaica por muitas razões e havia um limite rigoroso para o número de estudantes judeus que podiam entrar na Universidade de Budapeste. Claro, mesmo com uma cota rígida, o desempenho de von Neumann lhe garantiu facilmente uma vaga para estudar matemática em 1921, mas ele não assistiu às aulas. Em vez disso, ele também entrou na Universidade de Berlim em 1921 para estudar química.

Von Neumann estudou química na Universidade de Berlim até 1923, quando foi para Zurique. Ele obteve resultados excepcionais nos exames de matemática na Universidade de Budapeste, apesar de não ter assistido a nenhum curso. Von Neumann recebeu seu diploma em engenharia química pela *Technische Hochschule* em Zurique em 1926. Enquanto estava em Zurique, continuou seu interesse em matemática, apesar de estudar química, e interagiu com Weyl e Pólya, que estavam em Zurique. Ele até assumiu um dos cursos de Weyl quando este estava ausente de Zurique por um tempo. Pólya supostamente disse: “Johnny foi o único aluno de quem eu tive medo. Se durante uma palestra eu apresentasse um problema não resolvido, as chances eram de que ele viria até mim assim que a palestra terminasse, com a solução completa em alguns rabiscos em um pedaço de papel.”

Von Neumann obteve seu doutorado em matemática pela Universidade de Budapeste, também em 1926, com uma tese sobre teoria dos conjuntos. Ele publicou uma definição de números ordinais quando tinha 20 anos, sendo a definição utilizada atualmente.

Von Neumann lecionou em Berlim de 1926 a 1929 e em Hamburgo de 1929 a 1930. No entanto, ele também recebeu uma Bolsa Rockefeller para realizar estudos pós-doutorais na Universidade de Göttingen. Ele estudou sob Hilbert em Göttingen durante 1926-27. Na época, von Neumann havia alcançado status de celebridade. Na metade de seus vinte anos, a fama de von Neumann havia se espalhado mundialmente na comunidade matemática. Em conferências acadêmicas, ele se via apontado como um jovem gênio.

Veblen convidou von Neumann para Princeton para palestrar sobre teoria quântica em 1929. Respondendo a Veblen que viria depois de tratar de alguns assuntos pessoais, von Neumann foi a Budapeste, onde se casou com sua noiva Marietta Kovesi antes de partir para os Estados Unidos. Em 1930, von Neumann tornou-se professor visitante na Universidade de Princeton, sendo nomeado professor em 1931.

Entre 1930 e 1933, von Neumann ensinou em Princeton, mas esse não era um de seus pontos fortes. Sua linha de pensamento fluida era difícil de seguir para aqueles menos dotados. Ele era notório por desenhar equações em uma pequena parte do quadro-negro disponível e apagar expressões antes que os alunos pudessem copiá-las.

No entanto, em contraste, ele tinha a habilidade de explicar ideias complicadas em física. Para um homem para quem a matemática complicada não apresentava dificuldade, ele conseguia explicar suas conclusões aos iniciantes com uma clareza surpreendente. Muitos diziam que, após uma conversa com ele, sempre se saía com a sensação de que o problema era realmente simples e transparente.

Ele se tornou um dos seis professores originais de matemática (J W Alexander, A Einstein, M Morse, O Veblen, J von Neumann e H Weyl) em 1933 no recém-fundado Institute for Advanced Study em Princeton, posição que manteve pelo resto de sua vida.

Durante os primeiros anos em que esteve nos Estados Unidos, von Neumann continuou a retornar à Europa durante os verões. Até 1933, ele ainda ocupava cargos acadêmicos na Alemanha, mas renunciou a esses cargos quando os nazistas chegaram ao poder. Diferentemente de muitos outros, von Neumann não era um refugiado político, mas sim foi para os Estados Unidos principalmente porque acreditava que as perspectivas de cargos acadêmicos lá eram melhores do que na Alemanha.

Em 1933, von Neumann tornou-se co-editor dos *Annals of Mathematics* e, dois anos depois, tornou-se co-editor da *Compositio Mathematica*. Ele manteve ambos os cargos de editor até sua morte.

Von Neumann e Marietta tiveram uma filha, Marina, em 1935, mas seu casamento terminou em divórcio em 1937. No ano seguinte, ele casou-se com Klára Dán, também de Budapeste, que conheceu em uma de suas visitas à Europa. Após o casamento, eles partiram para os Estados Unidos e estabeleceram sua casa em Princeton. Lá, von Neumann viveu um estilo de vida bastante incomum para um matemático de alto nível. As festas e a vida noturna tinham um apelo especial para von Neumann. Enquanto ensinava na Alemanha, von Neumann era um frequentador do circuito noturno da era do Cabaret em Berlim.

Agora casado com Klára, as festas continuaram: As festas na casa dos von Neumann eram frequentes, famosas e longas.

Ulam resume o trabalho de von Neumann em um boletim da American Mathematical Society, em 1958. Ele escreve: “Em seu trabalho juvenil, ele estava preocupado não apenas com lógica matemática e a axiomatização da teoria dos conjuntos, mas, simultaneamente, com a substância da própria teoria dos conjuntos, obtendo resultados interessantes na teoria da medida e na teoria das variáveis reais. Foi também nesse período que ele começou seu trabalho clássico sobre a teoria quântica, a base matemática da teoria da medição na teoria quântica e a nova mecânica estatística.”

Seu texto *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (1932) estabeleceu uma base sólida para a nova mecânica quântica. A mecânica quântica foi realmente muito afortunada em atrair, nos primeiros anos após sua descoberta em 1925, o interesse de um gênio matemático da estatura de von Neumann. Como resultado, a estrutura matemática da teoria foi desenvolvida e os aspectos formais de suas novas regras de interpretação foram analisados por um único homem em dois anos (1927-1929).

Álgebras auto-adjuntas de operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert, fechadas na topologia do operador fraco, foram introduzidas em 1929 por von Neumann em um artigo na *Mathematische Annalen*. Seu interesse em teoria ergódica, representações de grupos e mecânica quântica contribuiu significativamente para a realização de von Neumann de que uma teoria de álgebras de operadores era o próximo estágio importante no desenvolvimento desta área da matemática.

Essas álgebras de operadores foram chamadas de anéis de operadores por von Neumann e, mais tarde, foram chamadas de álgebras  $W^*$  por alguns outros matemáticos. J. Dixmier, em 1957, chamou-as de álgebras de von Neumann em sua monografia *Algebras of operators in Hilbert space (von Neumann algebras)*. Na segunda metade da década de 1930 e no início dos anos 1940, von Neumann, trabalhando com seu colaborador F. J. Murray, lançou as bases para o estudo das álgebras de von Neumann em uma série fundamental de artigos.

No entanto, von Neumann é conhecido pela ampla variedade de estudos científicos diferentes. Ulam explica no boletim já citado como ele foi levado à teoria dos jogos: “A consciência de von Neumann sobre os resultados obtidos por outros matemáticos e as possibilidades inerentes que eles oferecem é surpreendente. No início de seu trabalho, um artigo de Borel sobre a propriedade minimax levou-o a desenvolver ... ideias que culminaram mais tarde em uma de suas criações mais originais, a teoria dos jogos.”

Na teoria dos jogos, von Neumann provou o teorema minimax. Ele gradualmente expandiu seu trabalho em teoria dos jogos e, com o co-autor Oskar Morgenstern, escreveu o texto clássico *Theory of Games and Economic Behaviour* (1944).

