Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência de soluções positivas ou nodais para problemas assintoticamente lineares

por

Ricardo Ruviaro

Brasília

2011

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência de soluções positivas ou nodais para problemas assintoticamente lineares

por

Ricardo Ruviaro *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

23 de fevereiro de 2011

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Liliane de Almeida Maia-Orientadora (MAT/UnB)

Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes (MAT/USP)

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves (MAT/UFG)

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos (MAT/UnB)

Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva (MAT/UnB)

*O autor foi bolsista do CNPq durante parte da elaboração deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais

Leonildo Ruviaro e Vanir Busatto Ruviaro

E as minhas irmãs

Dulcemári e Vivian Ruviaro

Agradecimentos

À Deus, pelo conforto, equilíbrio, saúde, proteção em todos os momentos da minha vida e por ter dado-me esta oportunidade de obter mais esta conquista.

Aos meus pais Leonido e Vanir pelo dom da vida, apoio, educação e incentivo deles recebido nos momentos mais difíceis e pela paciência e compreensão na minha ausência do convívio familiar.

À minhas irmãs Vivian a Dulcemári pelos conselhos, amor, carinho, paciência, encorajamento e confiança durante todos esses anos.

À minha orientadora Liliane de Almeida Maia, a quem sou eternamente grato por aceitar-me como seu orientando e orientar-me, com muita atenção, dedicação e eficiência. Na verdade, foi muito mais do que uma orientadora e graças ao seu imenso conhecimento matemático, proporcionou-me mais esta conquista, sinto-me honrado em ter sua amizade e de ter tido a honra de ser seu aluno e o privilégio de ter obtido mais essa formação acadêmica sob a sua orientação.

Aos professores da banca examinadora: Orlando Francisco Lopes, José Valdo Abreu Gonçalves, Carlos Alberto Pereira dos Santos, Elves Alves de Barros e Silva e Marcelo Fernandes Furtado pelas correções e sugestões, que fizeram com acuidade, enriquecendo este trabalho.

Aos professores da Pós-Graduação do Departamento de Matemática da UnB, pelas disciplinas que lecionaram, contribuindo para a formação do meu conhecimento e, de certa forma, para o sucesso deste trabalho. Agradeço pelos ensinamentos proporcionados e pelo ambiente científico favorável.

Aos colegas de curso e amigos, pois, mesmo que eu tivesse em minhas mãos todo o perfume das rosas, toda a beleza do céu, toda a grandeza do mar, toda a força das ondas, mesmo que eu tivesse todas as coisas belas da vida e todos os belos lugares do mundo, nada teria sentido se eu não tivesse o presente mais valioso, mais nobre e mais sagrado que Deus pode me dar... a amizade de vocês. Obrigado!

Ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro e a Universidade de Brasília, em particular, à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática por me possibilitar mais esta conquista.

Resumo

No primeiro capítulo, consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u) & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = h(x)|u|^{q-2}u & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $N \geq 3$, $1 \leq q < 2$ e h pertence a um espaço de Lebesgue apropriado. Em nossos principais resultados consideramos f como uma função assintoticamente linear e obtemos multiplicidade de soluções quando a norma de h é "suficientemente pequena". Apresentamos também um resultado de multiplicidade no caso não quadrático no infinito.

No segundo capítulo, estudamos a equação de Schrödinger assintoticamente linear no infinito, dada por

$$\begin{cases} -\Delta u + V_\infty u = K_\infty f(u), & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u(\tau x) = -u(x) \\ u(x) \to 0 \quad \text{se} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{2}$$

em que $N \geq 3$, V_∞, K_∞ são constantes positivas, $f(s) = s^3/(1+s^2)$ e $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma transformação linear ortogonal em $\mathbb{R}^N$ tal que $\tau \neq Id$ e $\tau^2 = Id$, onde Id é o operador identidade de $\mathbb{R}^N$.

Por fim, no terceiro capítulo, consideramos um problema mais geral não autônomo, dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = K(x)f(u), & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u(\tau x) = -u(x) \\ u(x) \to 0 \quad \text{se} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{3}$$

em que $N \geq 3$, e a função f e a involução τ são dadas como no Capítulo 2. Sob certas condições em V e K, mostramos a existência de uma solução τ-antissimétrica não trivial do problema (6), $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ tal que $u(\tau x) = -u(x)$ é solução de (6).

Palavras-Chaves: Teorema do Passo da Montanha; Teorema do Ponto de Sela; Equações de Schrödinger não lineares; Expoente crítico de Sobolev; Variedade de Pohozaev; Princípio de Concentração de Compacidade.

Abstract

In the first chapter we considered the following problem

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f(x,u) \quad \text{on } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= h(x)|u|^{q-2}u \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a smooth bounded domain, $N \geq 3$, $1 \leq q < 2$ and h belongs to an appropriate Lebesgue space. In our main results we considered f as a function asymptotically linear and we obtained multiple solutions, when the norm of h is "sufficiently small ". We also presented a result of multiplicity for the nonquadratic case at infinity.

In the second chapter we studied the asymptotically linear at infinity Schrödinger equation, given by

$$\begin{cases} -\Delta u + V_\infty u &= K_\infty f(u), \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^N \\ u(\tau x) &= -u(x) \\ u(x) \to 0 & \text{if} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{5}$$

where $N \geq 3$, V_∞, K_∞ are positive constants, $f(s) = s^3/(1+s^2)$ and $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ is an orthogonal linear transformation in $\mathbb{R}^N$ such that $\tau \neq Id$ and $\tau^2 = Id$, being Id the identity operator in $\mathbb{R}^N$.

Finally, in the third chapter, we considered a more general non-autonomous problem, given by

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u &= K(x)f(u), \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^N \\ u(\tau x) &= -u(x) \\ u(x) \to 0 & \text{if} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{6}$$

where $N \geq 3$, the function f and the involution τ are as given in Chapter 2. Under certain conditions on V and K, we showed the existence of a nontrivial τ-antisymmetric solution for the problem (6), $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ such that $u(\tau x) = -u(x)$ is a solution for(6).

Keywords: Mountain Pass Theorem; Saddle Point Theorem; Nonlinear Schrödinger Equations; Sobolev Critical Exponent; Pohozaev Manifold; Concentration-Compactness Principle.

Sumário

Introdução

Nosso trabalho está estruturalmente dividido em duas partes. O primeiro capítulo é o estudo de problemas com condição de fronteira não linear e nos Capítulos 2 e 3 estudaremos a existência de soluções antissimétricas da equação de Schrödinger, para os casos assintoticamente lineares no infinito e o caso não autônomo, respectivamente.

O ponto de partida para nosso estudo no Capítulo 1 é um artigo de Ambrosetti, Brezis e Cerami [4], onde considerou-se o seguinte problema:

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda|u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $1 < q < 2$, $2 < p < 2^*$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Entre outros resultados, obteve-se a existência de duas soluções positivas desde que $\lambda > 0$ fosse suficientemente pequeno. Após este trabalho muitos autores têm considerado problemas de Dirichlet com termo côncavo-convexo. Outro artigo nesta mesma linha é o de Li, Wu e Zhou [40], onde estudou-se a seguinte generalização do problema (P_0):

$$\begin{cases} -\Delta u &= h(x)|u|^{q-2}u + f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $1 < q < 2$, $h \in L^\infty(\Omega)$ e f satisfazendo

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = l > \mu_1, \tag{7}$$

em que $\mu_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$. Provou-se a existência de duas soluções não negativas para valores pequenos de $\|h\|_{L^\infty(\Omega)}$. Resultados semelhantes foram recentemente provados para o operador p-Laplaciano por dePaiva em [23].

Em 2004, Garcia Azorero, Peral e Rossi [31], mostraram resultados análogos para o problema não linear substituindo a condição de Dirichlet na fronteira pela condição de

Neumann não linear:

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= |u|^{p-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= \lambda |u|^{q-2}u \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste trabalho, consideramos o seguinte problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= h(x)|u|^{q-2}u \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$ e $\frac{\partial}{\partial \eta}$ é a derivada exterior normal a Ω. A função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory de crescimento subcrítico. Mais precisamente, denotaremos por σ' o expoente de Hölder conjugado de $\sigma > 1$ e assumiremos que as funções f e h satisfazem as seguintes condições

(f_0) existem $2 < p < 2^*$, constante $a_1 > 0$ e função $a \in L^{\sigma_p}(\Omega)$ tais que

$$|f(x,s)| \leq a_1 |s|^{p-1} + a(x), \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

em que $2^* := 2N/(N-2)$ e $\sigma_p := (2^*/p)'$.

Quanto ao termo da fronteira, assumiremos que $1 \leq q < 2$ e

(h_0) $h \in L^{\sigma_q}(\partial\Omega)$, onde $\sigma_q := (2_*/q)'$ e $2_* := 2(N-1)/(N-2)$.

Diremos que f é assintoticamente linear no infinito se existir uma função k tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = k(x).$$

Para o Problema de Dirichlet é bem conhecido (ver [3, 19, 11, 45]) que a existência de solução está relacionada com a interação entre a função limite $k(x)$ e o espectro do operador $(-\Delta + \mathrm{Id})$ em $H_0^1(\Omega)$. No nosso caso, consideraremos o limite assintótico como um peso no problema linear. Introduziremos o seguinte problema de autovalor:

$$(LP) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda k(x) u \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este problema auxiliar aparecerá naturalmente na obtenção de soluções para o problema (P). Para o nosso primeiro resultado, também suporemos que f e a sua primitiva F verificam as seguintes condições:

(f_1) existe $K_0 \in L^r(\Omega)$, $r > \frac{N}{2}$, tal que

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{2F(x,s)}{s^2} = K_0(x), \quad \text{uniformemente q.t.p } x \in \Omega;$$

(f_2) existe $k_\infty \in L^r(\Omega)$ tal que

$$\lim_{s\to \infty} \frac{f(x,s)}{s} = k_\infty(x), \quad \text{uniformemente q.t.p } x \in \Omega.$$

Denotaremos por $g^+(x) := \max\{g(x), 0\}$ a parte positiva de uma função g dada e assim obteremos o nosso primeiro resultado

Teorema 0.1. *Suponha que* (h_0), (f_0), (f_1) *e* (f_2) *com* $\lambda_1(k_\infty) < 1 < \lambda_1(K_0)$ *são válidos, que* $k_\infty(x) \geq 0$ *q.t.p* $x \in \Omega$ *e que*

$(\widehat{f}_0)$ *existem* $b \in L^r(\Omega)$ *e* $c \in L^{(2^*)'}(\Omega)$ *tais que*

$$|f(x,s)| \leq b(x)|s| + c(x), \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,\ s \geq 0.$$

Então existe $m > 0$ *tal que o problema* (P) *tem duas soluções não identicamente nulas sempre que* $0 < \|h^+\|_{L^{\sigma_q}(\partial\Omega)} < m$. *Além disso, se* $1 < q < 2$, *as duas soluções são positivas em* Ω.

Para o nosso próximo resultado permitiremos que a função f seja superlinear no infinito. Então, substituiremos a condição (f_2) por uma condição de não-quadraticidade, condição essa introduzida por Costa e Magalhães em [13]:

(NQ) (i) existem $a_4 \geq 0$ e $\gamma > 0$ tais que

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^\gamma} \leq a_4, \quad \text{uniformemente q.t.p } x \in \Omega;$$

(ii) existem $a_3 > 0$ e $\mu > \max\{2_*, N(\gamma-2)/2\}$ tais que

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{s^\mu} \geq a_3, \quad \text{uniformemente q.t.p } x \in \Omega;$$

(f_3) existe uma constante $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \geq a_2 > 1, \quad \text{uniformemente q.t.p } x \in \Omega;$$

Sob essas condições, provaremos o seguinte resultado de multiplicidade de solução:

Teorema 0.2. *Assumindo* (h_0), (f_0), (f_1) *com* $\lambda_1(K_0) > 1$, (f_3) *e* (NQ), *valem as mesmas conclusões do Teorema 0.1.*

Note que $\lambda_1(1) = 1$ e, portanto, a condição (f_3) está relacionada com o cruzamento do primeiro autovalor quando $s \to \infty$. Além disso, como citado em [13], a condição (NQ)(i) é claramente válida para $\gamma = p$ e pode ser verdade para valores pequenos de γ.

Aplicaremos a Teoria de Pontos Críticos na prova dos nossos teoremas. A ideia principal é, em primeiro lugar, obtermos uma solução $u \in W^{1,2}(\Omega)$ com energia positiva por meio do Teorema do Passo da Montanha. Depois, usaremos um argumento de minimização para obtermos uma outra solução com energia negativa. A condição $\|h^+\|_{L^{\sigma_q}(\Omega)} > 0$ será usada apenas para obtermos a segunda solução $v = v_h$. Assim, poderemos obter alguns resultados de existência, mesmo no caso em que $h \leq 0$ em $\partial\Omega$ (veja a Observação 1.1). Como um subproduto do argumento de minimização, também poderemos mostrar que $v_h \to 0$ em $W^{1,2}(\Omega)$ quando $\|h^+\|_{L^{\sigma_q}(\Omega)} \to 0$ (veja a Observação 1.2).

Nos teoremas 0.1 e 0.2, buscaremos soluções não-negativas, de tal forma que o comportamento de $f(x,s)$ não será importante para valores negativos de s. Em nossos próximos resultados consideraremos novamente o caso assintoticamente linear, mas não estaremos preocupados com o sinal da solução. Então, substituiremos a condição (f_2) pela seguinte condição:

$(\widehat{f_2})$ existe $K_\infty \in L^r(\Omega)$ tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} = K_\infty(x), \quad \text{uniformemente q.t.p } x \in \Omega.$$

A seguir estaremos interessados no caso de ressonância, ou seja, $\lambda_j(K_\infty) = 1$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Neste caso, o funcional associado não satisfará as condições de compacidade habituais. Para superar essa dificuldade, usaremos uma versão da condição de não-quatraticidade de [13] (ver também [29]). Suporemos o seguinte fato:

$(\widehat{NQ})$ existem $\Omega_0 \subset \Omega$ e $d \in L^1(\Omega)$ tais que

(i) $\lim\limits_{|s|\to\infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = +\infty$ uniformemente q.t.p $x \in \Omega_0$,

(ii) $[f(x,s)s - 2F(x,s)] \geq d(x)$, q.t.p $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$.

Denotando-se por $|A|$ a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$, teremos o seguinte resultado de ressonância:

Teorema 0.3. *Assumindo* (h_0), $h \leq 0$ *em* $\partial\Omega$, (f_0) *e* $(\widehat{f_2})$ *com* $\lambda_j(K_\infty) = 1$ *para algum* $j \in \mathbb{N}$, *existe* $0 < \alpha < |\Omega|$ *tal que, se* $(\widehat{NQ})$ *acontece com* $|\Omega_0| > \alpha$, *então o problema* (P) *possui uma solução. Além disso, se* $j = 1$, *o número* α *pode ser tomado igual a zero.*

O teorema acima será provado por meio do Teorema do Ponto de Sela. A restrição no sinal de h é de natureza técnica, no entanto ressaltamos que outros resultados para problemas com um parâmetro negativo no termo côncavo podem ser encontrados em alguns trabalhos anteriores (ver [44, 24] e referências citadas).

Como um subproduto dos cálculos feitos na prova do Teorema 0.3, também poderemos considerar o caso complementar $\lambda_1(K_\infty) > 1$. Neste caso, provaremos que o funcional é coercivo e, portanto, não precisaremos de compacidade e nem de restrições no sinal de h, como veremos no próximo resultado.

Teorema 0.4. *Assumindo* (h_0), (f_0) *e* $(\widehat{f_2})$ *com* $\lambda_1(K_\infty) > 1$, *então o problema* (P) *possui uma solução não trivial.*

Relativamente aos trabalhos [4, 31], é natural perguntar se poderemos obter resultados semelhantes aos de [40] para o problema (P). O resultado principal do nosso trabalho dará uma resposta positiva a esta pergunta. Ressaltamos que as nossas suposições são mais gerais que as de [40]. Na verdade, permitiremos que o limite assintótico da razão $f(x, s)/s$ dependa de x, bem como a função $h(x)$ para a fronteira de Ω. Note que (7) implica claramente o nosso pressuposto técnico $(\widehat{f_0})$ com b, $c \in L^\infty(\Omega)$ (uma condição semelhante já apareceu em [23]). As ideias para lidar com os limites assintóticos interagindo com problemas lineares com peso já têm sido utilizadas em outros trabalhos (ver [21, 28, 23]).

Ressaltamos que o Teorema 0.1 é uma versão mais geral dos Teoremas 1.1 e 1.2 em [40]. Nosso segundo Teorema 0.2 completa e não é comparável com o Teorema 1.3 de [40]. Vale a pena mencionar que, embora o nosso problema seja diferente do considerado em [40], os argumentos aqui desenvolvidos permitirão uma melhoria em todos os resultados daquele trabalho. Além disso, diferentemente dos trabalhos mencionados, também consideraremos aqui os casos ressonante e coercivo. Como um comentário final sobre o Capítulo 1, percebemos que a nossa abordagem nos permitirá obter alguns resultados parciais, mesmo no caso linear $q = 2$ (ver Observações 1.3 e 1.5).

Os Capítulos 2 e 3 versam sobre equações de Schrödinger não lineares

$$\begin{cases} -\triangle u + V_\infty u = K_\infty f(u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \qquad\qquad u(x) \to 0 & \text{se} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{8}$$

e

$$\begin{cases} -\triangle u + V(x)u = K(x)f(u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \qquad\qquad\qquad u(x) \to 0 & \text{se} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{9}$$

em que $N \geq 3$, V_∞, K_∞ são constantes positivas, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfarão certas condições e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(s) = \dfrac{s^3}{1+s^2}$.

As equações (8) e (9) aparecem em várias aplicações na Física-Matemática. Em particular, nos últimos anos, vários autores têm estudado as propriedades de ondas solitárias em meios foto-refrativos, por exemplo Krolikowski em [38], também A. Pankov e V. Rothos [43] e suas referências. Uma equação que descreve a difração conduzida de ondas solitárias espaciais é uma modificação da equação original não-linear de Schrödinger. A equação de evolução das ondas ópticas solitárias espaciais unidimensionais em um meio foto-refrativo baseada no modelo de Vinetskii-Kukhtarev, pode ser escrita por

$$iu_t + u_{xx} + \beta \frac{|u|^2 u}{1+u^2} = 0, \tag{10}$$

onde u é uma variável normalizada. Se ψ é uma solução para a equação (10), sabemos que $\psi = \exp(-iwt)u$, onde supomos que a amplitude u é real. A equação para a amplitude é

$$-\Delta u - wu = f(u),$$

onde

$$f(u) = \frac{\nu u^3}{1+\mu u^2}.$$

Considerando várias hipóteses sobre V, K a existência de soluções positivas tem sido estensivamente estudadas. É sabido que a existência de solução positiva para os problemas do tipo (8) e (9) com potencial e não linearidade periódicos tem sido estudada não só pela importância nas aplicações mas também pelo interesse teórico (ver por exemplo [1] e [15] e como referência adicional Michel Willem [51]).

Sem a condição de periodicidade, em (Berestycki e Lions) [9] encontramos um trabalho pioneiro para esta classe de problemas não lineares no $\mathbb{R}^N$. Em 1983 mostraram, usando minimização com vínculo, a existência de uma solução positiva para o problema (9) em que $K = 1$ e V é uma constante positiva ou $V \equiv 0$ quando $f'(0) = 0$, e f tem crescimento subcrítico no infinito. Destacamos também o trabalho de C. A. Stuart e H. S. Zhou [49] que nos assegura a existência de solução radial positiva para o problema (8), se considerarmos $K_\infty = V_\infty = 1$. No trabalho de P. Bartolo, V. Benci e D. Fortunato [6], os autores estudaram problemas não lineares com "ressonância forte" no infinito, isto é operadores lineares não invertíveis com perturbações "pequenas" no infinito.

Entretanto a existência de solução que muda de sinal foi pouco explorada até o momento. A multiplicidade de soluções para o problema assintoticamente linear foi estuda por D. G. Costa e H. Tehrani em [14] via Passo da Montanha generalizado, mas sem informação sobre o sinal das soluções. Se f tem crescimento superlinear, Ghimenti e Micheletti [32], mostraram a existência de pelo menos um par de soluções τ-antissimétricas para o problema (9) (ver definições no Capítulo 2, em (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4)), considerando $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$ e uma classe de potenciais V apropriada. Maia, Carvalho e Miyagaki em [17] mostraram que o problema

$$\begin{cases} -\triangle u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ u(\tau x) = -u(x) \\ u(x) \to 0 \quad \text{se} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{P_V}$$

onde $N \geq 3$, tem uma solução τ-antissimétrica não trivial, isto é, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ tal que $u(\tau x) = -u(x)$. Além disso, mostram que u é uma solução que muda de sinal exatamente uma vez. Tudo isso, sob certa condições em V e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não linear, com crescimento subcrítico e superlinear quando $|u| \to \infty$, diferentemente do nosso caso.

Inicialmente, estudaremos o problema (8), mais exatamente formularemos um resultado de existência de soluções τ-antissimétricas, onde $N \geq 3$ e $f(s) = \dfrac{s^3}{1+s^2}\cdot$ Para provarmos que o problema (8) tem solução τ-antissimétrica $u(\tau x) = -u(x)$ seguiremos argumentos análogos aos encontrados em Micheletti e Ghimenti [32], Carvalho, Maia e Miyagaki [16, 17] e Furtado, Maia e Medeiros [42]. As duas maiores contribuições do nosso trabalho estão nos fatos de utilizarmos a variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$ em lugar da variedade de Nehari $\mathcal{N}$ e em trabalharmos com a diferença de duas soluções $\bar{u}$ "ground state" $z_y(x) = \bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y)$ sem fazermos qualquer truncamento. A utilidade da variedade de Pohozaev é natural visto que o problema é assintoticamente linear no infinito e a não linearidade f é não homogênea.

Por outro lado, verificamos que os truncamentos utilizados em [32] e [17] não são necessários, visto que a interação entre as soluções $\bar{u}$ tipo solitons tem energia pequena devido ao decaimento exponencial das soluções $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ da equação dada em (8).

Enunciamos a seguir nosso primeiro resultado do Capítulo 2, (ver definições em (2.5) e (2.9)).

Teorema 0.5. *Se $\{u_n\} \subset E^\tau$ é sequência limitada tal que*

$$I_\infty(u_n) \to m_\infty^\tau \quad e \quad I'_\infty|_{E^\tau}(u_n) \to 0,$$

então

i) $u_n \rightharpoonup 0$ *e*

ii) existe $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $|y_n| \to \infty$, *tal que*

$$u_n - [u(\cdot - y_n) + T_\tau u(\cdot - y_n)] \to 0.$$

Além disso, existe uma sequência $\{u_n\} \subset E^\tau$ *nestas condições.*

É importante observarmos que para mostrarmos um resultado como este, em geral, usamos a variedade de Nehari e o fato de que ela é uma restrição natural para o funcional associado. Entretanto, no nosso caso não é possível mostrar um passo fundamental, qual seja que uma sequência minimizante sobre a variedade de Nehari é uma sequência (PS) no espaço todo. Esta dificuldade foi contornada fazendo-se uso da variedade de Pohozaev nos moldes de L. Jeanjean e K. Tanaka em [36], porém com adaptações bastante delicadas para encontrarmos solução que muda de sinal.

Em um segundo momento, no Capítulo 3, trabalharemos com o problema não autônomo dado por:

$$\begin{cases} -\triangle u + V(x)u = K(x)f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ u(\tau x) = -u(x) \\ u(x) \to 0 \quad \text{se} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{11}$$

onde $N \geq 3$, $f(s) = \dfrac{s^3}{1+s^2}$ e V, K são tais que satisfazem as hipóteses:

(V_1) V é contínua e existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$;

(V_2) $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty, \quad V(x) \lneqq V_\infty$;

(V_3) $V(\tau x) = V(x)$;

(K_1) K é contínua e existe $K_0 > 0$ tal que $K(x) \leq K_0$;

(K_2) $\lim\limits_{|x|\to\infty} K(x) = K_\infty, \quad K_\infty \lneqq K(x)$;

(K_3) $K(\tau x) = K(x)$.

Para uma certa constante $\alpha_0 > 0$ definida por (3.8) relacionada ao problema (8), o resultado principal do Capítulo 3 é

Teorema 0.6. *Sejam* V *e* K *satisfazendo* $(V_1) - (V_3)$ *e* $(K_1) - (K_3)$, *respectivamente. Suponha que existe ao menos um número real* $\alpha_1 \geq 0$ *ou* $\alpha_2 \geq 0$, *tal que*

$$(V_4)\ V(x) \leq V_\infty - Ce^{-\alpha_1|x|},\ 0 < \alpha_1 < \alpha_0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, \text{ ou}$$

$$(K_4)\ K(x) \geq K_\infty + Ce^{-\alpha_2|x|},\ 0 < \alpha_2 < \alpha_0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Então existe uma solução τ-antissimétrica não trivial do problema (11)*, isto é, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ tal que $u(\tau x) = -u(x)$ solução de* (11)*.*

Tanto o problema (8) quanto (11) têm uma abordagem variacional. Aqui, estamos considerando V limitado inferiormente. Esta hipótese, juntamente com $(V2)$, nos permitem definir uma norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e considerar o espaço de funções apropriado para obtermos soluções de (8) como também de (11). Uma vez que a imersão de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq p < 2^*$, não é compacta, a nossa principal dificuldade consiste no fato de que o funcional associado não satisfaz uma condição de compacidade. Para superarmos esta dificuldade apresentaremos e provaremos versões do lema de concentração de compacidade de P. L. Lions em [41], aqui chamados de lemas de "splitting", relacionados aos nossos problemas, assim permitindo-nos descrever para quais níveis de energia nosso funcional associado, restrito à variedade considerada, satisfaz a condição de compacidade.

As maiores dificuldades encontradas em nosso trabalho foram estabelecer uma versão do lema de "splitting" para cada um dos problemas estudados e também as comparações de energias.

Finalmente, no apêndice A apresentaremos alguns resultados que serão usados no decorrer dos Capítulos 2 e 3. Entre outros, apresentaremos um lema devido a Stuart [50]. Enunciaremos também uma versão do teorema do Passo da Montanha devido a Ghoussoub-Preiss e apresentaremos ainda uma importante desigualdade dada por Alves, Carrião e Medeiros em [2], que será útil em vários momentos deste trabalho. Verificaremos também a geometria do Passo da Montanha para os funcionais associados às equações em (8) e (11), ainda provaremos que o funcional associado ao problema (11) satisfaz as condições para a existência de uma solução positiva via D. G. Costa e H. Tehrani em [14].

Capítulo

1

Problemas com condição de fronteira não linear

Ao longo deste capítulo, consideraremos que as funções f e h satisfazem (f_0) e (h_0). Denotaremos $\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x$ e $\int_{\partial\Omega} g(x)\mathrm{d}\sigma$ por $\int_\Omega g$ e $\int_{\partial\Omega} g$, respectivamente, onde $\mathrm{d}\sigma$ é a medida na fronteira. Para todo $1 \leq t \leq \infty$, $\|\cdot\|_t$ e $|\cdot|_t$ denotarão as normas de $L^t(\Omega)$ e $L^t(\partial\Omega)$, respectivamente.

Seja H o espaço de Hilbert $W^{1,2}(\Omega)$ com o seguinte produto interno

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv), \quad \text{para todo } u, v \in H,$$

e seja $\|\cdot\|$ a sua norma associada.

Uma vez que estamos interessados primeiramente em soluções positivas, supomos que $f(x,s) = 0$ q.t.p $x \in \Omega$, $s \leq 0$. Decorre de (f_0) e (h_0) que as soluções fracas não negativas de (P) são precisamente os pontos críticos do funcional de classe C^1

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) - \int_\Omega F(x, u^+) - \frac{1}{q}\int_{\partial\Omega} h(x)(u^+)^q, \quad \text{para todo } u \in H.$$

1.1 A Condição de Palais-Smale

Nesta seção verificaremos sob quais condições o funcional I associado ao problema (P) satisfaz a condição de Palais-Smale.

Primeiramente, recordamos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ $(\mathrm{PS})_c$ se toda sequência $\{u_n\} \subset H$ tal que $I(u_n) \to c$ e $\|I'(u_n)\|_{H'} \to 0$ contém uma subsequência convergente, em que $\|I'(u)\|_{H'}$ denota a norma da derivada de Frechét $I'(u)$ no espaço dual H'.

Lema 1.1. *Assuma que f satisfaz $(\widehat{f_0})$ e (f_2) com $\lambda_1(k_\infty) < 1$. Então o funcional I satisfaz a condição (PS)$_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset H$ uma sequência tal que $I(u_n) \to c$ e $\|I'(u_n)\|_{H'} \to 0$. Como f tem crescimento subcrítico e $q < 2_*$, pelas imersões compactas de Sobolev é suficiente mostrarmos que $\{u_n\}$ é limitada. Assim supomos, por contradição, que a menos de subsequência $\|u_n\| \to \infty$ e definimos $v_n := \dfrac{u_n^+}{\|u_n\|}$.
Desde que $r > N/2$, podemos escolher $2 < t < 2^*$ tal que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2^*} = 1. \tag{1.1}$$

Assim, a menos de subsequência, temos que

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v \text{ fracamente em } H, \\ v_n \to v \text{ fortemente em } L^t(\Omega), \\ v_n(x) \to v(x), \ |v_n(x)| \leq \psi_t(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

para alguma função não negativa $v \in H$ e $\psi_t \in L^t(\Omega)$.

