

## **VIII Workshop de Verão em Matemática**

Homenagem aos 75 anos dos professores  
Said N. Sidki e Rudolf R. Maier

De 25 a 29 de janeiro de 2016

Livro de Resumos  
*Book of Abstracts*

Departamento de Matemática  
Campus Universitário Darcy Ribeiro  
70910-900  
Brasília | DF - Brasil  
[www.mat.unb.br](http://www.mat.unb.br)  
[secretaria@mat.unb.br](mailto:secretaria@mat.unb.br)  
Tel. 3107-7236



**Universidade de Brasília**

XLV ESCOLA DE VERÃO EM MATEMÁTICA

VIII WORKSHOP DE VERÃO EM  
MATEMÁTICA

Livro de Resumos



# Universidade de Brasília

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática  
Campus Universitário Darcy Ribeiro  
70910-900 Brasília - DF

XLV Escola de Verão em Matemática  
VIII Workshop de Verão em Matemática

Reitor da Universidade de Brasília: Ivan Marques de Toledo Camargo  
Diretor do Instituto de Ciências Exatas: Maria Emilia Machado Telles Walter  
Chefe do Departamento de Matemática: Hemar Teixeira Godinho  
Coordenadora de Extensão: Regina da Silva Pina Neves  
Coordenador de Pós-Graduação: Pavel Zaleski

Coordenadores da XLV Escola de Verão em Matemática e do VIII Workshop de Verão em Matemática:  
Nilton Moura Barroso Neto  
Yuri Dumaresq Sobral

Coordenadores de áreas do VIII Workshop de Verão em Matemática:  
Álgebra e Teoria dos Números: Theo Allan Darn Zapata  
Análise: Ricardo Ruviano  
Educação Matemática: Regina da Silva Pina Neves  
Geometria: Pedro Roitman  
Matemática Aplicada: Yuri Dumaresq Sobral  
Probabilidade: Luis Roberto Lucinger de Almeida  
Sistemas Dinâmicos: Lucas Conque Seco Ferreira  
Teoria da Computação: Daniele Nantes Sobrinho

Brasília, Janeiro de 2016.

# Prefácio

Caros participantes,

É com enorme prazer que lhes damos as boas-vindas ao VIII Workshop de Verão em Matemática, realizado no âmbito da XLV Escola de Verão do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

A Escola de Verão do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília foi idealizada no início dos anos 70 e, nestes mais de quarenta anos de tradição, tem fomentado em diversos níveis o intercâmbio científico-cultural entre seus participantes. Estas interações acadêmicas são fundamentais para o progresso do conhecimento e para propiciar colaborações de pesquisa de valor inestimável. De fato, o Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, atualmente avaliado com nota 7 na CAPES, muito tem se beneficiado de um ambiente acadêmico ativo e produtivo e, de fato, eventos como o Workshop foram importantes para que nosso programa de pós-graduação atingisse este nível de excelência.

Neste ano, o Workshop tomou proporções jamais vistas em termos de palestrantes convidados e de número de participantes. Teremos cerca de 99 palestras científicas e 12 minicursos nas mais diversas áreas da matemática, evidenciando a diversidade da matemática na Universidade de Brasília. Neste ponto, gostaríamos de agradecer todo o apoio e empenho dos coordenadores de áreas do Workshop e das secretarias de graduação e de pós-graduação do Departamento de Matemática. Sem a ajuda deles, jamais poderíamos organizar um evento deste porte.

O VIII Workshop de Verão em Matemática é ainda mais especial pela homenagem aos 75 anos dos professores Rudolf R. Maier e Said N. Sidki, pioneiros do Departamento de Matemática de nossa universidade, que contribuíram sobremaneira para que hoje tenhamos alcançado os níveis de excelência em ensino e pesquisa que nos são atribuídos pelas mais diversas avaliações federais.

Agradecemos, em especial, o apoio substancial da Universidade de Brasília, da FAP-DF, da CAPES e do CNPq, que nos concederam recursos essenciais para a organização deste evento.

Finalmente, apenas nos resta desejá-los uma excelente estadia em Brasília e na Universidade de Brasília. Assistam a muitas palestras, interajam com várias pessoas, aprendam muita matemática e, acima de tudo, DIVIRTAM-SE!

Um cordial abraço,

Nilton Moura Barroso Neto e Yuri Dumaresq Sobral  
Coordenadores do VIII Workshop de Verão em Matemática  
Coordenadores da XLV Escola de Verão do MAT-UnB

# PROGRAMAÇÃO. AUDITÓRIO. TÉRREO DO MAT

		25/1	26/1	27/1	28/1	29/1	
<b>Manhã</b>	08h00 - 08h50	<b>Inscrições Térreo do MAT</b>	Maria Isabel Vale <sup>EM, 28</sup>	Bárbara Bianchini <sup>EM, 25</sup>	C. Gontijo <sup>EM</sup> C. Muniz <sup>EM</sup> M. Fávero <sup>EM</sup> Rui Seimtez <sup>EM</sup>	Maria Serrazina <sup>EM, 30</sup>	
	09h00 - 09h50						
	10h00 - 10h20		<i>Lanche</i>				
	10h20 - 11h10		Igor Lima <sup>AL, 18</sup> (Minicurso)	Igor Lima <sup>AL, 18</sup> (Minicurso)	Ricardo Oliveira <sup>AL, 18</sup> (Minicurso)	Ricardo Oliveira <sup>AL, 18</sup> (Minicurso)	
	11h20 - 12h10		Cesar Polcino <sup>AL, 16</sup>	Ivan Shestakov <sup>AL, 19</sup>	D. Kouchloukova <sup>AL, 18</sup>	Eamonn O'Brien <sup>AL, 18</sup>	
12h10 - 14h00		<b>Almoço</b>					
<b>Tarde</b>	14h00 - 14h50	Bruno Carmo <sup>DF, 77</sup>	<b>Sessão Solene Aud. Reitoria</b>	M. Belolipetsky <sup>AL, 20</sup>	Amilcar Pacheco <sup>AL, 14</sup>	Csaba Schneider <sup>AL, 17</sup>	
	15h00-15h50	Bráulio Pimenta <sup>DF, 76</sup>		Iliir Snopche <sup>AL, 19</sup>	Ana Cristina Vieira <sup>AL, 88</sup>	Danilo Silveira <sup>AL, 17</sup> Ana Carolina Lafeta <sup>AL, 15</sup>	
	16h00-16h20	<i>Lanche</i>		<i>Lanche</i>			
	16h20 - 17h10			Alex Dantas <sup>AL, 14</sup> (Defesa de Doutorado)	Carmela Sica <sup>AL, 16</sup>	Mario Choquehuanca <sup>AN, 22</sup>	
	17h20 - 18h10			John MacQuairre <sup>AL, 19</sup>	Irena Rachůnková <sup>AN, 21</sup>		
<b>Coquetel</b>			<b>Jantar</b>				

	AL	AN	EC	EM	DF	GE	MV	PB	SD	TC
<i>Legenda</i>	Álgebra	Análise	Economia Matemática	Educação Matemática	Dinâmica dos Fluidos	Geometria	Modelagem da Voz	Probabilidade	Sistemas Dinâmicos	Teoria da Computação

# PROGRAMAÇÃO. SALA A. TÉRREO DO MAT

		25/1	26/1	27/1	28/1	29/1	
<b>Manhã</b>	08h00 - 08h50	<b>Inscrições Térreo do MAT</b>	Shyam Das <sup>DF, 79</sup>	Ricardo Araujo <sup>EC, 82</sup>	Petrucio Viana <sup>TC, 91</sup>	Daniel Ventura <sup>TC, 90</sup> (Minicurso)	
	09h00 - 09h50		Ana Maldonado <sup>DF, 76</sup>	Hélio Fonseca <sup>EC, 81</sup>	Washington Carvalho <sup>TC, 93</sup>		
	10h00 - 10h20		<b>Lanche</b>				
	10h20 - 11h10		Luis Paulinyi <sup>DF, 78</sup>	Thiago Ramos <sup>TC, 92</sup>	Vivek Nigam <sup>TC, 93</sup>	Bruno Lopes <sup>TC, 89</sup>	
	11h20 - 12h10		Paulo Ruffino <sup>PB, 84</sup> (Minicurso)	Paulo Ruffino <sup>PB, 84</sup> (Minicurso)	Paulo Ruffino <sup>PB, 84</sup> (Minicurso)	Ana C. Valverde <sup>TC, 88</sup>	
12h10 - 14h00		<b>Almoço</b>					
<b>Tarde</b>	14h00 - 14h50	<b>Sessão Solene Aud. Reitoria</b>		H. Bortolossi <sup>EM, 26</sup>	Edson Cataldo <sup>MV, 80</sup>	Silvia Lopes <sup>PB, 84</sup>	
	15h00 - 15h50			Paulo Ruffino <sup>PB, 84</sup> (Minicurso)	Jorge Lucero <sup>MV, 80</sup>	Debora Ferreira <sup>PB, 83</sup>	
	16h00 - 16h20			<b>Lanche</b>	<b>Lanche</b>		
	16h20 - 17h10			Hugo de la Cruz <sup>PB, 83</sup> (Minicurso)			
	17h20 - 18h10						
<b>Coquetel</b>			<b>Jantar</b>				

<b>Legenda</b>	AL	AN	EC	EM	DF	GE	MV	PB	SD	TC
	Álgebra	Análise	Economia Matemática	Educação Matemática	Dinâmica dos Fluidos	Geometria	Modelagem da Voz	Probabilidade	Sistemas Dinâmicos	Teoria da Computação

# PROGRAMAÇÃO. SALA B. TÉRREO DO MAT

		25/1	26/1	27/1	28/1	29/1	
<b>Manhã</b>	08h00 - 08h50	<b>Inscrições Térreo do MAT</b>		Daniel Ventura <sup>TC, 90</sup> (Minicurso)			
	09h00 - 09h50						Lucas Borges <sup>DF, 78</sup>
	10h00 - 10h20			<i>Lanche</i>			
	10h20 - 11h10			Regina Buriasco <sup>EM, 32</sup> (Minicurso)	José Nazareno <sup>GE, 73</sup> (Minicurso)	Ricardo Fragelli <sup>EM, 33</sup>	José Nazareno <sup>GE, 73</sup> (Minicurso)
	11h20 - 12h10						
12h10 - 14h00		<b>Almoço</b>					
<b>Tarde</b>	14h00 - 14h50	André Caldas <sup>SD, 85</sup>	<b>Sessão Solene Aud. Reitoria</b>	Lonardo Rabelo <sup>SD, 86</sup>	Tarcísio Castro <sup>GE, 74</sup>	Marcelo Finger <sup>TC, 91</sup>	
	15h00 - 15h50	P/M		Laércio dos Santos <sup>SD, 85</sup>	Benedetta Pellaci <sup>AN, 21</sup>	Ariane Almeida <sup>TC, 89</sup>	
	16h00 - 16h20	<i>Lanche</i>		<i>Lanche</i>			
	16h20 - 17h10	Olimpio Miyagaki <sup>AN, 24</sup>		Marcio Nascimento <sup>SD, 87</sup>	Jana Burkotová <sup>AN, 22</sup>	Daniel Ventura <sup>TC, 90</sup>	
	17h20 - 18h10	Pedro Ubilla <sup>AN, 24</sup>			Milan Tvrđý <sup>AN, 23</sup>		
<b>Coquetel</b>			<b>Jantar</b>				

<i>Legenda</i>	AL	AN	EC	EM	DF	GE	MV	PB	SD	TC
	Álgebra	Análise	Economia Matemática	Educação Matemática	Dinâmica dos Fluidos	Geometria	Modelagem da Voz	Probabilidade	Sistemas Dinâmicos	Teoria da Computação

# PROGRAMAÇÃO. SALA C. SUBSOLO DO MAT

		25/1	26/1	27/1	28/1	29/1		
<b>Manhã</b>	08h00 - 08h50	<b>Inscrições Térreo do MAT</b>		Lucas Seco <sup>SD, 87</sup> (Minicurso)	Lucas Seco <sup>SD, 87</sup> (Minicurso)	Lucas Seco <sup>SD, 87</sup> (Minicurso)		
	09h00 - 09h50							
	10h00 - 10h20		<i>Lanche</i>					
	10h20 - 11h10				Comunicações Científicas <sup>EM</sup>		Maria I. Vale <sup>EM, 28</sup> (Minicurso)	
	11h20 - 12h10							
12h10 - 14h00		<b>Almoço</b>						
<b>Tarde</b>	14h00 - 14h50	<i>Lanche</i>	<b>Sessão Solene Aud. Reitoria</b>	Regina Buriasco <sup>EM, 31</sup> (Minicurso)	Yuriko Baldim <sup>EM, 35</sup> (Minicurso)	Maria Serrazina <sup>EM, 29</sup> (Minicurso)		
	15h00 - 15h50							
	16h00 - 16h20			<i>Lanche</i>				
	16h20 - 17h10					Bárbara Bianchini <sup>EM, 25</sup> (Minicurso)	Maria Serrazina <sup>EM, 29</sup> Yuriko Baldim <sup>EM, 35</sup> (Minicursos)	Maria I. Vale <sup>EM, 28</sup> (Minicurso)
	17h20 - 18h10							
			<b>Coquetel</b>	<b>Jantar</b>				

<i>Legenda</i>	AL	AN	EC	EM	DF	GE	MV	PB	SD	TC
	Álgebra	Análise	Economia Matemática	Educação Matemática	Dinâmica dos Fluidos	Geometria	Modelagem da Voz	Probabilidade	Sistemas Dinâmicos	Teoria da Computação

# PROGRAMAÇÃO POR HORÁRIO

SEGUNDA-FEIRA, 25/1/16

Horário	Local	Ministrante	Título da Palestra
08h00 - 12h00	<b>Inscrições</b> <b>Térreo do Departamento de Matemática</b>		
14h00 - 14h50	Auditório	Bruno Carmo	Usos de operadores adjuntos em mecânica dos fluidos: otimização, sensibilidade e receptividade de escoamentos
	Sala A		
	Sala B	André Caldas	The variational principle for locally compact spaces
	Sala C	Educação Matemática	Comunicações científicas
15h00 - 15h50	Auditório	Bráulio Pimenta	Predição numérica de ruído de turbinas aeronáuticas utilizando a metodologia da fronteira imersa móvel
	Sala A	Paulo Ruffino	Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos (Minicurso)
	Sala B		
	Sala C		
16h20 - 17h10	Auditório		
	Sala A	Hugo de la Cruz	Métodos de integração de equações diferenciais estocásticas (Minicurso)
	Sala B	Olimpio Miyagaki	Nonlocal problems with Trudinger-Moser nonlinearity: ground states and vanishing potential
	Sala C		
17h20 - 18h10	Auditório		
	Sala A	Hugo de la Cruz	Métodos de integração de equações diferenciais estocásticas (Minicurso)
	Sala B	Pedro Ubilla	Two homoclinic solutions for second-order perturbed hamiltonian systems
	Sala C		