Ulam escreve: “Uma ideia de Koopman sobre as possibilidades de tratar problemas de mecânica clássica por meio de operadores em um espaço de funções o estimulou a dar a primeira prova matematicamente rigorosa de um teorema ergódico. A construção de Haar de medida em grupos forneceu a inspiração para sua maravilhosa solução parcial do quinto problema de Hilbert, na qual ele provou a possibilidade de introduzir parâmetros analíticos em grupos compactos.”

Em 1938, a American Mathematical Society concedeu o Prêmio Bôcher a John von Neumann por seu trabalho *Almost periodic functions and groups*. Este foi publicado em duas partes nos *Transactions of the American Mathematical Society*, a primeira parte em 1934 e a segunda parte no ano seguinte. Por volta dessa época, von Neumann voltou-se para a matemática aplicada, como descreve Ulam: “No meio dos anos 30, Johnny estava fascinado pelo problema da turbulência hidrodinâmica. Foi então que ele se tornou consciente dos mistérios subjacentes ao assunto das equações diferenciais parciais não-lineares. Seu trabalho, desde o início da Segunda Guerra Mundial, refere-se ao estudo das equações de hidrodinâmica e à teoria dos choques. Os fenômenos descritos por essas equações não-lineares são desconcertantes analiticamente e desafiam até mesmo a visão qualitativa pelos métodos atuais. O trabalho numérico parecia-lhe o caminho mais promissor para obter uma sensação do comportamento desses sistemas. Isso o impulsionou a estudar novas possibilidades de computação em máquinas eletrônicas...”

Von Neumann foi um dos pioneiros da ciência da computação, fazendo contribuições significativas para o desenvolvimento do design lógico. Shannon escreve que Von Neumann passou uma parte considerável dos últimos anos de sua vida trabalhando em teoria dos autômatos. Isso representou para ele uma síntese de seu interesse inicial em lógica e teoria da prova e seu trabalho posterior, durante a Segunda Guerra Mundial e depois, em computadores eletrônicos de grande escala. Envolvendo uma mistura de matemática pura e aplicada, bem como outras ciências, a teoria dos autômatos era um campo ideal para o intelecto abrangente de von Neumann. Ele trouxe muitas novas percepções e abriu pelo menos duas novas direções de pesquisa.

Ele avançou a teoria dos autômatos celulares, defendeu a adoção do bit como uma medida de memória de computador e resolveu problemas na obtenção de respostas confiáveis a partir de componentes de computador não confiáveis.

Durante e após a Segunda Guerra Mundial, von Neumann serviu como consultor das forças armadas. Suas valiosas contribuições incluíram a proposta do método de implosão para trazer o combustível nuclear à explosão e sua participação no desenvolvimento da bomba de hidrogênio. A partir de 1940, ele foi membro do Comitê Consultivo Científico dos Laboratórios de Pesquisa Balística em Aberdeen Proving Ground, Maryland. Foi membro do Bureau de Artilharia da Marinha de 1941 a 1955 e consultor do Laboratório Científico de Los Alamos de 1943 a 1955. De 1950 a 1955, foi membro do Armed Forces Special Weapons Project em Washington, D.C. Em 1955, o presidente Eisenhower o



nomeou para a Comissão de Energia Atômica, e em 1956 ele recebeu o Prêmio Enrico Fermi, sabendo que estava incuravelmente doente com câncer.

John von Neumann morreu em 8 de fevereiro de 1957, em Washington, D.C., aos 53 anos. Ele foi diagnosticado com câncer ósseo, que se espalhou rapidamente e levou à sua morte. Durante os últimos meses de sua vida, ele sofreu intensamente e foi hospitalizado no Walter Reed Army Medical Center, onde passou seus últimos dias. Eugene Wigner escreveu sobre a morte de von Neumann: “Quando von Neumann percebeu que estava incuravelmente doente, sua lógica o forçou a perceber que ele deixaria de existir, e portanto deixaria de ter pensamentos ... Era de partir o coração assistir à frustração de sua mente, quando toda esperança se foi, em sua luta com o destino que lhe parecia inevitável, mas inaceitável.”

No livro *John von Neumann and Norbert Wiener: From mathematics to the technologies of life and death*, de S J Heims, a morte de von Neumann é descrita nos seguintes termos: “... sua mente, o amuleto no qual ele sempre pôde confiar, estava se tornando cada vez menos confiável. Então veio o colapso psicológico completo; pânico, gritos de terror incontrolável todas as noites. Seu amigo Edward Teller disse: ‘Acho que von Neumann sofreu mais quando sua mente deixou de funcionar do que qualquer outro ser humano que eu já tenha visto sofrer.’”

O sentimento de invulnerabilidade de von Neumann, ou simplesmente o desejo de viver, estava lutando contra fatos imutáveis. Ele parecia ter um grande medo da morte até o fim... Nenhuma conquista e nenhuma quantidade de influência poderiam salvá-lo agora, como sempre havia acontecido no passado. Johnny von Neumann, que sabia como viver tão plenamente, não sabia como morrer.

Seria quase impossível dar uma ideia do alcance das honras que lhe foram concedidas. Ele foi Palestrante do Colóquio da American Mathematical Society em 1937 e recebeu o Prêmio Bôcher, como mencionado acima. Ele ocupou a Cátedra Gibbs da American Mathematical Society em 1947 e foi Presidente da Sociedade de 1951 a 1953.

Foi eleito para muitas academias, incluindo a Academia Nacional de Ciências Exatas (Lima, Peru), Academia Nazionale dei Lincei (Roma, Itália), American Academy of Arts and Sciences (EUA), American Philosophical Society (EUA), Instituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milão, Itália), National Academy of Sciences (EUA) e Royal Netherlands Academy of Sciences and Letters (Amsterdã, Países Baixos).

Von Neumann recebeu dois Prêmios Presidenciais, a Medalha de Mérito em 1947 e a Medalha da Liberdade em 1956. Também em 1956, recebeu o Prêmio Comemorativo Albert Einstein e o Prêmio Enrico Fermi, mencionado acima.

## 14.1 Referências

1. *Princeton Companion to Mathematics*. Edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader. Princeton University Press, 2008.
2. <https://clube.spm.pt/news/vida-obra-de-john-von-neumann>
3. [https://wiki.inf.ufpr.br/computacao/doku.php?id=j:john\\_von\\_neumann](https://wiki.inf.ufpr.br/computacao/doku.php?id=j:john_von_neumann)
4. [https://pt.wikipedia.org/wiki/John\\_von\\_Neumann#Teoria\\_de\\_jogos](https://pt.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann#Teoria_de_jogos)
5. [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Von\\_Neumann/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Von_Neumann/)



---

### Maria Laura Mousinho Leite Lopes

---

Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, nasceu em 18 de janeiro de 1917 em Timbaúba, Pernambuco. Filha de Laura Moura Mouzinho, professora primária, e Oscar Mouzinho, comerciante e autodidata.

Sua trajetória escolar começou em 1927, seu primeiro marco foi seu ingresso em 1931 na Escola Normal de Pernambuco, onde foi aluna do professor Luiz de Barros Freire até 1934, o responsável pela descoberta em sua vocação em Matemática. Este professor era reconhecido pela sua capacidade de cativar os jovens e incentivar novos talentos a entrarem na área de ciência.

