

Proposta de disciplina IC-MAT (2026/1)

Nome do professor: Lucas Seco.

Disciplina: Iniciação Científica em Matemática **2**.

Título da proposta: Geometria Projetiva e suas Transformações.

1 Objetivos

Este projeto tem como foco estudar os **Capítulos 13 e 14** do livro *Geometries* de Alexei Sossinsky, que apresenta uma abordagem conceitual e histórica das principais geometrias, enfatizando suas inter-relações e fundamentos. Os referidos capítulos são dedicados, respectivamente, à **Geometria Projetiva** e à **Geometria de Klein** (ou Programa de Erlangen), dois marcos conceituais centrais na compreensão moderna da geometria.

O Capítulo 13 introduz a Geometria Projetiva como a geometria dos raiz de luz, da perspectiva. Já o Capítulo 14 desenvolve a perspectiva de Felix Klein, na qual cada geometria é caracterizada por um grupo de transformações que preserva uma determinada estrutura, estabelecendo um quadro geral que abrange a geometria euclidiana, hiperbólica e elíptica como subgeometrias da projetiva. Vamos investigar isso no caso bidimensional, isto é, mostrar que o plano projetivo “contém” (em um sentido matematicamente bem definido) o plano hiperbólico, o plano elíptico e o plano euclidiano.

Havendo tempo, duas aplicações que podem ser exploradas do ponto de vista projetivo são as cônicas [2] e a continuidade das raízes de um polinômio nos seus coeficientes [3].

Apesar de bastante alardeada, especialmente no contexto de arte renascentista e computação gráfica, a Geometria Projetiva ainda está pouco presente no currículo de graduação da Matemática. Assim, este projeto é voltado para estudantes com interesse em ampliar sua formação teórica e histórica, ao mesmo tempo em que desenvolvem autonomia de estudo e capacidade de argumentação matemática.

2 Objetivos

- Estudar e compreender os conceitos fundamentais dos Capítulos 13 e 14 de Sossinsky.

- Identificar as motivações históricas e matemáticas que levaram à formulação da Geometria Projetiva.
- Relacionar os conceitos estudados com conteúdos tradicionais de Geometria Euclidiana, Ações de Grupos e Álgebra Linear.
- Resolver exercícios e desenvolver pequenos textos explicativos e exposições orais sobre os tópicos abordados.
- Produzir um relatório final sistematizando os resultados e ideias discutidas ao longo do semestre.

2.1 Metodologia

A metodologia adotada será baseada em encontros semanais presenciais de leitura e discussão orientada, com forte participação dos estudantes:

1. **Estudo semanal dirigido:** cada encontro semanal com o professor abordará um assunto dos Capítulos 13 e 14 de [1], consultando as referências de fundamentos [4, 5, 6, 7] quando necessário.

Os estudantes também vão se encontrar presencialmente semanalmente sem o professor, para discutirem entre si os assuntos e organizarem suas demandas.
2. **Apresentações pelos participantes:** cada estudante preparará e apresentará breves exposições sobre temas, teoremas ou exemplos selecionados.
3. **Discussão histórica e conceitual:** destaque para o surgimento histórico da Geometria Projetiva como respostas a limitações da geometria euclidiana.
4. **Exercícios selecionados:** serão resolvidos exemplos e problemas teóricos selecionados.
5. **Relatório final:** ao fim do semestre, os participantes redigirão juntos um texto curto descrevendo os tópicos estudados.

2.2 Pré-requisitos

Familiaridade com os fundamentos de Ações de Grupos e de Álgebra Linear discutidos na proposta do semestre anterior.

3 Cronograma

Mês	Atividades principais
1	Início do estudo do Capítulo 13: conceitos básicos da Geometria Projetiva, pontos no infinito e projeções.
2	Continuação do Capítulo 13: transformações projetivas, incidência e dualidade.
3	Estudo do Capítulo 14: subgeometrias, geometria euclidiana como subgeometria da projetiva
4	Continuação do Capítulo 14: geometria esférica e hiperbólica como subgeometria da projetiva. Revisão geral e elaboração do relatório final.

Referências

- [1] A. Sossinsky. *Geometries*. American Mathematical Society, 2012.
- [2] C. T. de Paula, *Notas Geometria Projetiva*, Pesquisa PET-MAT UnB sob orientação do Prof. Lucas Seco, Setembro, 2020.
- [3] F. Cucker, A. G. Corbalan, *An Alternate Proof of the Continuity of the Roots of a Polynomial*, Am. Math. Monthly **964**, (1989), 342-345.
- [4] H. S. M. Coxeter. *Projective Geometry*. Springer, 2^a edição, 2003.
- [5] E. L. Lima. *Álgebra Linear*. IMPA, 10^a edição, 2020.
- [6] G. Birkhoff, S. MacLane *Álgebra Moderna Básica*. Guanabara Dois, 1980.
- [7] S. Axler. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 3^a edição, 2015.