TERÇA-FEIRA, 26/1/16

Horário	Local	Ministrante	Título da Palestra
08h00 - 08h50	Auditório	Maria I. Vale	Uma visão sobre a matemática curricular no ensino básico em Portugal
	Sala A	Shyam Das	Numerical investigation of thermal stratification in scaled down model of liquid metal fast breeder reactor (LMFBR)
	Sala B		
	Sala C		
09h00 - 09h50	Auditório	Maria I. Vale	Uma visão sobre a matemática curricular no ensino básico em Portugal
	Sala A	Ana Luisa Maldonado	Sound propagation in lined annular ducts with mean swirling flow
	Sala B		
	Sala C		
10h20 - 11h10	Auditório	Igor Lima	Introdução ao GAP (Minicurso)
	Sala A	Luis Paulinyi	Race car aerodynamics, the pursuit of the extra millisecond
	Sala B	Regina Buriasco	Avaliação como oportunidade de aprendizagem: alguns apontamentos
	Sala C		
11h20 - 12h10	Auditório	Cesar Polcino	Essencial idempotents and minimal cyclic codes
	Sala A	Paulo Ruffino	Uma Iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos (Minicurso)
	Sala B	Regina Buriasco	Avaliação como oportunidade de aprendizagem: alguns apontamentos
	Sala C		
15h00 - 17h00	<b>Sessão Solene: Homenagem aos Profs. Rudolf R. Maier e Said N. Sidki</b> <b>Auditório da Reitoria</b>		
18h00 - 20h00	<b>Coquetel</b> <b>Departamento de Matemática</b>		

QUARTA-FEIRA, 27/1/16

Horário	Local	Ministrante	Título da Palestra
08h00 - 08h50	Auditório	Bárbara Bianchini	Sobre os processos do pensamento matemático avançado
	Sala A	Ricardo Araújo	The dynamics of supply-side liquidity/profit-rate cycles in the presence of the Marxian reserve...
	Sala B	Daniel Ventura	Tipos de interseção (Minicurso)
	Sala C	Lucas Seco	Topologia de subespaços invariantes (Minicurso)
09h00 - 09h50	Auditório	Bárbara Bianchini	Sobre os processos do pensamento matemático avançado
	Sala A	Hélio Fonseca	Ensaio em teoria de contratos aplicada no setor de telecomunicações com foco nos investimentos...
	Sala B	Daniel Ventura	Tipos de interseção (Minicurso)
	Sala C	Lucas Seco	Topologia de subespaços invariantes (Minicurso)
10h20 - 11h10	Auditório	Igor Lima	Introdução ao GAP (Minicurso)
	Sala A	Thiago Ramos	Formalização da terminação de especificações funcionais
	Sala B	José Nazareno	Operadores diferenciais em variedades riemannianas (Minicurso)
	Sala C	Educação Matemática	Comunicações Científicas
11h20 - 12h10	Auditório	Ivan Shestakov	Constants of formal derivations and primitive operations
	Sala A	Paulo Ruffino	Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos (Minicurso)
	Sala B	José Nazareno	Operadores diferenciais em variedades riemannianas
	Sala C	Educação Matemática	Comunicações científicas
14h00 - 14h50	Auditório	M. Belolipetsky	Counting lattices in semisimple Lie groups
	Sala A	Humberto Bortolossi	Reflexões sobre o uso de recursos digitais para ensinar e aprender matemática e estatística na escola básica
	Sala B	Leonardo Rabelo	Homology of real isotropic grassmannians
	Sala C	Regina Buriasco	A produção escrita em matemática: a pesquisa (Minicurso)
15h00 - 15h50	Auditório	Iliar Snopche	Asymptotic density of test elements in free groups and surface groups
	Sala A	Humberto Bortolossi	Reflexões sobre o uso de recursos digitais para ensinar e aprender matemática e estatística na escola básica
	Sala B	Laércio Santos	The characteristic function of a semigroup
	Sala C	Regina Buriasco	A produção escrita em matemática: a pesquisa (Minicurso)
16h20 - 17h10	Auditório	Alex Dantas	State-closed abelian groups (Tese de Doutorado)
	Sala A	Hugo de la Cruz	Métodos de integração de equações diferenciais estocásticas (Minicurso)
	Sala B	Marcio Nascimento	Caos e criptografia
	Sala C	Bárbara Bianchini	Processos do pensamento matemático avançado
17h20 - 18h10	Auditório	Alex Dantas	State-closed abelian groups (Tese de Doutorado)
	Sala A	Hugo de la Cruz	Métodos de integração de equações diferenciais estocásticas (Minicurso)
	Sala B		
	Sala C	Bárbara Bianchini	Processos do pensamento matemático avançado

QUINTA-FEIRA, 28/1/16

Horário	Local	Ministrante	Título da Palestra
08h00 - 08h50	Auditório	Educação Matemática	Mesa redonda
	Sala A	Petrucio Viana	Indução, iteração, recursão e boa ordem
	Sala B		
	Sala C	Lucas Seco	Topologia de subespaços invariantes (Minicurso)
09h00 - 09h50	Auditório	Educação Matemática	Mesa redonda
	Sala A	Washington Carvalho	A formalisation of nominal equivalence with associative and commutative function symbols
	Sala B		
	Sala C	Lucas Seco	Topologia de subespaços invariantes (Minicurso)
10h20 - 11h10	Auditório	Ricardo Oliveira	Introdução ao GAP (Minicurso)
	Sala A	Vivek Nigam	Discrete vs. dense times in the analysis of cyber-physical security protocols
	Sala B	Ricardo Fragelli	Rei da Derivada, Summaê Trezentos: aprendizagem ativa e colaborativa
11h20 - 12h10	Auditório	D. Kochloukova	Weak commutativity in groups
	Sala A	Paulo Ruffino	Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos (Minicurso)
	Sala B	Ricardo Fragelli	Rei da Derivada, Summaê Trezentos: aprendizagem ativa e colaborativa
14h00 - 14h50	Auditório	Amilcar Pacheco	Torsion of Drinfeld modules and Bogomolov's property
	Sala A	Edson Cataldo	Jitter generation in voice signals produced by a two-mass stochastic mechanical model
	Sala B	Tarcísio Castro	Third order differential equations and local isometric immersions of pseudospherical surfaces
	Sala C	Yuriko Baldim	A nova fase do projeto Klein (ICMI-IMU) e oficina de artigos Klein para professores (Minicurso)
15h00 - 15h50	Auditório	Ana Cristina Vieira	Algebras with graded involution
	Sala A	Jorge Lucero	Coupled oscillators in voice modeling
	Sala B	Benedetta Pellaci	Asymptotically linear Schrödinger equation and systems: existence and related topics
	Sala C	Yuriko Baldim	A nova fase do projeto Klein (ICMI-IMU) e oficina de artigos Klein para professores (Minicurso)
16h20 - 17h10	Auditório	Carmela Sica	Groups with two conjugacy classes of normalizers of cyclic subgroups
	Sala A	Hugo de la Cruz	Métodos de integração de equações diferenciais estocásticas (Minicurso)
	Sala B	Jana Burkotová	Singular nonlinear second order ODE on the half-line
		Maria Serrazina	Sentido de número e flexibilidade de cálculo (Minicurso)
17h20 - 18h10	Sala C	Yuriko Baldim	A nova fase do projeto Klein (ICMI-IMU) e oficina de artigos Klein para professores (Minicurso)
		John MacQuarrie	Modular representations of profinite groups
	Sala A	Hugo de la Cruz	Métodos de integração de equações diferenciais estocásticas (Minicurso)
	Sala B	Milan Tvrdý	Periodic solutions to the singular problem related to the valveless pumping phenomena
Sala C	Maria Serrazina	Sentido de número e flexibilidade de cálculo (Minicurso)	
	Yuriko Baldim	A nova fase do projeto Klein (ICMI-IMU) e oficina de artigos Klein para professores (Minicurso)	

SEXTA-FEIRA, 29/1/16

Horário	Local	Ministrante	Título da Palestra
08h00 - 08h50	Auditório	Maria Serrazina	Práticas de ensino exploratório em matemática e formação continuada de professores
	Sala A	Daniel Ventura	Tipos de interseção (Minicurso)
	Sala B		
	Sala C	Lucas Seco	Topologia de subespaços invariantes (Minicurso)
09h00 - 09h50	Auditório	Maria Serrazina	Práticas de ensino exploratório em matemática e formação continuada de professores
	Sala A	Daniel Ventura	Tipos de interseção (Minicurso)
	Sala B	Lucas Borges	Autômatos celulares generalizados pela função iota-delta: aplicação a equações diferenciais parciais
	Sala C	Lucas Seco	Topologia de subespaços invariantes (Minicurso)
10h20 - 11h10	Auditório	Ricardo Nunes	Introdução ao GAP (Minicurso)
	Sala A	Bruno Lopes	Raciocínio sobre sistemas concorrentes: uma abordagem lógica
	Sala B	José Nazareno	Operadores diferenciais em variedades riemannianas (Minicurso)
	Sala C	Maria I. Vale	Dos padrões figurativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico (Minicurso)
11h20 - 12h10	Auditório	Eamonm O'Brien	Algorithms for linear groups defined over infinite domains
	Sala A	Ana Cristina Valverde	Intersection types for nominal terms
	Sala B	José Nazareno	Operadores diferenciais em variedades riemannianas (Minicurso)
	Sala C	Maria I. Vale	Dos padrões figurativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico (Minicurso)
14h00 - 14h50	Auditório	Csaba Shneider	Embedding permutation groups into wreath products in product action
	Sala A	Silvia Lopes	Estimation and forecasting in processes derived from the solution of generalized Langevin equation.
	Sala B	Marcelo Finger	Medidas de inconsistência em bases probabilísticas
	Sala C	Maria Serrazina	Sentido de número e flexibilidade de cálculo (Minicurso)
15h00 - 15h50	Auditório	Danilo Silveira	Centralizadores de grupos finitos
		Ana Carolina Lafetá	Sobre o comportamento aritméticos de funções transcendententes
	Sala A	Debora Ferreira	Probabilidades assintóticas de somas ponderadas de variáveis aleatórias com cauda pesada
	Sala B	Ariane Almeida	Analisando terminação: size change principle X dependency pairs.
	Sala C	Maria Serrazina	Sentido de número e flexibilidade de cálculo (Minicurso)
16h20 - 17h10	Auditório	Mario Choquehuanca	The Models of Turelli-Hofmann
	Sala A	Hugo de la Cruz	Métodos de integração de equações diferenciais estocásticas (Minicurso)
	Sala B	Daniel Ventura	Uma interpretação computacional para a sintaxe de Herbelin sensível a recursos
	Sala C	Maria I. Vale	Dos padrões figurativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico (Minicurso)
17h20 - 18h10	Auditório	Irena Rachůnková	State-dependent impulsive BVPs
	Sala A	Hugo de la Cruz	Métodos de integração de equações diferenciais estocásticas (Minicurso)
	Sala B	Daniel Ventura	Uma interpretação computacional para a sintaxe de Herbelin sensível a recursos
	Sala C	Maria I. Vale	Dos padrões figurativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico (Minicurso)

# Álgebra e Teoria dos Números

## State-closed abelian groups

Alex Carrazedo Dantas (alexcdan@gmail.com)  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

**Abstract.** In this work we study state-closed representation of metabelian groups of wreath type, with emphasis on the Lamplighter groups of the type  $G_{p,d} = C_p \wr C^d$ . This study was motivated by the state-closed representation of the Lamplighter group  $C_2 \wr C$ , which was used to determine the spectrum of  $C_2 \wr C$  as a group of linear operators and thus give a counterexample to a conjecture of Atiyah. In the case  $d = 1$ , we characterize the state-closed representations of the group  $G_{p,1}$ . For the case  $d > 1$ , we show the group  $G_{p,d}$  has a state-closed representation of degree  $p^2$ , but does not have a state-closed representation of degree  $q$ , where  $q$  is prime number. Furthermore, we prove the representation obtained for  $G_{2,2}$  is finite by state.

Joint work with *Said Najati Sidki*.

## Referências

- [1] A. C. DANTAS AND S. N. SIDKI, *On state-closed representations of restricted wreath product of groups of type  $G_{p,d} = C_p \wr C^d$* , ArXiv: 1505.05165.

## Torsion of Drinfeld modules and Bogomolov's property

Amilcar Pacheco (amilcar@im.ufrj.br)  
Instituto de Matemática  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Abstract.** Given a rank 2 Drinfeld module which either has complex multiplication or is of exceptional type, then the field generated by the torsion points of the Drinfeld module satisfies Bogomolov's property. More precisely, it satisfies this property both with respect to the canonical height of the module and with respect to the absolute Weil height.

Joint work with *Aurélien Galateau*.

## Algebras with graded involution

Ana Cristina Vieira (anacris@ufmg.br)  
Departamento de Matemática  
Universidade Federal de Minas Gerais

**Abstract.** We recall that if an algebra  $A$  over a field  $F$  has a decomposition  $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$  where  $A^{(0)}$  and  $A^{(1)}$  are subspaces such that  $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}$  and  $A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}$ , then we say that  $A$  is a *superalgebra* over  $F$ .

An involution  $*$  on a superalgebra  $A$  that preserves the homogeneous components  $A^{(0)}$  and  $A^{(1)}$ , that is,  $(A^{(0)})^* = A^{(0)}$  and  $(A^{(1)})^* = A^{(1)}$  is called *graded involution*. A superalgebra  $A$  endowed with a graded involution  $*$  is called *\*-superalgebra*.

Given a  $*$ -superalgebra  $A$ , we consider its sequence of  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -codimensions which, in some way, controls the growth of the identities satisfied by  $A$ . In this talk, we will present some results about the behavior of this sequence for particular varieties of  $*$ -superalgebras. We will also present the characterization of simple  $*$ -superalgebras over an algebraically closed field of characteristic zero based on the involution and graded cases.

Joint work with A. Giambruno, R. dos Santos and L. F. Fonseca.

## Sobre o comportamento aritméticos de funções transcendent

Anna Carolina Lafetá (carol.lafeta@hotmail.com)  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

**Resumo.** Nessa palestra, abordaremos o comportamento de funções transcendent quando aplicadas em números algébricos, dando respostas às seguintes perguntas, propostas por Weierstrass:

Questão 1: Existe função inteira e transcendente que leva todos os algébricos em algébricos?