Da limitação de $\{v_n\}$ e $I'(u_n) \to 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \frac{I'(u_n)(v_n - v)}{\|u_n\|} \qquad (1.3)\\ &= \langle v_n, v_n - v\rangle - \frac{1}{\|u_n\|}\int_\Omega f(x, u_n^+)(v_n - v) - \frac{1}{\|u_n\|}\int_{\partial\Omega} h(x)(u_n^+)^{q-1}(v_n - v), \end{aligned}$$

onde $o_n(1)$ denota uma quantidade que tende a zero quando $n \to \infty$. Agora, usando a imersão no sentido do traço, (ver [39]), juntamente com a desigualdade de Hölder com expoentes σ_q, $2_*/(q-1)$ e 2_*, provamos que

$$\frac{1}{\|u_n\|}\int_{\partial\Omega} |h(x)||u_n^+|^{q-1}|v_n - v| = \frac{1}{\|u_n\|^{2-q}}\int_{\partial\Omega} |h(x)||v_n|^{q-1}|v_n - v|$$

$$\leq \frac{1}{\|u_n\|^{2-q}}\left(\int_{\partial\Omega} |h(x)|^{\frac{2_*}{2_*-q}}\right)^{\frac{2_*-q}{2_*}}\left(\int_{\partial\Omega} |v_n|^{2_*}\right)^{\frac{q-1}{2_*}}\left(\int_{\partial\Omega} |v_n - v|^{2_*}\right)^{\frac{1}{2_*}}$$

$$= \frac{1}{\|u_n\|^{2-q}} | h |_{\sigma_q} | v_n |_{2_*}^{q-1} | v_n - v |_{2_*} = o_n(1),$$

e portando, desde que $1 < q < 2$, podemos deduzir de (1.3) que

$$\langle v_n, v_n - v\rangle = \frac{1}{\|u_n\|}\int_\Omega f(x,u_n^+)(v_n - v) + o_n(1). \tag{1.4}$$

Decorre de $(\widehat{f_0})$ e da desigualdade de Hölder, com expoentes como dados em (1.1), que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|u_n\|}\int_\Omega f(x,u_n^+)(v_n - v) &\leq \int_\Omega b(x)|v_n||v_n - v| + \frac{1}{\|u_n\|}\int_\Omega c(x)|v_n - v| \\ &\leq \|b\|_r\|v_n\|_{2^*}\|v_n - v\|_t + \frac{1}{\|u_n\|}\|c\|_{(2^*)'}\|v_n - v\|_{2^*} \\ &= o_n(1),\end{aligned}$$

onde usamos (1.2) e $\|u_n\| \to \infty$ na última desigualdade. Com este fato e (1.4), temos que $\langle v_n, v_n - v\rangle = o_n(1)$, e como $\langle v, v_n - v\rangle = o_n(1)$ segue que $v_n \to v \in H \setminus \{0\}$ forte em H.

Consideremos agora $\phi \in H$ fixada. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned}\left|f(x,u_n^+)\frac{\phi}{\|u_n\|}\right| &\leq b(x)|v_n||\phi| + \frac{1}{\|u_n\|}c(x)|\phi| \\ &\leq b(x)\psi_t(x)|\phi| + c(x)|\phi|,\end{aligned} \tag{1.5}$$

onde a função do lado direito da última desigualdade dada em (1.5) pertence ao espaço $L^1(\Omega)$. A primeira estimativa em (1.5) implica que $f(x,u_n^+(x))\phi(x)/\|u_n\| \to 0$ em quase todo ponto do conjunto $\{x \in \Omega : v(x) = 0\}$. Por outro lado, no conjunto $\{x \in \Omega : v(x) > 0\}$, podemos usar (f_2) e a definição de v_n para obtermos

$$f(x,u_n^+(x))\frac{\phi(x)}{\|u_n\|} = \frac{f(x,u_n^+(x))}{u_n^+(x)}v_n(x)\phi(x) \to k_\infty(x)v(x)\phi(x), \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Assim, segue de (1.5) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x,u_n^+)\frac{\phi}{\|u_n\|} = \int_\Omega k_\infty(x)v(x)\phi(x).$$

Relembrando que $I'(u_n)\phi/\|u_n\| \to 0$ e argumentando como na primeira parte da prova, concluímos que a função v é uma solução fraca do seguinte problema:

$$-\Delta v + v = k_\infty(x)v \quad \text{em } \Omega.$$

Desde que $v \not\equiv 0$ e $k_\infty(x)v(x) \geq 0$ q.t.p em Ω, decorre do Princípio de Máximo (cf. [34, Teorema 8.19]) que $v > 0$ em Ω. Mas isto implica que $\lambda_1(k_\infty) = 1$, o que contradiz a hipótese. Esta contradição decorre de supormos que $\{u_n\}$ teria subsequência ilimitada.

Portanto, $\{u_n\}$ é limitada. $\square$

1.2 Demonstração do Teorema 0.1

Nos dois resultados a seguir verificaremos as condições geométricas para a aplicação do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 1.2. *Suponha que f satisfaz (f_1) com $\lambda_1(K_0) > 1$. Então existem $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$, para todo $u \in H$ com $\|u\| = \rho$, desde que $|h^+|_{\sigma_q}$ seja suficientemente pequeno.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, pela hipótese (f_1) existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(K_0(x) + \varepsilon)s^2, \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,\ 0 \leq s \leq \delta.$$

Por (f_0), existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$F(x,s) \leq c_1|s|^p + c_2 a(x)|s|^p, \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,\ s \geq \delta.$$

Assim, para alguma função $\widehat{a} \in L^{\sigma_p}(\Omega)$, obtemos que

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(K_0(x) + \varepsilon)s^2 + \widehat{a}(x)|s|^p, \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,\ s \geq 0. \tag{1.6}$$

Por (1.6), pela caracterização variacional de $\lambda_1(K_0)$, pelas imersões de Sobolev como dadas em [39] e pela desigualdade de Hölder provamos que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega K_0(x)u^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega \widehat{a}(x)|u|^p - \frac{1}{q}\int_{\partial\Omega} h^+(x)(u^+)^q \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1(K_0)} - \varepsilon\right)\|u\|^2 - c_3\|\widehat{a}\|_{\sigma_p}\|u\|^p - \frac{1}{q}\left(\int_{\partial\Omega}(h^+(x))^{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{\sigma_p}}\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{2_*}\right)^{\frac{q}{2_*}} \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1(K_0)} - \varepsilon\right)\|u\|^2 - c_3\|\widehat{a}\|_{\sigma_p}\|u\|^p - c_4|h^+|_{\sigma_q}\|u\|^q. \end{aligned}$$

Logo, se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, obtemos que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq c_0\|u\|^2 - c_5\|u\|^p - c_4|h^+|_{\sigma_q}\|u\|^q \\ &= \|u\|^2(c_0 - c_5\|u\|^{p-2} - c_4|h^+|_{\sigma_q}\|u\|^{q-2}), \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde c_4, $c_5 > 0$ e $c_0 := \dfrac{1}{2}(1 - 1/\lambda_1(K_0) - \varepsilon) > 0$. Considerando a função g dada por

$$g(t) = c_5 t^{p-2} + c_4 |h^+|_{\sigma_q} t^{q-2} \quad t \geq 0,$$

queremos encontrar um $t > 0$ tal que $g(t) < c_0$. Para tal, encontraremos o ponto onde g assume o seu menor valor. Observamos que g diferenciável em $(0, \infty)$ e

$$g'(t) = c_5(p-2)t^{p-3} + c_4(q-2)|h^+|_{\sigma_q} t^{q-3}.$$

Fazendo $g'(t_0) = 0$, temos

$$c_5(p-2)t_0^{p-3} + c_4(q-2)|h^+|_{\sigma_q} t_0^{q-3} = 0,$$

assim

$$t_0 = \left(\frac{c_4(2-q)|h^+|_{\sigma_q}}{c_5(p-2)} \right)^{\frac{1}{p-q}} = (c_6 |h^+|_{\sigma_q})^{\frac{1}{p-q}},$$

onde $c_6 = \dfrac{c_4(2-q)}{c_5(p-2)}\cdot$ Então g atinge o seu valor de mínimo em t_0, pois como $1 < q < 2 < p$ temos que

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = +\infty \quad e \quad \lim_{t \to 0^+} g(t) = +\infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g(t_0) &= c_4 |h^+|_{\sigma_q} (c_6 |h^+|_{\sigma_q})^{\frac{q-2}{p-q}} + c_5 (c_6 |h^+|_{\sigma_q})^{\frac{p-2}{p-q}} \\ &= c_4 c_6^{\frac{q-2}{p-q}} |h^+|_{\sigma_q}^{\frac{q-2}{p-q}} + c_5 c_6^{\frac{p-2}{p-q}} |h^+|_{\sigma_q}^{\frac{p-2}{p-q}} \\ &= \left(c_4 c_6^{\frac{q-2}{p-q}} + c_5 c_6^{\frac{p-2}{p-q}} \right) |h^+|_{\sigma_q}^{\frac{q-2}{p-q}} \\ &= c_7 |h^+|_{\sigma_q}^{\frac{q-2}{p-q}}, \end{aligned}$$

onde $c_7 = c_7(p, q, k_0, f, N, \Omega) = \left(c_4 c_6^{\frac{q-2}{p-q}} + c_5 c_6^{\frac{p-2}{p-q}} \right)$ e $\dfrac{p-2}{p-q} > 0$ desde que $1 < q < 2 < p$. Assim, $g(t_0) < c_0$ se e somente se, $c_7 |h^+|_{\sigma_q}^{\frac{q-2}{p-q}} < c_0$, ou seja, se $|h^+|_{\sigma_q} < \left(\dfrac{c_0}{c_7} \right)^{\frac{p-q}{p-2}} := m$. Assumindo que $|h^+|_{\sigma_q} < m$ e tomando $\rho = t_0$, temos para $\|u\| = \rho$ que

$$I(u) \geq (c_0 - g(t_0)) t_0^2 = \alpha > 0.$$

$\square$

Lema 1.3. *Suponha que as hipóteses do Lema 1.2 ocorrem e seja $\rho > 0$ como obtido no mesmo. Se a função f satisfaz (f_2) com $\lambda_1(k_\infty) < 1$, então existe $e \in H \setminus \overline{B}_\rho(0)$ tal que $I(e) < 0$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ e utilizando (f_0) e (f_2), obtemos

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(k_\infty(x) - \varepsilon)s^2 - \widehat{a}(x), \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,\ s \geq 0, \tag{1.8}$$

para alguma função $\widehat{a} \in L^{\sigma_p}(\Omega)$.

Seja $\varphi_1 := \varphi_1(k_\infty) > 0$ a primeira auto função associada ao problema linear (LP) com peso k_∞ em lugar de $k(x)$. Logo, de posse deste fato e (1.8), temos que

$$I(t\varphi_1) \leq \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{t^2}{2}\int_\Omega (k_\infty(x) - \varepsilon)\varphi_1^2 + \|\widehat{a}\|_1 - \frac{t^q}{q}\int_{\partial\Omega} h(x)(\varphi_1)^q.$$

Agora, desde que $\lambda_1(k_\infty)\displaystyle\int_\Omega k_\infty(x)\varphi_1 = \|\varphi_1\|^2$ e $1 \leq q < 2$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} &\leq \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (k_\infty(x) - \varepsilon)\varphi_1^2 + \frac{1}{t^2}\|\widehat{a}\|_1 - \frac{t^{q-2}}{q}\int_{\partial\Omega} h(x)(\varphi_1)^q \\
&\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1(k_\infty)} + \varepsilon\right)\|\varphi_1\|^2 + o_t(1),
\end{aligned}$$

quando $t \to \infty$. Como $\lambda_1(k_\infty) < 1$, e tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, concluímos que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{I(t\varphi_1)}{t^2} < 0.$$

Portanto, agora considerando $e := t\varphi_1$ com $t > 0$ suficientemente grande, temos o desejado. □

A seguir faremos a prova do teorema 0.1.

Denonstração do Teorema 0.1. Como provamos no Lema 1.2, existe $m > 0$ tal que a conclusão do lema é verificada quando $|h^+|_{\sigma_q} < m$. Segue pelos Lemas 1.2, 1.3 e o Teorema do Passo da Montanha [5], que I possui um ponto crítico u, tal que $I(u) \geq \alpha > 0$.

Para obter a segunda solução, usaremos um argumento de minimização. Seja $\rho > 0$ como dado pelo Lema 1.2 e considere $\{v_n\} \subset \overline{B_\rho(0)}$ tal que

$$I(v_n) \to d := \inf_{\overline{B_\rho(0)}} I < \infty. \tag{1.9}$$

Temos que $v_n \rightharpoonup v \in \overline{B_\rho(0)}$ fracamente em H. Porém, do fato de que I é fracamente semi contínuo inferiormente, juntamente com $p < 2^*$ e $q < 2_*$, concluímos que $I(v) \leq \liminf_{n\to\infty} I(v_n) \to d$ e portanto $I(v) = d$.

Afirmamos que $d < 0$. Se isto for verdadeiro podemos usar o Lema 1.2 e inferir que $v \in B_\rho(0)$ e portanto, que $I'(v) = 0$ e $I(v) < 0$.

A fim de provar a nossa afirmação, consideramos $\phi \in H$ tal que $\int_{\partial\Omega} h(x)(\phi^+)^q > 0$. Argumentando como em (1.6) obtemos

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(K_0(x) - \varepsilon)s^2 - \widehat{a}(x)|s|^p, \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,\ s \geq 0,$$

com $\widehat{a} \in L^{\sigma_p}(\Omega)$. Desta forma, para todo $t > 0$, temos que

$$I(t\phi) \leq \frac{t^2}{2}\left(\|\phi\|^2 - \int_\Omega (K_0(x) - \varepsilon)(\phi^+)^2\right) + t^p \int_\Omega \widehat{a}(x)(\phi^+)^p - \frac{t^q}{q}\int_{\partial\Omega} h(x)(\phi^+)^q.$$

Desde que $q < 2 < p$, concluímos que

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{I(t\phi)}{t^q} \leq -\int_{\partial\Omega} h(x)(\phi^+)^q < 0,$$

e portanto $I(t\phi) < 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno. Isto implica que $d < 0$, como tinhamos afirmado.

Verificaremos agora que as soluções obtidas são positivas se $1 < q < 2$. De fato, para a primeira solução u, temos

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) = \int_\Omega f(x, u^+)\varphi + \int_{\partial\Omega} h(x)(u^+)^{q-1}\varphi, \quad \text{para toda } \varphi \in H.$$

Assim, podemos tomar $\varphi = u^- := \max\{-u, 0\}$ e lembrando que $f(x,s) = 0$ para $s \leq 0$, concluímos que $\|u^-\| = 0$. Desta forma, temos que $u \geq 0$ em Ω e portanto decorre do Princípio do Máximo que $u > 0$ em Ω. O argumento para mostrar que a segunda solução v é positiva, segue de maneira análoga. $\square$

1.3 A Condição de Cerami

Nesta seção verificaremos sob quais condições o funcional I associado ao problema (P) satisfaz a condição de Cerami.

Neste momento consideraremos o caso não quadrático dado pela condição (NQ). Usaremos também uma condição de compacidade mais fraca do que a condição de Palais-Smale. Assim, lembramos que I satisfaz a condição de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{Ce})_c$ se toda sequência $\{u_n\} \subset H$ tal que $I(u_n) \to c$ e $(1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{H'} \to 0$, possui uma subsequência convergente.

Lema 1.4. *Se a condição de (NQ) ocorrer, então I satisfaz a condição de $(Ce)_c$ para todo nível $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. A prova segue nas mesmas linhas de [13, Lema 1]. Seja $\{u_n\} \subset H$ tal que $I(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ e $(1 + \|u_n\|)\|I^{'}(u_n)\|_{H'} \to 0$. Decorre de (f_0) e (NQ)(ii) que

$$c_1|s|^\mu - \widehat{a}(x) \leq f(x,s)s - 2F(x,s), \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,\ s \geq 0, \tag{1.10}$$

para algum $c_1 > 0$ e $\widehat{a} \in L^{\sigma_p}(\Omega)$. Supondo que $2_* \leq \mu \leq 2^*$, pela desigualdade de Hölder e imersões, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} h(x)(u_n^+)^q &\leq \left(\int_{\partial\Omega} (h(x))^{\frac{2_*}{2_*-q}}\right)^{\frac{2_*-q}{2_*}} \left(\int_{\partial\Omega} |u|^{2_*}\right)^{\frac{q}{2_*}} \\ &= |h|_{\sigma_q}\|u_n\|_{2_*}^q \\ &\leq c_2\|u_n\|_\mu^q, \end{aligned} \tag{1.11}$$

com $c_2 > 0$. Pelas desigualdades (1.10) e (1.11), e por termos $1 \leq q < 2$, temos para $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned} 2c + 1 > 2I(u_n) - I'(u_n)u_n &= \int_\Omega \left(f(x,u_n^+)u_n^+ - 2F(x,u_n^+)\right) + \left(\frac{q-2}{q}\right)\int_{\partial\Omega} h(x)(u_n^+)^q \\ &\geq c_1\|u_n\|_\mu^\mu - \|\widehat{a}\|_1 - c_3\|u_n\|_\mu^q, \end{aligned}$$

com $c_3 > 0$. Recordando que $\mu \geq 2_* > 2 > q$, concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em $L^\mu(\Omega)$.

Por outro lado, utilizando a condição de (NQ)(i), existem uma constante $c_4 > 0$ e uma função $\widetilde{a} \in L^{\sigma_p}(\Omega)$ tais que

$$F(x,s) \leq c_4 s^\gamma + \widetilde{a}(x), \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,\ s \geq 0. \tag{1.12}$$

De definição do funcional I, temos que

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 = I(u_n) + \int_\Omega F(u_n) + \frac{1}{q}\int_{\partial\Omega} h(x)(u_n^+)^q \tag{1.13}$$

Agora, usando o fato que $I(u_n) \to c$, (1.12), (1.13), a desigualdade de interpolação, a desigualdade de Hölder, as imersões de Sobolev e a limitação de $\{u_n\}$ em $L^\mu(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_n\|^2 &\leq c + o_n(1) + c_4\|u_n\|_\gamma^\gamma + \|\widetilde{a}\|_1 + \frac{1}{q}\int_{\partial\Omega} h(x)(u_n^+)^q \\
&\leq c_5 + c_4\int_\Omega |u_n|^\gamma + \frac{1}{q}\left(\int_{\partial\Omega}(h(x))^{\sigma_q}\right)^{\frac{1}{\sigma_q}}\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{2_*}\right)^{\frac{q}{2_*}} \\
&= c_5 + c_4\int_\Omega |u_n|^{\gamma t}|u_n|^{(1-t)\gamma} + \frac{1}{q}\|h\|_{\sigma_q}\|u_n\|_{2_*}^q \\
&\leq c_5 + c_4\left(\int_\Omega |u_n|^\mu\right)^{\frac{\gamma t}{\mu}}\left(\int_\Omega |u_n|^{2^*}\right)^{\frac{\gamma(1-t)}{2^*}} + c_6\|h\|_{\sigma_q}\|u_n\|^q \\
&\leq c_5 + c_4\|u_n\|_\mu^{\gamma t}\|u_n\|_{2^*}^{\gamma(1-t)} + c_6\|h\|_{\sigma_q}\|u_n\|^q \\
&\leq c_5 + c_7\|u_n\|^{(1-t)\gamma} + c_6\|h\|_{\sigma_q}\|u_n\|^q,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

com $c_5,\ c_6,\ c_7 > 0$ e $t \in [0,1]$ satisfazendo

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1-t}{2^*} + \frac{t}{\mu}\cdot \tag{1.15}$$

Mostraremos que $(1-t)\gamma < 2$. De fato, por $(NQ)(i)$ temos que

$$\frac{N(\gamma-2)}{2} < \mu,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\frac{(\gamma-2)}{\mu} < \frac{2}{N} = 1 - \frac{N-2}{N} = 1 - \frac{2}{2^*} \quad &\Leftrightarrow \\
\frac{\gamma}{\mu} - \frac{2}{\mu} < 1 - \frac{2}{2^*} \quad &\Leftrightarrow \\
\frac{\gamma}{\mu} - 1 < \frac{2}{\mu} - \frac{2}{2^*},&
\end{aligned}$$

assim

$$(1-t)\gamma = \frac{\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\gamma}\right)\gamma}{\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2^*}\right)} = \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}-1\right)}{\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2^*}\right)} < 2.$$

Usando (1.15) segue que

$$t = \frac{\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2^*}\right)}{\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2^*}\right)}\cdot$$

De fato, de (1.15), temos que

$$\frac{1}{\gamma} = t\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2^*}\right) + \frac{1}{2^*} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2^*} = t\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2^*}\right),$$

logo

$$t = \frac{\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2^*}\right)}{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2^*}\right)}.$$

Portanto $\{u_n\}$ é limitada em H e o resultado segue. $\square$

1.4 Demonstração do Teorema 0.2

Esta seção será dedicada à demonstração do Teorema 0.2.

Demonstração do Teorema 0.2. Argumentando como na prova do Teorema 0.1, obtemos $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$, para todo $u \in H$ com $\|u\| = \rho$, desde que a norma de $|h^+|_{\sigma_q}$ seja suficientemente pequena.

Dado $\varepsilon > 0$ e usando (f_3) e (f_0), obtemos

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(a_2 - \varepsilon)s^2 - \widehat{a}(x), \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,\ s \geq 0, \tag{1.16}$$

com $a_2 > 1$ e $\widehat{a} \in L^{\sigma_p}(\Omega)$. Desta forma, para todo $t > 0$, temos pela definição do funcional I e (1.16) que

$$I(t) \leq \frac{t^2}{2}|\Omega|(1 - a_2 + \varepsilon) + \|\widehat{a}\|_1 - \frac{t^q}{q}\int_{\partial\Omega} h(x).$$

Considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e usando o fato que $1 \leq q < 2$ e $a_2 > 1$, obtemos

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{I(t)}{t^2} < 0.$$

Portanto, se denotarmos por e a função constante $e(x) = t$ para $t > 0$ suficientemente grande, concluímos que $I(e) < 0$ e $\|e\| > \rho$.

Decorre do Lema 1.4, juntamente com as considerações acima do Teorema do Passo da Montanha em [5] que I possui um ponto crítico $u \in H$ não nulo, tal que $I(u) \geq \alpha > 0$. A segunda solução pode ser obtida por minimização como foi feito no Teorema 0.1. Além disto, se $1 < q < 2$, temos que as soluções são positivas em Ω. $\square$

Observação 1.1. *Na prova dos Teoremas 0.1 e 0.2, a condição $|h^+|_{\sigma_q} > 0$ foi apenas utilizada para mostrarmos que o ínfimo dado em (1.9) era negativo. Contudo, se $h \leq 0$ na $\partial\Omega$, podemos proceder como acima, e obter uma solução não trivial para o problema. De fato, basta notar que, neste caso, podemos argumentar como feito na primeira parte* *da prova do Lema 1.2, para obtermos*

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1(K_0)} - \varepsilon\right)\|u\|^2 - c_3\|\widehat{a}\|_{\sigma_p}\|u\|^p, \tag{1.17}$$

onde usamos o fato de que $h(x)(u^+)^q \leq 0$ na $\partial\Omega$. Como $p > 2$, por (1.17), temos que a origem é um mínimo local para I. Desta forma, podemos fazer o mesmo procedimento, como feito anteriormente, para obtermos uma solução $u \in H$ tal que $I(u) > 0$.

Observação 1.2. *Como em [20], podemos estudar o comportamento assintótico da segunda solução $v = v_h$, obtendo assim os Teoremas 0.1 e 0.2. Observamos que a solução $v_h \in B_\rho(0)$, com $\rho = |h^+|_{\sigma_q}^t$ dado pelo Lema 1.2. Desta forma, temos que $v_h \to 0$ quando $|h^+|_{\sigma_q} \to 0$.*

Observação 1.3. *Finalmente, apontaremos alguns resultados para o caso $q = 2$. Desta forma, assumiremos este fato e assumiremos também que as condições do Teorema 0.1 ocorrem. A prova do Lema 1.1 pode ser feita da mesma maneira. No Lema 1.2, a expressão (1.7) torna-se*

$$I(u) \leq \left(\frac{\nu}{2} - c_4|h^+|_{\sigma_2}\right)\|u\|^2 - c_5\|u\|^p,$$

e, portanto, o Lema é válido para valores pequenos de $|h^+|_{\sigma_2}$. Além disso o Lema 1.3 é válido se supusermos que $h \geq 0$ em $\partial\Omega$. Desta forma temos que

$$\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} \leq \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (k_\infty(x) - \varepsilon)\varphi_1^2 + \frac{1}{t^2}\|\widehat{a}\|_1.$$

Assim, podemos usar o Teorema do Passo da Montanha para obtermos uma solução positiva, com energia positiva. Quanto ao Teorema 0.2, para o caso $q = 2$, observamos que a expressão (1.14) torna-se

$$\left(\frac{1}{2} - c_6|h|_{\sigma_2}\right)\|u_n\|^2 \leq c_5 + c_7\|u_n\|^{\gamma(1-t)}.$$

Assim, se procedermos como acima, obteremos uma solução positiva se supusermos que $|h|_{\sigma_2}$ for suficientemente pequena.

A seguir daremos as provas para os Teoremas 0.3 e 0.4. Como não procuramos por soluções com sinal, consideraremos agora o funcional I como

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) - \int_\Omega F(x,u) - \frac{1}{q}\int_{\partial\Omega} h(x)|u|^q.$$

1.5 A Condição de Cerami sob outras hipóteses

Nesta seção verificaremos que sob outras condições o funcional I associado ao problema (P), ainda satisfaz a condição de Cerami.

Primeiramente, mostraremos que a condição de não quadraticidade $(\widehat{NQ})$ é suficiente para obtermos a compacidade, desde que a função h seja não positiva.

Lema 1.5. *Suponha que f satisfaz $(\widehat{f_2})$ e $h \leq 0$ na $\partial\Omega$. Então, existe $0 < \alpha < |\Omega|$ tal que, se $(\widehat{NQ})$ ocorre com $|\Omega_0| > \alpha$, então I satisfaz $(Ce)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset H$ tal que $I(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ e $(1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{H'} \to 0$. Como no Lema 1.1, é suficiente verificarmos que $\{u_n\}$ possui uma subsequência limitada.

Seja $G(x,s) := f(x,s)s - 2F(x,s)$ e usando $(\widehat{NQ})$ com $h \leq 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega G(x,u_n) &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left(G(x,u_n) + \frac{(q-2)}{q} h(x)|u_n|^q \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (2I(u_n) - I'(u_n)u_n) = 2c. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, decorre de $(\widehat{f_2})$ e (f_0) que

$$\frac{1}{2}(K_\infty(x) - \varepsilon)s^2 - \widehat{a}(x) \leq F(x,s) \leq \frac{1}{2}(K_\infty(x) + \varepsilon)s^2 + \widehat{a}(x), \tag{1.19}$$

q.t.p $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$ e alguma função $\widehat{a} \in L^{\sigma_p}(\Omega)$. De (1.19) e do fato que $2I(u_n) \to 2c$ segue que

$$\|u_n\|^2 \leq \int_\Omega K_\infty(x)u_n^2 + \varepsilon \int_\Omega u_n^2 + \frac{2}{q}\int_{\partial\Omega} |h(x)||u_n|^q + c_1 + o_n(1), \tag{1.20}$$

onde $c_1 = 2c + 2\|\widehat{a}\|_1$. Se definirmos $v_n := \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, a menos de subsequências ocorrem

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v & \text{fracamente em } H, \\ v_n \to v & \text{forte em } L^2(\Omega) \text{ e } L^t(\Omega), \\ v_n(x) \to v(x), & |v_n(x)| \leq \psi_t(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.21}$$

para algum $v \in H$ e $\psi_t \in L^t(\Omega)$, onde $t > 1$ satisfaz (1.1).