Em 1935, a família de Maria Laura se mudou para o Rio de Janeiro, seu pai então, após 3 anos de estudos no curso Normal, considerou-a capaz de fazer um exame que encaminhava os alunos para as duas últimas séries do então colegial. Para a realização deste exame seu pai alterou sua data de nascimento permitindo que Maria fosse aceita no Instituto Lafayette.

Em 1936 ela concluiu o ginásio e tentou o vestibular para engenharia, mas acabou sendo reprovada em desenho. Entretanto, no ano seguinte, ela buscou a Universidade do Distrito Federal, voltada para formação de professores, mas infelizmente o vestibular já havia acontecido. Foi então que seu destino cruzou com o do professor Luiz Freire, nas palavras dela: “Quando eu estava saindo, quem vinha chegando? O Luiz Freire [decano da Escola de Ciências da UDF]. Ele fez muita festa e contei a ele minhas misérias. Ele me perguntou: você passou em matemática e física no vestibular para engenharia? Então, está matriculada!”.

Contudo, 15 dias depois, a UDF foi extinta e seus alunos foram transferidos para o Curso de Matemática da Faculdade Nacional de Filosofia (FNFfi), no Rio de Janeiro. Em 1941 Maria Laura Mouzinho se formou em bacharel em Matemática e no ano seguinte, em 1942 concluiu a Licenciatura. sob a orientação do matemático português Antônio Monteiro, sua carreira acadêmica seguiu dedicada à pesquisa e, com o trabalho “Espaços Projetivos - Reticulado de seus sub-espacos”, Maria Laura obteve a Livre-Docência de Geometria. Em 1949, ela se tornou então a primeira doutora em ciências matemáticas do Brasil.

Em 1943, ela foi efetivada como Professora do Departamento de Matemática da Universidade de Matemática da FNFfi, iniciando assim sua carreira como professora universitária.

Além disso trabalhou no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) em 1949, sendo a primeira mulher a ministrar aulas de geometria para o Curso de Engenharia, no Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA) e em 1951 participou da criação do Conselho Nacional de Pesquisa, atual Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), e se tornou a primeira brasileira a entrar para a Academia Brasileira de Ciência (ABC). Seus feitos importantes continuaram quando, em 1952, participou da criação do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), onde exerceu a função de secretária de 1952 a 1956, e com a participação nos debates que resultaram no projeto de criação da Universidade de Brasília.

Em 1956, Maria Laura se casou com o renomado Professor José Leite Lopes, um dos grandes nomes da física brasileira.

Entramos então em um período complicado da história do Brasil. Em 1969, com o Ato Institucional nº 5 (A.I. 5) ela foi aposentada compulsoriamente da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) onde trabalhava e da sua função de professora do ensino médio. Com essa impossibilidade de realizar sua função, ela seguiu para os Estados Unidos com seu marido e de lá, parte para Estrasburgo, acompanhando José, que foi dar aula na Universidade Louis Pasteur.

Na França, com o apoio do professor Georges Glaeser e da Professora Luciene Félix, seu trabalho em Didática Matemática no Institute de Recherche en Enseignement de Mathématiques (IREM) começa. A professora Maria Laura inicia seus estudos direcionados a formação continuada de professores e começa a desenvolver pesquisas na área de Educação Matemática, se tornando a partir daí, uma das mais importantes pesquisadoras em Educação Matemática no Brasil e no mundo.

Em 1974 ela retorna ao Brasil, atuando ativamente como defensora de causas inovadoras ligadas à formação de professores e ao ensino e aprendizagem da Matemática em todos os níveis de escolaridade, assumindo o papel de liderança na área de Educação Matemática no Brasil e promovendo cursos para formação de professores.

Como não havia grupos de pesquisa sobre o ensino da Matemática, juntamente com Anna Averbuch, elas criaram o grupo o Grupo de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática (GPEM), grupo de estudo que Maria Laura presidiu durante oito anos.

Maria Laura Leite coordenou também a primeira pesquisa em Educação Matemática no Brasil, o “Projeto Binômio Professor-Aluno na Iniciação à Educação Matemática”. Outra ação de suma importância foi à criação, por parte do GPEM, em 1980, do Curso de Pós-Graduação Lato Sensu, Especialização em Educação Matemática, considerado o pioneiro e embrião do segundo Curso de Mestrado em Educação Matemática no Brasil, ambos em convênio com a Universidade Santa Úrsula (USU).

Em 1980, foi reintegrada ao Instituto de Matemática da UFRJ, inovando o ensino de estatística para os alunos de licenciatura. No ano de 1983, as ações desenvolvidas nos Institutos de Física, Biologia, Física, Geociências (Geografia), Química, unidas as da Matemática, implantam o Projeto Fundão - Desafio para a Universidade, sob a coordenação de Maria Laura. O Projeto Fundão [3] passou a integrar o Subprograma de Educação para Ciência (SPEC), do Programa de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (PADCT), e foi gerenciado pela CAPES. Sua experiência possibilitou, em 1993, a criação do Curso de Especialização em Ensino de Matemática, em funcionamento desde então no Instituto de Matemática da UFRJ, bem como contribuiu para a formação do Programa de Ensino de Matemática (PEMAT) deste Instituto, criado em 2006.

Pelo seu empenho no ensino e pesquisa de Matemática no Brasil, Maria Laura é agraciada com o título de Professor Emérito da Universidade Federal do Rio de Janeiro,

no dia 01 de julho de 1996.

Morreu no dia 20 de junho de 2013 deixando um grande legado para a matemática e educação brasileira. Seu trabalho é hoje referência no mundo todo.

## 15.1 Referências

1. FERNANDEZ, Cecília de Souza. *A Vida de Maria Laura Mouzinho Leite Lopes*. Universidade Federal Fluminense, 2018. Disponível em: <http://mulheresnamatematica.sites.uff.br/>.
2. PEREIRA, Pedro Carlos. *A Educadora Maria Laura: contribuições para a constituição da Educação Matemática no Brasil*. Tese apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <http://livros01.livrosgratis.com.br/cp144925.pdf>.
3. DE ANDRADE, Maria Helena; De Oliveira, Rannyelly Rodrigues. *Maria Laura Mouzinho Leite Lopes: uma matemática feminina brasileira na História da Matemática*. Anais Eletrônicos 17 SNHCT, [s. 1.], 2020. Disponível em: <http://anais.snhct.com.br/>.



## CAPÍTULO 16

---

### Katherine Johnson

---

Katherine Johnson nasceu em 26 de agosto de 1918, na cidade de White Sulphur Springs, Virgínia Ocidental, nos Estados Unidos, com o nome de Katherine Coleman. Johnson é seu nome de casada (de seu segundo marido), mas, para simplificar, usaremos apenas o nome Katherine até o momento de seu segundo casamento. O pai de Katherine era Joshua McKinley Coleman, nascido também em White Sulphur Springs em 18 de dezembro de 1881, filho de Horace Coleman e Margaret Johnson. Joshua trabalhou em vários empregos, incluindo agricultura, trabalhos esporádicos e como zelador. Casou-se com Joylette Roberta Lowe em 29 de setembro de 1909, em Danville, Virgínia. Joylette, filha de Lee Lowe e Roberta Johnson, nasceu em 1887 no Condado de Caswell, Carolina do Norte, e tornou-se professora. Katherine tinha dois irmãos mais velhos, Horace, nascido por volta de 1912, e Charles, nascido por volta de 1915. Ela também tinha uma irmã mais velha, Margaret, nascida por volta de 1913.