Questão 2: Dado um subconjunto  $A$  dos números algébricos, existe uma função inteira e transcendente tal que os únicos algébricos que são levados em algébricos são os elementos de  $A$ ?

Além disso, apresentaremos também uma conjectura feita por Bombieri, que relaciona a ordem de crescimento de uma função hipotranscendente com o conjunto dos algébricos tais que todas as derivadas da função, quando aplicadas nesse algébrico, são também algébricas.

## Some comments on R. Maier's main contributions on subnormality and permutability of subgroups

Angel Carocca (angel.carocca@ufrontera.cl)  
Departamento de Matemática y Estadística  
Universidad de La Frontera, Temuco-Chile

**Abstract.** The concept of a subnormal subgroup of a group is derived from that of a normal subgroup due to the fact that normality is not a transitive relation. P. Hall considered the subnormal subgroups to be the "skeleton" of a group, providing the framework for all other structures. Following this idea,

to establish criteria for determining the subnormality of a given subgroup is an interesting problem. In this direction, O. Ore introduced the concept of permutable (or quasinormal) subgroup; that is, a subgroup which permutes with every subgroup of the group and also he proved that permutable subgroups are subnormal. Sometimes to obtain subnormality of a subgroup, using permutability, the requirement for a subgroup is not to permute with all subgroups, but only with the members of some interesting families  $f$  of subgroups, so called  $f$ -permutable subgroups.

In this talk we will review some results obtained by R. Maier on subnormality and permutability of subgroups, in particular the Maier-Wielandt's theorem on subnormality in factorized groups, the Maier-Schmid's theorem on the embedding of permutable subgroups and some joint results which extend the Kegel-Wielandt's theorem, by using  $f$ -permutability of subgroups.

## Groups with two conjugacy classes of normalizers of cyclic subgroups

Carmela Sica (csica@ufba.br)  
Departamento de Matemática  
Universidade Federal da Bahia

**Abstract.** Let  $G$  be a finite nilpotent group and denote by  $\nu^*(G)$  the number of conjugacy classes of non-normal cyclic subgroups; Li Shirong in [1] characterized finite nilpotent groups in which  $\nu^*(G) = 1$ . The author proved that  $G \simeq M_{p^n} := \langle a, b \mid a^{p^{n-1}} = b^p = 1, a^b = a^{1+p^{n-2}} \rangle$ , where  $p$  is a prime number and  $n \geq 3$  for  $p > 2$ , whereas  $n \geq 4$  for  $p = 2$ . In particular, if  $\nu^*(G) = 1$  then  $G$  is a  $p$  group for some  $p$ . Denote by  $\omega^*(G)$  the number of conjugacy classes of normalizers of cyclic subgroups. As  $G$  is the normalizer of the trivial subgroup, it is clear that groups with  $\omega^*(G) = 1$  are exactly Dedekind groups and that  $\nu^*(G) = 1$  implies  $\omega^*(G) = 2$ . Then we are interested in the structure of a finite nilpotent group with  $\omega^*(G) = 2$ . We proved that  $G = P \times Q$ , where  $P$  is a  $p$ -group for some  $p$  prime number,  $\omega^*(P) = 2$ , and  $Q$  is a Dedekind  $p'$ -group. Moreover,  $P = KL$  with  $L \leq Z(G)$  and  $K \simeq \langle a, b \mid a^{p^n} = b^{p^m} = 1, a^b = a^{1+p^{n-1}} \rangle$ , where  $n \geq 3$  for  $p > 2$ , whereas  $n \geq 4$  for  $p = 2$ , and  $m \geq 1$ .

Joint work with *Maria Tota*.

## Referências

- [1] L. SHIRONG, *The number of conjugacy classes of non-normal cyclic subgroups in nilpotent groups of odd order.*, J. Group Theory, 1, 165-171 (1998).

## Essencial idempotents and minimal cyclic codes

Cesar Polcino Milies (polcino@ime.usp.br)  
Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade de São Paulo

**Abstract.** Let  $\mathbb{F}_q$  be a finite field with  $q$  elements and  $m$  a positive integer. The cyclic codes of length  $m$  over  $\mathbb{F}_q$  can be viewed as ideals in the group algebra  $\mathbb{F}_q C_m$ , where  $C_m$  denotes a cyclic group

of order  $m$ . More generally, an *abelian code* over  $\mathbb{F}_q$  is any ideal in the group algebra  $\mathbb{F}_q A$  of a finite abelian group  $A$ . These codes were introduced independently by S.D. Berman [2] and MacWilliams [3].

Since in the case when  $\text{char}(\mathbb{F}) \nmid |A|$  the group algebra  $\mathbb{F}A$  is semisimple and all ideals are direct sums of the minimal ones, it is only natural to study minimal abelian code - or - equivalently, primitive idempotents - and these has been done by several authors.

In this talk, we use the concept of *essencial idempotent*, which was first considered in [1], and use it to prove that every minimal abelian, non-cyclic, code is a repetition code. Also, we can prove that every minimal abelian code is equivalent to a minimal cyclic code of the same length.

## Referências

- [1] G. K. Bakshi, M. Raka and A. Sharma, *Idempotent Generators of Irreducible Cyclic Codes*, Proc. Int. Conf. Number Theory and Discrete Geometry, Ramanujan Lecture Notes, 6, 13–18, ed. R. Balasubramanian, S. G. Dani, P. M. Gruber and R. J. Hans-Gill (2008).
- [2] S. D. Berman, *Semisimple cyclic and abelian codes II*, Kibernetika, 3, 17-23, (1967).
- [3] F. J. MacWilliams, *Binary codes which are ideals in the group algebra of an abelian group*, Bell System Tech. J., 49, 987-1011 (1970).

## Embedding permutation groups into wreath products in product action

**Csaba Schneider** (csaba@mat.ufmg.br)  
Departamento de Matemática  
Universidade Federal de Minas Gerais

**Abstract.** Wreath products in product action form a class of maximal subgroups of finite symmetric groups identified by the O’Nan-Scott Theorem. In several group theoretic and combinatorial applications it is important that we can decide if a given permutation group can be embedded into such a maximal subgroup. I will present a theory that resolves this problem for a large class of permutation groups including primitive and quasiprimitive groups. The extension of this problem to infinite permutation groups leads to interesting open problems on infinite simple groups. The study of the embeddings of primitive permutation groups of simple diagonal type into wreath products in product action is a particularly interesting problem.

## Centralizadores de grupos finitos

**Danilo Sanção da Silveira** (sancaodanilo@gmail.com)  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

**Abstract.** Seja  $A$  um grupo finito de automorfismos de um grupo finito  $G$ . É bastante conhecido que a estrutura do centralizador  $C_G(A)$  (o subgrupo dos pontos fixos) de  $A$  tem forte influência sobre

a estrutura de  $G$ , principalmente quando as ordens de  $A$  e  $G$  são coprimas. Nesta palestra vamos apresentar vários teoremas conhecidos que ilustram este fenômeno. Em particular, descreveremos um resultado recente obtido junto com *Prof. Pavel Shumyatsky*.

## Weak commutativity in groups

**Dessislava Kochloukova** ([desi@ime.unicamp.br](mailto:desi@ime.unicamp.br))  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Universidade Estadual de Campinas

**Abstract.** We will discuss a recent preprint with *S. Sidki* on the homological finiteness properties  $FP_m$  e  $F_m$  of the Sidki construction  $X(G)$  from *J. Algebra* (1980). If the time permits some recent results on a related construction  $E(G)$  will be discussed.

## Algorithms for linear groups defined over infinite domains

**Eamonn O'Brien** ([e.obrien@auckland.ac.nz](mailto:e.obrien@auckland.ac.nz))  
University of Auckland, New Zealand

**Abstract.** The development of algorithms for the study of finitely generated linear groups defined over infinite domains is still in its infancy. Recent progress include the first practical algorithms to construct congruence homomorphisms over a broad range of infinite fields; to decide the Tits alternative; and to decide whether a finitely-generated subgroup of a soluble-by-finite group has finite index. We will discuss the general approach which relies heavily on the success of a similar project for groups defined over finite fields.

Joint work with *Alla Detinko* and *Dane Flannery*.

## Introdução ao GAP

**Igor dos Santos Lima**<sup>1</sup> e **Ricardo Nunes de Oliveira**<sup>2</sup> ([ricardo@ufg.br](mailto:ricardo@ufg.br))

<sup>1</sup>Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Regional Catalão, Universidade Federal de Goiás, [igor.matematico@gmail.com](mailto:igor.matematico@gmail.com)

<sup>2</sup>Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, [ricardo@ufg.br](mailto:ricardo@ufg.br)

**Resumo.** Este minicurso visa apresentar algumas aplicações de Teoria de Conjuntos, teoria de grupos e teoria de números utilizando o software livre GAP (Groups, Algorithms and Programming) em ambiente Linux e uma versão interativa para Windows, o GGAP.

## Referências

[1] Manual do GAP do Prof. Noraí Rocco. Universidade de Brasília.

[2] Manual do GAP disponível no site oficial do GAP: <http://www.gap-system.org/>

- [3] Manual do GAP e GGAP implementado no próprio GAP.
- [4] Apostila do minicurso GAP do Prof. Csaba Schneider. Escola de Álgebra. Maringá, 2014.
- [5] Manual do GGAP do Prof. Igor Lima. Universidade Federal de Goiás/Catalão.

## Asymptotic density of test elements in free groups and surface groups

**Ilir Snopce** (ilir@im.ufrj.br)  
Instituto de Matemática  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Abstract.** An element  $g$  of a group  $G$  is called a test element if for any endomorphism  $\varphi$  of  $G$ ,  $\varphi(g) = g$  implies that  $\varphi$  is an automorphism. The first (non-trivial) example of a test element was given by Nielsen in 1918, when he proved that every endomorphism of a free group of rank 2 that fixes the commutator  $[x_1, x_2]$  of a pair of generators must be an automorphism.

In this talk I will discuss the distribution of test elements in free groups and surface groups.

Joint work with *Slobodan Tanushevski*.

## Constants of formal derivations and primitive operations

**Ivan Shestakov** (shestak@ime.usp.br)  
Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade de São Paulo

**Abstract.** We describe algebras of constants of all partial derivations in free algebras over a field of characteristic 0. These constants are also called “proper polynomials”.

It is proved that the subalgebra of proper polynomials coincides with the subalgebra generated by all primitive elements of degree more than 1.

The space of primitive elements is closed under primitive operations and forms an algebraic system with respect to them. Bases of these operations are found in the classes of all algebras, all commutative algebras, right alternative and Jordan algebras.

Joint work with *Sergei Pchelintsev*.

## Modular representations of profinite groups

**John MacQuarrie** (john@mat.ufmg.br)  
Departamento de Matemática  
Universidade Federal de Minas Gerais

**Abstract.** The modular representation theory of a finite group  $G$  concerns the study of finitely generated modules over the group algebra  $kG$ , where  $k$  is a field of positive characteristic. Such

modules can be organised using the concepts of relative projectivity, vertex and source. Basic results of Green and Higman along these lines constitute fundamentals upon which the subject is built.

A profinite group is the inverse limit of an inverse system of finite groups. In this talk we will see how many of the foundational results of modular representation theory of finite groups pass through this inverse system, to the limit.

## Counting lattices in semisimple Lie groups

Mikhail Belolipetsky (mbel@impa.br)  
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

**Abstract.** I will discuss the results about asymptotic growth of the number of conjugacy classes of arithmetic lattices of bounded covolume in a semisimple Lie group. Most of this is a joint work with *Alex Lubotzky*. If time permits, I will also show a recent result about growth of the number of mutually isospectral lattices in higher rank groups, which is a joint work with *Ben Linowitz*.

## Said Sidki : 45 anos de dedicação à matemática brasileira

Noraí Romeu Rocco (norai@unb.br)  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

**Resumo.** Nesta oportunidade de celebração do 75º aniversário de nascimento do Professor Said Najati Sidki, faremos um breve relato dos seus 45 anos de dedicação ao Departamento de Matemática da UnB e de sua contribuição para o desenvolvimento da Álgebra no Brasil. Procuraremos abordar, mesmo que sucintamente, a sua formação e o seu trabalho científico, acadêmico/formador e político/administrativo, de cujo engajamento resultaram as suas reconhecidas contribuições tanto para o crescimento do Departamento de Matemática da UnB e a conseqüente consolidação do seu Programa de Pós-graduação, como para que a subárea de Álgebra pudesse desfrutar do atual estágio de maturidade no Brasil.

## Referências

- [1] N.R.ROCCO E M.V.ARAÚJO SOARES, *Um breve memorial do perfil científico, acadêmico e administrativo do Professor Said Najati Sidki*. Palestra proferida pelo professor M.V. de Araújo Soares no Conselho Universitário da UnB por ocasião da outorga do título de Professor Emérito da UnB ao Professor Said Sidki. Brasília, agosto de 2002.

# Análise

## Asymptotically linear Schrödinger equation and systems: existence and related topics

**Benedetta Pellacci** (pellacci@uniparthenope.it)  
Dipartimento di Scienze & Tecnologie  
Università degli Studi di Napoli Parthenope, Italy

**Abstract.** We will discuss some aspects of Schrödinger equations and systems with the presence of a saturable effect. This is well represented by an asymptotically linear non-linearity. We will mainly interested in existence of least action solutions, concentration phenomena and then in existence of solutions in exterior domains.

## State-dependent impulsive BVPs

**Irena Rachůnková** (irena.rachunkova@upol.cz)  
Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics  
Palacký University, Olomouc, Czech Republic

**Abstract.** We investigate the solvability of the impulsive problem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \text{ a.e. } t \in [a, b], \quad \ell(x) = c \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$x(t+) - x(t) = J(t, x(t)) \text{ for } g(t, x(t)) = 0. \quad (2)$$

The impulse instants  $t \in (a, b)$  in (2) are not known before and they are determined as solutions of the equation  $g(t, x(t)) = 0$ . The operator  $\ell$  is an arbitrary linear and bounded operator which is expressed in terms of the Kurzweil-Stieltjes integral. In [1] and [3], various cases of problem (1)–(2) are discussed and conditions for their solvability are presented. In [2], we give conditions which allow to realize a construction of solutions of problem (1)–(2).