Agora dividimos (1.20) por $\|u_n\|^2$, usamos a desigualdade de Hölder com a imersão de Sobolev e obtemos

$$1 \leq \int_\Omega K_\infty(x)v_n^2 + \varepsilon \int_\Omega v_n^2 + c_2 |h|_{\sigma_q} \|u_n\|^{q-2} + o_n(1). \tag{1.22}$$

Observamos que por (1.1), temos

$$\left|\int_\Omega K_\infty(x)(v_n^2 - v^2)\right| \leq \|K_\infty\|_r \|v_n - v\|_t \|v_n - v\|_{2^*},$$

e portanto, inferimos de (1.21) que $\int_\Omega K_\infty(x)v_n^2 \to \int_\Omega K_\infty(x)v^2$ quando $n \to \infty$. Desta forma, usando que $1 \leq q < 2$ e tomando o limite quando $n \to \infty$ e, $\varepsilon \to 0$ em (1.22) obtemos

$$1 \leq \int_\Omega K_\infty(x)v^2. \tag{1.23}$$

Afirmamos que se $|\Omega \setminus \Omega_0|$ é pequena, existe $\widetilde{\Omega} \subset \Omega_0$ com medida positiva, tal que $v(x) \neq 0$ q.t.p. em $\widetilde{\Omega}$. Assim, $|u_n(x)| \to \infty$ q.t.p $x \in \widetilde{\Omega}$ e usando que $h \leq 0$, $(\widehat{NQ})$ e o Lema de Fatou, obtemos

$$2c \geq \liminf \int_\Omega G(x, u_n) \geq \int_\Omega \liminf G(x, u_n) = \infty, \tag{1.24}$$

o que contradiz (1.18). Assim, a sequência $\{u_n\}$ é limitada e o Lema esta provado. A fim de provarmos a nossa afirmação, consideramos $S := \inf\{\|u\|^2 : u \in H,\ \|u\|_{2^*} = 1\}$, $t_0 > 1$ fixo, tal que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{2^*/2} + \frac{1}{t_0} = 1$$

e consideramos

$$\alpha := |\Omega| - \left(\frac{S}{\|K_\infty\|_r}\right)^{t_0} > 0. \tag{1.25}$$

Argumentando por contradição, supomos que $v(x) = 0$ q.t.p $x \in \Omega_0$. Com a expressão (1.23), a desigualdade de Hölder e a definição de S provamos que

$$\begin{aligned}
1 \leq \int_{\Omega\setminus\Omega_0} K_\infty(x)v^2 &\leq \left(\int_{\Omega\setminus\Omega_0} K_\infty^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\Omega\setminus\Omega_0} v^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_{\Omega\setminus\Omega_0} 1\right)^{\frac{1}{t_0}} \\
&= \|K_\infty\|_{L^r(\Omega\setminus\Omega_0)} \|v\|_{2^*}^2 |\Omega\setminus\Omega_0|^{\frac{1}{t_0}} \\
&\leq \frac{1}{S} \|K_\infty\|_r |\Omega\setminus\Omega_0|^{\frac{1}{t_0}} < 1,
\end{aligned}$$

sempre que $|\Omega_0| > \alpha$ em (1.25). Com esta contradição concluímos a prova. □

Observação 1.4. *Se $\lambda_1(K_\infty) = 1$ o resultado acima também é válido para $\alpha = 0$, isto é, a condição $(\widehat{NQ})$ com nenhuma restrição na medida positiva de Ω_0 é suficiente para* *obtermos compacidade. Na verdade, este caso decorre de (1.23) visto que*

$$1 \leq \int_\Omega K_\infty(x)v^2 = \lambda_1(K_\infty)\int_\Omega K_\infty(x)v^2 \leq \|v\|^2 = 1,$$

e portanto v é uma autofunção associada ao primeiro autovalor. Assim, $v \not\equiv 0$ tem sinal constante em Ω e tomando $\widetilde{\Omega} = \Omega_0$, obtemos a contradição desejada de (1.24).

1.6 Demonstração dos Teoremas 0.3 e 0.4

Lema 1.6. *Se f satisfaz $(\widehat{f_2})$ e $(\widehat{NQ})$, então temos que*

$$F(x,s) - \frac{1}{2}K_\infty(x)s^2 \leq -\frac{d(x)}{2},\ q.t.p\ \ x \in \Omega,\ \ s \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. De forma análoga à prova do Lema 3.1 em [13], seja $g(x,s) = f(x,s) - K_\infty(x)s$ e $H(x,s) = F(x,s) - \frac{1}{2}K_\infty(x)s^2$. Então segue que

$$g(x,s)s - 2H(x,s) = f(x,s)s - 2F(x,s).$$

Agora, usando $(\widehat{NQ})$, obtemos que

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{H(x,s)}{s^2}\right] = \frac{g(x,s)s - 2H(x,s)}{s^3} \geq \frac{d(x)}{s^3}. \tag{1.26}$$

Integrando (1.26) no intervalo $[t,T] \subset (0,\infty)$, obtemos

$$\frac{H(x,T)}{T^2} - \frac{H(x,t)}{t^2} \geq -\frac{d(x)}{2}\left[\frac{1}{T^2} - \frac{1}{t^2}\right].$$

Por outro lado, como $\limsup\limits_{T\to\infty} \dfrac{H(x,T)}{T^2} \leq 0$ e $(\widehat{f_2})$, temos

$$F(x,s) - \frac{1}{2}K_\infty(x)s^2 \leq -\frac{d(x)}{2},\ \forall s > 0,\ q.t.p\ \ x \in \Omega.$$

A prova é similar para o caso em que $t < 0$.

□

Faremos agora a demonstração do Teorema 0.3.

Demonstração do Teorema 0.3. Primeiramente, consideramos o caso ressonante para autovalores maiores, ou seja $j = m+1$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Supomos que $\lambda_m(K_\infty) < 1$.

Seja $0 < \alpha < |\Omega|$ como dado pelo Lema 1.5 e supomos que $|\Omega_0| > \alpha$. Considerando

$\varphi_i := \varphi_i(K_\infty)$ a i-ésima autofunção do problema linear (LP) com peso K_∞, definimos a seguir o seguinte conjunto

$$V := \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}, \quad W := V^\perp.$$

Com esta definição, temos que $H = V \oplus W$ e desta forma afirmamos que o funcional I satisfaz

(i) $I(u) \to -\infty$ quando $\|u\| \to \infty$, $u \in V$;

(ii) existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $I(u) \geq \beta$ para todo $u \in W$.

Assumindo essas afirmações e relembrando que I satisfaz a condição de $(\mathrm{Ce})_c$ para todo nível $c \in \mathbb{R}$, usamos o Teorema do Ponto de Sela [5] (veja também [6, 46]) para obtermos um ponto crítico de I.

Basta agora provarmos (i) e (ii). Primeiramente notamos que da caracterização variacional de $\lambda_m(K_\infty)$ segue que

$$\|u\|^2 \leq \lambda_m(K_\infty) \int_\Omega K_\infty(x)u^2 < \int_\Omega K_\infty(x)u^2, \quad \text{para todo } u \in V \setminus \{0\}.$$

Como V é de dimensão finita, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$\|u\|^2 - \int_\Omega K_\infty(x)u^2 \leq -\delta \|u\|^2, \quad \text{para todo } u \in V.$$

Desta forma, dado $\varepsilon > 0$, usamos a primeira desigualdade dada em (1.19), a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev, para obtermos

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega K_\infty(x)u^2 + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |u|^2 + \|\widehat{a}\|_1 - \frac{1}{q}\int_{\partial\Omega} h(x)|u|^q \\ &\leq \frac{1}{2}(-\delta + \varepsilon)\|u\|^2 + \|\widehat{a}\|_1 + c_1 |h|_{\sigma_q} \|u\|^q, \end{aligned} \tag{1.27}$$

com $c_1 > 0$. Desde que $1 \leq q < 2$, podemos escolher $\varepsilon = \delta/2$ para concluirmos a veracidade da condição (i).

Agora verificaremos a condição (ii). Pela caracterização variacional de $\lambda_{m+1}(K_\infty) = 1$, temos

$$\|u\|^2 \geq \lambda_{m+1}(K_\infty) \int_\Omega K_\infty(x)u^2 = \int_\Omega K_\infty(x)u^2, \quad \text{para todo } u \in W.$$

Recordando que estamos usando $h \leq 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - \int_\Omega K_\infty(x)u^2\right) - \int_\Omega \left(F(x,u) - \frac{1}{2}K_\infty(x)u^2\right) - \frac{1}{q}\int_{\partial\Omega} h(x)|u|^q \\
&\geq -\int_\Omega \left(F(x,u) - \frac{1}{2}K_\infty(x)u^2\right).
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Lema 1.6, temos que

$$
I(u) \geq -\frac{\|d\|_1}{2} = \beta, \quad \text{para todo } u \in W, \tag{1.28}
$$

assim o teorema está provado, no primeiro caso.

Supomos agora que $\lambda_1(K_\infty) = 1$. Decorre de $(\widehat{NQ})$ e da observação 1.4 que I satisfaz a Condição de Cerami em todo nível. Além disto, pelo mesmo argumento feito na primeira parte da prova de (1.28) mostra-se que I é limitado por baixo. Assim o ínfimo de I é atingido em um ponto crítico u. Logo concluímos a prova do Teorema 0.3. $\square$

A seguir faremos a demonstração do Teorema 0.4.

Demonstração do Teorema 0.4. Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, usando a segunda desigualdade em (1.19) bem como a caracterização variacional de $\lambda_1(K_\infty)$ e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1(K_\infty)} - \varepsilon\right)\|u\|^2 - \|\widehat{a}\|_1 - c_1 |h|_{\sigma_q}\|u\|^q \\
&= \frac{\nu}{2}\|u\|^2 - \|\widehat{a}\|_1 - c_1 |h|_{\sigma_q}\|u\|^q,
\end{aligned} \tag{1.29}
$$

com $\nu = (1 - 1/\lambda_1(K_\infty) - \varepsilon) > 0$. Desde que, $1 \leq q < 2$ concluímos que $I(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$, isto é , I é coercivo em H. Agora, argumentando como na segunda parte da prova do Teorema 0.3, obtemos um ponto crítico de I.

$\square$

Observação 1.5. *Como na seção anterior, podemos obter alguns resultados no caso $q = 2$. Primeiramente mostremos que o Teorema 0.3 ocorre se $q = 2$ e $|h|_{\sigma_2}$ é suficientemente pequena, observe que a prova do Lema 1.5 também é verificada para este caso. No caso de ressonância a expressão (1.27) fica*

$$
I(u) \leq \frac{1}{2}(-\delta + \varepsilon + c_1|h|_{\sigma_2})\|u\|^2 + \|\widehat{a}\|_1,
$$

e portanto a afirmação (i) da prova do Teorema 0.3 é verdadeira se $|h|_{\sigma_2}$ é suficientemente pequena. O restante da prova segue de forma análoga.

Quanto ao Teorema 0.4, a expressão (1.29) fica

$$I(u) \leq \left(\frac{\nu}{2} - c_1 |h|_{\sigma_2}\right) \|u\|^2 - \|\widehat{a}\|_1,$$

e portanto o Teorema 0.4 também é verificado se $q = 2$ *se* $|h|_{\sigma_2}$ *é suficientemente pequena.*

Capítulo 2

Soluções antissimétricas para a equação elíptica assintoticamente linear no infinito

Neste capítulo consideraremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + V_\infty u = K_\infty f(u), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u(\tau x) = -u(x), \\ u(x) \to 0 \quad \text{se} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $N \geq 3$, V_∞, K_∞ são constantes positivas, $\lim\limits_{|s|\to+\infty} \dfrac{f(s)}{s} = 1 > 0$ e $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma involução ortogonal não trivial que é uma transformação linear ortogonal em $\mathbb{R}^N$ tal que $\tau \neq Id$ e $\tau^2 = Id$, sendo Id o operador identidade em $\mathbb{R}^N$.
Consideraremos neste capítulo a não linearidade

$$f(s) = \frac{s^3}{1+s^2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

porém os resultados obtidos podem ser generalizados para funções f assintoticamente lineares no infinito sob hipóteses do tipo Berestycki e Lions [8].

Para provarmos que o problema (2.1) tem solução τ-antissimétrica $u(\tau x) = -u(x)$ seguiremos argumentos análogos aos encontrados em Micheletti e Ghimenti [32], Carvalho, Maia e Miyagaki [17] e Furtado, Maia e Medeiros [42]. As duas maiores contribuições do nosso trabalho estão no fato de utilizarmos a variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$ em lugar da variedade de Nehari $\mathcal{N}$ e em trabalharmos com a diferença de duas soluções "ground state" $z_y(x) = \bar{u}(x-y) - \bar{u}(\tau x - y)$ sem fazermos qualquer truncamento. A utilidade da variedade de Pohozaev é natural visto que o problema é assintoticamente linear no infinito e a não linearidade f é não homogênea.

Por outro lado, verificaremos que os truncamentos utilizados em [32] e [17] não são necessários, visto que a interação entre as soluções tem energia pequena devido ao decaimento exponencial das soluções $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ da equação

$$-\Delta u + V_\infty u = K_\infty f(u). \tag{2.2}$$

Seja E o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido da norma $\|u\|_E^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_\infty u^2)$. A involução τ de $\mathbb{R}^N$ induz uma involução $T_\tau : E \to E$ definida como segue:

$$T_\tau(u(x)) := -u(\tau(x)). \tag{2.3}$$

Denotaremos por

$$E^\tau := \{u \in E : T_\tau(u(x)) = u(x)\}, \tag{2.4}$$

o subespaço das funções τ-invariantes.

Definimos o funcional associado à equação (2.1):

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_\infty u^2\right) dx - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx, \tag{2.5}$$

em que

$$F(u) = \int_0^u f(s)\, ds = \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2} ln(1+u^2). \tag{2.6}$$

Notemos que o funcional I_∞ está bem definido e além disso, $I_\infty \in C^1(E, \mathbb{R})$ com

$$I'_\infty(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + V_\infty u \varphi)\, dx - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\varphi dx \quad \text{para todo } u, \varphi \in E. \tag{2.7}$$

Consequentemente, pontos críticos do funcional I_∞ são precisamente soluções fracas do problema (2.1).

As soluções u de (2.1) satisfazem a identidade de Pohozaev, que é dada por

$$(N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 = 2N \int_{\mathbb{R}^N} G(u),$$

onde $G(u) = -\dfrac{V_\infty}{2} u^2 + K_\infty F(u)$. Definimos a variedade de Pohozaev por

$$\mathcal{P} = \{u \in E \setminus \{0\} : J(u) = 0\},$$

tal que

$$J(u) = \frac{(N-2)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u), \tag{2.8}$$

com $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.

Para obtermos soluções τ-invariantes, estudaremos pontos críticos do funcional I_∞ restrito à seguinte variedade de Pohozaev τ-invariante

$$\mathcal{P}^\tau = \{u \in \mathcal{P} : T_\tau(u(x)) = u(x)\} = \mathcal{P} \cap E^\tau.$$

Além disso, denotaremos por

$$m_\infty := \inf_{u\in\mathcal{P}} I_\infty(u) \quad \text{e} \quad m_\infty^\tau := \inf_{u\in\mathcal{P}^\tau} I_\infty(u). \tag{2.9}$$

Podemos agora enunciar o nosso resultado principal:

Teorema 2.1. *Se $\{u_n\} \subset E^\tau$ é sequência limitada tal que*

$$I_\infty(u_n) \to m_\infty^\tau \quad e \quad I'_\infty|_{E^\tau}(u_n) \to 0,$$

então

i) $u_n \rightharpoonup 0$ e

ii) existe $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $|y_n| \to \infty$, tal que

$$u_n - [u(\cdot - y_n) + T_\tau u(\cdot - y_n)] \to 0.$$

Além disso, existe uma sequência $\{u_n\} \subset E^\tau$ nestas condições.

2.1 Resultados Preliminares

A seguir enunciaremos e daremos a prova de alguns resultados preliminares que serão fundamentais para a demonstração do nosso resultado principal.

Lema 2.1. *F(u) como definida em (2.6) satisfaz a hipótese de não quadraticidade (NQ), isto é*

$$(NQ)\begin{cases} \lim\limits_{|u|\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}f(u)u - F(u)\right) = +\infty \\ \dfrac{1}{2}f(u)u - F(u) > 0 \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Demonstração. De fato, consideremos a função auxiliar

$$h(t) := \frac{t^2}{2}\frac{u^4}{1+u^2} - \frac{t^2}{2}u^2 + \frac{1}{2}ln(1+t^2u^2). \tag{2.11}$$

Assim,

$$h'(t) = t\frac{u^4}{1+u^2} - t^3\frac{u^4}{1+t^2u^2}.$$

Dessa forma,

$$h'(t) < 0 \Leftrightarrow t > 1,$$

$$h'(t) > 0 \Leftrightarrow t < 1 \quad \text{e}$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Logo,

$$h(t) \leq h(1), \ \ \forall\, t > 0. \tag{2.12}$$

Portanto

$$\frac{1}{2}f(u)u - F(u) = h(1) > h(0) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Por fim veja que $\forall\, \xi > 0$

$$\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1+\xi} - \frac{\xi}{2} \geq -\frac{1}{2}.$$

Logo $\forall\, \xi > 0$,

$$\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1+\xi} - \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}ln(1+\xi) \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln(1+\xi).$$

Desta forma,

$$\lim_{\xi\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1+\xi} - \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}ln(1+\xi)\right) = +\infty,$$

e portanto, fica provada a (NQ). □

Lema 2.2. *Para q tal que $0 \leq q \leq 2$ existe $C = C(q)$, tal que $\dfrac{z^2}{1+z^2} \leq C|z|^q$ para todo $z \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja

$$\tilde{h}(z) = C|z|^q - \frac{z^2}{1+z^2} \text{ para } z \in \mathbb{R}.$$

Desta forma $\tilde{h}$ é contínua, par, $\tilde{h}(0) = 0$ e

$$\tilde{h}'(z) = Cq(z)^{q-1} - \frac{2z}{(1+z^2)^2}, \ \text{ se } \ z \geq 0.$$

Assim, se $z \geq 0$

$$\tilde{h}'(z) > 0 \Leftrightarrow Cq(z)^{q-1} - \frac{2z}{(1+z^2)^2} > 0 \Leftrightarrow Cq(z)^{q-1} > \frac{2z}{(1+z^2)^2} \Leftrightarrow Cq(1+z^2)^2 > 2(z)^{2-q}.$$

Agora se $z \geq 1$ então $z^2 \geq z^{2-q}$ e

$$Cq(1+z^2)^2 > 2(z)^{2-q} \Leftrightarrow Cq + 2Cqz^2 + Cqz^4 > 2z^{2-q},$$

assim é suficiente considerarmos $C > \dfrac{1}{q}$.
Por outro lado, se $0 < z < 1$ é suficiente considerarmos $Cq > 2z^{2-q}$. Em ambos os casos, podemos considerar $C = \dfrac{2}{q}$, assim obtemos $\tilde{h}'(z) > 0$ para todo $z > 0$. □

Observação 2.1. *Note que, se $0 \leq q \leq 2$ então existe uma constante $C(q) > 0$, tal que*

$$|f(z)| = \left|\frac{z^3}{1+z^2}\right| \leq C(q)|z|^{q+1} \tag{2.13}$$

e

$$|f'(z)| = \left|\frac{z^4+3z^2}{(1+z^2)^2}\right| \leq C(q)|z|^q. \tag{2.14}$$

Afirmamos agora que

$$|F(s)| \leq C|s|^{q+2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

onde $2 \leq q+2 \leq 2^*$ e $0 < C = C(q) \in \mathbb{R}$. De fato, usando o Lema 2.2 e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$|F(s)| \leq \int_0^s |f(t)|dt \leq C \int_0^s |t|^{q+1}dt = C|s|^{q+2}.$$

Por outro lado temos de (2.6) que dado $\varepsilon > 0$, existe $C_1 = C_1(\varepsilon) > 0$, tal que

$$|F(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\xi^2 + C_1\xi^p, \ \ 2 < p < 2^*. \tag{2.16}$$

De fato, vamos verificar (2.16), onde usaremos as propriedades de crescimento de $ln(1+\xi^2)$, juntamente com sua expansão de Taylor próximo de zero.

Primeiramente vejamos que

$$F(\xi) = o(\xi^2), \quad \text{quando } \ \xi \to 0. \tag{2.17}$$

Isto é verificado pois

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{F(\xi)}{\xi^2}=\lim_{\xi\to 0}\frac{\frac{\xi^2}{2}-\frac{1}{2}ln(1+\xi^2)}{\xi^2},$$

onde, supomos que $0<\xi^2<1$. Agora, usando L'Hôpital tem-se

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\xi^2-ln(1+\xi^2)}{\xi^2}=0.$$

Por outro lado, para todo $r>0$ temos que $ln(1+r)\leq r$, logo

$$|F(\xi)|\leq\frac{\xi^2}{2}+\frac{1}{2}ln(1+\xi^2)\leq\xi^2.$$

Segue de (2.17) que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que se $\xi<\delta$ então

$$|F(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}\xi^2.$$

Se $\xi\geq\delta$, ou seja $\dfrac{\xi}{\delta}\geq 1$ e $2<p<2^*$, temos

$$|F(\xi)|\leq\xi^2\leq\frac{\xi^p}{\delta^{p-2}}.$$

Logo, obtemos

$$|F(\xi)|\leq\frac{\varepsilon}{2}\xi^2+C_1\xi^p,\qquad\forall\,\xi\geq 0,$$

onde $C_1=\dfrac{1}{\delta^{p-2}}$.

Lema 2.3. *Seja o funcional $J:E\to\mathbb{R}$, definido em* (2.8)*. Então*
(1) $\mathcal{P}=\{u\in E\setminus\{0\}|\ J(u)=0\}$ *é fechado;*
(2) $\mathcal{P}$ *é uma variedade de classe C^1;*
(3) *Existe $\sigma>0$ tal que $\|u\|_E>\sigma$, para todo $u\in\mathcal{P}$.*

Demonstração. Verificação dos itens (1) e (2). Da definição de J, temos

$$J(u)=\frac{(N-2)}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2-N\int_{\mathbb{R}^N}G(u),$$

que é um funcional de classe C^1. Assim

$$\mathcal{P}=\{J(u)=0\}=J^{-1}(\{0\}),$$

logo segue que $\mathcal{P}$ é um conjunto fechado. Além disso, usando (2.10), temos que

$$\begin{aligned} J'(u)u &= 2N\int_{\mathbb{R}^N}\left(G(u)-\frac{1}{2}g(u)u\right) \\ &= 2NK_\infty\int_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{f(u)u}{2}+F(u)\right) < 0. \end{aligned}$$

Portanto $J'(u) \neq 0$ e desta forma $\mathcal{P}$ é uma variedade de classe C^1 de E.
Verificação do item (3). Como $u \in \mathcal{P}$, temos que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 = 2^*\int_{\mathbb{R}^N} G(u),$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+\frac{V_\infty N}{N-2}u^2\right) = 2^*K_\infty\int_{\mathbb{R}^N} F(u).$$

Assim, existe uma constante M, dada por $M := \min\left\{1, \dfrac{V_\infty N}{N-2}\right\}$, tal que

$$M\,\|u\|_E^2 \leq 2^*K_\infty\int_{\mathbb{R}^N} F(u),$$

e por (2.16) segue que

$$M\,\|u\|_E^2 \leq 2^*K_\infty\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\varepsilon}{2}|u|^2+C_1|u|^p\right).$$

Agora, tomando $\varepsilon > 0$, tal que:

$$\frac{2^*K_\infty}{2}\varepsilon < \frac{M}{2},$$

temos

$$\frac{M}{2}\,\|u\|_E^2 \leq 2^*K_\infty C_1\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p, \;\; 2<p<2^*.$$

Portanto, existe $\sigma > 0$, tal que

$$\sigma \leq \|u\|_E^{p-2}. \tag{2.18}$$

□

Lema 2.4. *Se $|f'(z)| \leq C(p)|z|^{p-1}$, para algum $1 < p < 2^*-1$ e para todo $z \in \mathbb{R}$ e se $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então*

$$f(u_n) - f(u_n-u_0) \to f(u_0)$$

em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$.

Para a prova desse lema seguiremos as ideias encontradas em ([16] e [51]-Lema 8.1).

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$\begin{aligned} |f(u_n) - f(u_n - u_0)| &= |f'(u_n - u_0 + \theta u_0)u_0| \\ &= C(p)||u_n - (1-\theta)u_0|^{p-1}u_0| \\ &\leq C(p)\left[|u_n| + (1-\theta)|u_0|\right]^{p-1}|u_0| \\ &\leq C\left[|u_n| + |u_0|\right]^{p-1}|u_0|. \end{aligned}$$

Assim, fixados $R > 0$ e $\omega \in H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos pela desigualdade de Hölder, pela imersão de Sobolev e pela limitação de $\{u_n\}$, que

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|>R} |f(u_n) - f(u_n - u_0)|\omega dx \right| &\leq C \int_{|x|>R} \left[|u_n| + |u_0|\right]^{p-1}|u_0||\omega| dx \\ &\leq C\left[\|u_n\|_{L^{p+1}} + \|u_0\|_{L^{p+1}}\right]^{p-1}\|\omega\|_{L^{p+1}} \left[\int_{|x|>R} |u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}} \\ &\leq 2^{p-1}C\left[\|u_n\|^{p-1}_{L^{p+1}} + \|u_0\|^{p-1}_{L^{p+1}}\right]\|\omega\|_{L^{p+1}} \left[\int_{|x|>R} |u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}} \\ &\leq C\|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \left[\int_{|x|>R} |u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}}. \end{aligned}$$

Novamente pela desigualdade de Hölder e pela imersão de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|>R} f(u_0)\omega dx \right| &\leq C(p)\int_{|x|>R} |u_0|^p|\omega| dx \\ &\leq C(p)\left[\int_{|x|>R} ||u_0|^p|^{\frac{p+1}{p}} dx\right]^{\frac{p}{p+1}} \|\omega\|_{L^{p+1}} \\ &\leq C\|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \left[\int_{|x|>R} |u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{p}{p+1}}. \end{aligned}$$

Como para cada $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$\int_{|x|>R} |u_0|^{p+1}dx < \varepsilon,$$

então, para todo $\omega \in H^1(\mathbb{R}^N)$, usando as desigualdades acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|x|>R}(f(u_n)-f(u_n-u_0)-f(u_0))\omega dx\right| &\leq \int_{|x|>R}|f(u_n)-f(u_n-u_0)||\omega|dx \\
&+\int_{|x|>R}|f(u_0)||\omega|dx \\
&\leq C\|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left[\int_{|x|>R}|u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}} \\
&+ C\|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left[\int_{|x|>R}|u_0|^{p+1}dx\right]^{\frac{p}{p+1}} \\
&\leq C\varepsilon\|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$f(u_n)-f(u_n-u_0)\to f(u_0) \quad \text{em } L^r(B_R(0)) := L^r(B), \tag{2.19}$$

onde $r := \dfrac{p+1}{p}\cdot$

Admitindo a nossa afirmação acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|x|<R}(f(u_n)-f(u_n-u_0)-f(u_0))\omega dx\right| &\leq \|\omega\|_{L^{p+1}}\|f(u_n)-f(u_n-u_0)-f(u_0)\|_{L^r(B)} \\
&\leq C\varepsilon\|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Resta-nos verificar (2.19). De fato, temos que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, assim, $u_n \to u_0$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq q < 2^*$. Logo,

$$u_n-u_0\to 0 \quad \text{em } L^q(B_R(0)),$$

$$u_n(x)\to u_0(x) \quad \text{q.t.p} \quad x\in B_R(0).$$

Daí segue que

$$u_n(x)-(u_n-u_0)(x)\to u_0(x) \quad \text{q.t.p} \quad x\in B_R(0). \tag{2.20}$$

Também,

$$|u_n(x)|, |u(x)| \leq g(x), \quad g\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

e

$$|(u_n-u_0)(x)|\leq h(x), \quad h\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Assim,

$$\begin{aligned}|f(u_n)-f(u_n-u_0)-f(u_0)|^{\frac{p+1}{p}} &\leq C(p)\left(|u_n|^p+|u_n-u_0|^p+|u_0|^p\right)^{\frac{p+1}{p}}\\ &\leq 2^{\frac{p+1}{p}}C\left(|u_n|^{p+1}+|u_n-u_0|^{p+1}+|u_0|^{p+1}\right)\\ &\leq Cg(x)^{p+1}+Ch(x)^{p+1}.\end{aligned}$$

Se $1<p<2^*-1$ então $g,h\in L^{p+1}(B_R(0))$, daí, $g^{p+1},h^{p+1}\in L^1(B_R(0))$. Com isso, e usando (2.20), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtendo que

$$f(u_n)-f(u_n-u_0)\to f(u_0)\quad \text{em } L^r(B),$$

onde $r:=\dfrac{p+1}{p}\cdot$ Dessa forma concluímos a prova do lema.

$\square$

Observação 2.2. *Denotaremos por* $o_n(1)$ *uma quantidade que tende a zero quando* $n\to\infty$, *e* $o_y(1)$ *uma quantidade que tende a zero quando* $|y|\to+\infty$.

