

Proposta de disciplina IC-MAT (2025/1)

Nome do professor: Daniele Nantes.

Disciplina: Iniciação Científica em Matemática 1.

Título da proposta: AutoMAT-1: Provadores Automáticos de Teoremas.

1 Objetivos

A integração de tecnologias modernas ao ensino e à prática matemática é um tema cada vez mais presente nas comunidades de matemática, ciência da computação e lógica formal. Em particular, os assistentes de prova — também chamados de provadores formais interativos — vêm desempenhando um papel fundamental na verificação automática e semi-automática de argumentos matemáticos, combinando rigor formal com ferramentas computacionais acessíveis.

Um assistente de prova [1] é um software que permite ao usuário construir interativamente demonstrações formais, assegurando sua correção por meio de verificação automática. Alguns sistemas são especializados em domínios específicos, como geometria euclidiana ou análise de programas, enquanto outros adotam uma abordagem mais geral, baseando-se em lógicas formais robustas que permitem formalizar resultados em diversas áreas da matemática.

O objetivo deste curso de iniciação científica é duplo. Primeiramente, pretende-se introduzir os fundamentos da linguagem formal utilizada em assistentes de prova, com ênfase na lógica matemática como meio de expressão precisa de definições, proposições e demonstrações. Em segundo lugar, o curso visa familiarizar os estudantes com os comandos e metodologias essenciais para a construção e verificação de provas assistidas por computador.

Como parte prática, os estudantes explorarão dois dos principais sistemas utilizados atualmente na comunidade internacional: **Isabelle/HOL** [3], que oferece uma abordagem baseada em lógicas clássicas e tipadas; e **Lean** [2], um provador moderno com forte apoio da comunidade matemática e crescente adoção no ensino e na pesquisa, notadamente em projetos como **The Formal Abstracts Project**[4] e **The Xena Project**[5](Imperial College London).

Este curso está alinhado com iniciativas similares em instituições internacionais, como:

- **Logical Verification** [6] (MIT), que introduz estudantes à lógica e à verificação de provas usando Lean;
- **Interactive Theorem Proving** [7] (Stanford), que usa Coq para ensinar fundamentos de provas formais;
- **Foundations of Mathematics with Proof Assistants** [8] (University of Cambridge), focado no uso de Lean para introdução à lógica e à matemática formalizada;
- **Software Foundations** [9] (INRIA), uma série de cursos baseados em Coq voltados ao ensino de fundamentos formais e verificação de programas.

Ao final do curso, espera-se que os alunos adquiram uma compreensão sólida da linguagem formal usada por provadores interativos e sejam capazes de desenvolver e verificar provas matemáticas elementares com apoio de ferramentas formais. Esse aprendizado estabelece uma base sólida para futuras pesquisas em lógica, matemática formalizada, verificação de software e áreas afins.

1.1 Sumário de Objetivos:

- Introduzir os fundamentos da lógica formal como linguagem para definição e demonstração de resultados matemáticos.
- Ensinar os conceitos e comandos básicos de assistentes de prova para a verificação interativa de teoremas.
- Familiarizar os alunos com os provadores Lean e Isabelle, explorando suas características e aplicações.
- Desenvolver a capacidade de formalizar definições, enunciados e provas em linguagem lógica apropriada.
- Estimular o raciocínio rigoroso e a compreensão estrutural de demonstrações matemáticas.
- Apresentar o papel dos assistentes de prova no ensino, na pesquisa matemática e na verificação de software.

- Preparar os estudantes para futuras atividades de pesquisa em lógica, fundamentos da matemática e métodos formais.

2 Pré-requisitos

A princípio a disciplina não tem pre-requisitos. Mas é desejável que alunos e alunas tenham tido algum contato com as disciplinas básicas de matemática (tais como Cálculo 1, Geometria Analítica, Introdução à Álgebra Linear, Teoria de Números, etc) para compreenderem os exercícios e exemplos.

3 Cronograma

O curso é organizado da seguinte forma:

1. Introdução: Provas Matemáticas e Lógica Simbólica
2. Provadores Interativos de Teoremas: estudos de caso
3. Lógica Proposicional: linguagem e propriedades
4. Definições Indutivas e Funções Recursivas: modelagem na lógica
5. Definições Indutivas e Funções Recursivas: como formalizar e raciocinar automaticamente
6. Exemplos e Exercícios em Isabelle
7. Exemplos e Exercícios em Lean

Referências

- [1] *Proof Assistants and Their Applications in Mathematics and Computer Science*. Jasmin Blanchette and Assia Mahboubi (editors). Springer, 2025.
- [2] *The Lean Theorem Prover*. <https://lean-lang.org>
- [3] *The Isabelle Prover*. <https://lean-lang.org>

- [4] *The Formal Abstracts Project*. <https://formalabstracts.github.io>
- [5] *The Xena Project*. Imperial College London. <https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/>
- [6] *Logic and Proof*. MIT https://leanprover-community.github.io/logic_and_proof/
- [7] *Interactive Theorem Proving with Dependent Types*. <https://www.kth.se/social/group/itp/>
- [8] *Proof Assistants*. University of Cambridge. <https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/2425/L81/>
- [9] *Software Foundations*. INRIA. <https://softwarefoundations.cis.upenn.edu>