## Referências

- [1] I. RACHŮNKOVÁ AND J. TOMEČEK, *Existence principle for BVPs with state-dependent impulses*, Topol. Methods in Nonlin. Analysis, 44, 349-368 (2014).
- [2] I. RACHŮNKOVÁ, L. RACHUNEK, A. RONTÓ, M. RONTÓ, *A constructive approach to boundary value problems with state-dependent impulses*, Applied Mathematics and Computation, 274, 726-744 (2016).
- [3] I. RACHŮNKOVÁ AND J. TOMEČEK, *State-Dependent Impulses: Boundary Value Problems on Compact Interval*, Atlantic Press, Paris 2015.

## Singular nonlinear second order ODE on the half-line

Jana Burkotova (jana.burkotova@upol.cz)

Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics  
Palacký University, Olomouc, Czech Republic

**Abstract.** We investigate the existence and asymptotic behaviour of solutions to ordinary differential equations which may have a time singularity in the independent variable. In particular, we study second order nonlinear differential equations on unbounded domain  $[0, \infty)$

$$(p(t)u'(t))' + q(t)f(u(t)) = 0,$$

subject to initial conditions

$$u(0) = u_0 \in [L_0, L], \quad u'(0) = 0.$$

The aim is to describe a set of all solutions according to their asymptotic behaviour at infinity and to derive global existence results. Here function  $f$  is continuous, has three zeros  $f(L_0) = f(0) = f(L) = 0$ ,  $L_0 < 0 < L$  and the sign conditions  $xf(x) > 0$  for  $x \in (L_0, 0) \cup (0, L)$  hold. Further,  $p, q \in C[0, \infty)$  are positive on  $(0, \infty)$  and  $p(0) = 0$ . The integral  $\int_0^1 \frac{ds}{p(s)}$  may be divergent which yields the time singularity at  $t = 0$ .

Joint work with *Martin Rohleder and Jakub Stryja*.

## Referências

- [1] J. BURKOTOVÁ, M. ROHLEDER AND J. STRYJA, *On the existence and properties of three types of solutions of singular IVPs.*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 29, 1-25 (2015).

## The models of Turelli-Hofmann

Mario Choquehuanca (mario.choquehuanca@ufrontera.cl)

Departamento de Matemática y Estadística  
Universidad de La Frontera, Temuco, Chile

**Abstract.** This paper is conveniently used the following Volterra difference equation

$$u(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^n a(n-j)u(j) + f(n, u(n)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

to model the propagation of intracellular bacteria *Wolbachia* in *Drosophila simulans* populations and the theoretical results obtained in [1] to give a solution bounded the proposed model.

Joint work with *C. Cuevas, H. Soto*.

## Referências

- [1] C. CUEVAS, M. CHOQUEHUANCA AND H. SOTO, *Asymptotic analysis for Volterra difference equations.*, Asymptotic Analysis 88, 125-164 (3)(2014).
- [2] P. SCHOFIELD, *Spatially explicit models of Turelli-Hoffmann Wolbachia invasive wave fronts.*, J. Theor. Biol. 215, 121-131 (2002).
- [3] M. TURELLI AND A. A. HOFFMANN, *Rapid spread of an inherited incompatibility factor on California Drosophila.*, Nature 353, 440-442 (1991).

## Periodic solutions to the singular problem related to the valveless pumping phenomena

Milan Tvrdý (tvrdy@math.cas.cz)  
Institute of Mathematics  
Czech Academy of Sciences, Czech Republic

**Abstract** We will present results on the existence and asymptotic stability of positive  $T$ -periodic solutions to singular differential equations of the form

$$u'' + a u' = \frac{1}{u} (e(t) - f(u')) - c,$$

where  $a \geq 0$ ,  $c > 0$ ,  $e$  is  $T$ -periodic and  $f(x)$  behaves like  $x^2$ . The studied problem is related to the valveless pumping Liebau phenomena (cf. [3] and [4]).

This is a joint work with J. Á. Cid, G. Infante, G. Propst and M. Zima (cf. [1] and [2]).

## Referências

- [1] J. Á. CID, G. PROPST AND M. TVRDÝ, *On the pumping effect in a pipe/tank flow configuration with friction*, Physica D, 273-274, 28–33 (2014).
- [2] J. Á. CID, G. INFANTE, M. TVRDÝ AND M. ZIMA, *Topological approach to periodic oscillations related to the Liebau phenomenon*, J. Math. Anal. Appl., 423, 1546–1556 (2015).
- [3] G. LIEBAU, *Über ein ventilloses Pumpprinzip*, Naturwissenschaften **41**, 327 (1954).
- [4] G. PROPST, *Pumping effects in models of periodically forced flow configurations*, Physica D, 217, 193–201 (2006).

# Nonlocal problems with Trudinger-Moser nonlinearity: ground states and vanishing potential

Olímpio Hiroshi Miyagaki (ohmiyagaki@gmail.com)

Departamento de Matemática

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Abstract.** We investigate the existence of ground state solutions for a class of nonlinear scalar field equations defined on whole real line, involving a fractional Laplacian and nonlinearities with Trudinger-Moser critical growth. We also discuss a class of nonlinear nonautonomous scalar field equations with fractional diffusion, exponential critical nonlinearity and a subcritical term. The involved potentials are allowed for vanishing behavior at infinity. We handle the lack of compactness of the associated energy functional due to the unboundedness of the domain and the presence of a limiting case embedding. These results are proved in [1] and [2].

Joint work with *J. M. B. do O and M. Squassina.*

## Referências

- [1] J. M. B. DO O, O. H. MIYAGAKI AND M. SQUASSINA, *Nonautonomous fractional problems with exponential growth.*, NoDEA, 22, 1395-1410 (2015).
- [2] J. M. B. DO O, O. H. MIYAGAKI AND M. SQUASSINA, *Ground states of nonlocal scalar field equations with Trudinger-Moser critical nonlinearity*, to appear in TMNA

# Two homoclinic solutions for second-order perturbed Hamiltonian systems

Pedro Ubilla López (pedro.ubilla@usach.cl)

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Universidad de Santiago de Chile

**Abstract.** This paper is concerned with the existence of homoclinic orbits for a class of some second order Hamiltonian systems considering a sublinear perturbation near zero. By considering an auxiliary problem, we show the existence of two different approximative sequences of periodic solutions, one of mountain pass type and the second of local minima. We obtain two different homoclinics orbits by passing to the limit in such sequences.

Joint work with *Patricio Cerda, Luiz Fernando de Oliveira Faria and Eduard Toon*.

# Educação Matemática

## Sobre os processos do pensamento matemático avançado

**Barbara Lutaif Bianchini** (barbara@pucsp.br)  
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

**Resumo.** Esta apresentação baseia-se nas ideias de David Tall a respeito dos processos do Pensamento Matemático Avançado. Este tipo de pensamento se difere do pensamento elementar, mas também pode ocorrer desde a infância, dependendo da complexidade de como se lida com ele. Pesquisadores da educação matemática se tornaram conscientes da importância dos processos componentes da compreensão na matemática avançada e em suas interações. Não há uma distinção clara entre muitos desses processos de pensamento matemático elementar e avançado, mesmo pensando que a matemática avançada é mais focada nas abstrações de definição e dedução. Nesta apresentação pretendo apresentar os principais processos do pensamento matemático avançado, tais como: a abstração, que compreende a própria abstração, a generalização e a síntese e a representação, que compreende a própria Representação, o Alternar e interpretar, e o Modelar. Depois de tratar das ideias fundamentais, pretendo também apresentar alguns exemplos voltados para o ensino de matemática.

## Referências

- [1] DREYFUS, T. (1991). *Advanced Mathematical Thinking Processes*. In: TALL, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer..
- [2] MACHADO, S.D.A; MARANHÃO, M.C.S.A. *O processo de generalização no desenvolvimento do PMA no EF*. In: Groenwald, C. L. O.; Silva, M. A. (Org.) *Educação Matemática Contribuições para as séries finais do Ensino Fundamental e Médio*. 1. ed. Canoas: Editora da ULBRA, 2013. v. 1. 224p.
- [3] TALL, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer.

## Processos do pensamento matemático avançado

**Barbara Lutaif Bianchini** (barbara@pucsp.br)  
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

**Resumo.** Pretende-se neste mini-curso apresentar problemas matemáticos e discuti-los à luz do referencial teórico intitulado: Pensamento Matemático Avançado (PMA). O objetivo do mini-curso é o de sensibilizar os participantes sobre a importância de se reconhecer os processos presentes no PMA. Isto será feito a partir de situações-problema ligadas à Matemática oferecidas aos participantes para que identifiquem estes processos. A partir daí objetiva-se que o professor se conscientize da importância de uma seleção criteriosa das situações-problema que possibilitem ao aluno vivenciar

questões específicas da matemática. Com a análise dos processos do PMA pretendemos levar o professor a perceber que situações são favoráveis para o aluno desenvolver processos do PMA e como isto pode ser feito. Com esta proposta pretendemos refletir conjuntamente se que o professor passará a compreender mais profundamente as dificuldades de seus alunos ao enfrentar essas situações?

## Referências

- [1] DREYFUS, T. (1991). *Advanced Mathematical Thinking Processes*. In: TALL, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer..
- [2] MACHADO, S.D.A.; MARANHÃO, M.C.S.A. *O processo de generalização no desenvolvimento do PMA no EF*. In: Groenwald, C. L. O.; Silva, M. A. (Org.) *Educação Matemática Contribuições para as séries finais do Ensino Fundamental e Médio*. 1. ed. Canoas: Editora da ULBRA, 2013. v. 1. 224p.
- [3] TALL, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer.

## Reflexões sobre o uso de recursos digitais para ensinar e aprender matemática e estatística na escola básica.

Humberto José Bortolossi (hjbortol@vm.uff.br)

Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro

Universidade Federal Fluminense

**Resumo.** Será que realmente vale a pena usar recursos digitais para ensinar e aprender Matemática e Estatística?

O estudo recente OECD (2015) promovido pela Organization for Economic Cooperation and Development (responsável pelo teste PISA) parece apontar para uma resposta negativa a esta pergunta. De fato, por meio de análises estatísticas de dados coletados com alunos, professores e administradores escolares durante a aplicação do teste PISA, a OECD infere os seguintes resultados (bastante divulgados na imprensa quando o relatório foi publicado):

- Estudantes que usam o computador moderadamente tem desempenho melhor do que estudantes que o usam raramente. Mas estudantes que usam o computador muito frequentemente tem desempenho pior (mesmo considerando-se aspectos demográficos e sociais).
- Estudantes que ficam on-line mais do que 6 horas por semana tendem a se sentir solitários na escola, chegam atrasados e faltaram nas duas semanas que antecederam o teste PISA.
- Não existe melhora apreciável no desempenho dos alunos nos países que investiram fortemente em TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação). Garantir que toda criança tenha um nível mínimo de leitura e de Matemática fará mais no sentido de criar oportunidades iguais em um mundo digital do que seria alcançado expandindo ou subsidiando serviços e equipamentos tecnológicos avançados.
- Os países melhores colocados no teste PISA fazem pouco uso do computador. Para avaliar e se posicionar frente a estes resultados, na primeira parte de nossa fala, pretendemos analisar o contexto em que esta pesquisa da OECD foi realizada, principalmente no que se refere aos vários tipos de uso do computador em sala de aula considerados pela OECD.

Na segunda parte de nossa fala, destacaremos dois aspectos importantes, em nossa opinião, no que se refere ao uso do computador na prática docente:

1. *Para a confecção de material didático.* Muitos professores, ao incluir figuras para ilustrar listas de exercícios, provas e apostilas, usam material da Internet ou, literalmente, (foto)copiam e colam figuras dos livros didáticos. Por outro lado, é preciso tomar cuidado com as imagens obtidas da Internet: não é raro encontrar figuras que não estão matematicamente corretas (“parábolas” que não são parábolas, “elipses” que não elipses, etc.). O computador pode ser muito útil aqui: com um software gratuito e de fácil uso, como o GeoGebra (International GeoGebra Institute, 2016), o professor pode gerar rapidamente figuras matematicamente consistentes. Mais ainda: além de figuras estáticas, construções interativas que exploram conceitos matemáticos podem ser construídas e acessadas em smartphones, tablets e computadores desktop.
2. *Para explorar determinados assuntos que seriam difíceis de se trabalhar com o uso de outro tipo de material didático.* Mostraremos dois contextos onde o computador se destaca como recurso didático. O primeiro é no estudo de Geometria Espacial e o segundo é em Estatística. No contexto de Geometria Espacial, apresentaremos dois jogos de nossa autoria (Bortolossi, 2015): “Trip-Lets” e “O Jogo da Tomografia”. O primeiro é um jogo interativo para exercitar visualização tridimensional em caráter interdisciplinar com as Línguas Portuguesa, Inglesa e Espanhola. O propósito do segundo jogo é identificar um objeto tridimensional a partir de suas seções planas. No contexto de Estatística, apresentaremos um outro software de nossa autoria (Bortolossi & Santos, 2015): o LPP. Com este software gratuito, alunos e professores podem experimentar, explorar e apreciar, por meio de uma interface muito simples, o uso da Estatística em uma aplicação do mundo real, a saber, a análise estatística de textos e, desta maneira, desenvolver as várias habilidades estatísticas sugeridas por pesquisadores em Educação Estatística (Garfield et al., 2005).

## Referências

- [1] BORTOLOSSI, H. J. Developing Free Computer-Based Learning Objects for High School Mathematics: Examples, Issues and Directions. In: Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. New York: Springer-Verlag, 2015.
- [2] BORTOLOSSI, H. J.; SANTOS, J. F. E. B. Statistical Text Analysis On The Hands of Basic School Students and Teachers: An Interdisciplinary Approach. IASE Conference Proceedings. 2015.
- [3] GAEFIELD, J. ET AL. Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) College Report. Alexandria, VA: American Statistical Association, 2005.
- [4] INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE. GeoGebra. Software de Matemática Dinâmica. 2016. Disponível em: <http://www.geogebra.org/>. Acesso em: 21 de janeiro de 2016.
- [5] OECD. Students, Computers and Learning: Making The Connection. PISA, OECD Publishing, 2015.