Lema 2.5. ***(Lema de Brezis-Lieb)*** *Considere* $j:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *uma função contínua com* $j(0)=0$. *Em adição, considere* j *satisfazendo as seguintes hipóteses: para cada* $\varepsilon>0$ *suficientemente pequeno existem duas funções contínuas e não negativas* φ_ε *e* ψ_ε *tais que*

$$|j(a+b)-j(a)|\leq\varepsilon\varphi_\varepsilon(a)+\psi_\varepsilon(b)\tag{2.21}$$

para todo $a,b\in\mathbb{C}$.
Considere $f_n=f+g_n$ *uma sequência de funções mensuráveis de* Ω *em* $\mathbb{C}$ *tais que:*
(i) $g_n\to 0$ *q.t.p;*
(ii) $j(f)\in L^1$;
(iii) $\displaystyle\int\varphi_\varepsilon(g_n(x))d\mu(x)\leq C<\infty$ *para alguma constante* C, *independente de* ε *e* n.
(iv) $\displaystyle\int\psi_\varepsilon(f(x))d\mu(x)<\infty$ *para todo* $\varepsilon>0$.
Então, se $n\to\infty$

$$\int|j(f+g_n)-j(g_n)-j(f)|d\mu\to 0.\tag{2.22}$$

A prova do deste Lema pode ser encontrada em [10].

No que segue estaremos interessados em aplicar o Lema 2.5 com $j(s)=F(s)$. Visto que F é contínua e $F(0)=0$, mostraremos que dado $\varepsilon>0$, existem funções contínuas φ_ε e ψ_ε tais que

$$|F(a+b)-F(a)|\leq\varepsilon\varphi_\varepsilon(a)+\psi_\varepsilon(b),$$

com $\varphi_\varepsilon(a) = C|a|^{q+2}$ e $\psi_\varepsilon(b) = (C_\varepsilon + 1)|b|^{q+2}$, $2 < q + 2 < 2^*$.

De fato, se $0 \leq t \leq 1$, pelo Lema 2.2 temos que

$$\begin{aligned}
|F(a-b) - F(a)| &= |\int_0^1 \frac{d}{dt}F(a-tb)dt| \\
&= |\int_0^1 f(a-tb)(-b)dt| \\
&\leq \int_0^1 |f(a-tb)||b|dt \\
&\leq C\int_0^1 |a-tb|^{q+1}|b|dt \\
&\leq C(|a|^{q+1}|b| + |b|^{q+2}) \\
&\leq C(\varepsilon|a|^{q+2} + (C_\varepsilon + 1)|b|^{q+2}).
\end{aligned}$$

Então

$$\int \Big(F(f + g_n) - F(g_n) - F(f)\Big)dx = o_n(1), \tag{2.23}$$

se $g_n = f_n - f \to 0 \quad q.t.p$, com F, g_n e f satisfazendo (ii), (iii) e (iv). Desta forma, podemos reescrever (2.23) como

$$\int \Big(F(f_n) - F(f) - F(f_n - f)\Big)dx = o_n(1),$$

e nas próximas páginas teremos $g_n = u_n^1 := u_n - u_0 \rightharpoonup 0$, e portanto

$$\int \Big(F(u_n) - F(u_0) - F(u_n^1)\Big)dx = o_n(1). \tag{2.24}$$

Lema 2.6. *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ solução da equação (2.2), então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)u(x-\tau y)dx = o_y(1), \tag{2.25}$$

quando $|y| \to \infty$ e $|y - \tau y| \to \infty$.

Demonstração. Fazendo uma mudança de variáveis, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)u(x-\tau y)dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(z)u(z + y - \tau y)dz.$$

Desde que $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ independente de y, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u(z)|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} u(z)u(\tau z + \tau y - y)dz &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(\tau z + \tau y - y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} . \end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$ e $R > 0$ fixados como anteriormente, $|y - \tau y| \to \infty$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} u(z)u(\tau z + \tau y - y)dz &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R(0)} |u(\tau z + \tau y - y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R(\tau y - y)} |u(\tau z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)u(x-\tau y)dx = o_y(1),$$

quando $|y| \to \infty$ e $|y - \tau y| \to \infty$. □

Observação 2.3. *De forma inteiramente análoga, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução de (2.2) e portanto $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$, temos que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x-y).\nabla u(\tau x - y) = o_y(1). \tag{2.26}$$

2.2 Resultado de Compacidade

Relembremos a seguinte condição de compacidade: dizemos que um funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale, abreviadamente (PS), se qualquer sequência $\{u_n\} \subset E$ tal que $I(u_n)$ é limitada e $I'(u_n) \to 0$, possui subsequência convergente.

Dizemos que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cerami no nível c, denotada por $(Ce)_c$, se tivermos $I(u_n) \to c \;\; e \;\; (1 + \|u_n\|_E) \|I'(u_n)\| \to 0$. Dizemos também que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$, abreviadamente $(Ce)_c$, se toda sequência $\{u_n\} \subseteq E$ de Cerami no nível c, possui subsequência convergente.

Lema 2.7. *Se $\{u_n\}$ é uma sequência $(Ce)_c$ do funcional I_∞ então $\{u_n\}$ é limitada.*

Demonstração. Se $\{u_n\}$ é uma sequência $(Ce)_c$ então temos que

$$I_\infty(u_n) \to c \qquad e \qquad (1 + \|u_n\|_E)\, \|I'_\infty(u_n)\| \to 0. \tag{2.27}$$

Suponha por contradição que $\|u_n\|_E \to \infty$. Defina $\hat{u}_n = \dfrac{2\sqrt{c}u_n}{\|u_n\|_E}$, então $\{\hat{u}_n\}$ é uma sequência limitada com $\|\hat{u}_n\|_E = 2\sqrt{c}$ e consequentemente $\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u}$, assim um dos dois casos a seguir ocorre:

Caso 1) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^N} \displaystyle\int_{B_1(y)} |\hat{u}_n|^2 dx > 0.$

Caso 2) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^N} \displaystyle\int_{B_1(y)} |\hat{u}_n|^2 dx = 0.$

No Caso 2, temos pelo Lema de Lions (ver Lema 1.21 em [51]) que $\hat{u}_n \to 0$ em $L^{q+2}(\mathbb{R}^N)$; $2 < q+2 < 2^*$. Desta forma, por (2.15) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\hat{u}_n) \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_n|^{q+2} \to 0.$$

Afirmamos que

$$c \leq o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(\hat{u}_n)dx = o_n(1), \tag{2.28}$$

e assim chegaremos numa contradição.
De fato, a verificação de (2.28) está baseada em Stuart e Zhou [49] e L. H de Miranda [22]. Primeiramente note que a menos de subsequências temos que

$$\|I'_\infty(u_n)\|\, \|u_n\|_E < \frac{1}{n} \text{ quando } n \to \infty.$$

e

$$I_\infty(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx = c + o_n(1). \tag{2.29}$$

Além disso, tem-se que

$$-\frac{1}{n} < I'_\infty(u_n)u_n = \|u_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx < \frac{1}{n}\cdot \tag{2.30}$$

Afirmamos também que para qualquer $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$

$$I_\infty(tu_n) \leq \frac{t^2}{2n} + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx. \tag{2.31}$$

Para verificarmos (2.31), faremos uso mais uma vez da função auxiliar h definida em

(2.11), mas agora aplicada em u_n. Note que

$$h(t) = h_n(t) = \frac{1}{2}t^2 f(u_n)u_n - F(tu_n).$$

Assim por (2.12), obtemos

$$h_n(t) \leq h_n(1) \text{ para todo } t > 0. \tag{2.32}$$

Além disso, pela (NQ) temos

$$\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n) \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.33}$$

Agora veja que

$$I_\infty(tu_n) = \frac{1}{2}t^2 \|u_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(tu_n)dx.$$

Usando (2.30) e (2.32) obtemos que

$$I_\infty(tu_n) \leq \frac{t^2}{2n} + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx \qquad \forall\, t > 0,$$

o que completa a verificação da inequação (2.31). Além disso, a partir de (2.30) temos que

$$I_\infty(u_n) \geq \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{n} + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx\right\} - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx,$$

de forma que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx \leq \frac{1}{2n} + I_\infty(u_n). \tag{2.34}$$

Deste modo, por (2.31) e (2.34)

$$I(tu_n) \leq \frac{1+t^2}{2n} + I_\infty(u_n), \quad \forall\, t > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\frac{t^2 \|u_n\|_E^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} F(tu_n)dx \leq \frac{1+t^2}{2n} + c + o_n(1),$$

para n suficientemente grande e para todo $t > 0$. Seja $t_n := \dfrac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|_E} \to 0$, quando $n \to \infty$. Assim substituindo t por t_n acima obtemos que

$$c \leq o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(t_n u_n)dx = o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(\hat{u}_n)dx = o_n(1)$$

o que verifica a afirmação.
No Caso 1, podemos supor que

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)}|\hat{u}_n|^2dx=\delta>0.$$

Assim, se $\{y_n\}$ é tal que $|y_n|\to+\infty$, e

$$\int_{B_1(y_n)}|\hat{u}_n|^2>\frac{\delta}{2},$$

considerando que $\hat{u}_n(\cdot+y_n)\rightharpoonup\hat{v}$, temos

$$\int_{B_1(0)}|\hat{u}_n(x+y_n)|^2>\frac{\delta}{2},$$

e portanto,

$$\int_{B_1(0)}|\hat{v}(x)|^2>\frac{\delta}{2},$$

obtendo assim que $\hat{v}\not\equiv 0$. Logo existe $\Omega\subset B_1(0)$; $|\Omega|>0$, em que

$$0<\hat{v}(x)=\lim_{n\to\infty}\hat{u}_n(x+y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x+y_n)2\sqrt{c}}{\|u_n\|_E},\quad\forall\, x\in\Omega.$$

Como temos que $\|u_n\|\to\infty$, então necessariamente

$$u_n(x+y_n)\to\infty,\ \forall\, x\in\Omega\subset B_1(0),$$

e assim pela (NQ) e Lema de Fatou, obtemos que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n-F(u_n)\right)&=\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n)u_n(x+y_n))-F(u_n(x+y_n))\right)\\&\geq\liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n)-F(u_n(x+y_n))\right)\\&\geq\int_{\Omega}\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n)-F(u_n(x+y_n))\right)\\&=\infty.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Por outro lado, por (2.27) temos que

$$|I'_\infty(u_n)u_n|\leq\|I'_\infty(u_n)\|\,\|u_n\|_E\to 0,$$

e portanto

$$I'_\infty(u_n)u_n = o_n(1).$$

Desta forma, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) \right) = I_\infty(u_n) - \frac{1}{2} I'_\infty(u_n)u_n \leq c + 1. \tag{2.36}$$

De (2.35) e (2.36) obtemos uma contradição no Caso 1, em que $|y_n| \to +\infty$.
Agora se tivermos que $|y_n| \leq R$ com $R > 1$, então obtemos que

$$\frac{\delta}{2} \leq \int_{B_1(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)|^2 dx \leq \int_{B_{2R}(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)|^2 dx,$$

e como $\hat{u}_n(\cdot + y_n) \to \hat{v}$ fortemente em B_{2R}, segue que

$$\frac{\delta}{2} \leq \int_{B_1(0)} |\hat{v}(x)|^2.$$

Logo, como no caso anterior, existe $\Omega \subset B_1(0)$, $|\Omega| > 0$ em que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n(x + y_n)2\sqrt{c}}{\|u_n\|_E} = \lim_{n\to\infty} \hat{u}_n(x + y_n) = \hat{v}(x) \neq 0, \ \forall\, x \in \Omega.$$

Seguindo o argumento anterior de (2.35) e (2.36), novamente chegaremos a uma contradição.

□

Observação 2.4. *Se $\{u_n\}$ é uma sequência de Cerami $(Ce)_c$ e é limitada, então $\{u_n\}$ é sequência (PS) limitada.*

Lema 2.8. *Se $\{u_n\} \subset E^\tau$ é uma sequência (PS) do funcional I_∞ restrito à E^τ, $I_\infty|_{E^\tau}$, então $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) para I_∞.*

Demonstração. Como a ação T_τ é isométrica e f é ímpar provaremos que

$$T_\tau I'_\infty(u_n) = I'_\infty(u_n). \tag{2.37}$$

Pela hipótese de que f é ímpar, obtemos que $F(s) = F(-s)$. Com isto, fazendo uma mudança de variáveis e utilizando a definição de T_τ temos que

$$I_\infty(T_\tau(u_n)) = I_\infty(u_n). \tag{2.38}$$

Por outro lado, novamente pelo fato que f é ímpar e fazendo uma mudança de variáveis, temos que

$$\begin{aligned} I'_\infty(T_\tau u_n)v &= I'_\infty(-u_n(\tau(\cdot)))v(\cdot) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(y)\nabla(-v(\tau y)) + V_\infty u_n(y)(-v(\tau y))dy \\ &\quad -K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n(y))(-v(\tau y))dy, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$I'_\infty(T_\tau u_n)v = I'_\infty(u_n)T_\tau(v). \tag{2.39}$$

Como T_τ é isométrica, então

$$\langle I'_\infty(u_n), T_\tau(v)\rangle = \langle T_\tau(I'_\infty(u_n))), T_\tau(T_\tau(v))\rangle = \langle T_\tau(I'_\infty(u_n))), v\rangle . \tag{2.40}$$

Segue de (2.39) e (2.40) que

$$I'_\infty(T_\tau(u_n)) = T_\tau(I'_\infty(u_n)). \tag{2.41}$$

Desde que $\{u_n\} \subset E^\tau$ então de (2.41) obtemos que

$$T_\tau(I'_\infty(u_n)) = I'_\infty(T_\tau(u_n)) = I'_\infty(u_n)$$

e portanto $I'_\infty(u_n) \in E^\tau$, implicando que $I'_\infty(u_n)v = 0$ para todo $v \in (E^\tau)^\perp$. Como $I'_\infty(u_n)v \to 0$ para todo $v \in E^\tau$, denotando-se $v = v_1 + v_2$ em que $v_1 \in E^\tau$ e $v_2 \in (E^\tau)^\perp$, segue que $I'_\infty(u_n)v = I'_\infty(u_n)v_1 \to 0$, portanto $I'_\infty(u_n)v \to 0$ para todo $v \in E$.

□

Lema 2.9. *Se $\{u_n\} \subset E^\tau$ é uma sequência $(Ce)_c$ do funcional I_∞ restrito ao subespaço E^τ, então $\{u_n\}$ é limitada.*

Demonstração. Por hipótese temos

$$I_\infty(u_n) \to c \qquad \text{e} \qquad (1 + \|u_n\|_E)\, \|I'_\infty|_{E^\tau}(u_n)\|_{(E^\tau)'} \to 0. \tag{2.42}$$

Observamos que para obtermos o resultado desejado, basta mostrarmos que

$$(1 + \|u_n\|_E)\, \|I'_\infty(u_n)\|_{E'} \to 0$$

e depois aplicarmos o Lema 2.7.

Contudo, pelo Lema 2.8 temos que $I'_\infty(u_n) \in E^\tau$ e como $\|I'_\infty|_{E^\tau}(u_n)\|_{(E^\tau)'} \to 0$, segue que $\|I'_\infty(u_n)\|_{E'} \to 0$. Agora sabendo que $I'_\infty(u_n) \in E^\tau$, obtemos que

$$\begin{aligned}
(1+\|u_n\|_E)\,\|I'_\infty(u_n)\|_{E'} &= (1+\|u_n\|_E) \sup_{\substack{y\in E\\ \|y\|\le 1}} \langle I'_\infty(u_n), y\rangle \\
&= (1+\|u_n\|_E) \sup_{\substack{y\in E,\ \|y\|\le 1, y=y_1+y_2\\ y_1\in E^\tau,\ y_2\in (E^\tau)^\perp}} \langle I'_\infty(u_n), y_1+y_2\rangle \\
&= (1+\|u_n\|_E) \sup_{\substack{y\in E,\ \|y\|\le 1,\ y=y_1+y_2\\ y_1\in E^\tau,\ y_2\in (E^\tau)^\perp}} \langle I'_\infty(u_n), y_1\rangle \\
&= (1+\|u_n\|_E) \sup_{\substack{y_1\in E^\tau\\ \|y_1\|\le 1}} \langle I'_\infty(u_n), y_1\rangle \\
&= (1+\|u_n\|_E)\,\|I'_\infty|_{E^\tau}(u_n)\|_{(E^\tau)'}
\end{aligned}$$

e como a última expressão das igualdades acima vai a zero, segue o resultado.

□

No nosso caso, como estamos lidando com um problema elíptico modelado em $\mathbb{R}^N$, o funcional I_∞ restrito a E^τ pode não satisfazer a condição (PS) ou $(Ce)_c$ para todo nível de energia c. A fim de superarmos esta falta de compacidade apresentaremos a seguir um lema que descreve as sequências $(Ce)_c$ em E^τ. Este lema é uma versão do resultado devido a M. Struwe [48] (ver também [7]), conhecido como Lema de "Splitting".

Lema 2.10. *Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^\tau$ sequência limitada tal que*

$$I_\infty(u_n) \to c \qquad e \qquad I'_\infty|_{E^\tau}(u_n) \to 0.$$

Então, a menos de subsequências, existem dois inteiros $k_1, k_2 \ge 0$, k_1+k_2 sequências $\{y_n^j\}_n$, uma solução τ-antissimétrica u_0 do problema (2.1), k_1 soluções u^j da equação (2.2), $j=1,...,k_1$ e k_2 soluções τ-antissimétricas u^j, $j=k_1+1,...,k_1+k_2$ do problema (2.2), tais que, ou

1. *$u_n \to u_0$ fortemente em E, ou*

2. *se $j=1,...,k_1$, então $\tau y_n^j \neq y_n^j$, e $|y_n^j| \to \infty$ quando $n\to\infty$;*

3. *se $j=k_1+1,...,k_1+k_2$, então $\tau y_n^j = y_n^j$, e $|y_n^j| \to \infty$ quando $n\to\infty$;*

4. *$u_n(\cdot) = u_0(\cdot) + \sum_{j=1}^{k_1}(u^j(\cdot - y_n^j) + T_\tau u^j(\cdot - y_n^j)) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} u^j(\cdot - y_n^j) + o_n(1)$ em E;*

5. *$I_\infty(u_n) \to I_\infty(u_0) + 2\sum_{j=1}^{k_1} I_\infty(u^j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j)$.*

Demonstração. Passo 1) Temos pelo Lema (2.8) que se $\{u_n\} \subset E^\tau$ é uma sequência (PS) do funcional I_∞ restrito à E^τ, $I_\infty|_{E^\tau}$, então $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) para I_∞.

Passo 2) Por hipótese $\{u_n\}$ é limitada, então $u_n \rightharpoonup u_0$ em E. Mostraremos agora que $I'_\infty(u_0) = 0$. Da imersão compacta de $E \hookrightarrow L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$ obtemos que $u_n \to u_0$ em $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq r < 2^*$. Logo, se K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$,

$$u_n(x) \to u_0(x) \quad \text{para quase todo } x \in K,$$

e existe

$$h \in L^r(K) \quad \text{tal que } |u_n(x)|, |u_0(x)| \leq h(x) \quad \text{para quase todo } x \in K.$$

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E, fixamos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e consideramos $K = supp(\varphi)$, o suporte da função φ. Então, pelas observações acima

$$\frac{u_n^3(x)\varphi(x)}{1+u_n^2(x)} \to \frac{u_0^3(x)\varphi(x)}{1+u_0^2(x)} \quad \text{q.t.p } x \in K.$$

Além disso,

$$\left|\frac{u_n^3(x)\varphi(x)}{1+u_n^2(x)}\right| \leq h_1(x) \quad \text{q.t.p } x \in K,$$

onde $h_1(x) := \|\varphi\|_\infty h(x)^3 \in L^1(K)$. Assim, aplicamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_n^3\varphi}{1+u_n^2} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_0^3\varphi}{1+u_0^2}, \text{ para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.43}$$

Por outro lado, segue da convergência fraca de u_n a u_0 em E que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla\varphi + V_\infty u_n\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_0 \nabla\varphi + V_\infty u_0\varphi), \text{ para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.44}$$

Assim, de (2.43) e (2.44), obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} I'_\infty(u_n)\varphi = I'_\infty(u_0)\varphi, \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Mas, por hipótese $\lim\limits_{n\to\infty} I'_\infty(u_n)\varphi = 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$I'_\infty(u_0)\varphi = 0 \text{ para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.45}$$

Passo 3) Agora verificaremos que $u_0 \in E^\tau$. Temos também que $u_n(x) \to u_0(x)$ q.t.p

x. Além disso, $u_n \in E^\tau$ implica que $T_\tau(u_n(x)) = u_n(x)$, logo

$$\begin{aligned} T_\tau(u_0(x)) &:= -u_0(\tau x) = -\lim_{n\to\infty} u_n(\tau x) = \lim_{n\to\infty} -u_n(\tau x) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_\tau(u_n(x)) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u_0(x). \end{aligned}$$

Segue, portanto, que $u_0 \in E^\tau$.

Passo 4) Seja $u_n^1 := u_n - u_0$. Temos que

(i) $\|u_n^1\|_E^2 = \|u_n\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 + o_n(1)$;

(ii) $I_\infty(u_n^1) \to c - I_\infty(u_0)$;

(iii) $I'_\infty(u_n^1) \to 0$.

De fato,

(i) como $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ então

$$\langle u_n, u_0\rangle \to \langle u_0, u_0\rangle = \|u_0\|_E^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|u_n^1\|_E^2 &= \|u_n - u_0\|_E^2 = \|u_n\|_E^2 - 2\langle u_n, u_0\rangle + \|u_0\|_E^2 \\ &= \|u_n\|_E^2 - 2\|u_0\|_E^2 + \|u_0\|_E^2 + o_n(1) \\ &= \|u_n\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 + o_n(1), \end{aligned}$$

como queríamos.

(ii) Este item segue da convergência fraca de $\{u_n\}$, juntamente com (2.24). De fato, temos que

$$\begin{aligned} I_\infty(u_n) - I_\infty(u_n^1) - I_\infty(u_0) &= \frac{1}{2}\big(\|u_n\|_E^2 - \|u_n - u_0\|_E^2 - \|u_0\|_E\big) \\ &- K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \big(F(u_n) - F(u_n^1) - F(u_0)\big) = o_n(1). \quad (2.46) \end{aligned}$$

(iii) Agora mostraremos que

$$I'_\infty(u_n^1) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{2.47}$$

De fato, usando que $u_n^1 := u_n - u_0$ e o Lema 2.4, temos pelo passo 1, que para toda função

$h \in E$,

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \langle I'_\infty(u_n), h\rangle \\
&= \left\langle I'_\infty(u_0 + u_n^1), h\right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u_0 \nabla h + V_\infty u_0 h + \nabla u_n^1 \nabla h + V_\infty u_n^1 h\right) - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0 + u_n^1) h \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_0 \nabla h + V_\infty u_0 h) - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0) h + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u_n^1 \nabla h + V_\infty u_n^1 h\right) \\
&- K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1) h + K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0) h + K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1) h - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0 + u_n^1) h \\
&= \langle I'_\infty(u_0), h\rangle + \left\langle I'_\infty(u_n^1), h\right\rangle + K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(f(u_0) + f(u_n^1) - f(u_0 + u_n^1)\right) h \\
&= \langle I'_\infty(u_0), h\rangle + \left\langle I'_\infty(u_n^1), h\right\rangle + K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(f(u_0) + f(u_n - u_0) - f(u_n)\right) h \\
&= \langle I'_\infty(u_0), h\rangle + \left\langle I'_\infty(u_n^1), h\right\rangle + o_n(1).
\end{aligned}$$

Agora usando o fato que $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) de I_∞ e (2.45), obtemos

$$\left\langle I'_\infty(u_n^1), h\right\rangle = \langle I'_\infty(u_n), h\rangle - \langle I'_\infty(u_0), h\rangle = o_n(1).$$

Portanto, obtemos que $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) de I_∞. Além disso, visto que $u_n, u_0 \in E^\tau$ e T_τ é linear, segue que $T_\tau(u_n^1)(x) = u_n^1(x)$. Sabemos que $u_n^1 \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então consideremos agora

$$\delta := \limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |u_n^1(x)|^2 dx.$$

Se $\delta = 0$, segue do Lema de Lions [41] que

$$u_n^1 \to 0 \quad \text{em } L^{q+2}(\mathbb{R}^N), \text{ para qualquer } 2 < q+2 < 2^*, \tag{2.48}$$

logo por (2.15) e (2.48), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_\infty f(u_n^1) u_n^1 \le C \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1|^{q+2} \to 0. \tag{2.49}$$

Por outro lado de (2.47) temos que $I'_\infty(u_n^1) \to 0$ e como $\{u_n^1\}$ é uma sequência limitada, então $I'_\infty(u_n^1)u_n^1 \to 0 \quad$ quando $n \to \infty$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n^1|^2 + V_\infty (u_n^1)^2 - K_\infty f(u_n^1)u_n^1\right) \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{2.50}$$

Assim, substituindo (2.49) em (2.50), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n^1|^2 + V_\infty (u_n^1)^2) \to 0.$$

Segue que $u_n \to u_0 \quad$ em E, isto é, u_0 é uma solução τ-antissimétrica do problema (2.1), o que completa a prova. Agora, se $\delta > 0$, obtemos uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_n)} |u_n^1(x)|^2 dx > \frac{\delta}{2}. \tag{2.51}$$

Definamos uma nova sequência $\{v_n^1\} \subset E$ por

$$v_n^1 := u_n^1(\cdot + y_n).$$

Como $\{u_n^1\}$ é limitada então $\{v_n^1\}$ também o é, e portanto assumimos que $v_n^1 \rightharpoonup u^1$ em E e $v_n^1(x) \to u^1(x)$ q.t.p $x \in \mathbb{R}^N$. Por (2.51) temos que

$$\int_{B_1(0)} |v_n^1(x)|^2 dx > \frac{\delta}{2}. \tag{2.52}$$

Da convergência fraca sabemos que $v_n^1 \to u^1$ fortemente em $L^2(B_1(0))$ e, portanto

$$\int_{B_1(0)} |u^1(x)|^2 dx \geq \frac{\delta}{2},$$

de onde segue que $u^1 \neq 0$. Além disso, como $u_n^1 \rightharpoonup 0$ em E, segue que $\{y_n\}$ é uma sequência ilimitada. Portanto, a menos de subsequências, podemos assumir que $|y_n| \to \infty$. Finalmente, visto que estamos sob as hipóteses do lema $(A.6)$ (ver apêndice), (cf. Lema 8.3 de [51]), obtemos que $I'_\infty(u^1) = 0$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$,

$$\sup_{\|\phi\| \leq 1} \|I'_\infty(u_n)\phi\| < \varepsilon \;\text{ para toda }\; \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

assim,

$$\sup_{\|\phi\|\leq 1}\|I'_\infty(u_n(\cdot+y_n))\phi\| = \sup_{\|\phi(\cdot-y_n)\|\leq 1}\|I'_\infty(u_n(\cdot))\phi(x-y_n)\| \leq \sup_{\|\psi\|\leq 1}\|I'_\infty(u_n)\psi\| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'_\infty(u_n^1(\cdot+y_n)\phi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla u_n^1(x+y_n)\nabla\phi + V_\infty u_n^1(x+y_n)\phi\right)dx - K_\infty\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1(x+y_n))\phi dx \\ &= o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla u^1\nabla\phi + V_\infty u^1\phi\right) - K_\infty\int_{\mathbb{R}^N} f(u^1)\phi \\ &= o_n(1) + I'_\infty(u^1)\phi. \end{aligned}$$

No que segue, procederemos como é usual neste tipo de problema, analogamente à Micheletti e Ghimenti [32] e Carvalho, Maia e Miyagaki [17].

Consideremos agora $\mathbb{R}^N = \Gamma\oplus\Gamma^\perp$, onde $\Gamma := \{x\in\mathbb{R}^N : \tau(x) = x\}$. Seja ainda P_Γ a projeção sobre o subespaço Γ. Podemos distinguir dois casos:

Caso I: Se $|y_n - \tau y_n|$ é limitada, definimos $y_n^1 := P_\Gamma(y_n)$;

Caso II: Se $|y_n - \tau y_n|$ é ilimitada, definimos $y_n^1 := y_n$.