Katherine começou a frequentar a escola primária aos cinco anos, mas, mesmo nessa idade, era avançada para seu estágio e passou direto para a segunda série. Quando tinha oito anos, deveria ter entrado na quinta série, mas, sendo uma das melhores alunas, foi diretamente para a sexta série de uma nova escola, superando nessa fase seu irmão Charles, que era três anos mais velho e agora estava em um ano abaixo de Katherine. Aos dez anos, estava pronta para ingressar no ensino médio.

White Sulphur Springs não tinha ensino médio para crianças negras, e a família Coleman estava determinada a oferecer uma educação de qualidade aos filhos. Portanto, todas as primaveras, a mãe de Katherine mudava-se com os filhos para uma casa alugada em Institute, no Condado de Kanawha, Virgínia Ocidental, para que pudessem frequentar o ensino médio lá. No verão, eles retornavam cerca de 200 km para White Sulphur Springs, onde Joshua trabalhava como agricultor. Katherine começou seus estudos na West Virginia State High School em 1928 e se formou em 1932. Nessa escola, associada ao West Virginia State College, ela se destacou em matemática e teve aulas de geometria com Angie Turner King, que fez um trabalho excepcional em encorajar seus alunos e inculcar neles o amor pela matéria. King teve uma influência tremenda em Katherine, tanto no ensino médio quanto posteriormente no West Virginia State College, onde também lecionava. Katherine disse que King era: “uma professora maravilhosa - brilhante, atenciosa e muito rigorosa.”

Katherine também se interessou muito por astronomia durante o ensino médio. Esse interesse surgiu porque ela caminhava para casa todas as noites com o diretor da escola, que lhe apontava estrelas e constelações. Após se formar na Virginia State High School, Katherine fez a transição natural para o West Virginia State College, onde recebeu uma bolsa integral que cobria suas taxas de matrícula, alojamento e alimentação. Esse College, agora West Virginia State University, era uma faculdade negra, fundada em 1890, mas que só passou a se chamar West Virginia State College em 1929, três anos antes de Katherine começar seus estudos lá. Ela teve dois anos para decidir qual seria sua área de especialização e sabia que seria entre Inglês, Francês e Matemática. Foi uma decisão difícil para a garota que era talentosa em todas essas disciplinas, então, eventualmente, decidiu se especializar em duas dessas áreas.

No West Virginia State College, Katherine foi ensinada matemática por James Carmichael Evans (1900-1988). Katherine explicou que Evans, que tinha um bacharelado e um mestrado do Massachusetts Institute of Technology, era um dos seus professores de matemática na faculdade e que sua esposa havia ensinado matemática para ela na oitava série. Katherine comentou que, devido à falta de filhos do casal, tornou-se uma espécie de filha para eles e sempre estava em sua casa, e Evans estava sempre ensinando, até em casa. Para agradá-lo, Katherine sempre teve que dar o seu melhor, e ele sempre sabia quando não estava se esforçando ao máximo. Naquela época, Katherine estava muito interessada em estudos de Francês e Inglês com o Professor Matthews, mas Evans insistiu que ela também deveria se especializar em matemática.

Outro professor que ensinou matemática a Katherine foi William Waldron Schieffelin Claytor, que rapidamente percebeu seu potencial para pesquisa. Claytor era um matemático afro-americano que obteve seu Ph.D., com uma tese na área de topologia, da Universidade da Pensilvânia em 1933. Katherine reconheceu o esforço que Claytor fez para ajudá-la a ter sucesso. Claytor garantiu que ela estivesse preparada para ser uma matemática pesquisadora e até ofereceu um curso especial em geometria analítica, que o College não oferecia, apenas para Katherine. Ela foi afortunada por ter Claytor como professor, pois ele ensinou no West Virginia State College apenas por um curto período, de 1934 a 1937. Katherine se formou em bacharelado com “summa cum laude” em 1937, especializando-se tanto em matemática quanto em francês.

Após se formar, Katherine começou a trabalhar como professora em uma escola primária em Marion, Virgínia. Disseram-lhe que ela poderia ter o emprego se pudesse ensinar matemática e francês, e tocar piano. Ela viajava para essa escola de ônibus e enfrentava o racismo, que era muito comum na época. Katherine sentiu que o racismo na Virgínia Ocidental era menos explícito do que na Virgínia, e ficou surpresa ao perceber que, ao cruzar para a Virgínia, os negros eram obrigados a se mover para o fundo do ônibus. Quando o motorista disse que todos os negros seriam colocados em táxis, Katherine recusou até que ele pedisse educadamente. Essa postura foi indicativa de sua recusa em ser considerada inferior.

Ela lecionou em várias escolas na Virgínia e na Virgínia Ocidental nos dois anos seguintes, mas deixou o ensino em 1939 quando se casou com James Francis Goble. O casal se conheceu quando eram estudantes no West Virginia State College e Katherine teve três filhas com James: Constance, Joylette e Katherine, todas se tornando matemáticas e professoras. Embora tivesse abandonado o ensino ao se casar, Katherine foi convidada pelo West Virginia State University para ingressar em seu programa de pós-graduação em matemática em 1940. Ela acreditava que a Universidade estava reagindo à decisão da Suprema Corte de 1938, que determinava que os estados deveriam fornecer as mes-



mas oportunidades educacionais para negros e brancos, criando instituições separadas ou permitindo que frequentassem a mesma instituição. No entanto, ela estava ansiosa para aproveitar a oportunidade de estudo de pós-graduação. Infelizmente, teve que desistir de seus estudos devido à doença de seu marido, e Katherine teve que voltar ao ensino para sustentar sua família.

Em 1952, Katherine visitou parentes em Newport News, Virgínia, e soube que o National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) (que mais tarde se tornaria a NASA) contratava matemáticas negras. De fato, haviam contratado mulheres para atuar como “computadoras” desde 1935 e, com a escassez de mão de obra durante a Segunda Guerra Mundial, começaram a admitir mulheres afro-americanas. Katherine viu isso como uma oportunidade que precisava aproveitar, então mudou-se com sua família para Newport News. Lá, trabalhou como professora substituta de matemática e se candidatou a uma posição na NACA. Recebeu uma oferta tanto para um posto de ensino permanente quanto para uma posição na NACA em 1953 e não hesitou em aceitar a oferta na NACA. A saúde de seu marido piorou e, em 1956, ele faleceu devido a um tumor cerebral que, infelizmente, era inoperável.

Quando começou a trabalhar na NACA, Katherine foi designada para o escritório que abrigava as “computadoras” negras que eram emprestadas para a Divisão que precisava de assistência. Ela foi emprestada para a Flight Research Division e seu trabalho foi tão excepcional que essa Divisão se tornou seu local de trabalho permanente. Katherine comentou: “Fomos pioneiras da era espacial. Trabalhamos em segredo por cerca de três anos, muitas vezes sem saber exatamente qual era o objetivo total do nosso trabalho. ... Era necessário ler a ‘Aviation Week’ para descobrir o que havíamos feito. Os russos já estavam tentando entrar no espaço na época, então nossos esforços eram estrategicamente militares.”

Em 1958, a NACA se tornou a NASA e todos os funcionários da NACA se tornaram funcionários da NASA. Katherine explicou: “Tudo era tão novo - a ideia de ir para o espaço era nova e ousada. Não havia livros didáticos, então tivemos que escrevê-los. Escrevemos o primeiro livro didático, começando do zero. As pessoas nos ligavam e perguntavam: “O que faz você achar que isso ou aquilo é possível?” e tentávamos explicar. Criamos as equações necessárias para rastrear um veículo no espaço. Eu tive sorte por estar na divisão que desenvolveu todas as trajetórias originais, porque acho que é por esse trabalho que sou lembrada.”