## Dos padrões figurativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico

Maria Isabel Piteira do Vale (isabel.vale@ese.ipv.c.pt)

Escola Superior de Educação

Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal

**Resumo.** Durante este workshop irá apresentar-se uma proposta didática desenvolvida no âmbito do projeto Padrões1 que foi amplamente desenvolvida com professores em formação inicial e continuada, e seus respectivos alunos do 1º e 2º ciclos do ensino básico. Nesta proposta aborda-se a exploração de padrões através de tarefas, das quais valorizamos de modo muito especial as em contextos figurativos como componente facilitadora da compreensão matemática, em particular de relações numéricas, donde emerge a generalização, como uma das componentes mais poderosas do conhecimento matemático, que conduz ao pensamento algébrico [1, 2]. Por outro lado, esta proposta permite também a ligação de vários modos de representação, permitindo o enriquecimento da compreensão da estrutura matemática subjacente, conduzindo, de modo mais eficaz, não só à conjectura e generalização, mas à explicação e argumentação, e, em última análise, à prova [3]. Pretende-se, também, mostrar a importância que a exploração de tarefas de padrões tem na aula de matemática, para a compreensão matemática, em particular nos primeiros anos de escolaridade, ao permitir formas diversificadas de raciocínio, em particular na formulação de conjecturas e na expressão da generalização, recorrendo sobretudo a um tipo específico de raciocínio, o indutivo [3]. Este workshop decorre ao longo de duas sessões em que haverá uma componente teórica e de fundamentação em simultâneo com uma componente prática. Os participantes terão oportunidade de se envolverem na resolução de algumas das tarefas de acordo com a proposta didática. Será feita uma exploração em pequenos grupos e a síntese final em grande grupo.

## Referências

- [1] RIVERA, F. & BECKER, J. (2005). *Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra*. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11, 198-203.
- [2] VALE, I. & PIMENTEL, T. (2009) (COORD.). *Padrões em Matemática – uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico*. Lisboa: Texto Editora..
- [3] PIMENTEL, T. & VALE, I. (2012). *Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática*. *Quadrante*, XXI, (2), 29 – 50.

## Uma visão sobre a matemática curricular no ensino básico em Portugal

Maria Isabel Piteira do Vale (isabel.vale@ese.ipv.c.pt)

Escola Superior de Educação

Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal

**Resumo.** A matemática escolar em Portugal atravessou na última década mudanças significativas ao nível do currículo. As orientações curriculares em Matemática (ME, 2007) implementaram uma nova visão da matemática curricular na matemática escolar na qual se destaca uma valorização do professor, aspeto essencial para que haja uma efetiva integração curricular. Defende-se um ensino

mais exploratório, onde se privilegia uma relação entre os papéis do professor e dos alunos e onde as tarefas a utilizar no processo de ensino e aprendizagem são cruciais, assim como as capacidades transversais que se pretendem desenvolver nos alunos em paralelos com os diferentes temas matemáticos (e.g. ME, 2007; Peressin & Knuth, 2000; Ponte, 2005). Nesta palestra tentarei dar a minha visão sobre a matemática no ensino básico, concordante com o Programa de Matemática de 2007 (ME, 2007). Centrar-me-ei no ensino exploratório a implementar na sala de aula e nas capacidades transversais a desenvolver nos alunos (e.g. resolução de problemas, comunicação, raciocínio, conexões, padrões, visualização) que tentarei ilustrar através de algumas tarefas (Boavida et al., 2007; Smith & Stein, 2011; Vale, 2009).

## Referências

- [1] BOAVIDA, A. M., PAIVA, A. L., CEBOLA, G. VALE, I. & PIMENTEL, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC.
- [2] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC. *Ministério da Educação e Ciência (2013). Programa e metas curriculares. Matemática. Ensino básico*. Lisboa: Direção Geral de Educação.
- [3] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA (2013). *Programa e metas curriculares. Matemática. Ensino básico*. Lisboa: Direção Geral de Educação..
- [4] PERESSIN, D. & KNUTH, E. (2000). *The role of tasks in developing communities of mathematical inquiry*, *Teaching Children Mathematics*, February, pp. 391-397.
- [5] PONTE, J. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- [6] PONTE, J. P., & CHAPMAN, O. (IN PRESS). *Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching*. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.) New York, NY: Routledge/Taylor & Francis.
- [7] SMITH, M., & STEIN, M. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston: NCTM. ISBN: 978-0-87353-677-6.
- [8] VALE, I. (2009). *Das tarefas com padrões visuais à generalização*. XX SIEM. Em J. Fernandes, H. Martinho & F. Viseu (Orgs.). *Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 35-63). Viana do Castelo: APM.

## Sentido de número e flexibilidade de cálculo

Maria de Lurdes Marquês Serrazina (lurdess@eselx.ipl.pt)  
Escola Superior de Educação  
Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal  
Instituto de Educação  
Universidade de Lisboa, Portugal

**Resumo.** A ideia de sentido de número (senso numérico, no inglês ‘number sense’) é uma ideia fundamental a ser desenvolvida pelos alunos antes e ao longo do ensino fundamental. Esta ideia aparece na literatura de educação matemática no final dos anos oitenta do século passado e, sendo

difícil de definir, sabe-se quando um indivíduo a tem ou não tem. Pode ser caracterizada “como a capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5, 10, 100 ou  $1/2$ , usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação, quantidade, localização, ordenação e medida) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números [1]. À volta do sentido do número tem sido realizadas diferentes pesquisas, em Portugal, nos diferentes níveis de ensino e, em especial no 1.º ciclo do ensino básico [2]. A ideia de flexibilidade de cálculo está estritamente associada à de sentido de número, tratando-se de uma capacidade que todos os alunos devem desenvolver na escola elementar [3, 4] associada ao cálculo mental e à resolução de problemas aritméticos. Existem diferentes perspetivas sobre flexibilidade podendo ser definida como conhecimento de múltiplas soluções assim como a capacidade e tendência para escolher a mais adequada para um dado problema. Por outro lado, flexibilidade existe num continuum quando os alunos ganham flexibilidade eles podem primeiro mostrar um maior conhecimento de múltiplas estratégias, depois preferências particulares, e por último, o uso adequado da estratégia preferida estratégia mais eficiente para um dado problema. Neste workshop serão discutidas e aprofundadas estas ideias partindo da realização, análise e discussão de tarefas.

## Referências

- [1] ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério de Educação.
- [2] SERRAZINA, L. (2012). *O sentido de número no 1.º ciclo: Uma leitura de investigação*. *Boletim GEPEM*, 15-28.
- [3] NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar (Tradução de Principles and Standards for School Mathematics)*. Lisboa: APM.
- [4] ANGHILERI, J. (2001). *Intuitive approaches, mental strategies and standard algorithms*. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp. 79-94). Buckingham: Open University Press.

## Práticas de ensino exploratório em matemática e formação continuada de professores

**Maria de Lurdes Marquês Serrazina** (lurdess@eselx.ipl.pt)  
Escola Superior de Educação  
Instituto Politécnico de Lisboa  
Instituto de Educação  
Universidade de Lisboa

**Resumo.** É hoje comumente aceite que os alunos devem aprender Matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir das suas experiências e dos conhecimentos que já possuem [1]. Para que isto aconteça os professores devem desenvolver o ensino da Matemática de modo que os alunos se envolvam ativamente na resolução das tarefas propostas. Ou, dito de outro modo, devem desenvolver uma prática de ensino exploratório da Matemática [2]. Neste tipo de ensino espera-se que o professor selecione de forma criteriosa a tarefa (ou tarefas) a propor aos alunos, que preveja o tipo de exploração matemática que pode ser feita, tendo em conta o currículo que tem

para trabalhar com os seus alunos. Na aula espera-se que, para além de gerir o trabalho dos alunos, o professor interprete e compreenda o trabalho realizado por eles na resolução da tarefa, promova a respetiva discussão, articule e sistematize as suas ideias, de modo a que os alunos aprendam aquilo que era esperado aprenderem. Todo este processo é bastante complexo e difícil para o professor [3], acrescido pelo facto de a sua prática, muitas vezes, não ser consentânea com o referido antes. A formação continuada pode ter aqui um papel muito relevante, na medida em que contribuindo para o aprofundamento do conhecimento matemático, didático e curricular dos professores envolvidos, aumente a sua confiança como professores de Matemática, e sobre aquilo que os seus alunos são capazes de fazer em Matemática. Nesta comunicação serão discutidas práticas de ensino exploratório da Matemática e como estas práticas podem ser promovidas através de programas de formação continuada de professores, tendo por base a experiência do Programa de Formação Contínua realizado em Portugal [4].

## Referências

- [1] NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar (Tradução de Principles and Standards for School Mathematics)*. Lisboa: APM.
- [2] PONTE, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34)*. Lisboa: APM.
- [3] SMITH, M. S., & STEIN, M. K. (2011). *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- [4] SERRAZINA, M. L. (2014). *O Professor que Ensina Matemática e a sua Formação: uma experiência em Portugal. Educação & Realidade, 39 (4), 1051-1069*.

## Análise da Produção Escrita: alguns apontamentos

Regina Luzia Corio de Buriasco (reginaburiasco@hasner.com.br)  
Universidade Estadual de Londrina

**Resumo.** Tendo como princípio que a avaliação é mais uma oportunidade de aprendizagem, é papel do professor desenvolver diálogos com os estudantes para que, da melhor maneira possível, resolvam suas tarefas, construindo um diagnóstico das estratégias por eles utilizadas e de suas dificuldades e, a partir dessa exploração e identificação, decidir a forma de intervir. A produção escrita não deixa de ser uma forma de comunicação e, como tal, deve receber atenção especial por parte dos professores, pois, muitas vezes, essa é a única forma de “diálogo” existente entre professores e estudantes. Com a análise da produção escrita o professor pode questionar-se a respeito de qual matemática os seus estudantes estão aprendendo, que entendimentos estão tendo do que está sendo trabalhado em sala de aula, do que já sabem, que dificuldades encontram, e o que pode ser feito para auxiliá-los na sua superação. A proposta para o minicurso é discutir essa estratégia.

## Referências

- [1] BURIASCO, R. L. C.. *Análise da Produção Escrita: a busca do conhecimento escondido. In: ROMANOWSKI, J. P. et al (orgs.). Conhecimento Local e Conhecimento Universal: a aula e os campos do conhecimento. Curitiba: Champagnat, 2004.*

- [2] BURIASCO, R. L. C. DE. *Introdução à Análise da Produção Escrita: prática de investigação em avaliação*. In: *Irinéa de Lourdes Batista; Rosana Figueiredo Salvi. (Org.). Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática: perfil de pesquisas*. 1ed. Londrina: EDUEL, 2009, v. 1, p. 157-166.
- [3] BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. *Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos)*. *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática, UNESP - Rio Claro*, v. 22, p. 69-96, 2009.

## Avaliação como oportunidade de aprendizagem: alguns apontamentos

**Regina Luzia Corio de Buriasco** (reginaburiasco@hasner.com.br)  
Universidade Estadual de Londrina

**Resumo.** Atualmente, um grande número de escolas ainda enfatiza uma avaliação do rendimento escolar, baseada na dicotomia aprovação/reprovação, que evidencia um resultado sem muita chance de ser modificado. Contudo, uma avaliação escolar com finalidade educativa se constitui uma oportunidade de aprendizagem, com a intenção de contribuir com o trabalho pedagógico escolar, e, por isso não pode ser assim definitiva. Assim, a avaliação com objetivo de acompanhar o processo de aprendizagem pode ser tomada como formativa quando carrega uma ação reflexiva, em que ela mesma deve ser (também) uma oportunidade de aprendizagem. Neste trabalho toma-se a avaliação que acompanha o processo de ensino e aprendizagem e que dele participa; que se constitui, efetivamente uma oportunidade de aprendizagem a serviço da aprendizagem; que propicia momentos de reflexão tanto para o aluno, quanto para o professor a respeito do seu próprio trabalho; que tarefas de ensino não se diferenciam de tarefas de avaliação. Essa é a perspectiva adotada pelos participantes do GEPEMA – Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação: a da avaliação como oportunidade de aprendizagem. E adotá-la é uma forma de o professor tornar-se parceiro dos alunos na busca de aprender matemática na escola, considerando que educar pela matemática é um ato de opção, compromisso e solidariedade.

## Referências

- [1] BARLOW, M. *Avaliação escolar: mitos e realidades*. Porto Alegre: Artmed, 2006.
- [2] BURIASCO, R. L. C. *Algumas considerações sobre avaliação educacional*. *Estudos em Avaliação Educacional, São Paulo*, n.22, p.155-177, jul/dez. 2000.
- [3] BURIASCO, R. L. C. *Sobre Avaliação em Matemática: uma reflexão*. *Educação em Revista*. Belo Horizonte, n.36, Dezembro, p. 255-263, 2002.

## Rei da Derivada, Summaê e Trezentos: aprendizagem ativa e colaborativa.

Ricardo Ramos Fragelli (fragelli@hotmail.com)

Faculdade UnB Gama  
Universidade de Brasília

**Resumo.** Atualmente, diversas pesquisas na área educacional estão voltadas para os métodos de aprendizagem ativa, tais como jogos educativos (Serious Games), PBL (Problem, Project-Based Learning), Aprendizagem entre Pares (Peer Instruction), Pense-Par-Compartilhe (Think-Pair-Share), Sala Invertida (Flip Classroom) dentre outros, que estão em contraste com a recepção passiva de informações [1, 2, 3, 4]. No caso específico dos cursos de Engenharia e de Exatas, tais métodos podem auxiliar no enfrentamento de uma problemática que são os altos índices de reprovação e evasão [5, 6].

Estudos indicam que a evasão é uma questão multifacetada, mas pode-se afirmar que está associada aos aspectos regionais e de mercado, às características peculiares das Universidades, à utilização de metodologias de aprendizagem passivas e também à má formação dos estudantes referente aos conceitos prévios que, porventura, ocasionam um alto índice de reprovação no ciclo básico dos cursos de Engenharia e de Exatas. Outro aspecto de extrema relevância é o nervosismo e a ansiedade em provas, em especial, envolvendo estudantes calouros [9, 10, 9].

Para o enfrentamento desse problema, foram desenvolvidos entre os anos de 2003 e 2015 alguns métodos baseados em aprendizagem ativa e colaborativa e os que mais se destacaram foram: Rei da Derivada, Summaê e Trezentos. Tais métodos possuem aporte teórico em teorias cognitivistas e humanistas com especial enfoque na aprendizagem significativa de David Ausubel e na aprendizagem significativa de Carl Rogers. Segundo Ausubel [11], para que ocorra a aprendizagem significativa é necessário que o material a ser estudado seja potencialmente significativo, que o estudante tenha conceitos prévios específicos que proporcionem a possibilidade de ancoragem para o novo material e, por fim, que o aprendiz tenha motivação para relacionar o novo conteúdo transformando-o de material lógico em psicológico, isto é, com significado próprio e idiossincrático para o estudante. Nesse aspecto motivacional, as metodologias ativas e colaborativas também se mostram uma excelente opção e, concomitantemente, é possível encontrar bons caminhos pedagógicos em teorias de aprendizagem que levam em consideração o crescimento pessoal do estudante. Dois exemplos são os princípios educacionais da teoria humanista de Carl Rogers [12] e a educação libertadora de Paulo Freire [13]. Na verdade, Rogers e Freire trazem muito mais que uma simples estratégia motivacional, promovem também um balizador à prática e ao pensar do professor.