Vejamos cada um dos casos:

Caso I: Observamos primeiramente que $|y_n^1| \to \infty$. De fato, pela observação $(A.4)$ sabemos que a transformação linear ortogonal $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é diagonalizável e, pela observação $(A.5)$, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\tau(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_N) = (x_1,...,x_k,-x_{k+1},...,-x_N). \tag{2.53}$$

Denotando y_n por

$$y_n = P_\Gamma(y_n) + w_n = y_n^1 + w_n,$$

então $y_n^1 := P_\Gamma(y_n)$ implica $\tau(y_n^1) = y_n^1$. Seja $y_n = (x_1^n,...,x_k^n,x_{k+1}^n,...,x_N^n)$, onde $y_n^1 = (x_1^n,...,x_k^n,0,...,0)$ e $w_n = (0,...,0,x_{k+1}^n,...,x_N^n)$. Temos que

$$\tau(y_n) = (x_1^n,...,x_k^n,-x_{k+1}^n,...,-x_N^n),$$

e

$$|y_n - \tau y_n| = |(0,...,0,2x_{k+1}^n,...,2x_N^n)| = 2|w_n|.$$

Assim, na nova base temos que $|y_n - \tau y_n|$ é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que

$|y_n - \tau y_n| \leq 2M$, isto é, $|w_n| \leq M$. Logo, como $y_n = y_n^1 + w_n$, $|y_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $|w_n| \leq M$, então $|y_n^1| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Assim, consideramos a sequência $\{u_n^1(\cdot + y_n^1)\}_n$, que é limitada, logo a menos de subsequências, $u_n^1(\cdot + y_n^1) \rightharpoonup u^1$ em E, e $u^1 \neq 0$ é solução do problema limite (2.1). Além disso, como $\tau(y_n^1) = y_n^1$ temos

$$\begin{aligned} T_\tau(u^1(x)) := -u^1(\tau x) &= -\lim_{n\to\infty} u_n^1(\tau x + y_n^1) \\ &= \lim_{n\to\infty} -u_n^1(\tau(x + y_n^1)) \\ &= \lim_{n\to\infty} u_n^1(x + y_n^1) = u^1(x). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Definamos

$$u_n^2(x) := u_n^1(x) - u^1(x - y_n^1).$$

Verificaremos que $\{u_n^2\}$ é uma sequência (PS) para I_∞. De fato, temos que

$$\begin{aligned} I_\infty(u_n^2) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n^1(x) - u^1(x - y_n^1))|^2 + V_\infty((u_n^1)(x) - u^1(x - y_n^1))^2 \\ &- K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1(x) - u^1(x - y_n^1)). \end{aligned}$$

Se $z = x - y_n^1$ então $x = z + y_n^1$ e $dx = dz$. Renomeando z por x na mudança de variável, obtemos que

$$\begin{aligned} I_\infty(u_n^2(x)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n^1(x + y_n^1) - u^1(x))|^2 + V_\infty(u_n^1(x + y_n^1) - u^1(x))^2 \\ &- K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1(x + y_n^1) - u^1(x)). \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\|u_n^1(\cdot + y_n^1) - u^1\|^2 = \|u_n^1(\cdot + y_n^1)\|^2 - 2\langle u_n^1(\cdot + y_n^1), u^1\rangle + \|u^1\|^2 \tag{2.55}$$

Visto que $u_n^1(\cdot + y_n^1) \rightharpoonup u^1$ em E, pela definição de convergência fraca e o Teorema da Representação de Riesz, obtemos que

$$\langle u_n^1(\cdot + y_n^1), \varphi\rangle \to \langle u^1, \varphi\rangle, \text{ para toda } \varphi \in E.$$

Em particular, se $\varphi = u^1$, obtemos

$$\langle u_n^1(\cdot + y_n^1), u^1\rangle \to \langle u^1, u^1\rangle,$$

de onde segue que,

$$\langle u_n^1(\cdot + y_n^1), u^1 \rangle = \|u^1\|^2 + o_n(1).$$

Substituindo em (2.55) obtemos que

$$\begin{aligned} \|u_n^1(\cdot + y_n^1) - u^1\|^2 &= \|u_n^1(\cdot + y_n^1)\|^2 - 2\|u^1\|^2 + o_n(1) + \|u^1\|^2 \\ &= \|u_n^1\|^2 - \|u^1\|^2 + o_n(1). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Por outro lado, notemos que

$$I_\infty(u_n^1) - I_\infty(u_n^2) - I_\infty(u^1) = \frac{1}{2}\left(\left\|u_n^1\right\|^2 - \left\|u_n^1 - u^1\right\|^2 - \left\|u^1\right\|^2\right) - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} (F(u_n^1) - F(u_n^2) - F(u^1)).$$

Assim, utilizando (2.56) e (2.24), temos

$$I_\infty(u_n^2) = I_\infty(u_n^1) - I_\infty(u^1) + o_n(1).$$

Sendo $\{u_n^1\}$ uma sequência (PS) para I_∞, sabemos que $I_\infty(u_n^1)$ converge para uma constante, e portanto, $I_\infty(u_n^2)$ também converge. Finalmente, mostremos que

$$I'_\infty(u_n^2)\varphi \to 0 \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.57}$$

Visto que $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) para I_∞, sabemos que

$$I'_\infty(u_n^1)\varphi = o_n(1) \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.58}$$

Além disso, como u^1 é uma solução da equação (2.2) temos

$$I'_\infty(u^1)\varphi = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.59}$$

Assim, com uma mudança de variável, por (2.58), (2.59) e pelo lema (2.4) obtemos que

$$\begin{aligned}
|I'_\infty(u_n^2)\varphi| &= |\int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla(u_n^1 - u^1)\nabla\varphi + V_\infty(u_n^1 - u^1)\varphi\big) - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1 - u^1)\varphi| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u_n^1 \nabla\varphi + V_\infty u_n^1\varphi\big) - \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u^1\nabla\varphi + V_\infty u^1\varphi\big) - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1)\varphi \\
&+ K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u^1)\varphi - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1 - u^1)\varphi + K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1)\varphi - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u^1)\varphi| \\
&\leq o_n(1) + K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n^1) - f(u_n^1 - u^1) - f(u^1)||\varphi| \\
&\leq C_\varepsilon \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

de onde segue (2.57). Portanto, $\{u_n^2\}$ é uma sequência (PS) para I_∞.

Caso II: Aqui, sabemos que $|y_n - \tau y_n|$ é ilimitada e definimos $y_n^1 = y_n$. Além disso, sabemos que $u^1 \neq 0$ é solução fraca da equação (2.2). Seja $u_n^2 := u_n^1 - \gamma_n$, onde

$$\gamma_n(x) := u^1(x - y_n^1) - u^1(\tau x - y_n^1). \tag{2.60}$$

Observamos que em Micheletti e Ghimenti [32] e Carvalho, Maia e Miyagaki [17] as funções γ_n foram definidas usando-se uma função corte χ que multiplicava as funções $u^1(\cdot - y_n^1)$ e $u^1(\tau \cdot - y_n^1)$. Veremos a seguir que não é necessário fazer este truncamento visto que o decaimento exponencial da solução u^1 é suficiente para controlarmos os termos de integração $u^1(\cdot - y_n^1)u^1(\tau \cdot - y_n^1)$. Além disso, a nossa técnica simplifica substancialmente a prova.

Agora, note que como τ é uma transformação linear ortogonal, segue que

$$\begin{aligned}
T_\tau(\gamma_n(x)) &:= -\gamma_n(\tau x) = -u^1(\tau x - y_n^1) + u^1(x - y_n^1) \\
&= u^1(x - y_n^1) - u^1(\tau x - y_n^1) = \gamma_n(x).
\end{aligned}$$

Desta forma, $u_n^2 \in E^\tau$, pois

$$\begin{aligned}
T_\tau(u_n^2(x)) &= T_\tau(u_n^1(x) - \gamma_n(x)) = T_\tau(u_n^1(x)) - T_\tau(\gamma_n(x)) \\
&= u_n^1(x) - \gamma_n(x) = u_n^2(x).
\end{aligned}$$

Devemos mostrar que $\{u_n^2\}$ é uma sequência (PS) para I_∞. Para tanto, mostraremos que

$$I_\infty(u_n^2) = I_\infty(u_n^1) - 2I_\infty(u^1) + o_n(1), \tag{2.61}$$

onde utilizaremos o fato que $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) de I_∞.

Temos que

$$\|u_n^2\|^2 = \|u_n^1 - \gamma_n\|^2 = \|u_n^1\|^2 - 2\langle u_n^1, \gamma_n\rangle + \|\gamma_n\|^2, \tag{2.62}$$

tal que

$$\begin{aligned}
\langle u_n^1, \gamma_n\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n^1 \nabla \gamma_n + V_\infty u_n^1 \gamma_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla \left\{u^1(x - y_n^1) - u^1(\tau x - y_n^1)\right\} + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^1 \left\{u^1(x - y_n^1) - u^1(\tau x - y_n^1)\right\} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla \left(u^1(x - y_n^1)\right) - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1 \nabla \left(u^1(\tau x - y_n^1)\right) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty u_n^1 u^1(x - y_n^1) - V_\infty u_n^1 u^1(\tau x - y_n^1)).
\end{aligned}$$

Primeiramente afirmamos que

$$\langle u_n^1, \gamma_n\rangle = 2\|u^1\|^2 + o_n(1). \tag{2.63}$$

De fato, sejam

$$A_n^1 = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n^1 \nabla \left((u^1(x - y_n^1)\right) + V_\infty u_n^1 u^1(x - y_n^1)),$$

e

$$A_n^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n^1 \nabla \left(u^1(\tau x - y_n^1)\right) + V_\infty u_n^1 u^1(\tau x - y_n^1)).$$

Mostremos que

$$A_n^1 \to \left\{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^1|^2 + V_\infty (u^1)^2)\right\}, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

e

$$A_n^2 \to -\left\{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^1|^2 + V_\infty (u^1)^2)\right\} \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{2.64}$$

Seja $z = x - y_n^1$ assim $x = z + y_n^1$ e $dx = dz$, juntamente com o fato que

$u_n^1(\cdot + y_n^1) \rightharpoonup u^1(\cdot)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n^1(z+y_n^1)\nabla(u^1(z)) + V_\infty u_n^1(z+y_n^1)u^1(z)) \to \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u^1|^2 + V_\infty (u^1)^2\right).$$

Para avaliarmos A_n^2, consideremos a seguinte mudança de variáveis $\tau x - y_n^1 = z$, então $x = \tau(z + y_n^1)$ e $dx = dz$. Assim,

$$A_n^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n^1(\tau(z+y_n^1))\nabla(u^1(z)) + V_\infty u_n^1(\tau(z+y_n^1))u^1(z)).$$

Visto que u_n^1 é τ-antissimétrica, temos

$$A_n^2 = -\left\{\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^1((z+y_n^1))\nabla(u^1(z)) + V_\infty u_n^1((z+y_n^1))u^1(z)\right\}.$$

Logo, de maneira análoga ao que fizemos para A_n^1, obtemos (2.64), e assim provamos o que afirmamos em (2.63).
Agora, afirmamos que

$$\|\gamma_n\|^2 = 2\|u^1\|^2 + o_n(1). \tag{2.65}$$

De fato, por (2.25) e (2.26), temos que

$$\begin{aligned}
\|\gamma_n\|^2 =& \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \gamma_n|^2 + V_\infty(\gamma_n)^2) \\
=& \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla(u^1(x-y_n^1) - u^1(\tau x - y_n^1))\right|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty(u^1(x-y_n^1) - u^1(\tau x - y_n^1))^2 \\
=& \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u^1(x-y_n^1)\right|^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^1(x-y_n^1).\nabla u^1(\tau x - y_n^1) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u^1(\tau x - y_n^1)\right|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \left|u^1(x-y_n^1)\right|^2 \\
&-2\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^1(x-y_n^1)u^1(\tau x - y_n^1) + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \left|u^1(\tau x - y_n^1)\right|^2 \\
=& 2\left\|u^1\right\|^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^1(x-y_n^1).\nabla u^1(\tau x - y_n^1) - 2\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^1(x-y_n^1)u^1(\tau x - y_n^1) \\
=& 2\left\|u^1\right\|^2 + o_n(1).
\end{aligned}$$

Obtendo assim (2.65). Finalmente, substituindo (2.63) e (2.65) em (2.62) obtemos

$$\|u_n^2\|^2 = \|u_n^1\|^2 - 2\|u^1\|^2 + o_n(1). \tag{2.66}$$

A fim de concluirmos (2.61) falta verificarmos a seguinte igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1)dx - 2\int_{\mathbb{R}^N} F(u^1)dx + o_n(1). \tag{2.67}$$

Assim, definindo $\rho_n := \frac{|y_n^1 - \tau y_n^1|}{2}$, $S_n = \mathbb{R}^N \setminus B_{\rho_n}(0) \cup B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)$ e usando que $u^1(\tau x - y_n^1) = u^1(\tau(x - \tau y_n^1)) = -u^1(x - \tau y_n^1)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^2) &= \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1 - \gamma_n)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1(x) - u^1(x - y_n^1) + u^1(\tau x - y_n^1))dx \\
&= \int_{B_{\rho_n}(0)} F(u_n^1(z + y_n^1) - u^1(z) - u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1))dz \\
&+ \int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)} F(u_n^1(z + y_n^1) - u^1(z) - u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1))dz \\
&+ \int_{S_n} F(u_n^1(z + y_n^1) - u^1(z) - u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1))dz \\
&= \int_{B_{\rho_n}(0)} F(u_n^1(z + y_n^1) - u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1))dz - \int_{B_{\rho_n}(0)} F(u^1(z))dz \\
&+ \int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)} F(u_n^1(z + y_n^1) - u^1(z))dz - \int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)} F(u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1))dz \\
&+ \int_{S_n} F(u_n^1(z + y_n^1) - u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1))dz - \int_{S_n} F(u^1(z))dz + o_n(1).
\end{aligned}$$

Sob as hipóteses de que $u_n^1(z + y_n^1) - u^1(z) \to 0$ se $|y_n^1| \to +\infty$ q.t.p $z \in \mathbb{R}^N$ e que $u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1) \to 0$ q.t.p $z \in \mathbb{R}^N$; $|y_n^1 - \tau y_n^1| \to \infty$, juntamente com o Lema (2.5), verificamos a seguinte afirmação:

Afirmação 1.

(1) $\displaystyle\int_{B_{\rho_n}(0)} F(u_n^1(z + y_n^1) - u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)) - \int_{B_{\rho_n}(0)} F(u_n^1(z + y_n^1)) = o_n(1),$

(2) $\displaystyle\int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)} F(u_n^1(z + y_n^1) - u^1(z)) - \int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1))} F(u_n^1(z + y_n^1)) = o_n(1),$

(3) $\displaystyle\int_{S_n} F(u_n^1(z + y_n^1) - u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)) - \int_{S_n} F(u_n^1(z + y_n^1)) = o_n(1),$

(4) $\displaystyle\int_{B_{\rho_n}(0)} F(u^1(z))dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(u^1(z))dx + o_n(1),$

(5) $\displaystyle\int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)} F(u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1))dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(u^1(z))dx + o_n(1),$

(6) $\displaystyle\int_{S_n} F(u^1(z))dx = o_n(1).$

Verificação da Afirmação 1.

Verificaremos que a condição (1) é verdadeira. Pelo Lema 2.2 com $0 \leq q \leq 2^* - 2$ e pelo Teorema do Valor Médio, existe $0 \leq \theta \leq 1$ tal que

$$
\begin{aligned}
& \int_{B_{\rho_n}(0)} \left(F(u_n^1(z + y_n^1) - u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)) - F(u_n^1(z + y_n^1)) \right) dz \\
\leq & \int_{B_{\rho_n}(0)} f(u_n^1(z + y_n^1) + \theta(z) u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)) u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1) dz \\
\leq & \; C \int_{B_{\rho_n}(0)} |u_n^1(z + y_n^1) + \theta(z) u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)|^{q+1} |u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)| dz \\
\leq & \; C \int_{B_{\rho_n}(0)} \Big(|u_n^1(z + y_n^1)|^{q+1} |u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)| + |u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)|^{q+1} |u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)| \Big) dz \\
\leq & \; C \left\| u_n^1 \right\|_{H^1}^{q+1} \left(\int_{B_{\rho_n}(0)} |u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)|^{q+2} dz \right)^{\frac{1}{q+2}} + C \int_{B_{\rho_n}(0)} |u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)|^{q+2} dz.
\end{aligned}
$$

Consideramos a seguir a seguinte mudança de variáveis $x = z + y_n^1 - \tau y_n^1$. Então se $|z| < \rho_n = \dfrac{|y_n^1 - \tau y_n^1|}{2}$, temos

$$
|z + y_n^1 - \tau y_n^1| > |y_n^1 - \tau y_n^1| - |z| > \frac{|y_n^1 - \tau y_n^1|}{2} = \rho_n \to \infty.
$$

Portando, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, temos

$$
\int_{B_{\rho_n}(0)} |u^1(z + y_n^1 - \tau y_n^1)|^{q+2} dz \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\rho_n}(0)} |u^1(x)|^{q+2} dx < \varepsilon.
$$

Portanto mostramos (1) e de forma inteiramente análoga mostramos (2), pois usando novamente o Teorema do Valor Médio, existe $0 \leq \theta \leq 1$ tal que

$$
\begin{aligned}
& \int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)} \left(F(u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z)) - F(u_n^1(z+y_n^1))\right) dz \\
\leq & \int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)} f(u_n^1(z+y_n^1) + \theta(z)u^1(z))u^1(z)dz \\
\leq & \ C\int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)} |u_n^1(z+y_n^1) + \theta(z)u^1(z)|^{q+1}|u^1(z)|dz \\
\leq & \ C\int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)} \Big(|u_n^1(z+y_n^1)|^{q+1}|u^1(z)| + |u^1(z)|^{q+1}|u^1(z)|\Big)dz \\
\leq & \ C\left\|u_n^1\right\|_{H^1}^{q+1}\left(\int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)} |u^1(z+y_n^1 - \tau y_n^1)|^{q+2}dz\right)^{\frac{1}{q+2}} \\
+ & \ C\int_{B_{\rho_n}(\tau y_n^1 - y_n^1)} |u^1(z+y_n^1 - \tau y_n^1)|^{q+2}dz,
\end{aligned}
$$

e o resultado (2) segue utilizando-se os mesmos argumentos feitos em (1). A seguir, verificaremos (3). De fato, primeiramente consideramos que $w^1(z) = u^1(z+y_n^1 - \tau y_n^1)$. Assim temos que

$$
\begin{aligned}
& \int_{S_n} \left(F(u_n^1(z+y_n^1) - u^1(z+y_n^1 - \tau y_n^1)) - F(u_n^1(z+y_n^1))\right) dz \\
\leq & \int_{S_n} f(u_n^1(z+y_n^1) + \theta(z)w^1(z))w^1(z)dz \\
\leq & \ C\int_{S_n} (|u_n^1(z+y_n^1|^{q+1}w^1(z) + |w^1(z)|^{q+2})dz \\
\leq & \ C\left\{\left\|u_n^1\right\|_{H^1}^{q+1}\left(\int_{S_n} |w^1(z)|^{q+2}dz\right)^{\frac{1}{q+2}} + \int_{S_n} |w^1(z)|^{q+2}dz\right\}.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que

$$\int_{S_n} |w^1(z)|^{q+2}dz = o_n(1).$$

De fato, fazendo a mudança $x = z - (\tau y_n^1 - y_n^1)$ juntamente com $|z + y_n^1 - \tau y_n^1| > |y_n^1 - \tau y_n^1| - |z| > \dfrac{|y_n^1 - \tau y_n^1|}{2} = \rho_n \to \infty$; $n \to \infty$ e que $u^1 \in L^{q+2}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{S_n} |w^1(z)|^{q+2}dz &= \int_{S_n} |u^1(z+y_n^1-\tau y_n^1)|^{q+2}dz\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\rho_n}(\tau y_n^1-y_n^1)} |u^1(z+y_n^1-\tau y_n^1)|^{q+2}dz\\ &= C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\rho_n}(0)} |u^1(x)|^{q+2}dx<\varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto verificamos o item (3). De forma inteiramente análoga como feito no item (3) e usando o crescimento de F como em (2.15), mostramos (6). A seguir vamos verificar (4). De fato, usando que $u^1\in L^{q+2}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\rho_n}(0)} F(u^1(z))dx &= \int_{0<|z|<\rho_n} F(u^1(z))dx+\int_{|z|>\rho_n} F(u^1(z))dx\\ &- \int_{0<|z|<\rho_n} F(u^1(z))dx = o_n(1)\end{aligned}$$

Similarmente, mostramos (5). Portanto, utilizando $(1)-(6)$ concluímos a verificação da Afirmação 1. De (2.66) e (2.67) obtemos que

$$I_\infty(u_n^2)=I_\infty(u_n^1)-2I_\infty(u^1)+o_n(1).$$

Como $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) para I_∞, então $I_\infty(u_n^2)$ converge para uma constante. Para completar a prova, mostraremos que se $n\to\infty$,

$$I'_\infty(u_n^2)\varphi\to 0,\quad \text{para toda}\quad \varphi\in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.68}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\left|I'_\infty(u_n^2)\varphi\right| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla(u_n^1-\gamma_n)\nabla\varphi+V_\infty(u_n^1-\gamma_n)\varphi)-K_\infty\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1-\gamma_n)\varphi\Big|\\ &= \Big|\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla u_n^1\nabla\varphi+V_\infty u_n^1\varphi\right)-K_\infty\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1)\varphi-\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla\gamma_n\nabla\varphi+V_\infty\gamma_n\varphi)\\ &+ K_\infty\int_{\mathbb{R}^N} f(\gamma_n)\varphi-K_\infty\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1-\gamma_n)\varphi\\ &+ K_\infty\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1)\varphi-K_\infty\int_{\mathbb{R}^N} f(\gamma_n)\varphi\Big|.\end{aligned}$$

Como $\{u_n^1\}$ é uma sequência (PS) para I_∞ temos que

$$I'_\infty(u_n^1)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n^1 \nabla \varphi + V_\infty u_n^1 \varphi) - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1)\varphi = o_n(1). \tag{2.69}$$

De (2.69), da definição de γ_n e da desigualdade triangular, obtemos que

$$\left| I'_\infty(u_n^2)\varphi \right| \leq K_n^1 + K_n^2 + o_n(1), \tag{2.70}$$

onde

$$\begin{aligned} K_n^1 : &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \gamma_n \nabla \varphi + V_\infty \gamma_n \varphi| \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \nabla (u^1(x - y_n^1) - u^1(\tau x - y_n^1)) \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty (u^1(x - y_n^1) - u^1(\tau x - y_n^1)) \varphi \Big|, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} K_n^2 : &= K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |f(\gamma_n)\varphi| \\ &= K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \Big| f(u^1(x - y_n^1) - u^1(\tau x - y_n^1)) \varphi \Big|. \end{aligned}$$

Mostraremos primeiramente que $K_n^1 = o_n(1)$. De fato, consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $\Omega = supp(\varphi)$, $|y_n^1| \to +\infty$, $|\nabla u^1| \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e utilizando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \nabla u^1(x - y_n^1) \nabla \varphi \Big| &= \int_\Omega \Big| \nabla u^1(x - y_n^1) \nabla \varphi \Big| \\ &\leq \left(\int_\Omega \Big| \nabla u^1(x - y_n^1) \Big|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. De forma inteiramente análoga, mostramos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big| \nabla u^1(\tau x - y_n^1) \nabla \varphi \Big| < \varepsilon, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \Big| u^1(x - y_n^1) \varphi \Big| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \Big| u^1(\tau x - y_n^1) \varphi \Big| < \varepsilon,$$

implicando desta forma que $K_n^1 = o_n(1)$. O próximo passo é mostrarmos também que $K_n^2 = o_n(1)$. Usando o Lema 2.2 e um argumento análogo ao anterior, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \left| f(u^1(x-y_n^1) - u^1(\tau x - y_n^1))\varphi \right| \\
\leq \;& C \int_{\Omega} \left| u^1(x-y_n^1) - u^1(\tau x - y_n^1) \right|^{q+1} \left| \varphi \right| \\
\leq \;& C_1 \int_{\Omega} |u^1(x-y_n^1)|^{q+1}|\varphi| + C_2 \int_{\Omega} |u^1(\tau x - y_n^1)|^{q+1}|\varphi| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto concluímos que $K_n^2 = o_n(1)$. Desta forma mostramos (2.68), e assim verificamos que $\{u_n^2\}$ é uma sequência (PS) para I_∞, também no caso II.

Agora procedemos por iteração. Notemos que se u é um ponto crítico não trivial de I_∞ e $\bar{u}$ é a solução de energia mínima da equação (2.2) dada por Berestycki e Lions [8], então temos que

$$I_\infty(u) \geq I_\infty(\bar{u}) > 0. \tag{2.71}$$

Por outro lado, de (2.61) e (2.46) obtemos

$$\begin{aligned}
I_\infty(u_n^2) &= I_\infty(u_n^1) - 2I_\infty(u_n^1) + o_n(1) \\
&= I_\infty(u_n) - I_\infty(u_0) - 2I_\infty(u^1) + o_n(1) \\
&= c - I_\infty(u_0) - 2I_\infty(u^1) + o_n(1).
\end{aligned} \tag{2.72}$$

De (2.71) e (2.72) a iteração deve ser finalizada em algum índice $k \in \mathbb{N}$.

□

No próximo resultado, verificaremos que o funcional $I_\infty|_{E^\tau}$ associado ao problema (2.1) satisfaz $(Ce)_c$ abaixo do nível $2m_\infty$.

Corolário 2.1. *O funcional $I_\infty|_{E^\tau}$ satisfaz $(Ce)_c$ para qualquer $c < 2m_\infty$.*

Demonstração. Consideremos $\{u_n\} \subset E^\tau$ tal que $I_\infty(u_n) \to c < 2m_\infty$ e $(1 + \|u_n\|)\,\|I'_\infty|_{E^\tau}(u_n)\| \to 0$. Pelos Lemas 2.8 e 2.9 temos que $\{u_n\}$ é limitada em E e $I'_\infty|_{E^\tau} \to 0$. Portanto, a menos de subsequências, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u_0$ em E e argumentando como anteriormente, obtemos que $I'_\infty(u_0)\varphi = 0$, para toda $\varphi \in E$. Da identidade de Pohozaev para u_0, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 = 2^* \int_{\mathbb{R}^N} G(u_0),$$

que implica em

$$\begin{aligned}
I_\infty(u_0) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 + V_\infty u_0^2 - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(u_0) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V_\infty u_0^2}{2} - K_\infty F(u_0) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u_0) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 \\
&= (\frac{2^*-2}{2.2^*})\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Se a sequência $\{u_n\}$ não convergir fortemente para u_0 em E então, pelo Lema (2.10) mais uma vez, obtemos dois inteiros $k_1, k_2 \geq 0$, em que $k_1 \geq 1$ ou $k_2 \geq 1$, k_1 soluções u^j, $j = 1, ..., k_1$ e k_2 soluções τ-antissimétricas u^j, $j = k_1 + 1, ..., k_1 + k_2$ do problema (2.1), satisfazendo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} I_\infty(u_n) &= c = I_\infty(u_0) + 2\sum_{j=1}^{k_1} I_\infty(u^j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j) \\
&\geq I_\infty(u_0) + 2k_1 m_\infty + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j) \\
&\geq k_1 2m_\infty + k_2 m_\infty^\tau \geq 2m_\infty,
\end{aligned}$$

o que contradiz a nossa hipótese. Portanto, $u_n \to u_0$ em E e segue que o funcional $I_\infty|_{E^\tau}$ satisfaz $(Ce)_c$ para qualquer $c < 2m_\infty$.

□

Observação 2.5. *Optamos, no Passo 1, por utilizar o Lema 2.8 e trabalhar com a sequência (PS) no espaço todo E. Contudo poderíamos fazer a demonstração do Lema 2.10 inteiramente restritos ao subespaço E^τ e usarmos o Princípio da Criticalidade Simétrica (ver [51]) no final para concluirmos que as soluções u_0 e u^j são pontos críticos no espaço todo E.*

No lema seguinte obteremos uma relação entre m_∞^τ e $2m_\infty$.

Lema 2.11.

$$2m_\infty \leq m_\infty^\tau. \tag{2.73}$$

Demonstração. Mostremos primeiramente que se $u \in \mathcal{P}^\tau$ então $u^+,\ u^- \in \mathcal{P}$. Usando mudança de variáveis, que $G(s)$ é uma função par e definindo $A^\tau := \{x : -u(\tau x) \geq 0\}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
J(u^+) &= \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} |\nabla u|^2 dx - 2^* \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} G(u) dx \\
&= \int_{A^\tau} |\nabla(-u(\tau x))|^2 dx - 2^* \int_{A^\tau} G(-u(\tau x)) dx \\
&= \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} |\nabla u|^2 dz - 2^* \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} G(-u(z)) dz \\
&= \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} |\nabla u^-|^2 dz - 2^* \int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}} G(u^-) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^2 dz - 2^* \int_{\mathbb{R}^N} G(u^-) dz \\
&= J(u^-).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
0 = J(u) &= \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} |\nabla u|^2 dx - 2^* \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} G(u) dx \\
&+ \int_{\{x:\ u(x)< 0\}} |\nabla u|^2 dx - 2^* \int_{\{x:\ u(x)< 0\}} G(u) dx \\
&= \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} |\nabla u^+|^2 dx - 2^* \int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}} G(u^+) dx \\
&+ \int_{\{x:\ u(x)< 0\}} |\nabla u^-|^2 dx - 2^* \int_{\{x:\ u(x)< 0\}} G(u^-) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^+|^2 dx - 2^* \int_{\mathbb{R}^N} G(u^+) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^2 dx - 2^* \int_{\mathbb{R}^N} G(u^-) dx \\
&= J(u^+) + J(u^-) = 2J(u^+) = 2J(u^-).
\end{aligned}$$

Logo, $u^+,\ u^- \in \mathcal{P}$.