Até 1958, os trabalhadores negros na NACA eram segregados. Eles tinham que comer separadamente e usavam banheiros distintos dos colegas brancos. No entanto, após a mudança para a NASA, essa segregação terminou. Ainda assim, havia discriminação contra as mulheres e elas não eram autorizadas a participar das reuniões: “Eram homens tão inteligentes, eles sabiam tanto, e eu sempre amei inteligência, então perguntava o que havia acontecido nas reuniões - ouvia e fazia perguntas. Então, claro, eu perguntava por que não podia ir eu mesma, e eventualmente eles se cansaram de responder todas as minhas perguntas e simplesmente me deixaram participar das reuniões.”

Essa não era a única forma de discriminação contra as mulheres. Elas não podiam colocar seus nomes em seus relatórios de pesquisa: “Precisávamos ser assertivas como mulheres naqueles dias - assertivas e agressivas - e o grau de assertividade dependia do local onde você estava. Eu tive que ser. Nos primeiros dias da NASA, as mulheres não podiam colocar seus nomes nos relatórios - nenhuma mulher em minha divisão havia tido seu nome em um relatório. Eu estava trabalhando com Ted Skopinski e ele queria sair e ir para Houston... mas Henry Pearson, nosso supervisor - ele não era fã de mulheres

- continuava empurrando-o para terminar o relatório em que estávamos trabalhando. Finalmente, Ted disse a ele: 'Katherine deve terminar o relatório, ela fez a maior parte do trabalho mesmo.' Então Ted deixou Pearson sem escolha; eu terminei o relatório e meu nome apareceu nele, e essa foi a primeira vez que uma mulher em nossa divisão teve seu nome em algo."

Esse relatório não era qualquer relatório. Era o "Determination of Azimuth Angle at Burnout for Placing a Satellite over a Selected Earth Position". Continha a teoria necessária para lançar, rastrear e devolver veículos espaciais e foi usado para o famoso voo espacial de Alan Shepard em maio de 1961 e o voo de John Glenn em fevereiro de 1962. Este artigo foi o primeiro de 21 artigos coautorados por Katherine enquanto trabalhava para a NASA.

Em 1959, Katherine se casou com James A Johnson. Ele foi comissionado em 1951 como Segundo Tenente no Exército dos Estados Unidos e era veterano da Guerra da Coreia. Eles foram apresentados pelo ministro da Carver Memorial Presbyterian Church em Newport News, Virgínia, onde Katherine cantava no coro.

Johnson trabalhou na agência até 1986, quando se aposentou após 33 anos de serviço. Durante seu tempo na NASA, Johnson recebeu muitos prêmios prestigiosos, incluindo o NASA Lunar Orbiter Award e três NASA Special Achievement Awards. Ela foi nomeada Matemática do Ano em 1997 pela National Technical Association. Além desses prêmios da NASA, Johnson foi homenageada com um doutorado honorário em Direito pela State University of New York e doutorados honorários em Ciências pelo Capitol College em Maryland e pela Old Dominion University na Virgínia.

Como mencionado, a State University of New York at Farmingdale concedeu a Johnson um doutorado honorário em 4 de junho de 1998. A citação dizia: "Você elevou nossos corações e mentes às estrelas. Seu gênio em matemática e física ajudou a obliterar barreiras físicas e contribuiu grandemente para colocar o primeiro astronauta americano no espaço. Você enfrentou os obstáculos impostos pelas forças da Natureza e ajudou a lançar nosso país na fronteira do espaço. Por sua contribuição como pioneira em tecnologia aeroespacial e sua contínua busca pela excelência na educação, a State University of New York at Farmingdale confere com orgulho a você, Katherine Johnson, o prestigiado título de Doutora em Leis, 'honoris causa'."

Johnson se aposentou em 1986 e, além de suas atividades de lazer como jogar bridge, resolver quebra-cabeças e assistir esportes, aproveitou para viajar e falar sobre sua carreira para incentivar os alunos a alcançar seu potencial.

Johnson foi nomeada Aluna Notável do Ano do West Virginia State College em 1999. Em 16 de novembro de 2015, recebeu a Medalha Presidencial da Liberdade do presidente Barack Obama. Em 5 de maio de 2016, a NASA nomeou um dos edifícios no Langley Research Center em Hampton, Virgínia, como 'Katherine G Johnson Computational Research Facility'. O diretor-adjunto do Research Center, Clayton Turner, disse em seu discurso de inauguração: "Milhões de pessoas ao redor do mundo assistiram ao voo de Shepard, mas o que elas não sabiam na época era que os cálculos que o levaram ao espaço e o trouxeram de volta foram feitos pela nossa convidada de honra, Katherine Johnson."

Em 2017, Johnson tornou-se ainda mais conhecida quando um filme sobre sua vida, chamado "Estrelas Além do Tempo", foi lançado.

## 16.1 Referências

1. [https://en.wikipedia.org/wiki/Katherine\\_Johnson](https://en.wikipedia.org/wiki/Katherine_Johnson)

2. <https://www.youtube.com/watch?v=SvsHjWVgqcY>
3. <https://www.nasa.gov/audience/forstudents/k-4/stories/nasa-knows/who-was-katherine-johnson-k4>
4. [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Johnson\\_Katherine/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Johnson_Katherine/)



## CAPÍTULO 17

---

### Alexander Grothendieck

---

Alexander Grothendieck nasceu em 28 de março de 1928, em Berlim, Alemanha. Ele teve uma infância marcada pela história turbulenta de seus pais e do contexto em que cresceu. Seu pai, Alexander Schapiro, um judeu russo, lutou como revolucionário contra os czares russos e passou anos na prisão antes de escapar durante a Revolução de 1917. Sua mãe, Hanka Grothendieck, nascida na Alemanha, era uma ativista de esquerda. O casal se conheceu em Berlim, onde tiveram Alexander, também chamado por familiares e amigos como Schurik. O nome de Grothendieck foi registrado como Alexander Raddatz, pois ele nasceu enquanto Hanka ainda se encontrava em casamento com um homem chamado Alfred Raddatz. A família viveu em Berlim até 1933, quando fugiram para Paris devido à ascensão do regime nazista.

Após Adolf Hitler se tornar Chanceler do Reich Alemão em 1933, medidas antisemitas foram implementadas, levando à perseguição dos judeus. Alexander Schapiro, embora escondendo sua origem judaica sob o nome de Tanaroff, percebeu o perigo em Berlim e retornou a Paris. Sua esposa, Hanka, permaneceu em Berlim com seu filho Alexander até dezembro de 1933, quando arranjou para que ele fosse adotado por uma família em Hamburgo. Enquanto isso, Hanka se juntou ao marido em Paris e, após o estopim da Guerra Civil Espanhola, foram para a Espanha apoiar os Republicanos. Após a derrota destes, retornaram à França, onde Hanka começou a trabalhar em Nîmes. Os Heydorns, onde Schurik estava hospedado, perceberam o risco iminente que representavam à Schurik por fazerem parte da resistência contra Hitler e enviaram a criança de volta à França para se reunir com seus pais.