O Rei da Derivada (RDD) foi criado em 2003 e é um jogo de aprendizagem em que várias duplas são formadas para resolver de forma colaborativa um problema formulado pelo professor e aprender com os erros e acertos do grupo. Para gamificar a experiência, as duplas ganham pontos de acordo com a velocidade de resolução e, para propiciar uma maior interação entre os estudantes, as duplas são trocadas a cada novo problema. Ao final, quem fizer mais pontos é o Rei ou a Rainha da Derivada.

Com o RDD, houve um aumento de 26% com relação à média das outras avaliações da mesma turma e a aplicação de uma escala de Likert mostrou que cerca de 95% dos estudantes se aperceberam aprendendo melhor. Em estudo qualitativo, 85% dos estudantes destacam o fato das atividades serem “divertidas”, “interessantes” ou “essenciais”, 60% evidenciaram que “estimula os alunos a estudar de forma descontraída e interessante” e 58% consideraram que “integra o grupo acadêmico, criando cumplicidade e socialização”.

Apesar de ter sido criado inicialmente para o ensino de Derivadas e já ter sido utilizado com esse propósito por várias Instituições em 7 estados brasileiros, atualmente o RDD é utilizado também

para outros contextos como nos ensinamentos fundamental e médio e em ações sociais como, por exemplo, em uma Casa de apoio a crianças com câncer na cidade do Gama/DF.

O Summaê (que significa “Somadas com chapéu”) foi desenvolvido em 2011 e é uma atividade que propicia uma interação muito grande entre professores e estudantes mediada pela tecnologia em que todos permanecem de chapéu para ajudar a criar um ambiente mais lúdico e integrativo. Nessa atividade, vídeos criativos desenvolvidos pelos estudantes contêm problemas a serem resolvidos e são selecionados previamente pelo professor. No dia dessa atividade gamificada, os estudantes resolvem os problemas apresentados nos vídeos e um dos membros de uma mesa de professores apresenta uma chave de solução em que são discutidas possibilidades para abordagem do problema e os critérios para correção. Além de ser uma atividade lúdica em um ambiente bem singular, um dos aspectos mais elogiados pelos estudantes é a oportunidade de aprenderem com vários professores com estilos de ensinamentos diferentes. O Summaê é um dos métodos mais simples de ser replicado, pois independe do estilo do professor e das características da matéria a ser estudada, já tendo sido realizado por 9 vezes na disciplina de “Cálculo 1” (FGA/UnB), 3 vezes em “Introdução à Administração” (ADM/UnB), 6 vezes em “ATV 3 - do átomo à vida” (FCE/UnB), uma vez em “Prática de Fisioterapia Baseada em Problemas” (FCE/UnB), uma vez em “Tópicos especiais em Design e Arte Tecnologia” (do Mestrado em Design e no Doutorado em Arte Tecnologia/UnB) e uma vez em “Cálculo 1” (FACENS – Faculdade de Engenharia de Sorocaba).

Outra experiência, desenvolvida em 2013, foi o Método dos Trezentos que consiste em promover ao máximo a colaboração entre os estudantes, despertando o olhar para as dificuldades de aprendizagem do outro. Para que essa colaboração seja estimulada, são formados grupos de estudo da seguinte forma: os estudantes realizam uma avaliação individual e, com base no resultado dessa avaliação, os grupos são formados pelo professor e contêm, obrigatoriamente, alguns estudantes que tiveram bom rendimento e outros com baixo rendimento. Os estudantes que tiveram um mal rendimento inicial, podem fazer uma nova avaliação do conteúdo desde que cumpram algumas metas: reuniões presenciais com o grupo e resolução de exercícios. Os estudantes que tiveram um bom rendimento inicial não podem refazer a avaliação, mas melhoram suas notas iniciais de acordo com a melhora dos estudantes com baixo rendimento inicial e o nível de ajuda oferecido ao grupo.

Um dos principais resultados foi a melhora na aprovação na disciplina de Cálculo 1 de 50 para 85% e, com um adendo na Metodologia, foi possível aumentar para 95%. Nessa modificação, um grupo de alunos veteranos dão um apoio maior aos estudantes com pior rendimento logo após a primeira prova dos Trezentos. Além disso, foi feita uma pesquisa com relação ao nível de ansiedade e nervosismo e constatou-se que cerca de 90% dos estudantes se consideravam mais tranquilos nas provas. Entretanto, o melhor resultado foi o de despertar o interesse do estudante para as dificuldades de aprendizagem do colega, um sentimento de colaboração e de integração que foi analisado por meio de uma pesquisa qualitativa com depoimentos como este: “Foi excelente. Um exemplo de vida. Uma experiência pessoal riquíssima. Um prazer enorme. Foi como reaprender a aprender. Uma dívida de gratidão”.

Atualmente, essa metodologia está sendo implantada em 15 disciplinas da UnB e de outras IES, em diferentes contextos. Um dos resultados sobre o potencial de replicação do método que pode ser mencionado é o caso da Faculdade de Engenharia de Sorocaba que utilizou o método dos Trezentos em 9 turmas de Cálculo 1 e teve como resultado uma melhora de 87% no rendimento dos alunos ajudados.

## Referências

- [1] DOCHY, F.; SEGERS, M.; VAN DEN BOSSCHE, P.; GIJBELS, D. *Effects of Problem-Based Learning: A Meta-Analysis. Learning and Instruction, v. 13, p. 533–568, 2003.*

- [2] RIBEIRO, L. R. C. *Aprendizagem baseada em problemas: uma experiência no ensino superior*. São Carlos: Edufscar, 2008.
- [3] BERGAMANN J.; SAMS, A. *Flip Your Classroom: reach every student in every class every day*. Eugene, Oregon: ISTE, 2012.
- [4] FRAGELLI, R. R. *Jogos Educativos como Estratégia para Aprendizagem Ativa em Cálculo: O Par ou Ímpar Universitário e a Apneia das Funções Trigonométricas Inversas*. Revista do IST, v. 1, p. 60-70, 2012.
- [5] BITTAR, M.; OLIVERIA, A.B; SANTOS, R.M.; BURIGATO, S.M.M.S. *A Evasão em um curso de Matemática em 30 anos*. EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, vol. 3, número 1, 2012.
- [6] SILVA FILHO, R. L. L.; MOTEJUNAS, P. R.; HIPÓLITO, O.; LOBO, M. B DE C. M. *A Evasão no Ensino Superior Brasileiro*. Cadernos de Pesquisa, v.37, n. 132, 2007.
- [7] KARINO, C.A.; LAROS, J.A. *Ansiedade em situações de prova: evidências de validade de duas escalas*. Psico-USF, v. 19, p. 23-36, 2014.
- [8] FRAGELLI, R. R. *Trezentos: Aprendizagem ativa e colaborativa como uma alternativa ao problema da ansiedade em provas*. Revista Eletrônica Gestão & Saúde, v. 6, p. 860-872, 2015.
- [9] FRAGELLI, R. R., ROCHA, A. F., MENDES, F. M., RÍSPOLI, V. C. *Summaê: Um Método Diferente para o Ensino de Integrais*. In: *International Symposium on Project Approaches in Engineering Education: Organizing and Managing Project Based Learning, 2012, São Paulo. Proceedings of the PAEE'2012, v. 1. p. 109-114, 2012.*
- [10] AUSUBEL, D. P. *Educational Psychology: a cognitive view*. Nova York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- [11] ROGERS, C. R. *Liberdade para aprender*. 2a. ed. Belo Horizonte (MG): Interlivros; 1973.
- [12] FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia*. São Paulo: Paz e Terra. 1996.

## **A nova fase do projeto Klein (ICMI-IMU) e oficina de artigos Klein para professores.**

**Yuriko Yamamoto Baldin** (yuriko@dm.ufscar.br)  
Universidade Federal de São Carlos

**Resumo.** A proposta original do The Klein Project da ICMI-IMU foi desenvolvida no período de 2009 a 2013, e teve impactos em projetos educacionais inéditos em diferentes países do mundo, como foi o caso do Projeto Klein de Matemática em Português, de iniciativa da comunidade acadêmica do Brasil e Portugal. Em 2015 a comissão Design Team do The Klein Project iniciou a nova fase do projeto, tendo em vista os desdobramentos que o projeto original teve. Em particular, o desenvolvimento que o projeto teve no Brasil mereceu atenção do Design Team que incluiu aspectos relevantes desse projeto na segunda fase do The Klein Project. Tal resultado não é ainda de conhecimento geral do público alvo do projeto no Brasil, e divulga-lo é um dos objetivos deste minicurso. O minicurso será realizado em duas etapas distintas: na primeira parte será explicado os aspectos mais

importantes que caracterizaram o projeto original inicial [1, 2, 3], seguido de um breve histórico do desenvolvimento e contribuições do “Projeto Klein de Matemática em Português: colaboração Brasil-Portugal, 2009-2014”, e o significado dos artigos Klein, segundo [3] e sob perspectivas da didática da matemática [4] como percorrido em [4]. A trajetória do projeto em português que continua, a partir de 2015, na segunda fase do The Klein Project, será apresentada, assim também as perspectivas de disseminação desta nova fase para outros países de língua portuguesa, por meio do recém estabelecido Espaço Matemático em Língua Portuguesa - EMeLP, associação afiliada a ICMI-IMU. Na sequência, o curso irá abordar alguns exemplos de artigos Klein, disponibilizados em [6] e no site mantido pela SBM [9], para mostrar como poderemos explorar as potencialidades didáticas dos mesmos na formação continuada dos professores e as possibilidades de trabalhá-los dentro da prática de ensino da matemática. A segunda parte do curso será constituída por atividades práticas por participantes na forma de oficina orientada em que alguns artigos Klein selecionados serão estudados para produzir planos de uma intervenção didática. Nelas se almeja estabelecer conexões entre os assuntos de matemática dos artigos e tópicos da matemática escolar, e identificar temas secundários que possam complementar e enriquecer conteúdos curriculares.

## Referências

- [1] BALDIN, YY (2015). *Apresentação de slides da palestra “Sessão Plenária: The Klein Project”, I Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa- CiEMeLP, Universidade de Coimbra.*
- [2] BARTON, B (2008). *The Klein Project, a Living & Connected View of Mathematics for Teachers, an IMU-ICMI collaboration: a short description, disponível em [http://mathstore.gla.ac.uk/headocs/doc.php?doc=84Barton\\_B.pdf](http://mathstore.gla.ac.uk/headocs/doc.php?doc=84Barton_B.pdf).*
- [3] BARTON, B. (2015). *Slide presentation: The Klein Project: a Workshop, EARCOME7, Philippines.*
- [4] RALHA, E, SILVA, J, CASTANHEIRA, J, NÁPOLES, S, (2009). *Didactics of Mathematics as a Mathematical Discipline, A Portuguese Reflection upon a Kleinian Challenge, disponível em <http://c2.glocos.org/index.php/dm-md/dm-md2009>.*
- [5] BALDIN, YY (2013). *O Projeto Klein de Matemática em Português: uma ponte entre a matemática avançada e a escola, Cuadernos de Investigación y Formación de Educación Matemática, Año 8, Número 11, pp 409-417, Costa Rica.*
- [6] <http://blog.kleinproject.org>.
- [7] <http://klein.sbm.org.br>.

## Trabalhos submetidos

### Aplicação do Lema de Euclides para o cálculo de Máximo Divisor Comum no Ensino Fundamental

Adriane Martins Arruda (drika.matematica@gmail.com)

Universidade de Brasília

**Resumo.** Após lecionar durante seis anos para turmas do Ensino Fundamental, percebi a dificuldade dos alunos em calcular o máximo divisor comum entre dois números naturais. Ocorre pela dificuldade que os alunos têm em compreender o algoritmo da divisão e conseqüentemente não conseguem decompor os números em fatores primos, o que faz com que eles não compreendam o método para cálculo do máximo divisor comum adotado na maioria dos livros didáticos. Confesso que diante dessa realidade, por várias vezes, deixei esse assunto de lado e percebi que posteriormente fez falta para a compreensão de outros conteúdos. Portanto, minha proposta é mostrar para os alunos como se calcula o máximo divisor comum através de diversos métodos, inclusive através do Lema de Euclides, e analisar a receptividade ao método. Portanto, o objetivo deste trabalho é introduzir um método diferente para o cálculo do máximo divisor comum em turmas de Ensino Fundamental. Para atingi-lo, pretendo estudar e escrever sobre a divisão nos inteiros, a divisibilidade e as propriedades envolvidas, o teorema da divisão euclidiana, o máximo divisor comum, o lema de Euclides e o algoritmo de Euclides; elaborar os testes diagnósticos e as aulas a serem ministradas aos alunos do Ensino Fundamental; ministrar aulas expositivas para turmas do 7º ano do CEF 405 do Recanto das Emas e analisar os resultados obtidos.

### Referências

- [1] ALENCAR FILHO, EDGAR DE, *Teoria elementar dos números*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2ª ed. (2005).
- [2] GONÇALVES, ADILSON, *Introdução à álgebra*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (1979).
- [3] HEFEZ, ABRAMO, *Elementos de Aritmética*, São Paulo: Nobel, 2ª ed. (1985).
- [4] SALAHODDIN SHOKRANIAN, MARCUS SOARES, HEMAR GODINHO, *Teoria de números*, Editora Universidade de Brasília, 2ª ed. (1999).
- [5] SANTOS, JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA, *Introdução à Teoria de Números*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq (1998).

### O uso do computador para realização de atividades extra-classe

Aldo Alves Ferreira (ferreira.aldo@gmail.com)

Universidade de Brasília

**Resumo.** O uso de recurso computacional para o desenvolvimento de atividades escolares está, cada vez mais, presente no cotidiano do aluno. A educação deve acompanhar o desenvolvimento da

tecnologia para oferecer aos alunos informações atuais e de qualidade. Para esse trabalho, foi criado um portal na internet, [www.atividadediaria.com.br](http://www.atividadediaria.com.br), o qual contemplará exclusivamente atividades extraclasse do educando. É importante também que os responsáveis pelos alunos participem ativamente da vida escolar deles. Dessa forma, ao final de cada tema, eles terão um assunto para estudar, planejar e desenvolver as ideias em conjunto. Por último, ainda utilizando o mesmo portal, o aluno, agora individualmente, fará uma pesquisa sobre o tema proposto. Pretende-se que o educando utilize o recurso computacional para realizar tarefas cotidianas, ter acompanhamento escolar do responsável e aprender a pesquisar sobre os temas estudados.