Agora, usando o fato de que F é par, temos que

$$\begin{aligned}
I_\infty(u^+) &= \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}(|\nabla u|^2+V_\infty(u)^2)dx - K_\infty\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}F(u)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{A^\tau}(|\nabla(-u(\tau x))|^2+V_\infty((-u(\tau x)))^2)dx - K_\infty\int_{A^\tau}F(-u(\tau x))dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}}(|\nabla u|^2+V_\infty(u)^2)dz - K_\infty\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}}F(-u)dz\\
&= \frac{1}{2}\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}}(|\nabla u^-|^2+V_\infty(u^-)^2)dz - K_\infty\int_{\{z:\ u(z)\leq 0\}}F(u^-)dz\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u^-|^2+V_\infty(u^-)^2)dz - K_\infty\int_{\mathbb{R}^N}F(u^-)dz\\
&= I_\infty(u^-).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
I_\infty(u) &= \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}(|\nabla u|^2+V_\infty(u)^2)dx - K_\infty\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}F(u)dx\\
&+ \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)< 0\}}(|\nabla u|^2+V_\infty(u)^2)dx - K_\infty\int_{\{x:\ u(x)< 0\}}F(u)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}(|\nabla u^+|^2+V_\infty(u^+)^2)dx - K_\infty\int_{\{x:\ u(x)\geq 0\}}F(u^+)dx\\
&+ \frac{1}{2}\int_{\{x:\ u(x)< 0\}}(|\nabla u^-|^2+V_\infty(u^-)^2)dx - K_\infty\int_{\{x:\ u(x)< 0\}}F(u^-)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u^+|^2+V_\infty(u^+)^2)dx - K_\infty\int_{\mathbb{R}^N}F(u^+)dx\\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u^-|^2+V_\infty(u^-)^2)dx - K_\infty\int_{\mathbb{R}^N}F(u^-)dx\\
&= I_\infty(u^+)+I_\infty(u^-).
\end{aligned}$$

Portanto, para toda $u\in\mathcal{P}^\tau$, temos que

$$I_\infty(u)=I_\infty(u^+)+I_\infty(u^-)=2I_\infty(u^+)\geq 2m_\infty.$$

Assim,

$$m_\infty^\tau:=\inf_{u\in\mathcal{P}^\tau}I_\infty(u)\geq 2m_\infty.$$

□

2.3 Demonstração do Teorema 2.1

Nesta seção provaremos o nosso resultado principal. Em um primeiro momento, mostraremos a desigualdade contrária à (2.73), obtida no Lema 2.11. Contudo, para isto mostraremos alguns lemas preliminares.

Lema 2.12. *Para cada $u \in E \backslash \{0\}$ com $\int_{\mathbb{R}^N} G(u) > 0$ existe um único número real $t > 0$ tal que $u(\frac{\cdot}{t}) \in \mathcal{P}$ e $I_\infty(u(\frac{\cdot}{t}))$ é o máximo para a função*

$$t \mapsto I_\infty(u(\frac{\cdot}{t})), \quad t > 0.$$

Demonstração. Consideremos a seguinte função g, dada por:

$$g(t) = I_\infty(u(\frac{\cdot}{t})) = \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{V_\infty t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 - t^N K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(u).$$

Temos que

$$g'(t) = \frac{(N-2)t^{N-3}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + Nt^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{V_\infty}{2}|u|^2 - K_\infty F(u)\right],$$

e $g'(t) = 0$ se, e somente se,

$$t^{N-3}\left((N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + Nt^2\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{V_\infty}{2}|u|^2 - K_\infty F(u)\right]\right) = 0.$$

Portanto temos $t = 0$ ou

$$t^2 = \frac{(N-2)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2}{N\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\left[-\frac{V_\infty}{2}|u|^2 + K_\infty F(u)\right]} = \frac{(N-2)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2}{N\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G(u)}.$$

□

Seja $\bar{u} \in \mathcal{P}$ solução positiva radial "ground state" da equação (2.2) e definamos

$$z_y(x) := \bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y). \tag{2.74}$$

Lema 2.13. *Seja F como em* (2.6). *Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-y)-\bar{u}(x-\tau y))dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-y))dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-\tau y))dx = o_y(1), \quad (2.75)$$

se $|y| \to \infty$ *e* $|y-\tau y| \to \infty$.

Demonstração. De fato, pelo Lema $(A.7)$ (ver apêndice) e uma mudança de variáveis, temos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^N} F(z_y)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-y))dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-\tau y))dx \right| \\ \leq \ & 2\int_{\mathbb{R}^N} \left[f(\bar{u}(x-y))\bar{u}(x-\tau y) + f(\bar{u}(x-\tau y))\bar{u}(x-y) \right] dx \\ = \ & 2\int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y)dz + 2\int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(\hat{z}))\bar{u}(\hat{z}-(y-\tau y))d\hat{z} \\ = \ & 4\int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y), \end{aligned}$$

De posse do Lema 2.2 e fazendo o Lema 2.6 com q, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y) \leq C\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}^{q+1}(z)\bar{u}(z+y-\tau y) = o_y(1),$$

obtendo assim (2.75), onde maiores detalhes da prova bem como a determinação do valor de $o_y(1)$, será feito no próximo capítulo (ver Lema 3.7). □

Lema 2.14.

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(z_y) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[-\frac{V_\infty}{2}|z_y|^2 + K_\infty F(z_y) \right] > 0, \quad (2.76)$$

se $|y| > 0$ *for suficientemente grande.*

Demonstração. De fato, utilizando (2.24), (2.74), a invariância por translação da função

G e os Lemas 2.6, 2.13, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left[-V_\infty |z_y|^2 + K_\infty F(z_y)\right] &= \int_{\mathbb{R}^N} -\frac{V_\infty}{2} |\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y)|^2 \\
&+ K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} -\frac{V_\infty}{2} |\bar{u}(x-y)|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} -\frac{V_\infty}{2} |\bar{u}(x-\tau y)|^2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y) + K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-y)) \\
&+ K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-\tau y)) - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-y)) \\
&- K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-\tau y)) + K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}) + \int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}) + o_y(1),
\end{aligned}
$$

quando $|y| \to \infty$. Como $\bar{u}$ é solução de (2.2), então satisfaz a identidade de Pohozaev e assim $\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}) > 0$, provando o lema.

$\square$

A seguir, estabeleceremos uma relação de igualdade entre m_∞^τ e $2m_\infty$. Já provamos que $m_\infty^\tau \geq 2m_\infty$, agora mostraremos que $m_\infty^\tau \leq 2m_\infty$.

Seja $z_y(x)$ como definida em (2.74). Assim, $z_y(.) \neq 0$. Além disso, como $\bar{u}$ é radialmente simétrica e $|\tau x| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos que $z_y \in E^\tau$ pois

$$
\begin{aligned}
T_\tau(z_y(x)) = -z_y(\tau x) &= -(\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y)) \\
&= -[\bar{u}(\tau(x-\tau y)) - \bar{u}(\tau(x-y))] \\
&= -[-\bar{u}(x-y) + \bar{u}(x-\tau y)] \\
&= z_y(x).
\end{aligned}
$$

Mostraremos na sequência que $t_{z_y} > 0$ do Lema 2.12 é limitado uniformemente em y. Pelo Lema 2.14, temos que $\int_{\mathbb{R}^N} G(z_y) > 0$ se $|y|$ é suficientemente grande e do Lema 2.12, segue que existe um único $t_{z_y} > 0$ tal que $z_y(\frac{\cdot}{t_{z_y}}) \in \mathcal{P}^\tau$. É claro que $t_{z_y} z_y \in E^\tau \backslash \{0\}$ e

$$I'_\infty(z_y(\frac{\cdot}{t_{z_y}})) = 0.$$

Portanto temos que

$$m^\tau_\infty := \inf_{\mathcal{P}^\tau} I_\infty \leq I_\infty(z_y(\frac{\cdot}{t_{z_y}})). \tag{2.77}$$

Relembrando que da demonstração do Lema 2.12 segue que

$$t^2_{z_y} = \frac{(N-2)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2}{N\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\left[-\frac{V_\infty}{2}|z_y|^2 + K_\infty F(z_y)\right]}.$$

Lema 2.15. *t_{z_y} é limitado quando $|y| \to \infty$ e $|y - \tau y| \to \infty$.*

Demonstração. De fato, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 = 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 + o_y(1), \tag{2.78}$$

pois utilizando a observação 2.2, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 = \langle \nabla(\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y)), \nabla(\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y))\rangle = 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 + o_y(1).$$

Portanto, se $|y|$ é tomado suficientemente grande (2.78) implica em

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y|^2 \leq 3\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2. \tag{2.79}$$

Por outro lado temos que

$$0 < \int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}) < 2\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}) + o_y(1) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{V_\infty}{2}|z_y|^2 + K_\infty F(z_y)\right) \leq 3\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}). \tag{2.80}$$

Logo segue de (2.79) e (2.80) que

$$\frac{(N-2)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2}{3N\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u})} \leq t^2_{z_y} = \frac{(N-2)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^2}{N\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{V_\infty}{2}|z_y|^2 + K_\infty F(z_y)\right)} \leq \frac{3(N-2)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2}{N\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u})},$$

portanto $0 < t_1 \leq t_{z_y} \leq t_2$.

$\square$

Finalmente, provaremos que se $|y| \to \infty$ e $|y - \tau y| \to \infty$, então

$$I_\infty(z_y(\frac{\cdot}{t_{z_y}})) \leq 2m_\infty + o_y(1). \tag{2.81}$$

De fato, temos que

$$z_y(\frac{x}{t_{z_y}}) = \bar{u}(\frac{x}{t_{z_y}} - y) - \bar{u}(\frac{x}{t_{z_y}} - \tau y),$$

e

$$I_\infty(z_y(\frac{\cdot}{t_{z_y}})) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y(\frac{x}{t_{z_y}})|^2 + V_\infty |z_y(\frac{x}{t_{z_y}})|^2 - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(z_y(\frac{x}{t_{z_y}})).$$

Agora fazendo a mudança de variáveis $\tilde{x} = \dfrac{x}{t_{z_y}}$, e denotando $t = t_{z_y}$ por simplicidade, temos

$$\begin{aligned}
I_\infty(z_y(\cdot)) &= \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_y(\tilde{x})|^2 + t^N \int_{\mathbb{R}^N} \big(V_\infty (z_y(\tilde{x}))^2 - K_\infty F(z_y(\tilde{x}))\big) \\
&= \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\bar{u}(\tilde{x} - y))|^2 + \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\bar{u}(\tilde{x} - \tau y))|^2 \\
&- t^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\bar{u}(\tilde{x} - y)\nabla\bar{u}(\tilde{x} - \tau y) + \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \bar{u}(\tilde{x} - y)^2 \\
&+ \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \bar{u}(\tilde{x} - \tau y)^2 - t^N \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \bar{u}(\tilde{x} - y)\bar{u}(\tilde{x} - \tau y) \\
&- t^N K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(\tilde{x} - y) - \bar{u}(\tilde{x} - \tau y)) \\
&- t^N K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(\tilde{x} - y)) - t^N K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(\tilde{x} - \tau y)) \\
&+ t^N K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(\tilde{x} - y)) + t^N K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(\tilde{x} - \tau y)) \\
&= I_\infty(\bar{u}(\cdot - y)) + I_\infty(\bar{u}(\cdot - \tau y)) - t^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\bar{u}(\tilde{x} - y)\nabla\bar{u}(\tilde{x} - \tau y) \\
&- t^N \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \bar{u}(\tilde{x} - y)\bar{u}(\tilde{x} - \tau y) - t^N K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(\tilde{x} - y) - \bar{u}(\tilde{x} - \tau y)) \\
&+ t^N K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(\tilde{x} - y)) + t^N K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(\tilde{x} - \tau y)).
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Como I_∞ é invariante por translação, $\bar{u}$ é solução da equação (2.2) e $\max\limits_{t>0} I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{t})) = I_\infty(\bar{u})$, então

$$
\begin{aligned}
I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{t_{z_y}} - y)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}(\frac{x}{t_{z_y}} - y)|^2 + V_\infty |\bar{u}(\frac{x}{t_{z_y}} - y)|^2 - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(\frac{x}{t_{z_y}} - y)) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}(\frac{x}{t_{z_y}})|^2 + V_\infty |\bar{u}(\frac{x}{t_{z_y}})|^2 - K_\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{u}(\frac{x}{t_{z_y}})) \\
&\le I_\infty(\bar{u}(x)) \\
&= m_\infty.
\end{aligned}
$$

Logo, se $|y| \to \infty$ e $|y - \tau y| \to \infty$ tem-se por (2.25), (2.26) e (2.75), que

$$
m_\infty^\tau \le I_\infty(z_y(\frac{\cdot}{t_{z_y}})) \le 2m_\infty + o_y(1).
$$

Portanto

$$
m_\infty^\tau \le \liminf_{|y|\to\infty} I_\infty(z_y(\frac{\cdot}{t_{z_y}})) \le 2m_\infty. \tag{2.83}
$$

Logo, pelas desigualdades (2.73) e (2.83) segue que $2m_\infty = m_\infty^\tau$. Esta igualdade é de suma importância, pois juntamente com o Lema de Splitting e o Corolário 2.1, implicará na prova do Teorema 2.1.

Tomemos agora $|\bar{y}| > 0$ e $|\bar{y} - \tau\bar{y}|$ suficientemente grandes tais que $\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}) > 0$, $I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{L_{\bar{y}}})) < 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} G(z_{\bar{y}}) > 0$ e $I_\infty(z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{L_{\bar{y}}})) < 0$, para algum número real $L_{\bar{y}} > 0$. Definindo

$$
z_1(\cdot) := z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{L_{\bar{y}}}),
$$

temos que

$$
I_\infty(z_1) < 0, \tag{2.84}
$$

pois

$$
I_\infty(z_1) = I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{L_{\bar{y}}})) + I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{L_{\bar{y}}})) + o_{\bar{y}}(1) < 0. \tag{2.85}
$$

Definimos também

$$
c_\infty^\tau := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{0\le t\le 1} I_\infty(\gamma(t)), \tag{2.86}
$$

em que $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E^\tau) : \gamma(0) = z_0 = 0 \;\; e \;\; \gamma(1) = z_1\}$.

Os próximos dois lemas são de suma importância para a prova do Teorema 2.1 no primeiro lema, com o auxílio do Teorema de Ghoussoub-Preiss e com a geometria do

Passo da Montanha verificaremos que existe uma sequência $\{u_n\} \subset E^\tau$ satisfazendo $I_\infty(u_n) \to c_\infty^\tau$ e $(1 + \|u_n\|) \|I'_\infty(u_n)\|_{E'} \to 0$. Contudo, gostaríamos que $c_\infty^\tau = m_\infty^\tau$ para podermos utilizá-la com $c = c_\infty^\tau$ no Lema de Splitting e no Corolário 2.1. Este fato será verificado no segundo lema, onde utilizaremos novamente o Teorema de Ghoussoub-Preiss e uma construção por caminhos.

Lema 2.16. *Existe uma sequência* $\{u_n\} \subset E^\tau$ *satisfazendo*

$$I_\infty(u_n) \to c_\infty^\tau \qquad e \qquad I'_\infty|_{E^\tau}(u_n) \to 0.$$

Demonstração. A prova deste fato decorre do Teorema de Ghoussoub-Preiss (ver Teorema A.2), do fato que $\mathcal{P}^\tau$ é uma subvariedade fechada em E^τ e que separa z_0 e z_1, (separação no sentido da definição A.1) dado pelo Lema 2.3 e pela geometria do Passo da Montanha do funcional $I_\infty|_{E^\tau}$ pelos Lemas $A.2$ e $A.3$ (ver apêndice).

□

Lema 2.17.

$$c_\infty^\tau = m_\infty^\tau.$$

Demonstração. Mostraremos primeiramente que $c_\infty^\tau \geq m_\infty^\tau$. Recordando o funcional $J : E^\tau \to \mathbb{R}$, definido em (2.8) por

$$J(u) = \frac{N-2}{2} \|\nabla u\|_2^2 - N \int G(u) = N I_\infty(u) - \|\nabla u\|_2^2 \,, \tag{2.87}$$

obtemos as seguintes informações:

(i) $J(u) = 0$ se $u \in \mathcal{P}^\tau$, pelo Lema 2.3;

(ii) existe $\rho_0 > 0$ tal que $J(u) > 0$ para todo $0 < \|u\|_{H^1} < \rho_0$. De fato,

$$\begin{aligned} J(u) &= N I_\infty(u) - \|\nabla u\|_2^2 \\ &= N \left(\|u\|_{H^1}^2 - o(\|u\|_{H^1}^2) \right) - \|\nabla u\|_2^2 \\ &= (N-1) \|\nabla u\|_2^2 + N \|u\|_2^2 - o(\|u\|_{H^1}^2) \\ &> (N-1) \|\nabla u\|_2^2 + N \|u\|_2^2 - \varepsilon \|u\|_2^2 > 0. \end{aligned}$$

(iii) De (2.84) e (2.87) segue que

$$J(z_1) = N I_\infty(z_1) - \|\nabla z_1\|_2^2 < 0.$$

Portanto, J separa $z_0 = 0$ e z_1 (ver definição A.1).

Mostraremos agora que $\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P}^\tau \neq \emptyset$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Para todo $\gamma \in \Gamma$ como definido em (2.86), temos $\gamma(0) = z_0 = 0$ e $J(\gamma(1)) = J(z_1) \leq NI_\infty(\gamma(1)) = NI_\infty(z_1) < 0$. Assim, como $I_\infty(\gamma(t))$ é contínuo, existe $t_\gamma \in [0,1]$ tal que

$$\|\gamma(t_\gamma)\| > \rho_0,$$

$$J(\gamma(t_\gamma)) = 0.$$

Portanto, $\gamma(t_\gamma) \in \gamma([0,1]) \cap \mathcal{P}^\tau$ e assim $\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P}^\tau \neq \emptyset$. Desta forma, pelo Teorema Ghoussoub-Preiss $A.2$ e a definição de c_∞^τ, como dada em (2.86), temos que

$$c_\infty^\tau = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} I_\infty(\gamma(t)) \geq \inf_{\gamma\in\Gamma} I_\infty(\gamma(t_\gamma)) \geq \inf_{\mathcal{P}^\tau} I_\infty(u) = m_\infty^\tau. \tag{2.88}$$

Falta mostrar que $c_\infty^\tau \leq m_\infty^\tau$. Para tanto, fixamos $|\bar{y}| > 0$ suficientemente grande como em (2.84) e (2.85) e dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos

$$z_{n\bar{y}} = \bar{u}(x - n\bar{y}) - \bar{u}(x - \tau(n\bar{y})).$$

Assim temos que se $n \to +\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(z_{n\bar{y}}) = 2\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}) + o_n(1),$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$, pelo Lema 2.12 existe $t_{n\bar{y}}$ tal que

$$z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{t_{n\bar{y}}}) \in \mathcal{P}, \tag{2.89}$$

e existe $L_{n\bar{y}} > 0$ tal que

$$I_\infty(z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{L_{n\bar{y}}})) < 0. \tag{2.90}$$

Fixado $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e considerando $L = \max\{L_{n\bar{y}}, L_{\bar{y}}\}$ e $s \in [0,1]$ definimos o caminho:

$$\gamma_n(s) = \bar{u}(\frac{\cdot}{L} - (s\bar{y} + (1-s)n\bar{y})) - \bar{u}(\frac{\cdot}{L} - \tau(s\bar{y} + (1-s)n\bar{y})),$$

e assim obtemos

$$\gamma_n(0) = \bar{u}(\frac{\cdot}{L} - n\bar{y})) - \bar{u}(\frac{\cdot}{L} - \tau(n\bar{y})) = z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{L}),$$

e

$$\gamma_n(1) = \bar{u}(\frac{\cdot}{L} - \bar{y}) - \bar{u}(\frac{\cdot}{L} - \tau\bar{y}) = z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{L}).$$

Denotando por $X_s(n) := s\bar{y} + (1-s)n\bar{y}$, $0 \le s \le 1$, usando os mesmos cálculos feitos em (2.82), juntamente com a invariância por translação de I_∞ e (2.85), obtemos que

$$\begin{aligned} I_\infty(\gamma_n(s)) &= I_\infty\Big(\bar{u}(\frac{\cdot}{L} - X_s(n)) - \bar{u}(\frac{\cdot}{L} - \tau X_s(n))\Big) \\ &= I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{L} - X_s(n))) + I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{L} - \tau X_s(n))) + o_{\bar{y}}(1) \\ &= I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{L})) + I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{L})) + o_{\bar{y}}(1) < 0, \end{aligned} \tag{2.91}$$

visto que, se $0 \le s \le 1$, então

$$|X_s(n)| = |s\bar{y} + (1-s)n\bar{y}| = |(s - sn + n)\bar{y}| \ge |\bar{y}|,$$

e

$$\begin{aligned} |\tau X_s(n) - X_s(n)| &= |s\bar{y} + (1-s)n\bar{y} - \tau(s\bar{y} + (1-s)n\bar{y})| \\ &= |s(\bar{y} - \tau\bar{y}) + (1-s)n(\bar{y} - \tau\bar{y})| \\ &\ge |\bar{y} - \tau\bar{y}|, \end{aligned}$$

para todo $n > 1$.

Finalmente, consideramos os caminhos $\gamma_0(t) := \begin{cases} z_0 = 0 & se \;\; t = 0 \\ z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{t}) & se \;\; t > 0 \end{cases}$ e $\gamma_n(s)$ para $n > 1$, que ligam respectivamente os pares de vetores $\{z_0, z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{L})\}$ e $\{z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{L}), z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{L})\}$, e denotamos por γ_1 o caminho que liga o par $\{z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{L}), z_1 = z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{L\bar{y}})\}$ dado por $\gamma_1(t) = z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{tL\bar{y}+(1-t)L})$.

Fazendo a composição destes três caminhos, $\gamma_1 \circ \gamma_n \circ \gamma_0$ construímos um caminho em Γ tal que a partir do ponto $z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{L})$ até z_1 o funcional I_∞ assume valores negativos por (2.90), (2.91) e (2.85). Portanto

$$\max_{0 \le t \le 1} I_\infty(\gamma_1 \circ \gamma_n \circ \gamma_0(t)) = I_\infty(z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{t_{n\bar{y}}})). \tag{2.92}$$

Assim, pela definição de c_∞^τ como dada em (2.86) e (2.82) obtemos

$$c_\infty^\tau \le \max_{0 \le t \le 1} I_\infty(\gamma_1 \circ \gamma_n \circ \gamma_0(t)) = I_\infty(z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{t_{n\bar{y}}})) \le 2m_\infty + o_{n\bar{y}}(1) = m_\infty^\tau + o_{n\bar{y}}(1).$$

Agora como $\bar{y}$ está fixado, tomando o limite quando $n \to \infty$ concluímos que

$$c_\infty^\tau \le m_\infty^\tau. \tag{2.93}$$

Portanto de (2.88) e (2.93), segue que $c_\infty^\tau = m_\infty^\tau$ e assim concluímos a demonstração do lema.

□

Lema 2.18. *Se u é uma solução do problema (2.1) que muda de sinal mais de uma vez, então $I_\infty(u) \geq 2m_\infty^\tau$.*

Demonstração. Suponhamos que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) > 0\}$ tem k componentes conexas $A_1, ..., A_k$, $k \geq 2$. Consideremos

$$u^i(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in A_i \cup \tau A_i, \\ 0 & \text{caso contrário}, \end{cases} \tag{2.94}$$

onde u^i é solução de (2.1) e $u^i \in E^\tau$, logo $u^i \in \mathcal{P}^\tau$ e $I_\infty(u^i) \geq m_\infty^\tau$. Por outro lado, como $G(0) = 0$, então

$$I_\infty(u) = I_\infty(u^1) + \cdots + I_\infty(u^k) \geq 2m_\infty^\tau.$$

□

Demonstração do Teorema 2.1. Pelo Teorema Ghoussoub-Preiss $A.2$ e Lema 2.16 existe uma sequência $\{u_n\} \subset E^\tau$, tal que

$$I_\infty(u_n) \to c_\infty^\tau \quad e \quad (1 + \|u_n\|) \, \|I'_\infty|_{E^\tau}(u_n)\| \to 0.$$

Em seguida o Lema 2.17 verifica que $c_\infty^\tau = m_\infty^\tau$. Além disso, do Lema 2.9, temos que como $\{u_n\} \subset E^\tau$ é uma sequência $(Ce)_c$ do funcional I_∞ restrito ao subespaço E^τ, então $\{u_n\}$ é limitada. Já pelo Lema 2.8 temos que $\{u_n\} \subset E^\tau$ é uma sequência (PS) do funcional I_∞ restrito à E^τ, $I_\infty|_{E^\tau}$, e portanto $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) para I_∞. Logo, a menos de subsequências, $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em E com $I'_\infty(u_0) = 0$. Em vista do Lema 2.10 temos que ou $u_n \to u_0$ fortemente em E e $u_0 \neq 0$, ou $u_0 = 0$ e desta forma $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$ ou $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$, já que a energia não pode ser superior a $2m_\infty$. Porém a primeira possibilidade, $u_0 \neq 0$, não ocorre devido ao resultado de M. J. Esteban e P. L. Lions (ver [27]). Segundo este resultado a única solução não negativa para o problema autônomo (2.2), em um semi-espaço $(\mathbb{R}^{n-k})^+$ com condição de Dirichlet no hiperplano $\{(x_1, x_2, .., x_k, 0, .., 0) \in \mathbb{R}^N\}$, é a solução trivial. Se u_0 fosse não trivial, ela mudaria de sinal exatamente uma vez, pelo Lema 2.18, e seria nula no hiperplano $\{(x_1, x_2, .., x_k, 0, .., 0) \in \mathbb{R}^N\}$ por A.5. Neste caso u_0^+ seria solução de (2.2) estritamente positiva no semi-espaço $(\mathbb{R}^{n-k})^+$ com condição de Dirichlet no hiperplano $\{(x_1, x_2, .., x_k, 0, .., 0) \in \mathbb{R}^N\}$, dando uma contradição.

Por outro lado, se $k_2 = 1$, então

$$u_n - u(\cdot - y_n) \to 0,$$

onde u é solução τ-antissimétrica de (2.2) por (2.54) com $u = u^1$. Porém, como no caso anterior, segue por M. J. Esteban e P. L. Lions (ver [27]) que $u \equiv 0$, gerando novamente uma contradição.

Assim, a única possibilidade que resta no Lema 2.10 é $k_1 = 1$, $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $|y_n| \to \infty$, tal que

$$u_n - [u(\cdot - y_n) + T_\tau u(\cdot - y_n)] \to 0,$$

e o teorema fica provado.

$\square$

Capítulo

3

Existência de soluções antissimétricas para o problema não autônomo

Usando o princípio de concentração de compacidade, encontraremos condições suficientes para a existência de soluções para o seguinte problema

$$\left\{\begin{array}{c} -\Delta u + V(x)u = K(x)f(u), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ u(\tau x) = -u(x) \\ u(x) \to 0 \quad \text{se} \quad |x| \to \infty, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

onde $N \geq 3$ e $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma involução ortogonal não trivial, isto é, uma transformação linear ortogonal em $\mathbb{R}^N$ tal que $\tau \neq Id$ e $\tau^2 = Id$, onde Id é a identidade em $\mathbb{R}^N$. Para tanto, as funções $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ devem satisfazer

(V_1) V é contínua e existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$;

(V_2) $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty, \quad V(x) \lneqq V_\infty$;

(V_3) $V(\tau x) = V(x)$;

(K_1) K é contínua e existe $K_0 > 0$ tal que $K(x) \leq K_0$;

(K_2) $\lim\limits_{|x|\to\infty} K(x) = K_\infty, \quad K_\infty \lneqq K(x)$;

(K_3) $K(\tau x) = K(x)$.

Neste capítulo consideraremos a seguinte função não linear

$$f(s) = \frac{s^3}{1+s^2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Observação 3.1. *Seja*

$$(H)\ \ \Lambda = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - K(x)u^2 : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = 1\right\},$$

Então por $(V1)$, $(V2)$, $(K1)$ *e* $(K2)$ *temos que* $V(x) < K_\infty \leq -\Lambda$. *Portanto como em D. G. Costa e H. Tehrani [14] e Stuart* [50], *teremos a existência de uma solução positiva para o problema* (3.1), *(ver apêndice).*

Seja E o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido da norma $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)$. Assim, a involução τ de $\mathbb{R}^N$ induz uma involução $T_\tau : E \to E$ definida como segue:

$$T_\tau(u(x)) := -u(\tau(x)).$$

Denotemos por $E^\tau := \{u \in E : T_\tau(u(x)) = u(x)\}$, o subespaço das funções τ-invariantes. Definimos o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)dx, \tag{3.3}$$

em que

$$F(u) = \int_0^u f(s)\,ds = \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}ln(1+u^2). \tag{3.4}$$

Notemos que o funcional I está bem definido e além disso, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com

$$I'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla\varphi + V(x)u\varphi)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)\varphi dx \quad \text{para todo } u, \varphi \in E. \tag{3.5}$$

Consequentemente, pontos críticos do funcional I são precisamente soluções fracas do problema (3.1). Agora, relembrando o problema (2.1), temos que o funcional I_∞ é dado por

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2 + V_\infty u^2\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N} K_\infty F(u)dx. \tag{3.6}$$

Assim I_∞ é contínuo, $I_\infty(0) = 0$ e o máximo de $I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{t})) > 0$ acontece quando $t = 1$. Mais ainda, temos a existência de um número L, suficientemente grande tal que $I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{t})) < 0$, para $\forall\, t \geq L$.