Com o início da Segunda Guerra Mundial, Schurik e seus pais enfrentaram grande perigo na França. Após a promulgação da lei dos “indesejáveis”, eles foram enviados para campos de internamento, com Schurik indo para Rieucros e seu pai para Vernet. Posteriormente, foram transferidos para o campo de concentração de Gurs. Schurik conseguiu escapar para Le Chambon sur Lignon, onde continuou seus estudos, escondendo-se no bosque para evitar ser capturado pelas autoridades nazistas. Ele se formou no Collège Cévénol em 1945. Enquanto isso, seu pai foi deportado para Auschwitz em 1942 e não sobreviveu. Sua irmã Maidi, por outro lado, sobreviveu à guerra e emigrou para os Estados Unidos.

Em 1945, Grothendieck e sua mãe se mudaram para Maisargues, próximo a Mont-

pellier, onde ele trabalhava nas vinhas e estudava matemática na Universidade local com uma bolsa de estudos. Durante seus estudos, ele se sentia insatisfeito com a falta de definições claras em conceitos matemáticos básicos, como comprimento de curvas e áreas de superfícies. Grothendieck prometeu a si mesmo preencher essa lacuna quando tivesse a oportunidade.

Durante seus anos de graduação em Montpellier, Grothendieck não recebeu ajuda significativa de seus professores para preencher as lacunas em sua compreensão matemática. Insatisfeito com o ensino, ele começou a trabalhar por conta própria. Embora tenha aprendido a calcular volumes, nunca lhe foi explicada a definição subjacente. Determinado a entender o “porquê”, ele redescobriu, por conta própria e em total isolamento, uma versão geral da integral de Lebesgue, sendo informado por um professor de que Lebesgue havia resolvido grandes problemas matemáticos fundamentais com essa ideia, mas que seu trabalho era difícil de ensinar.

Após ser aconselhado por um professor em Montpellier a buscar orientação em Paris, Grothendieck seguiu para a École Normale Supérieure em 1948-49. Lá, frequentou o seminário de Henri Cartan sobre topologia algébrica e teoria dos feixes. Entre os matemáticos proeminentes que também frequentavam o seminário estavam Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Roger Godement, Laurent Schwartz e André Weil, além de seu colega de classe Jean-Pierre Serre. Embora inicialmente mais interessado em espaços vetoriais topológicos, foi aconselhado por André Weil e Henri Cartan a ir para Nancy, onde havia uma equipe forte de análise funcional, incluindo Dieudonné, Delsarte, Godement e Schwartz.

Em 1949, Grothendieck se mudou para a Universidade de Nancy, onde viveu com sua mãe, que ocasionalmente ficava doente devido à tuberculose adquirida nos campos de internamento. Durante esse tempo, teve um filho chamado Serge com a senhora com quem alugavam quartos, sendo que a maior parte da criação do filho ficou a cargo da mãe. Grothendieck focou seus estudos em análise funcional com Dieudonné e adotou um método excepcional de aprendizado, reconstruindo o conhecimento por conta própria, já que tinha poucos livros à disposição. Além disso, demonstrou uma grande dedicação ao trabalho: Há uma estimativa de que ele estudou uma média de 10 à 12 horas por dia durante seus (aproximadamente) 25 anos de carreira matemática.

Em Nancy, havia um seminário ativo todos os sábados no qual todos os professores e alguns alunos participavam, que estudava uma variedade de tópicos diferentes. Fornecia um ambiente maravilhoso para o jovem Grothendieck. Uma teoria geral de dualidade para espaços convexos locais teve que ser trabalhada: Schwartz e Dieudonné haviam começado seu estudo para espaços Fréchet e seus limites diretos, mas encontraram uma série de problemas que não conseguiram resolver. Portanto, propuseram eles a Grothendieck, e o resultado acabou excedendo todas as expectativas mais otimistas dos dois orientadores. Em menos de um ano, ele havia resolvido todos os problemas de Schwartz e Dieudonné com construções novas e muito engenhosas; então, com as técnicas que ele havia desenvolvido, ele começou a trabalhar em muitas outras questões na análise funcional.

Em 1953, Grothendieck defendeu sua tese de doutorado intitulada “Produtos Tensoriais Topológicos e Espaços Nucleares”. Durante sua defesa, Bernard Malgrange, presente no evento, relatou que Grothendieck declarou após escrever sua tese que não tinha mais interesse em espaços vetoriais topológicos, afirmando que, após o seu trabalho, “Não há mais nada a fazer, o assunto está morto”.

Após a defesa de sua tese de doutorado, Grothendieck preparou uma “segunda tese”, prática comum exigida aos alunos da época, sobre teoria dos feixes, um campo distante

do tópicos de sua tese principal. Essa segunda tese possivelmente influenciou seu interesse subsequente em geometria algébrica.

Entre 1953 e 1955, Grothendieck esteve na Universidade de São Paulo e depois na Universidade de Kansas por um ano. Durante esse tempo, sua pesquisa mudou radicalmente para topologia e geometria, impulsionada pelo apoio do Centre National de la Recherche Scientifique desde 1950. Após sua passagem pela Universidade de Kansas, ele retornou ao CNRS e tornou-se membro do célebre grupo Bourbaki. Em 1959, aceitou uma oferta de pesquisa no recém-criado Institut des Hautes Études Scientifiques.

Durante os anos de 1959 a 1970, Alexander Grothendieck liderou uma “Era de Ouro” no Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), onde uma nova escola de matemática surgiu sob sua liderança. Seu Seminário de Geometria Algébrica estabeleceu o IHES como um centro global para essa disciplina, com Grothendieck sendo a figura central e motivadora desse movimento.

Durante esse período, Grothendieck desenvolveu temas unificadores em várias áreas da matemática, incluindo geometria, teoria dos números, topologia e análise complexa. Ele introduziu a teoria dos esquemas, que resolveu conjecturas importantes na teoria dos números de André Weil. Além disso, trabalhou na teoria dos topos, relevante para a lógica matemática, e forneceu uma prova algébrica do teorema de Riemann-Roch. Ele também definiu algebricamente o grupo fundamental de uma curva.

Grothendieck fez contribuições significativas em uma ampla gama de áreas matemáticas, incluindo produtos tensoriais topológicos e espaços nucleares, cohomologia de feixes, esquemas, teoria K, o teorema de Grothendieck-Riemann-Roch, categorias fibradas e descendentes, pilhas (stacks), topologias de Grothendieck (sites) e topos, categorias derivadas, dualidade local e global, cohomologia étale, cohomologia cristalina, cohomologia de funções  $L$ , categorias tensoriais e outras.

No final dos anos 1950, Grothendieck vivia com Mireille Dufour e tiveram três filhos juntos. Mais tarde, eles se casaram. Grothendieck era conhecido por sua energia ao ensinar, sendo preciso e organizado no quadro-negro. Sua apresentação era tão clara que até alunos inexperientes conseguiam acompanhar e entender a estrutura formal das aulas, mesmo que fosse rápido na exposição.

O matemático Valentin Poénaru também conheceu Grothendieck durante esses anos. Ele escreve: “O Grothendieck que conheci nesta época era uma pessoa muito impressionante, e quando digo isso, não estou pensando apenas em matemática. Shourik, como eu o chamava, era uma das pessoas mais fortes e carismáticas que já conheci. Eu o vejo como um personagem saído diretamente de Dostoiévski. Ele também era uma pessoa de grande bondade e generosidade. Parecia sempre estar de bom humor, com grande equilíbrio mental e também, à sua maneira, uma certa alegria de viver. Na época, ele tinha a capacidade de poder dormir quando queria, e pelo tempo que quisesse, para depois retomar seu trabalho ainda melhor. De fato, sua capacidade de trabalho para mim era algo miraculoso.”