**Palavras-chave:** aluno; estudo; computador; tarefas.

## Referências

- [1] BORBA, MARCELO CARVALHO E PENTEADO, MIRIAM GODOY. INFORMÁTICA E EDUCAÇÃO, *Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.*,
- [2] LIBÂNEO, JOSÉ CARLOS. DIDÁTICA, *São Paulo, Cortez, 1994. 2ª edição.*,
- [3] MORAN, JOSÉ MANUEL. ENSINO E APRENDIZAGEM INOVADORES COM TECNOLOGIAS., *São Paulo, Cortez, 1994. 2ª edição.*, Acesso em 5 maio 2014.
- [4] OLIVERIA, CELINA COUTO DE; COSTA, JOSÉ WILSON DA; MOREIRA, MERCIA. AMBIENTES INFORMATIZADOS, *Papirus, 2001*,
- [5] PERRENOUD, PHILIPPE. CONSTRUIR COMPETÊNCIAS DESDE A ESCOLA., *Porto Alegre: Art Med. 1999*,
- [6] PERRENOUD, PHILIPPE. NOVAS COMPETÊNCIAS PARA ENSINAR., *Porto Alegre: Art Med. 2000.*,
- [7] VALENTE, JOSÉ ARMANDO. DIFERENTES USOS DO COMPUTADOR NA EDUCAÇÃO. COMPUTADORES E CONHECIMENTO: REPENSANDO A EDUCAÇÃO, *Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1998.*

## O “Projeto Matemática Todo Dia”: relato de uma experiência exitosa em uma escola pública

Alessandra Lisboa da Silva ([lisboa.ale@gmail.com](mailto:lisboa.ale@gmail.com))  
Universidade de Brasília

**Resumo.** Este relato de experiência apresenta o projeto “Matemática Todo Dia” - MTD, desenvolvido na escola pública Centro de Ensino Médio 09 de Ceilândia – CEM 09. A proposta pedagógica do MTD é fundamentada em preceitos da aprendizagem significativa, lúdica e colaborativa. Um dos objetivos do projeto “Matemática Todo Dia” (MTD) é preparar os alunos para o projeto Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa), que tem como finalidade estimular o estudo da Matemática e revelar talentos na área, contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica e promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento. O projeto Matemática Todo Dia é desenvolvido na escola ceilandense desde o ano de 2007 e apresenta resultados surpreendentes na Olimpíada Brasileira

de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), nos vestibulares das universidades públicas, nos vestibulares das universidades e faculdades particulares cadastradas no Programa Universidade Para Todos (Prouni), programa do Ministério da Educação (MEC) e em diversas olimpíadas científicas e do conhecimento de âmbito nacional e internacional. Dentre os alunos que já concluíram o Ensino Médio e que participaram das edições de 2013 e 2014, 75% (setenta e cinco) foram aprovados em universidades públicas. Cabe relatar outras importantes conquistas, dentre elas, a escola contabiliza 4 premiações de “Escola Campeã da OBMEP”; 145 alunos foram premiados na OBMEP e os professores do MTD acumulam premiações e são reconhecidos nacionalmente pelo mérito alcançado dos seus estudantes, foram dois dentre os dez professores do Brasil homenageados pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa) na cerimônia de premiação nacional realizada no Theatro Municipal do Rio de Janeiro para comemorar os dez anos de OBMEP. As conquistas foram diversas, tanto referentes às premiações olímpicas, como à assimilação de novos conhecimentos. Em todas as atividades desenvolvidas em grupo foi verificada a interação como um fator determinante para a assimilação do conhecimento. A estratégia de trabalhar com alunos de séries diferentes em um mesmo grupo mostrou que a socialização do conhecimento potencializou o aprendizado. Observa-se que os estudantes que participaram do projeto MTD, também participaram de diversas olimpíadas, mostrando que a motivação e vontade de estudar perpassaram as fronteiras da Matemática e se estenderam para as outras áreas do conhecimento.

Trabalho em colaboração com *Marcos Paulo Barbosa*.

## Referências

- [1] ALVES, E. M. S., *A ludicidade e o ensino da matemática.*, Campinas: Papyrus, (2001).
- [2] AUSUBEL, D. P., *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva.*, Trad.: Lígia Teopisto. Lisboa: Paralelo, (Edição original 2000), (2003).
- [3] AUSUBEL, D. P.; NOVAK J. D.; HANESIAN, H., *Psicologia educacional.*, Rio de Janeiro: Interamericana, (1978).
- [4] BARBOSA, M. P., *Projeto Matemática Todo Dia: estudo de caso em uma escola pública do Distrito Federal.*, Dissertação (Mestrado), Faculdade de Educação, UnB, Brasília, (2014).
- [5] BRENELLI, R. P., *O jogo como espaço para pensar: a construção de noções lógicas e aritmética.*, Campinas: Papyrus, (1996).
- [6] DA SILVA, A. L., *Análise da estratégia pedagógica de pequenos grupos colaborativos online de uma disciplina do curso de pedagogia a distância da Universidade de Brasília.*, Dissertação (Mestrado), Faculdade de Educação, UnB, Brasília, (2013).
- [7] DA SILVA, A. L.; BARBOSA, M. P., *Facebook: diálogos na rede social estimulando a participação de estudantes nas olimpíadas científicas.*, Lisboa: III Colóquio Luso-Brasileiro de Educação a Distância e Elearning. Disponível em: < [http : //lead.uab.pt/OCS/index.php/CLB/club/paper/view/330](http://lead.uab.pt/OCS/index.php/CLB/club/paper/view/330) >, (2013).
- [8] KAMII, C., *A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos.*, 39. ed. Campinas: Papyrus, (Edição original 1982), (2011).
- [9] KISHIMOTO, T. M., *O jogo e a educação infantil.*, São Paulo: Pioneira, (1994).
- [10] ----- (ORG.), *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.*, São Paulo: Cortez, (2009).

- [11] MOURA, M. O. DE. A SÉRIA BUSCA NO JOGO: DO LÚDICO NA MATEMÁTICA. IN: KISHIMOTO, T. M. (ORG.), *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.*, São Paulo: Cortez, p. 73-87. (2009).
- [12] SANTOS, S. M. P. DOS; CRUZ, D. R. M., *O lúdico na formação do educador.*, In: SANTOS, S. M. P. dos (Org.). *O lúdico na formação do educador.* Petrópolis: Vozes, p. 11-18. (1997).

## Práxis em alfabetização matemática

Ana Maria Porto (anaporto40@hotmail.com)

Universidade Federal do Oeste da Bahia

**Resumo.** Apresentam-se resultados parciais de uma pesquisa-ação que se constituiu a partir de algumas inquietações: os resultados das avaliações em larga escala sobre a alfabetização em matemática; o desejo de melhor compreender a complexidade do processo de alfabetização; a crença no potencial de aprendizagem da criança; as evidências de que o professor produz conhecimentos sobre o ensinar quando participa de espaços de reflexão e problematização de sua prática. Objetivou-se analisar um processo de construção de novas práxis pedagógicas pelas professoras alfabetizadoras quando elas participam, no contexto da escola, de estudos, reflexões, problematizações e discussões sobre alfabetização em matemática e, investigar como essas novas práxis se integram à formação continuada do professor alfabetizador. Adotou-se como referenciais teóricos e metodológicos os estudos em Educação Matemática cujos temas referiram-se: a práxis pedagógica em alfabetização matemática, a formação do professor, a pesquisa-ação como possibilidade de intervenção-transformação-formação. Durante um ano permaneceu-se em uma escola pública de uma rede municipal de ensino que trabalhava com 09 turmas do Ciclo de Alfabetização (2º e 3º ano) e, numa dinâmica relação entre teoria e prática, as alfabetizadoras foram convidadas a refletir sobre suas práticas, problematizá-las, colocá-las como objeto de análise e a produzir conhecimentos sobre alfabetização matemática. Essa dinâmica contribuiu na elaboração e no desenvolvimento de sequências de ensino que foram promotoras de aprendizagens em matemática. Os conhecimentos produzidos alimentaram a prática e a transformaram, num movimento de ação-reflexão-transformação e num contínuo processo de formação.

Trabalho em colaboração com *Cristiano Alberto Muniz*.

## Referências

- [1] BERTONI, NILZA EIGENHEER, *Educação e linguagem matemática II: Numerização*, Brasília: Universidade de Brasília, (2007).
- [2] BORBA, MARCELO DE CARVALHO; ARAÚJO, JUSSARA DE LOIOLA (ORGS), *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*, Belo Horizonte- MG: Autêntica, (2004).
- [3] BROCARD, JOANA; SERRAZINA, LURDES; ROCHA, ISABEL, *O Sentido do Número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*, Portugal: Escolar Editora, (2008).
- [4] CHARLOT, BERNARD, *Relação com o saber, formação de professores e globalização: questões para a educação hoje*, Porto Alegre: Artmed, (2005).

- [5] CURI, EDDA, *A matemática e os professores dos anos iniciais*, São Paulo: Musa Editora, (2005).
- [6] CURI, EDDA; PIRES, CÉLIA MARIA CAROLINO. PESQUISAS SOBRE A FORMAÇÃO DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA POR GRUPOS DE PESQUISA DE INSTITUIÇÕES PAULISTANAS, *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 10, n. 1, pp. 151-189, (2008).

## Órbitas dos planetas: aplicação de resolução de problema para a aprendizagem das cônicas numa turma de 1o. ano do ensino médio de uma escola de Taguatinga

Andréia Júlio De Oliveira Rocha (andreiajuliomatema@gmail.com)  
Universidade Estácio Brasília

**Resumo** : A pesquisa teve por objetivo investigar quais as possibilidades do ensino de cônicas através de um estudo sobre as órbitas dos planetas, com aplicação de resolução de problemas numa turma de 1º ano do Ensino Médio de uma escola particular de Taguatinga. A pesquisa é qualitativa, se deu a partir de um questionário para alunos do 1º ano do Ensino Médio. O método utilizado é hipotético, isso porque se espera que por meio da atividade sugerida os alunos resolvam os problemas sobre cônicas através da resolução de problemas, pois eles poderiam ou não chegar a solução das situações problemas apresentadas. Como instrumento de pesquisa foi utilizado um questionário contendo duas questões sobre cônica, que foram resolvidas com a técnica de resolução de problemas juntamente com os conhecimentos dos alunos. E logo após a aplicação desse questionário foi aplicado outro questionário, no intuito de avaliar, coletar dados e informações, e por meio desse investigar as dificuldades no ensino aprendizagem da resolução de problemas de cônicas. Para obtenção dos resultados, foram analisados em cada questão os seguintes itens: leitura e interpretação, estratégia para resolução do problema, executar o plano e retrospecto-resultado final. Os resultados obtidos comprovaram que no momento em que os alunos compreenderam, eles resolveram as situações problemas apresentadas, por meio de várias estratégias possíveis, obtendo um resultado positivo em relação às questões. A pesquisa de forma geral mostra que é possível relacionar as órbitas dos planetas e as cônicas. Assim os alunos se mostraram dispostos e interessados para com o conteúdo, o que acreditamos ser um indício de que eles se interessam por aulas mais interdisciplinares. A resolução de problema fez com que parte dos alunos se familiarizasse com os conteúdos. Com essa pesquisa, verificou-se que a resolução de problemas é de suma importância para o ensino de matemática, O estudo através das órbitas dos planetas foi importante, pois os alunos se interessaram pelo conteúdo e isso se deu com um melhor entendimento das cônicas.

Trabalho em colaboração com *Júlio César Borges de Souza*.

## Referências

- [1] BRASIL. *Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- [2] HORVATH, J.E. , *o ABDC da Astronomia e Astrofísica*. J.E. Horvath.- São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

- [3] KLEIN, ANA MARIA; GIL, MIRANDA CUNHA SOARES. *O romance das equações algébricas*. Curitiba: IESDE Brasil S A , 2012.
- [4] POLYA, G., *A arte de resolver problemas*. . Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- [5] STEPHEN, K. *a resolução de problemas na matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997.
- [6] VENTURI, JACIR J. , *Cônicas e Quadráticas*. 5ª Ed. / Curitiba: 1949.

## Desenvolvimento de conceitos acerca dos números negativos através do lúdico: análise de uma experiência em sala de aula

Artur Vitor Soares Lima (arturvitor@gmail.com)  
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal  
Universidade de Brasília

**Resumo** : A partir da experiência docente do autor com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, foi possível observar que uma das maiores dificuldades de aprendizagem dos alunos está na construção do conceito de número negativo, bem como operá-los corretamente. Desta forma, torna-se necessária a busca por métodos diferenciados de ensino. Uma dessas possibilidades é a utilização de jogos e desafios para o ensino de números negativos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) viabilizam esta possibilidade, justificando, entre outras coisas, que os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas [1]. Além disso, os PCN expõem que as atividades de jogos permitem ao professor analisar e avaliar os seguintes aspectos:

- compreensão: facilidade para entender o processo do jogo assim como o autocontrole e o respeito a si próprio;
- facilidade: possibilidade de construir uma estratégia vencedora;
- possibilidade de descrição: capacidade de comunicar o procedimento seguido e da maneira de atuar;
- estratégia utilizada: capacidade de comparar com as previsões ou hipóteses.[1]

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é desenvolver e implementar um projeto de ensino de conceitos acerca dos números negativos através de jogos em uma escola da Rede Pública de Ensino do Distrito Federal, bem como avaliar e refletir sobre sua efetividade no que concerne à aprendizagem dos alunos envolvidos.

## Referências

- [1] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Volume 3, pgs. 46-47 (1998).
- [2] A. SPADA, *A construção de jogos de regras na formação dos professores de Matemática*. Dissertação, Universidade de Brasília (2009).

- [3] D. FIORENTINI E S. LORENZATO, *Investigação em Educação Matemática - percursos teóricos e metodológicos*. Coleção formação de professores, Autores Associados, 3ª edição revista (2009).

## **Análise de qualidade do ensino nas escolas públicas do Distrito Federal utilizando Prova Brasil: uma aplicação de análise envoltória de dados**

**Augusto Hung** (augustohung@gmail.com)

Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Estatística

**Resumo.** As escolas públicas do Distrito Federal possuem o mesmo sistema, os alunos possuem o mesmo tipo de acesso, os professores possuem a mesma carreira. Porém os resultados da Prova Brasil são diferentes. Com isso, foram divididos em dois grandes grupos que são ensino fundamental I e II porque estão em anos diferentes que é 5º ano e 9º ano, sem esquecer que cada um desses anos faz provas diferentes. Desse modo, esse grupo foi dividido em dois conglomerados que são escolas que estão localizadas em regiões mais ricas com mais infraestrutura e em regiões mais pobres com menos infraestrutura. Em seguida aplicou-se o modelo DEA (Análise Envoltória de Dados) nestes quatro grupos para descobrir as eficientes. As escolas ineficientes serão projetadas para o patamar de eficiência.