Assim existe um $L_0 > 1$ tal que

$$I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{L_0})) = 0, \tag{3.7}$$

e

$$I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{t})) < 0, \quad \text{se} \quad t \geq L_0,$$

onde $\bar{u}$ é uma solução positiva e radialmente simétrica de (2.2). Com base nisto, definamos

$$\alpha_0 := \frac{\sqrt{V_\infty}}{L_0}\cdot \tag{3.8}$$

Por (V_2) e (K_2), temos que

$$I(u) \leq I_\infty(u) \quad \forall\, u \in E^\tau. \tag{3.9}$$

Seja $z_0 = 0$ e, como no Capítulo 2 (ver(2.84)), existe $z_1 \in E^\tau$ tal que $I_\infty(z_1) < 0$. Definimos então

$$c^\tau := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leq t\leq 1} I(\gamma(t)), \tag{3.10}$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E^\tau) : \gamma(0) = z_0 \ \ e \ \ \gamma(1)) = z_1\}$.
O seguinte teorema é o nosso resultado principal

Teorema 3.1. *Sejam V e K satisfazendo $(V_1) - (V_3)$ e $(K_1) - (K_3)$, respectivamente. Suponha que existe ao menos um número real $\alpha_1 \geq 0$ ou $\alpha_2 \geq 0$, tal que*

(V_4) $V(x) \leq V_\infty - Ce^{-\alpha_1|x|}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$, *ou*

(K_4) $K(x) \geq K_\infty + Ce^{-\alpha_2|x|}$, $0 < \alpha_2 < \alpha_0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$.

Então existe uma solução τ-antissimétrica não trivial do problema (3.1), *isto é, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ tal que $u(\tau x) = -u(x)$ é solução de* (3.1).

Observação 3.2. *No Teorema* 3.1 *podemos ter $\alpha_2 = 0$ e, em particular K constante, ou $\alpha_1 = 0$ e, em particular, V constante.*

Lema 3.1. *Se $\{u_n\}$ é uma sequência $(Ce)_c$ do funcional I restrito a E^τ então $\{u_n\}$ é limitada, a menos de subsequências.*

Demonstração. A prova deste lema segue os mesmos passos feitos na demonstração do Lema 2.7 encontrada no Capítulo 2, sendo que, neste caso, as desigualdades são obtidas apenas observando-se que $V_0 \leq V(x) \gneqq V_\infty$ e $K_\infty \gneqq K(x) \leq K_0$.

□

Observação 3.3. *Se $\{u_n\}$ é uma sequência de Cerami $(Ce)_c$ limitada, então $\{u_n\}$ é sequência (PS) limitada.*

Lema 3.2. *Existe uma sequência $\{u_n\} \subset E^\tau$ satisfazendo*

$$I(u_n) \to c^\tau \qquad e \qquad (1 + \|u_n\|)\,\|I'|_{E^\tau}(u_n)\| \to 0.$$

Demonstração. A existência da sequência de $(Ce)_{c^\tau}$ será garantida se pudermos aplicar o Teorema de Ghoussoub-Preiss (ver Teorema A.2). De fato, para mostrarmos a existência de uma sequência de Cerami convergindo para c^τ como definida em (3.10), precisamos apenas mostrar que existe um conjunto fechado $\mathcal{F} \subset E^\tau$ tal que $\mathcal{F} \cap I_{c^\tau}$ separa $z_0 = 0$ e z_1, em que

$$I_{c^\tau} = \{u \in E^\tau : I(u) \geq c^\tau\},$$

é subconjunto fechado de E^τ.

Sejam $\bar{u}$ solução "ground state" radial positiva da equação (2.2),

$$z_y(x) := \bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y) \in E^\tau, \tag{3.11}$$

e

$$z_y(\frac{x}{t}) := \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \bar{u}(\frac{x}{t} - y) - \bar{u}(\frac{x}{t} - \tau y), & t > 0. \end{cases}$$

Por (3.9) temos que

$$I(z_y(\frac{\cdot}{t})) < I_\infty(z_y(\frac{\cdot}{t})), \ \text{ se } t > 0. \tag{3.12}$$

Agora consideremos L de modo que $z_1 = z_y(\frac{\cdot}{L})$ satisfaz $I(z_y(\frac{\cdot}{L})) < 0$. Seja

$$\mathcal{F} = \{u \in E^\tau : I_\infty(u) \geq 0\},$$

que é claramente fechado. Notemos que, como I satisfaz a geometria do Passo da Montanha (ver A.4), então existe $\rho > 0$ tal que

$$0 < I(u) \quad \text{se} \ \ 0 < \|u\| < \rho. \tag{3.13}$$

Portanto de (3.9) e (3.13) $u \in \mathcal{F}$, se $u \in B_\rho(0)$. Além disso, verificaremos que se $u \in B_\rho(0)$

$$0 \leq I(u) < c^\tau. \tag{3.14}$$

De fato, pela Geometria do Passo de Montanha (ver A.4), temos que

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - o(\|u\|^2) < \frac{3}{2}\|u\|^2, \ \text{ se } \ \|u\| < \rho.$$

Logo, se considerarmos $\frac{3}{2}\rho^2 < c^\tau$, temos (3.14).

Desta forma, se $\|u\| < \rho$, então $u \notin \mathcal{F} \cap I_{c^\tau}$, de modo que $z_0 \in B_\rho(0) \not\subset \mathcal{F} \cap I_{c^\tau}$. Ainda, por (3.10) e (3.12), temos que

$$I(z_1) < I_\infty(z_1) < 0,$$

implicando que $z_1 \notin \mathcal{F} \cap I_{c^\tau}$.

Portanto concluímos que o subconjunto fechado $\mathcal{F} \cap I_{c^\tau}$ separa z_0 e z_1, e assim podemos aplicar o Teorema de Ghoussoub-Preiss, com $X = E^\tau$, $\phi = I|_{E^\tau}$ e $\gamma = c^\tau$.

Lema 3.3. *Se $\{u_n\} \subset E^\tau$ é uma sequência (PS) do funcional I restrito à E^τ, $I|_{E^\tau}$, então $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) para I.*

Demonstração. Como a ação T_τ é isométrica, provaremos que

$$T_\tau I'(u_n) = I'(u_n). \tag{3.15}$$

Como F é par, temos que $F(s) = F(-s)$. Com isto, usando uma mudança de variável, $(V3)$, $(K3)$ e a definição de T_τ temos que

$$I(T_\tau(u_n)) = I(u_n). \tag{3.16}$$

Por outro lado, novamente pelo fato de que F é par, por uma mudança de variável, $(V3)$ e $(K3)$, temos que

$$\begin{aligned} I'(T_\tau u_n(.))v(.) &= I'(-u_n(\tau(.)))v(.) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(y)\nabla(-v(\tau y)) + V(y)u_n(y)(-v(\tau y))dy \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} K(y)f(u_n(y))(-v(\tau y))dy, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$I'(T_\tau u_n(x))v(x) = I'(u_n(x))T_\tau(v(x)). \tag{3.17}$$

Como T_τ é isométrica, então

$$\langle I'(u_n), T_\tau(v)\rangle = \langle T_\tau(I'(u_n)), T_\tau(T_\tau(v))\rangle = \langle T_\tau(I'(u_n)), v\rangle. \tag{3.18}$$

Segue de (3.17) e (3.18) que

$$I'(u_n)T_\tau(u_n) = T_\tau(I'(u_n)). \tag{3.19}$$

Como $\{u_n\} \subset E^\tau$, então por (3.19) obtemos que

$$T_\tau(I'(u_n)) = I'(T_\tau(u_n)) = I'(u_n), \tag{3.20}$$

e assim $I'(u_n) \in E^\tau$, implicando que $I'(u_n)v = 0$ para todo $v \in (E^\tau)^\perp$. Como $I'(u_n)v \to 0$ para todo $v \in E^\tau$, segue que $I'(u_n)v \to 0$ para todo $v \in E$.

□

3.1 Resultado de Compacidade

Lema 3.4. *Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^\tau$ uma sequência limitada, tal que*

$$I(u_n) \to c \qquad e \qquad I'|_{E^\tau}(u_n) \to 0.$$

Então, a menos de subsequências, existem dois inteiros $k_1, k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2$ sequências $\{y_n^j\}_n$, uma solução τ-antissimétrica u_0 do problema (3.1), k_1 soluções u^j, $j = 1, ..., k_1$ e k_2 soluções τ-antissimétricas u^j, $j = k_1 + 1, ..., k_1 + k_2$ da equação (2.2), tais que, ou

1. *$u_n \to u_0$ fortemente em E, ou*

2. *se $j = 1, ..., k_1$, então $\tau y_n^j \neq y_n^j$, e $|y_n^j| \to \infty$ quando $n \to \infty$;*

3. *se $j = k_1 + 1, ..., k_1 + k_2$, então $\tau y_n^j = y_n^j$, e $|y_n^j| \to \infty$ quando $n \to \infty$;*

4. *$u_n(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^{k_1}[u^j(x - y_n^j) + T_\tau u^j(x - y_n^j)] + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} u^j(x - y_n^j) + o_n(1)$;*

5. *$I(u_n) \to I(u_0) + 2\sum_{j=1}^{k_1} I_\infty(u^j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j)$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.3, vimos que se $\{u_n\} \subset E^\tau$ é uma sequência (PS) do funcional I restrito à E^τ, $I|_{E^\tau}$, então $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) para I. Por outro lado, temos por hipótese que $\{u_n\}$ é limitada, então $u_n \rightharpoonup u_0$. A prova de que $I'(u_0) = 0$ segue de forma análoga ao Lema 2.10 - Passo 2.

Seja $u_n^1 := u_n - u_0$. Temos que

(i) $\|u_n^1\|_E^2 = \|u_n\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 + o_n(1)$;

(ii) $I_\infty(u_n^1) \to c - I(u_0)$;

(iii) $I'_\infty(u_n^1) \to 0$.

De fato,
(i) Segue imediatamente da convergência fraca;
(ii) Os argumentos que se seguem são análogos aos encontrados em [10] (ver Lema B.1) e [17]. Optamos por detalhá-los para facilitar a leitura. Seja $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u_0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n u_0 = \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_0^2 + o_n(1).$$

Para tanto, devemos verificar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_0(u_n - u_0) \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{3.21}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_0(u_n - u_0) &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} V_\infty u_0(u_n - u_0) + \int_{B_R(0)} V_\infty u_0(u_n - u_0) \\
&\leq V_\infty \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \\
&+ V_\infty \|u_0\|_{L^2(B_R(0))} \|u_n - u_0\|_{L^2(B_R(0))}.
\end{aligned}$$

Sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $R > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \tag{3.22}$$

Além disso, como $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então existe $M > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.23}$$

De (3.22) e (3.23) obtemos que

$$V_\infty \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} < \varepsilon M V_\infty, \tag{3.24}$$

se $R > 0$ é suficientemente grande e para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $u_n \to u_0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ então

$$V_\infty \|u_0\|_{L^2(B_R(0))} \|u_n - u_0\|_{L^2(B_R(0))} \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{3.25}$$

Assim, por (3.24) e (3.25) obtemos (3.21).

Por (3.21) obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 - 2V_\infty u_n u_0 + V_\infty u_0^2 dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty u_n^2 - 2V_\infty u_0^2 + V_\infty u_0^2)dx + o_n(1)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty u_n^2 - V_\infty u_0^2)dx + o_n(1).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 - V_\infty 2u_n u_0 + V_\infty u_0^2 - V(x)u_n^2 + V(x)u_0^2 \\ &\quad = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}((V_\infty - V)((u_n)^2 - (u_0)^2))dx + o_n(1).\end{aligned} \tag{3.26}$$

Finalmente, como $u_n \rightharpoonup u_0$ em E, então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_n - \nabla u_0)^2 - |\nabla u_n|^2 + |\nabla u_0|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2 - 2\nabla u_n\cdot\nabla u_0 + |\nabla u_0|^2 - |\nabla u_n|^2 + |\nabla u_0|^2\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(-2\nabla u_0\cdot\nabla u_0 + 2|\nabla u_0|^2)dx + o_n(1)\\ &= o_n(1).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Notamos que

$$\begin{aligned}I_\infty(u_n^1) - I(u_n) + I(u_0) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla(u_n - u_0)|^2 - |\nabla u_n|^2 + |\nabla u_0|^2)\\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty u_n^2 - V_\infty 2u_n u_0 + V_\infty u_0^2 - V(x)u_n^2 + V(x)u_0^2)\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}(-K_\infty F(u_n - u_0) + K(x)F(u_n) - K(x)F(u_0)).\end{aligned}$$

Logo, de (3.26) e (3.27) temos que

$$\begin{aligned}I_\infty(u_n^1) - I(u_n) + I(u_0) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}((V_\infty - V)((u_n)^2 - (u_0)^2)) + o_n(1)\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}(-K_\infty F(u_n - u_0) + K(x)F(u_n) - K(x)F(u_0)).\end{aligned} \tag{3.28}$$

Além disso, se somarmos e subtraírmos o termo $K(x)F(u_n - u_0)$ na equação dada em

(3.28) temos

$$
\begin{aligned}
I_\infty(u_n^1) - I(u_n) + I(u_0) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}((V_\infty - V)((u_n)^2 - (u_0)^2)) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}(-K(x)F(u_n - u_0) + K(x)F(u_n) - K(x)F(u_0)) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}((K(x) - K_\infty)F(u_n - u_0)) + o_n(1)
\end{aligned}
$$

Por $(V2)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$|V_\infty - V(x)| < \varepsilon \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \backslash B_R(0).$$

Usando esta desigualdade, $(V1)$, a limitação de $\{u_n\}$, a desigualdade de Hölder e o fato que $u_n \to u_0$ em $L^2(B_R)$ mostraremos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty - V)((u_n)^2 - (u_0)^2) = o_n(1). \tag{3.29}$$

De fato, temos que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty - V)((u_n)^2 - (u_0)^2)\right| \\
&\leq \int_{B_R}|(V_\infty - V)||(u_n)^2 - (u_0)^2| + \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R}|(V_\infty - V)||(u_n)^2 - (u_0)^2| \\
&< C\int_{B_R}|((u_n)^2 - (u_0)^2)| + \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R}|((u_n)^2 - (u_0)^2)| \\
&\leq C\int_{B_R}||u_n| - |u_0||(|(u_n)| + |(u_0)|) + \varepsilon\left(\|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\
&\leq C\|u_n - u_0\|_{L^2(B_R)}\|u_n + u_0\|_{L^2(B_R)} + \varepsilon\left(C\|u_n\|^2_E + \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\
&\leq C\varepsilon\left(\|u_n\|_{L^2(B_R)} + \|u_0\|_{L^2(B_R)}\right) + \varepsilon\left(CM^2 + \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\
&\leq C\varepsilon\left(\tilde{C}\|u_n\|_E + \|u_0\|_{L^2(B_R)}\right) + \varepsilon\left(CM^2 + \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\
&\leq C\varepsilon\left(\tilde{C}M + \|u_0\|_{L^2(B_R)}\right) + \varepsilon\left(CM^2 + \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) = o_n(1).
\end{aligned}
$$

De forma similar mostramos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}((K(x) - K_\infty)F(u_n - u_0))\right| \leq C\int_{\mathbb{R}^N}|(K(x) - K_\infty)|u_n - u_0|^{q+2}| = o_n(1). \tag{3.30}$$

Por outro lado, usando que K é limitada, ou seja, $K_\infty \lneqq K(x) \leq K_0$ e (2.24) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} -K(x)F(u_n - u_0) + K(x)F(u_n) - K(x)F(u_0) = o_n(1). \tag{3.31}$$

Portanto de (3.29), (3.30) e (3.31), temos que

$$I_\infty(u_n^1) \to c - I(u_0).$$

Para o restante da prova do lema, seguimos os mesmos cálculos feitos no Capítulo 2, pois os argumentos envolvem somente I_∞. Contudo, a única diferença a ser considerada é que neste momento estamos assumindo que $V_0 \leq V(x) \lneqq V_\infty$ e $K_\infty \lneqq K(x) \leq K_0$.

□

Lema 3.5. *O funcional $I|_{E^\tau}$ satisfaz $(Ce)_c$ para qualquer $c < 2m_\infty$.*

Demonstração. Consideremos $\{u_n\} \subset E^\tau$ tal que

$$I(u_n) \to c < 2m_\infty \qquad \text{e} \qquad (1 + \|u_n\|) \, \|I'|_{E^\tau}(u_n)\| \to 0,$$

o que implica em $I'|_{E^\tau}(u_n) \to 0$ e pelo Lema 3.3 temos $I'(u_n) \to 0$.

Por outro lado, pelo Lema 3.1 temos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em E^τ. Portanto, a menos de subsequências, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u_0$ em E^τ e que $I'(u_0)\varphi = 0$, para toda $\varphi \in E$. Em particular,

$$0 = I'(u_0)u_0 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_0|^2 + V(x)u_0^2\right) - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u_0)u_0,$$

isto é,

$$\|u_0\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u_0)u_0. \tag{3.32}$$

Assim, por (2.10) e (3.32), obtemos que

$$I(u_0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\left(\frac{1}{2}f(u_0)u_0 - F(u_0)\right) \geq 0. \tag{3.33}$$

Se $\{u_n\}$ não convergir fortemente à u_0 em E então, pelo Lema 3.4, obtemos dois inteiros $k_1, k_2 \geq 0$, em que $k_1 \geq 1$ ou $k_2 \geq 1$, k_1 soluções u^j, $j = 1, ..., k_1$ e k_2 soluções

τ-antissimétricas u^j, $j = k_1+1, ..., k_1+k_2$ da equação (2.2), satisfazendo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I(u_n) = \quad c \quad &= \quad I(u_0) + 2\sum_{j=1}^{k_1} I_\infty(u^j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j)\\ &\geq \quad I(u_0) + 2k_1 m_\infty + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u^j)\\ &\geq \quad k_1 2m_\infty + k_2 m_\infty^\tau \geq 2m_\infty,\end{aligned}$$

o que contradiz a nossa hipótese. Portanto, a menos de subsequências, $u_n \to u_0$ em E e temos que o funcional I satisfaz $(Ce)_c$ para qualquer $c < 2m_\infty$. $\square$

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Esta seção será dedicada à demonstração do Teorema 3.1, resultado principal deste capítulo.

Lema 3.6. *Suponhamos que V e K satisfaçam $(V1)-(V4)$, $(K1)-(K4)$ e seja f como em (3.2). Então*

$$c^\tau < 2m_\infty.$$

Antes de darmos a prova para este fato, verificaremos alguns lemas. Primeiramente faremos estimativas análogas àquelas apresentadas no Lema 2.6, obtendo uma maior precisão do termo de ordem pequena $o_y(1)$.

Lema 3.7. *Se $0 \leq q < 2^* - 2$ então existe $\delta > 0$ (independente de y) tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z)|^{q+1} |\bar{u}(z + y - \tau y)| dz = o_y(1),$$

quando $|y| \to \infty$ e $|y - \tau y| \to \infty$, e $o_y(1) = C(\delta)e^{-\alpha_0 |y-\tau y| \frac{q+1}{q+2}(1-2\delta)}$.

Demonstração. Sejam $0 < \delta < \frac{1}{2}$ a ser escolhido posteriormente, $A_y := B_{\frac{|y-\tau y|}{q+2}(1-\delta)}(0) \subset \mathbb{R}^N$ e $R_y := \frac{|y-\tau y|}{q+2}(1-\delta)$. Como $\bar{u}$ é solução de (2.2), temos pelo Lema $A.1$ que $|\bar{u}(x)| \leq Ce^{-\alpha|x|}$ para todo $\alpha \in (0, \sqrt{V_\infty})$. Tomamos $\alpha = \alpha_0 = \frac{\sqrt{V_\infty}}{L_0} < \sqrt{V_\infty}$, pois

$L_0 > 1$ e pela desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{A_y} |\bar{u}(z)|^{q+1}|\bar{u}(z+y-\tau y)|dz &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z)|^{q+2}\right)^{\frac{q+1}{q+2}} \left(\int_{A_y} |\bar{u}(z+y-\tau y)|^{q+2}\right)^{\frac{1}{q+2}} \\
&\leq C\|\bar{u}\|_{q+2}^{q+1} \left(\int_{A_y} e^{-\alpha_0(q+2)|z+y-\tau y|}dz\right)^{\frac{1}{q+2}} \\
&\leq Ce^{-\alpha_0|y-\tau y|} \left(\int_0^{\frac{|y-\tau y|}{q+2}(1-\delta)} e^{\alpha_0(q+2)r} r^{N-1}dr\right)^{\frac{1}{q+2}} \\
&\leq Ce^{-\alpha_0|y-\tau y|} \left(e^{\alpha_0(q+2)\frac{|y-\tau y|}{q+2}(1-\delta)} \int_0^{R_y} r^{N-1}dr\right)^{\frac{1}{q+2}} \\
&= Ce^{-\alpha_0|y-\tau y|} e^{\alpha_0|y-\tau y|\frac{(1-\delta)}{q+2}} \left(r^N \Big|_0^{R_y}\right)^{\frac{1}{q+2}} \\
&= Ce^{-\alpha_0|y-\tau y|\left(1-\frac{(1-\delta)}{q+2}\right)} \left(\frac{|y-\tau y|}{q+2}(1-\delta)\right)^{\frac{N}{q+2}} \\
&= C(\delta)e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{q+2-1+\delta}{q+2}}|y-\tau y|^{\frac{N}{q+2}} \\
&= C(\delta)e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{q+1}{q+2}}e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{\delta}{q+2}}|y-\tau y|^{\frac{N}{q+2}} \\
&\leq C(\delta)e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{q+1}{q+2}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{A_y} |\bar{u}(z)|^{q+1}|\bar{u}(z+y-\tau y)|dz \leq C(\delta)e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{q+1}{q+2}}. \tag{3.34}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_y} |\bar{u}(z)|^{q+1}|\bar{u}(z+y-\tau y)|dz &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_y} |\bar{u}(z)|^{q+2}\right)^{\frac{q+1}{q+2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z+y-\tau y)|^{q+2}\right)^{\frac{1}{q+2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_y} |\bar{u}(z)|^{q+2}\right)^{\frac{q+1}{q+2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z)|^{q+2}\right)^{\frac{1}{q+2}} \\
&\leq C\|\bar{u}\|_{q+2}^{q+1} \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_y} e^{-\alpha_0(q+2)|z|}dz\right)^{\frac{q+1}{q+2}} \\
&= C\|\bar{u}\|_{q+2}^{q+1} \left(\int_{\frac{|y-\tau y|}{q+2}(1-\delta)}^{\infty} e^{-\alpha_0(q+2)r} r^{N-1}dr\right)^{\frac{q+1}{q+2}}.
\end{aligned}$$

Agora, da integração por partes, para qualquer $k > 0$, (ver [42]), temos que

$$\int e^{-kr} r^{N-1} dr = e^{-kr} P(r),$$

onde

$$P(r) := \frac{r^{N-1}}{k} - \frac{(N-1)}{k^2} r^{N-2} + \frac{(N-1)(N-2)}{k^3} r^{N-3} + \cdots + (-1)^{N+1} \frac{(N-1)!}{k^N}.$$

Assim,

$$\int_{R_y}^{\infty} e^{-kr} r^{N-1} dr = e^{-kr} P(r) \mid_{R_y}^{\infty} = e^{-kR_y} P(R_y). \tag{3.35}$$

Portanto, tomando $k := \alpha_0(q+2)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \backslash A_y} |\bar{u}(z)|^{q+1} |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz &\leq C \|\bar{u}\|_{q+2}^{q+1} \left(e^{-\alpha_0 (q+2) |y-\tau y| \frac{1-\delta}{q+2}} \right)^{\frac{q+1}{q+2}} \left(P(|y-\tau y| \frac{1-\delta}{q+2}) \right)^{\frac{q+1}{q+2}} \\
&= C \|\bar{u}\|_{q+2}^{q+1} e^{-\alpha_0 |y-\tau y| \frac{q+1}{q+2} (1-2\delta)} \\
&\quad \left(e^{-\alpha_0 |y-\tau y| \delta} \left(P(|y-\tau y| \frac{1-\delta}{q+2}) \right) \right)^{\frac{q+1}{q+2}} \\
&\leq C(\delta) \|\bar{u}\|_{q+2}^{q+1} e^{-\alpha_0 |y-\tau y| \frac{q+1}{q+2} (1-2\delta)}.
\end{aligned}$$

Assim, tomando δ suficientemente pequeno, tal que $(1-2\delta) > 0$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash A_y} |\bar{u}(z)|^{q+1} |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz \leq C(\delta) e^{-\alpha_0 |y-\tau y| \frac{q+1}{q+2} (1-2\delta)}. \tag{3.36}$$

Assim, por (3.34) e (3.36), com $0 < (1-2\delta) < 1$ obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z)|^{q+1} |\bar{u}(z+y-\tau y)| dz \leq C(\delta) e^{-\alpha_0 |y-\tau y| \frac{q+1}{q+2} (1-2\delta)}, \tag{3.37}$$

e o Lema está provado.

□

Observação 3.4. *No Capítulo 2, no Lema* 2.6*, provamos que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(x-y) \bar{u}(x-\tau y) dx = o_y(1), \tag{3.38}$$

quando $|y| \to \infty$ *e* $|y-\tau y| \to \infty$*. Pelo Lema* 3.7*, tomando* $q = 0$ *e fazendo uma mudança* *de variável, a expressão para $o_y(1)$ é dada por*

$$o_y(1) = C(\delta)e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)}, \tag{3.39}$$

para algum $\delta > 0$ independente de y.