Grothendieck recebeu a Medalha Fields em 1966, reconhecimento por suas profundas e transformadoras contribuições para a matemática. No entanto, deixou o Institut des Hautes Études Scientifiques em 1970 e passou os anos seguintes na Argélia e no Centro de Matemática de Luminy. Em 1984, renunciou à cidadania francesa e se mudou para Villeurbanne, perto de Lyon, onde se isolou, recusando-se a participar de conferências ou aceitar prêmios. Ele não participou do Congresso Internacional de Matemáticos em Varsóvia em 1983, onde muitos matemáticos consideraram um escândalo que o maior matemático vivo não estivesse presente.

O estado de saúde de Grothendieck estava piorando à medida que ele envelhecia. Em 2010, ele estava frágil e sofrendo de uma forma de demência. No final de 2013, ele ficou gravemente doente e foi hospitalizado em Villeurbanne, na França, onde morreu em 13 de novembro de 2014.

## 17.1 Referências

1. *Who is Alexander Grothendieck?*. Disponível em: <https://www.ams.org/notices/200808/tx080800930p.pdf>
2. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Grothendieck/>



## CAPÍTULO 18

---

### John Nash

---

O pai de John F Nash, natural do Texas, é também chamado John Forbes Nash, então o chamaremos de John Nash Pai. John Nash Pai nasceu em 1892 e teve uma infância e adolescência infeliz, da qual escapou ao estudar engenharia elétrica na Texas Agricultural and Mechanical. Após o serviço militar na França durante a Primeira Guerra Mundial, John Nash Senior deu aulas de engenharia elétrica por um ano na Universidade do Texas antes de se juntar à Appalachian Power Company em Bluefield, West Virginia. A mãe de John F Nash, Margaret Virginia Martin, era conhecida como Virginia. Ela teve uma educação universitária, estudando línguas no Martha Washington College e depois na Universidade de West Virginia. Ela foi professora por dez anos antes de conhecer John Nash Senior, e os dois se casaram em 6 de setembro de 1924.

Johnny Nash, como era chamado pela família, nasceu em 13 de junho de 1928, no Bluefield Sanitarium, e foi batizado na Igreja Episcopal. Ele foi descrito como um menino singular, solitário e introvertido, mas foi criado em uma família amorosa, cercado por parentes próximos que lhe mostravam muito afeto. Após alguns anos, Johnny teve uma irmã, Martha. Ele parece ter demonstrado muito interesse por livros quando era jovem, mas pouco interesse em brincar com outras crianças. Não era por falta de crianças que Johnny se comportava dessa forma, pois Martha e seus primos brincavam os jogos infantis usuais: recortar padrões de livros, brincar de esconde-esconde no quintal, jogar futebol. No entanto, enquanto os outros brincavam juntos, Johnny brincava sozinho com aviões de brinquedo e carrinhos de caixa de fósforos.

Sua mãe respondeu à solidão de Johnny incentivando entusiasticamente sua educação, tanto garantindo que ele recebesse uma boa escolaridade quanto ensinando-o ela mesma. O pai de Johnny respondeu tratando-o como um adulto, dando-lhe livros de ciência quando outros pais poderiam dar livros de colorir.

Os professores de Johnny na escola certamente não reconheceram seu gênio, e parece que ele lhes deu pouca razão para perceberem que ele tinha talentos extraordinários. Eles estavam mais conscientes de sua falta de habilidades sociais e, por causa disso, o rotularam como retardado. Atualmente, acredita-se que ele apenas estava extremamente entediado na escola. Quando tinha cerca de doze anos, ele começou a demonstrar grande interesse em realizar experimentos científicos em seu quarto. É bastante claro que ele aprendeu mais em casa do que na escola.

Sua irmã Martha parece ter sido uma criança notavelmente normal, enquanto Johnny parecia diferente das outras crianças. Ela escreveu mais tarde na vida: “Johnny sempre foi diferente. [Meus pais] sabiam que ele era diferente. E sabiam que ele era inteligente. Ele sempre quis fazer as coisas do seu jeito. Minha mãe insistia que eu fizesse coisas por ele, que o incluísse em minhas amizades... mas eu não estava muito entusiasmada em mostrar meu irmão um tanto estranho.” Seus pais o incentivavam a participar de atividades sociais e ele não recusava, mas esportes, danças, visitas a parentes e eventos semelhantes ele tratava como distrações tediosas de seus livros e experimentos.

Nash mostrou interesse em matemática pela primeira vez quando tinha cerca de 14 anos. Não se sabe exatamente como ele chegou a ler o livro “Men of Mathematics” de E. T. Bell, mas certamente esse livro o inspirou. Ele tentou, e conseguiu, provar por conta própria os resultados de Fermat que Bell afirmou em seu livro. A excitação que Nash encontrou aqui contrastava com a matemática que ele estudava na escola, que certamente não o interessava.

Ele entrou no Bluefield College em 1941 e lá fez cursos de matemática e ciências, especialmente estudando química, que era um tópico favorito. Ele começou a mostrar habilidades em matemática, especialmente em resolver problemas, mas ainda com quase nenhum amigo e se comportando de maneira um tanto excêntrica, isso apenas acrescentou à visão de seus colegas de que ele era peculiar. Ele não considerava uma carreira em matemática na época, o que não é surpreendente, pois era uma profissão incomum. Ele supunha que estudaria engenharia elétrica e seguiria os passos de seu pai.

Nash ganhou uma bolsa de estudos na Competição George Westinghouse e foi aceito pelo Instituto Carnegie de Tecnologia (agora Universidade Carnegie-Mellon), onde ele ingressou em junho de 1945 com a intenção de obter um diploma em engenharia química. Logo, no entanto, seu crescente interesse pela matemática o levou a fazer cursos sobre cálculo tensorial e relatividade. Lá, ele entrou em contato com John Synge, que havia sido recentemente nomeado chefe do Departamento de Matemática e ensinava o curso de relatividade. Synge e os outros professores de matemática rapidamente reconheceram os notáveis talentos matemáticos de Nash e o persuadiram e incentivaram fortemente a se especializar em matemática.

Nash rapidamente aspirou a grandes feitos em matemática. Ele participou duas vezes da Competição de Matemática William Lowell Putnam, mas, embora tenha se saído bem, não ficou entre os cinco primeiros. Foi uma falha aos olhos de Nash e uma que ele levou a sério. A Competição de Matemática Putnam não foi a única coisa que estava indo mal para Nash. Embora seus professores de matemática o elogiassem, seus colegas de classe o achavam uma pessoa muito estranha. Fisicamente ele era forte e isso o salvou de ser intimidado, mas seus colegas de classe se divertiam zombando de Nash, a quem viam como uma pessoa desajeitada e imatura, exibindo birras infantis. Um de seus colegas escreveu: “Ele era um caipira ingênuo, mesmo pelos nossos padrões. Ele se comportava de maneira estranha, tocando um único acorde no piano repetidamente, deixando um sorvete derretendo em cima de suas roupas largadas, andando sobre o corpo adormecido de seu colega de quarto para apagar a luz.” Outro escreveu: “Ele era extremamente solitário.” E um terceiro colega escreveu: “Nós atormentávamos o pobre John. Fomos muito cruéis. Éramos desagradáveis. Percebíamos que ele tinha um problema mental.” Eles pregavam peças cruéis nele e ele reagia pedindo aos colegas que o desafiassem com problemas matemáticos. No fim, ele acabou fazendo o dever de casa de muitos alunos.

Nash recebeu um bacharelado e um mestrado em matemática em 1948. Nessa época, ele havia sido aceito nos programas de matemática de Harvard, Princeton, Chicago e

Michigan. Ele sentia que Harvard era a universidade líder e, por isso, queria ir para lá, mas, por outro lado, a oferta deles era menos generosa do que a de Princeton. Nash sentia que Princeton estava ansiosa para que ele fosse para lá, enquanto ele sentia que seu fracasso na Competição de Matemática Putnam significava que Harvard estava menos entusiasmada. Ele levou um tempo para tomar sua decisão, enquanto era incentivado por Synge e seus outros professores a aceitar Princeton. Quando Lefschetz lhe ofereceu a bolsa mais prestigiosa que Princeton tinha, Nash decidiu estudar lá.

Em setembro de 1948, Nash entrou em Princeton, onde mostrou interesse em uma ampla gama de áreas da matemática: topologia, geometria algébrica, teoria dos jogos e lógica estavam entre seus interesses, mas ele parece ter evitado assistir a palestras. Geralmente, aqueles que decidem não aprender por meio de palestras recorrem a livros, mas isso não parece ter ocorrido com Nash, que decidiu não aprender matemática dessa forma, mas sim desenvolver os tópicos por conta própria. Em muitos aspectos, essa abordagem foi bem-sucedida para ele, pois contribuiu para que ele se tornasse um matemático bastante original, que abordaria um problema de maneiras totalmente novas.

Em 1949, enquanto estudava para seu doutorado, ele escreveu um artigo que, 45 anos depois, lhe renderia um Prêmio Nobel de Economia. Durante esse período, Nash estabeleceu os princípios matemáticos da teoria dos jogos. P Ordeshook escreveu: “O conceito de um equilíbrio de Nash é talvez a ideia mais importante na teoria dos jogos não cooperativos. ... Seja analisando estratégias de candidatos eleitorais, as causas da guerra, manipulação de agendas em legislaturas ou as ações de grupos de interesse, as previsões sobre eventos reduzem-se a uma busca e descrição de equilíbrios. Simplificando, estratégias de equilíbrio são as coisas que prevemos sobre as pessoas.” O célebre matemático John Milnor, ganhador da Medalha Fields em 1962, que era um colega em Princeton, descreve Nash durante seus anos na universidade: “Ele estava sempre cheio de ideias matemáticas, não apenas sobre teoria dos jogos, mas também em geometria e topologia. No entanto, minha memória mais vívida desse período é dos muitos jogos que eram jogados na sala comum. Fui apresentado ao Go e ao Kriegspiel, e também a um engenhoso jogo topológico que chamávamos de Nash em homenagem ao inventor.”

Nash recebeu seu doutorado em 1950 com uma tese intitulada “Jogos Não Cooperativos”. No verão de 1950, ele trabalhou para a RAND Corporation, que estava preocupada em aplicar a teoria dos jogos aos problemas de conflito da Guerra Fria, onde sua teoria dos jogos e seu trabalho no equilíbrio de Nash o tornaram um dos principais especialistas. De volta a Princeton, no entanto, ele começou a trabalhar seriamente em problemas de matemática pura. Embora as ideias da teoria dos jogos fossem de extrema importância, Nash ainda via essas ideias como recreativas e acreditava que, se queria ser levado a sério como matemático, precisava produzir importantes resultados em matemática pura.

Ele obteve importantes resultados sobre variedades e a questão das isometrias. Ele provou o teorema que diz que qualquer variedade real compacta é difeomórfica a um componente de uma variedade algébrica real. Esse foi um importante resultado que foi publicado em 1952. Nash provou ainda mais o teorema sobre isometrias publicando dois artigos importantes em 1954 e 1956, desenvolvendo seu próprio método de resolver equações diferenciais parciais. Ele também publicou sobre equações parabólicas e elípticas em 1958.

Embora esses resultados notáveis o colocassem em um nível elevado como matemático, ele também tinha uma personalidade agressiva, o que fez com que alguns matemáticos relutassem em tê-lo como colega. Sua situação foi complicada por ele ter sido nomeado para a Medalha Fields em 1958. O comitê da Medalha Fields não tinha informações

suficientes, pois Nash não publicou muito até então, embora seu trabalho já fosse bastante conhecido. O prêmio não foi concedido a Nash, mas ele continuou tendo sucesso em seu trabalho matemático. No entanto, sua personalidade continuava a afastá-lo de outros matemáticos. Além disso, ele também teve problemas pessoais durante esse período. Ele se envolveu com Eleanor Stier e tiveram um filho, John David Stier, nascido em 19 de junho de 1953. Nash não queria se casar com Eleanor e o relacionamento foi complicado. Ele também teve um relacionamento especial com um estudante de pós-graduação, Jack Bricker.

Em fevereiro de 1957, Nash casou-se com Alicia Larde, uma estudante. Em 1958, ela estava grávida, mas, no final do ano, Nash começou a ter sérios problemas mentais. Ele começou a acreditar que todos os homens que usavam gravatas vermelhas eram parte de uma conspiração comunista contra ele. Ele se recusava a assinar documentos, acreditando que estavam conspirando contra ele e, eventualmente, foi internado no Hospital McLean em abril de 1959, diagnosticado com esquizofrenia paranóide. Após sua alta, ele foi morar com sua mãe em West Virginia e em 1960 retornou ao MIT, onde passou a ser cada vez mais perturbado por alucinações. Ele renunciou ao MIT em 1961 e viajou para a Europa, onde tentou renunciar à sua cidadania americana. Sua esposa Alicia conseguiu que ele fosse deportado de volta aos Estados Unidos, onde foi internado novamente no Hospital Trenton State.

Após essa internação, Alicia divorciou-se de Nash em 1963. Apesar da gravidade de sua doença, ele continuou a fazer contribuições matemáticas e, aos poucos, sua condição melhorou. Em 1970, Alicia levou Nash de volta para morar com ela como inquilino e, aos poucos, ele começou a se envolver novamente com a comunidade matemática. Ele frequentava a Universidade de Princeton e participava de seminários, e seu estado mental gradualmente melhorou.

Em 1994, John Nash recebeu o Prêmio Nobel de Ciências Econômicas por seu trabalho em teoria dos jogos. Em 1999, ele foi premiado com o Prêmio Leroy P. Steele pela American Mathematical Society. No ano de 2001, casou-se novamente com Alicia. Em 2015, ele e Louis Nirenberg foram laureados com o Prêmio Abel por suas contribuições às equações diferenciais parciais não lineares e análise geométrica. Tragicamente, alguns dias após receber o Prêmio Abel, Nash e sua esposa Alicia morreram em um acidente de táxi na New Jersey Turnpike.

## 18.1 Referências

1. [https://pt.wikipedia.org/wiki/John\\_Forbes\\_Nash](https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Forbes_Nash)
2. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nash/>

---

## Bibliografia

---

- [Kleiner, 1989] Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4):282–300.
- [Thomas, 2012] Thomas, G. B. (2012). *Cálculo: Volume 1*. Pearson, 12<sup>a</sup> edition.
- [Tikhomirov, 1991] Tikhomirov, V. M. (1991). *Stories about Maxima and Minima*, volume 1 of *Mathematical World*. American Mathematical Society.