Observação 3.5. *Argumentando como na prova do Lema 3.7, concluímos que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\bar{u}(x-y)\nabla\bar{u}(x-\tau y)dx \leq C(\delta)e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)}. \tag{3.40}$$

Lema 3.8. *Assumindo K como em (3.1) e F como em (3.4), temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(tx)F(z_y) = \int_{\mathbb{R}^N} K(tx)F(\bar{u}(x-y)) + \int_{\mathbb{R}^N} K(tx)F(\bar{u}(x-\tau y)) + o_y(1),$$

quando $|y| \to \infty$ e $|y-\tau y| \to \infty$, uniformemente em $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Como $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ é uma função convexa, par, $F(0) = 0$ e $f(s) = F'(s) \geq 0$ para todo $s \in [0, \infty)$, então pelo Lema A.7 e mudança de variável, temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} K(tx)F(z_y) - \int_{\mathbb{R}^N} K(tx)F(\bar{u}(x-y)) - \int_{\mathbb{R}^N} K(tx)F(\bar{u}(x-\tau y))\right| \\
\leq\ & 2K_0 \int_{\mathbb{R}^N} (f(\bar{u}(x-y))\bar{u}(x-\tau y) + f(\bar{u}(x-\tau y))\bar{u}(x-y)) \\
=\ & 2K_0 \int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y) + 2K_0 \int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(\hat{z}))\bar{u}(\hat{z}-(y-\tau y)) \\
=\ & 4K_0 \int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y).
\end{aligned}$$

Seja $A_y := B_{\frac{|y-\tau y|}{q+2}(1-\delta)}(0) \subset \mathbb{R}^N$, tal que $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Assim, pelo Lema 2.2 obtemos que

$$\int_{A_y} |f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y)| \leq C \int_{A_y} |\bar{u}(z)|^{q+1}|\bar{u}(z+y-\tau y)|dz.$$

Segue do Lema (3.7) que

$$\int_{A_y} |f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y)|dz \leq C(\delta)e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{q+1}{q+2}}. \tag{3.41}$$

De maneira análoga, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_y} |f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y)|dz \leq C(\delta)e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{q+1}{q+2}(1-2\delta)}. \tag{3.42}$$

Como $0 < (1-2\delta) < 1$, por (3.41), (3.42) e do fato que $\dfrac{1}{2} < \dfrac{q+1}{q+2}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(\bar{u}(z))\bar{u}(z+y-\tau y)dz &\leq C(\delta)e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{q+1}{q+2}(1-2\delta)}\\ &\leq C(\delta)e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)},\end{aligned}$$

de onde segue o lema, observando que

$$o_y(1) := Ce^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)}. \tag{3.43}$$

□

Agora, se $0 < t < L_0$, L_0 escolhido como em (3.7), $(V4)$ e uma mudança de variável, obtemos $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(V(tx)-V_\infty)|\bar{u}(x-y)|^2dx &< -C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\alpha_1|tx|}|\bar{u}(x-y)|^2dx\\ &= -C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\alpha_1 t|z+y|}|\bar{u}(z)|^2dz\\ &\leq -Ce^{-\alpha_1 L_0|y|}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\alpha_1 L_0|z|}|\bar{u}(z)|^2dz\\ &\leq -Ce^{-\alpha_1 L_0|y|}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Da mesma forma, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(V(tx)-V_\infty)|\bar{u}(x-\tau y)|^2dx \leq -Ce^{-\alpha_1 L_0|\tau y|} = -Ce^{-\alpha_1 L_0|\tau y|}. \tag{3.45}$$

Analogamente, por $(K4)$ e uma mudança de variável, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\infty-K(tx))|F(\bar{u}(x-y))|dx &\leq C\int_{\mathbb{R}^N}(K_\infty-K(tx))|\bar{u}(x-y)|^{q+2}\\ &< -C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\alpha_2|tx|}|\bar{u}(x-y)|^{q+2}\\ &= -C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\alpha_2 t|z+y|}|\bar{u}(z)|^{q+2}dz\\ &\leq -Ce^{-\alpha_2 L_0|y|}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\alpha_2 L_0|z|}|\bar{u}(z)|^{q+2}dz\\ &\leq -Ce^{-\alpha_2 L_0|y|}.\end{aligned} \tag{3.46}$$

De forma análoga, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (K_\infty - K(tx))|F(\bar{u}(x-\tau y))|dx \leq -Ce^{-\alpha_2 L_0|\tau y|} = -Ce^{-\alpha_2 L_0|\tau y|}. \tag{3.47}$$

Finalmente, estamos aptos para demonstrar o Lema 3.6. Pela definição (3.11) temos que

$$z_y(x) = \bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y) \in E^\tau,$$

em que $\bar{u}$ é a solução "ground state" radial positiva da equação (2.2) e pela invariância por translação de I_∞ temos:

$$\begin{aligned}
I(z_y(\frac{\cdot}{t})) &= \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\bar{u}(x-y)|^2dx + \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\bar{u}(x-\tau y)|^2dx \\
&- 2\frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\bar{u}(x-y)\nabla\bar{u}(x-\tau y)dx \\
&+ \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)|\bar{u}(x-y)|^2dx + \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)|\bar{u}(x-\tau y)|^2dx \\
&- 2\frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)\bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y)dx \\
&- t^N\int_{\mathbb{R}^N} K(tx)F(t\bar{u}(x-y) - t\bar{u}(x-\tau y))dx \\
&= I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{t}-y)) + I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{t}-\tau y)) \\
&+ \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(tx)-V_\infty)|\bar{u}(x-y)|^2dx + \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(tx)-V_\infty)|\bar{u}(x-\tau y)|^2dx \\
&- t^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\bar{u}(x-y)\nabla\bar{u}(x-\tau y)dx \\
&+ t^N\int_{\mathbb{R}^N} (K_\infty - K(tx))F(\bar{u}(x-y))dx + t^N\int_{\mathbb{R}^N} (K_\infty - K(tx))F(\bar{u}(x-\tau y))dx \\
&- t^N\int_{\mathbb{R}^N} K(tx)F(\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-\tau y))dx + t^N\int_{\mathbb{R}^N} K(tx)F(\bar{u}(x-y)) \\
&+ t^N\int_{\mathbb{R}^N} K(tx)F(\bar{u}(x-\tau y)) - t^N\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)\bar{u}(x-y)\bar{u}(x-\tau y)dx \\
&= I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{t})) + I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{t})) + R(V, V_\infty, K, K_\infty, y).
\end{aligned}$$

Logo, por (3.39), (3.40), (3.43), (3.44), (3.47), $|y|$ e $|y-\tau y|$ suficientemente grandes, e como $\max_{t>0} I_\infty(\bar{u}(\frac{\cdot}{t})) = I_\infty(\bar{u})$, temos que

$$\begin{aligned} I(z_y(\frac{\cdot}{t})) &\leq I_\infty(\bar{u}(\cdot)) + I_\infty(\bar{u}(\cdot)) + R(V, V_\infty, K, K_\infty, y) \\ &\leq 2m_\infty - Ce^{-\alpha_1 L_0|\tau y|} - Ce^{-\alpha_2 L_0|\tau y|} + C(\delta)e^{-\alpha_0|y-\tau y|\frac{1}{2}(1-2\delta)}. \end{aligned}$$

Pelas hipóteses $(V4)$ ou $(K4)$ e sabendo que as constantes C são positivas e independem de y, segue que

$$I(z_y(\frac{\cdot}{t})) < 2m_\infty, \tag{3.48}$$

para $|y|$, $|y - \tau y|$ suficientemente grandes e $0 < t < L_0$.
Agora definimos $\bar{G}(u)$, para $u \in E^\tau$ como

$$\bar{G}(u) := -\frac{V(x)}{2}|z_y|^2 + K(x)F(z_y).$$

Observação 3.6. *Fixado $\bar{y} \in \mathbb{R}^N$, $|\bar{y}| > 0$ suficientemente grande, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bar{G}(z_{\bar{y}}) \geq \int_{\mathbb{R}^N} G(z_{\bar{y}}) > 0.$$

De fato, usando que $V_0 \leq V(x) \lneqq V_\infty$, $K_\infty \lneqq K(x) \leq K_0$ e (2.76), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \bar{G}(z_{\bar{y}}) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[-\frac{V(x)}{2}|z_{\bar{y}}|^2 + K(x)F(z_{\bar{y}})\right] \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left[-\frac{V_\infty}{2}|z_{\bar{y}}|^2 + K_\infty F(z_{\bar{y}})\right] > 0. \end{aligned}$$

Observação 3.7. *Pela observação 3.6, fixado $\bar{y} \in \mathbb{R}^N$, $|\bar{y}|$ suficientemente grande, existe $t_{\bar{y}}$ tal que*

$$I(z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{t_{\bar{y}}})) = \max_{t>0} I(z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{t})).$$

A confirmação deste fato segue do fato que $\int_{\mathbb{R}^N} \bar{G}(z_{\bar{y}}) > 0$ e da demonstração do Lema 2.12.

Observação 3.8. *Fixado $\bar{y} \in \mathbb{R}^N$, $|\bar{y}| > 0$ suficientemente grande e $t_{\bar{y}}$ como na observação 3.7, então $0 < t_{\bar{y}} < L_0$, onde L_0 independe de $\bar{y}$ e é dado como em (3.7). De fato, sabemos que*

$$I(z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{t})) \leq I_\infty(z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{t})),\ \forall\, t \geq 0.$$

Se $t_{\bar{y}} \geq L_0$ e $|\bar{y}| > 0$ é suficientemente grande, temos que $I_\infty(z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{t_{\bar{y}}})) \leq 0$ e como $\max_{t>0} I(z_{\bar{y}}(\frac{\cdot}{t})) > 0$, segue que $0 < t_{\bar{y}} < L_0$.

Seja $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, das observações 3.6, 3.7 e 3.8 com $n\bar{y}$ no lugar de $\bar{y}$ temos que

$$I(z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{t_{n\bar{y}}})) = \max_{t>0} I(z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{t}))$$

com $0 < t_{n\bar{y}} < L_0$, logo por (3.48) temos

$$I(z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{t_{n\bar{y}}})) < 2m_\infty. \tag{3.49}$$

Finalmente observamos que o caminho $\gamma_1 \circ \gamma_n \circ \gamma_0$ construído no Capítulo 2, dado em (2.92), pertence ao conjunto Γ definido em (3.10) e liga z_0 a z_1. Além disso,

$$I(\gamma_1(t)) \leq I_\infty(\gamma_1(t)) < 0,$$

e

$$I(\gamma_n(s)) \leq I_\infty(\gamma_n(s)) < 0,$$

logo

$$\max_{0\leq t\leq 1} I(\gamma_1 \circ \gamma_n \circ \gamma_0(t)) = I(z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{t_{n\bar{y}}})). \tag{3.50}$$

Portanto, de (3.49), (3.50) e da definição de c^τ, dada em (3.10), temos que

$$c^\tau \leq I(z_{n\bar{y}}(\frac{\cdot}{t_{n\bar{y}}})) < 2m_\infty,$$

e o Lema 3.6 está provado.

Demonstração do Teorema 3.1. Seja $\{u_n\} \subset E^\tau$ sequência limitada, dada pelo Teorema de Ghoussoub-Preiss em $A.2$ e pelo Lema 3.1. Pelo Lema 3.3, temos que

$$I(u_n) \to c^\tau \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0, \quad \text{em } E'.$$

Logo, a menos de subsequências, $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em E com $I'(u_0) = 0$. Pelo Lema 3.4 temos que ou $u_n \to u_0$ fortemente em E ou existem dois inteiros $k_1, k_2 \geq 0$, k_1 soluções u^j, $j = 1, ..., k_1$ e k_2 soluções τ-antissimétricas u_j, $j = k_1 + 1, ..., k_1 + k_2$ da equação (2.2), satisfazendo as conclusões do Lema 3.4. Pelo Lema 3.6 temos que $c^\tau < 2m_\infty$, portanto segue do Lema 3.4 item *5* e do Lema 2.11 que $k_1, k_2 = 0$. Caso contrário, sem perda de generalidade, se $k_1 \geq 1$ então

$$\begin{aligned} c^\tau &= I(u_0) + 2\sum_{j=1}^{k_1} I_\infty(u^j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} I_\infty(u_j) \\ &\geq 2k_1 m_\infty \geq 2m_\infty, \end{aligned}$$

contrariando $c^\tau < 2m_\infty$. Assim, $k_1 = k_2 = 0$, e portanto, $u_n \to u_0$ fortemente em E e $c^\tau = I(u_0)$. Como $c^\tau = I(u_0) > 0$, segue que $u_0 \neq 0$. Como $u_0 \neq 0$ é τ-antissimétrica, então é uma solução de (3.1) que muda de sinal.

$\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Resultados Auxiliares

O lema a seguir, como visto em Stuart [50], trata do comportamento de qualquer solução u do problema (2.2).

Lema A.1. *Considere* $q \in C(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $\lim\limits_{|x|\to\infty} q(x) = 0$. *Se* $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *é uma solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = q(x)u \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \end{cases} \tag{A.1}$$

com $\lambda < 0$, *então*

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x)e^{\alpha|x|} = 0, \tag{A.2}$$

para todo $\alpha \in (0, \sqrt{|\lambda|})$.

Demonstração. Consideramos $\alpha \in (0, \sqrt{|\lambda|})$ fixado e $\delta = |\lambda| - \alpha^2$. Como $\lim\limits_{|x|\to\infty} q(x) = 0$, então existe $R > 0$ tal que $|q(x)| \leq \delta$ para todo $|x| \geq R$. Consideramos, agora para $x \neq 0$, a seguinte função

$$w(x) = Me^{-\alpha(|x|-R)},$$

onde $M = \max\{|u(x)|; |x| = R\}$, e para $L > R$, seja

$$\Omega(L) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; R < |x| < L \text{ e } u(x) > w(x)\}.$$

Então $\Omega(L)$ é um aberto. Juntamente com o fato de que $u(x) > 0$ em $\Omega(L)$ e $x \in \Omega(L)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\Delta(w-u)(x) &= \left(\alpha^2 - \frac{\alpha(N-1)}{|x|}\right) w(x) + (\lambda + q(x))u(x) \\
&\leq \alpha^2 w(x) + (-|\lambda| + \delta)u(x) \\
&= \alpha^2 (w(x) - u(x)) < 0.
\end{aligned}
$$

Pelo Princípio do Máximo, para todo $x \in \Omega(L)$, temos

$$
\begin{aligned}
w(x) - u(x) &\geq \min\{(w-u)(x); x \in \partial\Omega(L)\} \\
&\geq \min\{0, \min_{|x|=L}(w-u)(x)\}.
\end{aligned}
$$

Como $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = \lim\limits_{|x|\to\infty} w(x) = 0$, quando $L \to \infty$, obtemos que

$$
w(x) - u(x) \geq 0, \tag{A.3}
$$

para todo $|x| \geq R$. Do mesmo modo, fazendo para $-u$, obtemos que

$$
u(x) - w(x) \geq 0, \tag{A.4}
$$

logo de $(A.3)$ e $(A.4)$, temos que $|u(x)| \leq w(x)$, para todo $|x| \geq R$ e o resultado segue.

□

Observação A.1. *Para o nosso caso, nos Capítulos 2 e 3 consideramos:* $q(x) = \dfrac{u^2(x)}{1+u^2(x)}$ *e* $\lambda = -V_\infty$.

A definição e o teorema a seguir são devidos a Ghoussoub-Preiss. Os mesmos podem ser encontrados em [26], capítulo iv, definição 5 e Teorema 6.

Definição A.1. *Um subconjunto fechado F em um espaço de Banach X, separa dois pontos z_0 e z_1 em X se z_0 e z_1 pertencem a componentes conexas disjuntas em $X \backslash F$.*

Teorema A.2. *Seja X um espaço de Banach e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional contínuo, tal que $\phi' : X \to X'$ seja contínuo. Tome dois pontos $\{z_0, z_1\}$ em X e considere o conjunto Γ de todos os caminhos de z_0 para z_1*

$$
\Gamma := \{c \in C^0([0,1]; X) |\ c(0) = z_0, c(1) = z_1\}.
$$

Defina um número γ por

$$\gamma := \inf_{c\in\Gamma}\max_{0\le t\le 1} I(c(t)).$$

Assuma que existe um subconjunto fechado F de X tal que $F\cap\phi_\gamma$ separa z_0 e z_1 com $\phi_\gamma := \{x\in X|\phi(x)\ge\gamma\}$. Então existe uma sequência $\{x_n\}$ em X tal que a distância geodésica δ satisfaz

$$\delta(x_n, F)\to 0$$

e

$$\phi(x_n)\to\gamma;$$

$$(1+\|x_n\|)\,\|\phi'(x_n)\|\to 0.$$

Observação A.2. *No nosso caso, consideramos $X = E^\tau$, $\phi = I_\infty|_{E^\tau}$, $\gamma = c^\tau$ e $F = \mathcal{P}^\tau$.*

Os lemas a seguir verificam a geometria do Teorema do Passo da Montanha para os funcionais I_∞ e I respectivamente.

Lema A.2. *Suponha que F satisfaça* (2.16). *Então existem $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $I_\infty(u)\ge\alpha>0$, para todo $u\in E$ com $\|u\| = \rho$.*

Demonstração. Por (2.16), pelas imersões de Sobolev e por $2 < p < 2^*$, temos que

$$\begin{aligned} I_\infty(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \frac{V_\infty}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2 - K_\infty\int_{\mathbb{R}^N}F(u)\\ &\ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 - c_1\|u\|^p_{L^p}\\ &\ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 - c_2\|u\|^p\\ &= (\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2})\|u\|^2 - c_2\|u\|^p. \end{aligned}$$

Tem-se para $\|u\| = \rho$, que

$$I_\infty(u)\ge(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2})\rho^2 - c_2\rho^p = \alpha > 0,$$

para $\rho = \|u\|$ suficientemente pequeno. $\square$

Lema A.3. *Sejam $G(u) = (-\frac{V_\infty}{2}u^2 + K_\infty F(u)) > 0$ e $z_y(\frac{x}{t_y})\in\mathcal{P}^\tau$ como definido em* (2.74) *para algum $t_y > 0$. Então existe $z_1\in E\backslash\bar{B}_\rho(0)$ tal que $I_\infty(z_1) < 0$.*

Demonstração. A prova deste fato segue como uma consequência de (2.84).

$\square$

Agora verificaremos a geometria do Passo da Montanha para o funcional I.

Lema A.4. *Suponha que F satisfaça (2.16) e $K_\infty \lneqq K(x) \leq K_0$. Então existem $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$, para todo $u \in E$ com $\|u\| = \rho$.*

Demonstração. Por (2.16), pelas imersões de Sobolev e como $2 < p < 2^*$, temos que

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u) \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K_0F(u) \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - K_0\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 - C_1K_0\|u\|_{L^p}^p \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - K_0\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 - c_2\|u\|^p \\
&= (\frac{1}{2} - K_0\frac{\varepsilon}{2})\|u\|^2 - C_2\|u\|^p.
\end{aligned}$$

Assim, para ρ suficientemente pequeno, temos que se $\|u\| = \rho$

$$I(u) \geq \alpha > 0.$$

□

Observação A.3. *Como $I(u) \leq I_\infty$ para todo $u \in E$, então $I(z_1) \leq I_\infty(z_1) < 0$.*

Os resultados a seguir encontram-se detalhados em [16]. Incluímos os mesmos neste apêndice de forma a simplificarmos a consulta. Eles tratam da caracterização e propriedades da τ-involução.

Observação A.4. *Se $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma involução ortogonal não trivial, ou seja, uma transformação linear ortogonal em $\mathbb{R}^N$ tal que $\tau \neq Id$ e $\tau^2 = Id$, onde Id denota a identidade em $\mathbb{R}^N$, então τ é diagonalizável.*

Demonstração. De fato, é suficiente mostrar que τ é simétrica, isto é, $\tau = \tau^t$.

Temos que $\tau^2 = Id$ se, e somente se, $\tau = \tau^{-1}$, onde τ^{-1} é a inversa de τ. Mas τ é uma transformação linear ortogonal, logo, $\tau^{-1} = \tau^*$, onde τ^* é a adjunta de τ. Por outro lado, $\tau^* = \tau^t$, aqui τ^t denota a transposta de τ. Assim, $\tau = \tau^t$, e portanto, τ é simétrica, de onde segue que τ é diagonalizável.

□

Lema A.5. *Usando a Observação A.4, podemos supor, sem perda de generalidade, que*

$$\tau(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_N) = (x_1, ..., x_k, -x_{k+1}, ..., -x_N). \tag{A.5}$$

Demonstração. De fato, visto que τ é diagonalizável, podemos considerar $\{e_1, ..., e_N\}$ uma base de autovetores. Sabemos que $\tau(e_i) = \lambda_i e_i$, onde λ_i é o autovalor associado a e_i. Por outro lado, como τ é ortogonal, então $|\tau(e_i)| = |e_i|$, de onde segue que $|e_i| = |\tau(e_i)| = |\lambda_i e_i| = |\lambda_i||e_i|$, isto implica que $\lambda_i = \pm 1$. Assim, qualquer que seja $v = (x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_N)$ em $\mathbb{R}^N$, temos que $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i e_i$, logo $\tau(v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i \tau(e_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i \lambda_i e_i$, isto é, $\tau(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_N) = (\lambda_1 x_1, ..., \lambda_k x_k, \lambda_{k+1} x_{k+1}, ..., \lambda_N x_N)$, onde $\lambda_i = \pm 1$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor $\lambda_i = 1$, $i = 1, ..., k$ e $\lambda_i = -1$, $i = k+1, ..., N$, de onde segue (A.5).

□

O próximo lema pode ser encontrado em [51], (cf. Lema 8.3), e descreve a forma como uma sequência que converge fracamente pode se decompor em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Lema A.6. *Se* $|y_n| \to \infty$ *e*

$$u_n(\cdot + y_n) \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

$$u_n(\cdot + y_n) \to u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

$$\psi(u_n) \to c,$$

$$\psi'(u_n) \to 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega),$$

então $\psi'(u) = 0$ *e* $v_n := u_n - u(\cdot - y_n)$ *é tal que*

$$||v_n||^2 = ||u_n||^2 - ||u||^2 + o(1),$$

$$\psi(v_n) \to c - \psi(u),$$

$$\psi'(v_n) \to 0, \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

O próximo lema apresenta uma importante desigualdade dada por Alves, Carrião e Medeiros em [2], utilizada no Lema (3.8).

Lema A.7. *Seja* $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ *uma função convexa e par tal que* $F(0) = 0$ *e* $f(s) = F'(s) \geq 0$ *para todo* $s \in [0, \infty)$. *Então, para todo* $u, v \geq 0$,

$$|F(u - v) - F(u) - F(v)| \leq 2(f(u)v + f(v)u). \tag{A.6}$$

A seguir verificaremos que $V(x) < K_\infty \leq -\Lambda$, condição dada como na Observação 3.1, assim usando D. G. Costa e H. Tehrani [14] e Stuart [50], teremos a existência de uma solução positiva para o problema (3.1).

Mostraremos primeiramente que $\Lambda \leq -K_\infty$. De fato, sabemos que:

$$\Lambda := \inf_{u \neq 0} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - K(x)u^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u^2}.$$

Do problema $-\Delta u - K(x)u = \Lambda u$ e do fato que $K_\infty \lneqq K(x)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - K(x)u^2 = \Lambda \int_{\mathbb{R}^N} u^2 < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - K_\infty u^2.$$

Consideremos agora o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u_R = \lambda_R u_R & \text{em} \quad B_R \\ u_R = 0 & \text{em} \quad \partial B_R, \end{cases}$$

tal que $u_R \in H_0^1$, $\displaystyle\int_{B_R} u_R^2 = 1$. Logo, temos

$$\Lambda \leq \int_{B_R} |\nabla u_R|^2 - K(x)u_R^2 \leq \lambda_R - K_\infty \int_{B_R} u_R^2,$$

fazendo $R \to \infty$ e $\lambda_R \to 0$, obtemos que

$$\Lambda \leq -K_\infty. \tag{A.7}$$

Por outro lado de $(V1)$, $(V2)$, $(K1)$, $(K2)$, temos que

$$V_0 \leq V(x) \lneqq V_\infty < K_\infty \lneqq K(x) \leq K_0, \tag{A.8}$$

logo de $(A.7)$ e $(A.8)$, obtemos que

$$V_0 \leq V(x) \lneqq V_\infty < K_\infty \leq -\Lambda.$$

Agora, mostraremos que Λ é limitado inferiormente. De fato, por $(K1)$, $(K2)$ e tomando $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u^2 = 1$ temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 - K(x)u^2)dx &= \int_{B_R(0)}(|\nabla u|^2 - K(x)u^2)dx + \int_{B_R^c(0)}(|\nabla u|^2 - K(x)u^2)dx \\
&= \int_{B_R(0)}(|\nabla u|^2 - K(x)u^2)dx + \int_{B_R^c(0)}(K_\infty - K(x))u^2dx \\
&+ \int_{B_R^c(0)}|\nabla u|^2dx - \int_{B_R^c(0)}K_\infty u^2dx \\
&\geq \int_{B_R(0)}(|\nabla u|^2 - K(x)u^2)dx - \varepsilon - K_\infty \\
&\geq -K_0 - \varepsilon - K_\infty.
\end{aligned}
$$

Portanto Λ é limitado inferiormente, e temos a condição para a existência de solução positiva para a equação dada em (3.1).

Referências Bibliográficas

[1] S. Alama and Y. Y. Li, *On "multi bump" bound states for certain semilinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J., **41** (1992), 983–1026.

[2] C. O. Alves, E. S. Medeiros and P. C. Carrião, *Multiplicity of solutions for a class of quasilinear problem in exterior domains with Neumann conditions*, Abstr. Appl. Anal., **3** (2004), 251–268.

[3] H. Amann and E. Zehnder, *Nontrivial solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **7** (1980), 539–603.

[4] A. Ambrosetti, H. Brezis and G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 519–543.

[5] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[6] P. Bartolo, V. Benci and D. Fortunato, *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity*, Nonlinear Anal. **7** (1983), 981–1012.

[7] V. Benci, G. Cerami, *Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domains,* Arch. Rational Mech. Anal. **99** (1987), no 4, 283–300.

[8] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations I*, Arch. Rat. Mech. Anal. **82** (1983), 313–346.

[9] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions,* Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 347–375.

[10] H. Brezis and E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), no. 3, 486–490.

[11] K. C. Chang, *Infinite dimensional Morse Theory and multiple solution problems*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[12] J. Chen and Y. Li, *On a semilinear elliptic equation with indefinite linear part*, Nonlinear Anal. **48** (2002), no. 3, Ser. A: Theory Methods, 399–410.

[13] D. G. Costa and C.A Magalhães, *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity*, Nonlinear Anal. **23** (1994), 1401–1412.

[14] D. G. Costa and H. Tehrani, *On a Class of Asymptotically Linear Elliptic Problems in* $\mathbb{R}^N$, Journal of Differential Equations **173** (2001), 470–494.

[15] V. Coti-Zelati and P. H. Rabinowitz, *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Pure. Appl. Math., **46** (1992), 1217–1269.

[16] J. S. de Carvalho, L. A. Maia and O. H. Miyagaki, *Antisymmetric solutions for the nonlinear schrödinger equation*, Dif. and Integral Equations, **24**, Numbers 1-2 (2011), 109–134.

[17] J. S. de Carvalho, L. A. Maia and O. H. Miyagaki, *A note on existence of antisymmetric solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), **62**, Number 1 (2011), 67–86.

[18] J. S. de Carvalho, *Soluções antissimétricas para a equação de Schrödinger não linear*, Tese de Doutorado, (2010)–UnB.

[19] D. G. de Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata, Bombay, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[20] D. G. de Figueiredo, J.P. Gossez and P. Ubilla, *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems*, J. Funct. Anal. **199** (2003), 452–467.

[21] D. G. de Figueiredo and I. Massabó, *Semilinear elliptic equations with the primitive of the nonlinearity interacting with the first eigenvalue*, J. Math. Anal. Appl. **156** (1991), 381–394.

[22] L. H. de Miranda, *Sistemas Elípticos Fracamente Acoplados Assintoticamente Lineares*, Dissertação, Brasília-UnB, (2007).

[23] F. O. de Paiva, *Multiple positive solutions for quasilinear problems with indefinite sublinear nonlinearity*, Nonlinear Analysis **71** (2009), 1108–1115.

[24] F. O. de Paiva and E. Massa, *Multiple solutions for some elliptic equations with a nonlinearity concave at the origin*, Nonliear Analysis **66** (2007), 2940–2946.

[25] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324–353.

[26] I. Ekeland, *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, Published 1990 by Springer-Verlag in Berlin, New York .

[27] M. J. Esteban and P. L. Lions, *Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., **93** (1983), 1–14.

[28] M. F. Furtado and F.O.V. de Paiva, *Multiplicity of solutions for resonant elliptic systems*, J. Math. Anal. Appl., **319** (2006), 435–449.

[29] M. F. Furtado and E.A.B. Silva, *Double resonant problems which are locally non-quadratic at infinity*, Electron. J. Differ. Equ. Conf., **6**, Southwest Texas State Univ., San Marcos, TX, 2001.

[30] M. F. Furtado, *A note on the number of nodal solutions of an elliptic equation with symmetry*, Applied Mathematics Letters. **19** (2006), 326–331.

[31] J. Garcia-Azorero, I. Peral and J.D. Rossi, *A convex-concave problem with a nonlinear boundary condition*, J. Differential Equations **198** (2004), 91–128.

[32] M. Ghimenti and A. M. Micheletti, *Existence of minimal nodal solutions for the nonlinear Schrödinger equations with* $V(\infty) = 0$, Advances in Differential Equations. **11** (2006), no. 12, 1375–1396.

[33] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Adv. Math., Suppl. Stud. **7A** (1981), 369–402.

[34] D. Gilbarg and N. S. Trundinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second edition, Springer-Verlag, (1984).

[35] L. Jeanjean and K. Tanaka, *Singularly perturbed elliptic problems with seperlinear or asymptotically linear nonlinearities*, Calc. Var. **21** (2004), 287–318.

[36] L. Jeanjean and K. Tanaka, *A Remark on Least energy solutions in* $\mathbb{R}^N$, P.of the A. M. Society **13** (2002), 2399–2408.

[37] L. Jeanjean and K. Tanaka, *A positive solution for a nonlinear Schrödinger equation on* $\mathbb{R}^N$, Indiana University Mathematics Journal **54** (2005), no. 2, 443-464.

[38] W. Krolikowski, B. Luther-Davies and C. Denz, *Photorefractive solitons*, IEEE J. **39** (2003), 3–12.

[39] C. E. Lawrence, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island; v.19, (1998).

[40] S. Li, S. Wu and H.S. Zhou, *Solutions to semilinear elliptic problems with combined nonlinearities*, J. Differential Equations **185** (2002), 200–224.

[41] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case,* Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **1** (1984), 109–145 e 223–283.

[42] L. A. Maia, M. F. Furtado and E. S. Medeiros, *Positive and nodal solutions for a nonlinear Schrodinger equation with indefinite potential*, Advanced Nonlinear Studies, **8** (2008), 353–373.

[43] A. Pankov and V. Rothos, *Periodic and decaying solutions in discrete nonlinear Schrödinger with saturable nonlinearity*, Proc. R. Soc. A **464** (2008), 3219–3236.

[44] K. Perera, *Multiplicity results for some elliptic problems with concave nonlinearities*, J. Differential Equations **140** (1997), 133–141.

[45] M. Schechter, *Linking methods in critical point theory*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[46] E. A. B. Silva, *Subharmonic solutions for subquadratic Hamiltonian systems*, J. Differential Equations **115** (1995), 120–145.

[47] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions,* Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149-162.

[48] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities,* Math. Z. **187** (1984), no 4, 511–517.

[49] C. A. Stuart e H. S. Zhou, *Applying the mountain pass theorem to an asymptotically linear elliptic equation on* $\mathbb{R}^N$, Commum. Partial Diff. Eq., **9-10** (1999), 1731–1758.

[50] C. A. Stuart, *Bifurcation in* $L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *for a semilinear elliptic equation,* London. Math. Soc., **57** (1987), 511–541.

[51] M. Willem, *Minimax Theorems*, Volume 24, Birkhauser, Boston, 1996.