## **Referências**

- [1] BELLONI, J. A. Uma metodologia de avaliação da eficiência produtiva de universidades federais brasileiras. 2000. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.
- [2] RHODES, E.L. Data Envelopment Analysis and approaches for measuring the efficiency of decision making units with an application to program follow-through in U.S. education. Ph.D. Dissertation, Carnegie Mellon University, 1978.
- [3] CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2 (6) :429-444, 1978.
- [4] BANKER, R.D.; CHARNES A.; COOPER, W.W. Some models for estimation technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30 (9):1078-1092, 1984.
- [5] CHARNES, A., COOPER, W.W. Programming with linear fractional functionals. *Naval Res. Logist. Quart.*, 9, 181-185, 1962.
- [6] ÄRE, R.; GROSSKOPF, S.; LOVELL, C.A.K. *Production frontiers*. New York, Cambridge University, 1994.
- [7] <http://www.inep.gov.br>
- [8] <http://dados.gov.br/dataset/taxas-de-rendimento-escolar-na-educacao-basica>
- [9] MIETO NETO, F. , SANTOS, L. C. B. Avaliação da Eficiência Produtiva dos Departamentos da UnB: Uma Aplicação de DEA, monografia do Departamento de Estatística 2002.
- [10] NORMAN, M. E STOKER, B. *Data Envelopment Analysis: The Assesment of Performance*. John Wiley & Sons, 1991.

## A construção do número na educação inclusiva: articulações e possibilidades

Carine Almeida Silva Noletto (noletocarine@gmail.com)

Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal

Faculdade de Educação

Universidade de Brasília

**Resumo.** Pensar a relação aprendizagem matemática e deficiência intelectual é uma necessidade que se faz presente tanto para professores atuantes nas escolas, quanto para os pesquisadores da educação. Se apresenta aqui uma pesquisa a ser realizada no ano de 2016. A proposta tem a intenção de contribuir com a Educação Matemática, contribuir com a Educação Inclusiva, proporcionando um espaço de debate, estudo e avanços com os resultados que surgirem com a realização da pesquisa. O objeto de pesquisa está definido como: Processos de construção do conceito de número pelo estudante com Deficiência Intelectual na alfabetização. O sujeito de pesquisa é um estudante com o diagnóstico de Deficiência Intelectual, matriculado entre o primeiro e o terceiro ano do Ensino Fundamental. As bases teóricas fundamentam-se principalmente em Brousseau (2008), González-Rey (2010), Piaget (2014), Vergnaud (2014), Vigotski (2003). A pesquisa se desenvolverá tratando explicitamente de aprendizagem e de processos mentais de construção de significados e sentidos na alfabetização matemática e mais especificamente na construção do conceito de número, a perspectiva histórico-cultural irá pautar todas as ações da pesquisa, e metodologicamente se caracteriza como um estudo de caso em que será utilizada a Epistemologia Qualitativa de González-Rey (2010).

Trabalho em colaboração com *Cristiano Alberto Muniz*.

## Referências

- [1] N. BROUSSEAU, GUY, *Introdução os estudos das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino.*, São Paulo: Editora Ática, (2008).
- [2] GONZÁLEZ-REY, *Pesquisa qualitativa e subjetividade: os processos de construção da informação.*, São Paulo: Cengage Learning, (2010).
- [3] PIAGET, JEAN; SZMINSKA, ALINA, *A Gênese do número na criança.*, Rio de Janeiro: Zahar, (1981).
- [4] VERGNAUD, GÉRARD, *A criança, a matemática e a realidade.*, Curitiba: Ed. Da UFPR, (2014).
- [5] VIGOTSKI, LEV S., *A formação social da mente.*, São Paulo: Martins Fontes, (2003).

## Flexibilidade de cálculo mental da multiplicação e divisão numa perspectiva do sentido de número

Cília Cardoso Rodrigues da Silva (ciliasilva@campus.ul.pt)

Instituto de educação da Universidade de Lisboa

**Resumo.** É um estudo em andamento no curso de doutoramento, no Instituto de Educação, na área de Didática da Matemática, da Universidade de Lisboa, em Portugal. Investigo a flexibilidade

de cálculo mental nas operações de multiplicação e divisão. Apresento e discuto os registros de dois alunos, a partir dos dados recolhidos no período de julho a dezembro de 2015, referente ao 1º ciclo da investigação, numa Escola Pública do Distrito Federal, em Taguatinga, na turma do 4º ano, composta por 20 alunos. Foram aplicadas 16 tarefas, sendo 4 tarefas diagnósticas, cujo objetivo foi verificar os conceitos compreendidos pelos alunos no que se refere às operações de multiplicação e divisão e 12 tarefas com o intuito de compreender a evolução da flexibilidade de cálculo mental da multiplicação e divisão numa perspectiva do sentido de número. Todos os alunos foram desafiados a resolverem todas as tarefas, elas eram apresentadas pela professora regente da turma, com a minha colaboração, os alunos as resolviam individualmente e/ou em pares e depois socializavam suas soluções no quadro para toda a turma. A metodologia é o Design Research, Gravemeijer e Cobb (2006) apontam que o objetivo do design research é desenvolver uma teoria acerca do processo de aprendizagem dos estudantes sobre um determinado tópico matemático e do que suporta esse processo. Threlfall (2009) diz que a flexibilidade de cálculo mental não pode ser ensinada como habilidade estratégica para escolher o mais apropriado e eficiente método de cálculo. Ela emerge inconscientemente a partir da conexão entre o que o estudante observa nos números das tarefas e o que ele conhece sobre números e as relações entre eles. Ele ainda afirma que para resolver um problema utilizando cálculo mental os estudantes podem: (i) lembrar ou conhecer um fato numérico; (ii) usar um simples procedimento de contagem; (iii) fazer uma representação mental de um método com “papel e lápis” e (iv) construir uma sequência de transformações dos números do problema para chegar à solução. Definimos cálculo mental a partir das três características propostas por Buys (2001) i) opera-se sobre os números e não sobre os dígitos; ii) usam-se relações numéricas e propriedades das operações e iii) embora se calcule ‘de cabeça’, é possível recorrer a registros em papel. Este autor ainda propõe que o cálculo mental se apóia em três formas básicas: cálculo em linha, cálculo recorrendo à decomposição decimal e cálculo mental usando estratégias variadas. Recorremos a Gray & Tall (1994) com a ideia de procepto que se traduz no amálgama de três componentes: o processo que gera o objeto matemático e um símbolo que é usado para representar qualquer processo ou objeto, ou seja, o procepto é a liga do conceito e processo representado pelo mesmo símbolo. O procepto 6 inclui o processo de contagem 6 e uma coleção de outras representações tais como  $3 + 3$ ;  $4 + 2$ ;  $2 + 4$ ;  $2 \times 3$ ;  $8 - 2$  etc. McIntosh et al (1992) definem sentido de número como conhecimento geral que uma pessoa tem acerca de números e operações com a capacidade e inclinação para usar esse conhecimento de forma flexível para construir raciocínios matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações. Em conclusão um tanto precoce, no 1º ciclo desta investigação percebe-se que a evolução da flexibilidade de cálculo mental da multiplicação e divisão, além destes aspectos abordados pelos referidos autores, incluímos a organização do espaço do ambiente da sala de aula, o papel do professor (planejamento e avaliação), a seleção de tarefas (números, contextos, significados das operações, operações).

## Referências

- [1] BUYS, K., *Mental arithmetic.*, In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Rotterdam: Sense Publishers,(2001).
- [2] GRAVEMEIJER, K., & COBB, P., *Design research from a learning design perspective.*, In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Edits.), *Educational design research* (pp. 45-85). London: Routledge,(2006).

# A resolução de problemas de princípio multiplicativo com o auxílio de algoritmos da multiplicação.

Cleudiana dos Santos Feitoza Zonzini (difeitoza@gmail.com)

Universidade de Brasília

**Resumo.** O 6o ano do ensino fundamental é um marco para o aluno, pois modifica-se toda a vida escolar. Antes tinha uma professora para todas as disciplinas, agora muda o ritmo em que ele estava acostumado. Uma verdadeira adaptação, e nós professores temos a função de ajudar nesta nova etapa. É neste período que a matemática começa a ser a disciplina que aterroriza os alunos. Existem várias tendências que dizem que não se deve decorar a tabuada, que o aluno deve entender o processo da multiplicação, que vem da adição de parcelas iguais. Porém quando aprofundamos essa técnica de multiplicação com mais de dois algarismos, percebemos uma dificuldade, após fazer a conta erros pequenos são cometidos. Os algoritmos podem facilitar o entendimento da multiplicação, auxiliar nos resultados, além de ser um método rápido e prático. Métodos alternativos auxiliam na rapidez da conta, o que facilita para ter mais tempo em interpretar as questões e responder o maior número de exercícios, melhorando o empenho dos alunos. O objetivo geral deste trabalho é compreender como os alunos se comportam perante problemas multiplicativos, após conhecerem os algoritmos da multiplicação. Os objetivos específicos que se espera alcançar com esta pesquisa são: mostrar mais de uma maneira de resolver problemas de princípio multiplicativo; apresentar os algoritmos da multiplicação; contextualizar historicamente os algoritmos; efetuar cálculos utilizando os algoritmos. Será feito um estudo de campo com traços qualitativos e quantitativos, no Centro de Ensino Fundamental Doutora Zilda Arns- Itapoã, com alunos do 6o ano do Ensino Fundamental. Será feita uma aula expositiva sobre o princípio multiplicativo com exemplos, utilizando jogos e problemas do cotidiano. Após os conteúdos serem explorados, será feita uma sondagem com quatro problemas de princípio multiplicativo e duas contas de multiplicação com mais de dois dígitos, nas quais serão observadas as respostas, para saber o nível da turma em relação a multiplicação. No segundo momento, os alunos serão levados para a sala de Vídeo, onde será exposto os algoritmos (egípcios, russos, chineses, gregos e árabes), contextualizando a Matemática com História, Geografia e Artes. Os alunos farão atividades de treinamento, para ter uma comparação de resposta. Por fim, analisaremos os resultados e faremos observações que avaliem o método e sua aplicação.

## Referências

- [1] D'AMBROSIO, U., *História da Matemática e Educação.*, História e Educação Matemática. 1ª ed. Campinas, SP: Papyrus, p.7-17., (1996).
- [2] SOARES, FILOMENA BAPTISTA; NUNES, MARIA PAULA SOUSA, *Diferentes formas de multiplicar.*, XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática. Caminha, p. 17-19, abr 2005. (2005).
- [3] BOYER, C. B., *História da Matemática.*, Edgard Blücher, tradução: Elza F. Gomide, (1974).
- [4] MORGADO, AUGUSTO CÉSAR; CARVALHO, PAULO CEZAR PINTO., *Matemática Discreta.*, SBM (Coleção PROFMAT), (2013).

## Os números primos como instrumento de estímulo à curiosidade dos estudantes.

Deleir Inácio de Assis (manollodf@hotmail.com)  
Universidade de Brasília

**Resumo.** Esse Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivo explorar o estímulo à curiosidade dos alunos, utilizando principalmente problemas relacionados aos números primos ainda sem solução. Para isso, será fornecida uma base sólida de conceitos e teoremas importantes. Desse modo, os seguintes procedimentos serão adotados: breve abordagem histórica, mencionando importantes estudiosos que contribuíram para o desenvolvimento da Teoria dos Números; exposição dos conceitos relevantes para a compreensão do tema; demonstração de teoremas importantes, a fim de consolidação dos pré-requisitos necessários; proposta de atividades envolvendo números primos que possam ser aplicadas aos alunos; apresentação dos problemas que ainda não possuem solução, instigando os alunos a se interessarem mais pela área da pesquisa matemática. A tese desenvolvida se baseia na pesquisa bibliográfica em livros de Teoria dos Números, área da Matemática que abrange os números primos. Os exercícios propostos não serão aplicados aos alunos para efeito desse trabalho, porém, servirão como instrumento a ser utilizado por outros professores de Matemática que estiverem interessados nesse projeto.

## Referências

- [1] MAIER, R.R. , *Teoria dos Números: texto de aula.*, Universidade de Brasília – Departamento de Matemática - IE,(2005).
- [2] HEFEZ A. , *Elementos de Aritmética.* , Coleção Textos Universitários, SBM, (2011).

## Organização do trabalho pedagógico em sala de aula e a influência à criatividade em matemática: uma análise da prática docente no 3o. ano dos anos iniciais

Fabiana Barros de Araújo e Silva (fbasilva@hotmail.com)  
Universidade de Brasília

**Resumo.** A criatividade não é um elemento essencial para a aprendizagem, pois muitas pessoas aprendem independente de serem criativas ou não. Porém, principalmente para os tempos atuais, ela vem tendo um grande valor. Esse tema passou a ser pesquisado há pouco mais de cinquenta anos, só que não se enfatizava uma área específica. No Brasil, ainda há uma escassez quanto a pesquisas relacionadas à criatividade em matemática. O objeto desta pesquisa é a organização do trabalho pedagógico do professor em sala de aula e sua influência à criatividade matemática. Para tanto, tem-se como objetivo geral analisar o trabalho pedagógico do professor e suas influências para o desenvolvimento da criatividade matemática de estudantes do 3º ano. Como referências teóricas, tem-se os seguintes temas: criatividade, criatividade em matemática e a organização do trabalho pedagógico. Este último detalha-se sobre alguns elementos: currículo, processos avaliativos e relação professor aluno. A pesquisa respalda-se nos seguintes autores: Martinez (2002, 2014), Alencar e Fleith (2009), Wechsler (2002, 2011), Gontijo (2007), Valdés (2010), Freitas (2014), Tacca (2014), Sacristan (2000), Villas Boas (2006), entre outros. É uma pesquisa qualitativa e apresenta indícios

da pesquisa etnográfica e interventiva. Terá como cenário uma escola pública do Distrito Federal. O sujeito da pesquisa será um professor de 3º ano.

Trabalho em colaboração com *Cleyton Hércules Gontijo*.

## Referências

- [1] GONTIJO, CLEYTON HÉRCULES, *Criatividade em Matemática: identificação e promoção de talentos criativos.*, Educação. Santa Maria, v.32, p. 481-494, (2007).
- [2] FREITAS, L.C., *Crítica da Organização do Trabalho Pedagógico e da Didática.*, 11º edição, Papirus, (2014).
- [3] MARTINEZ, ALBERTINA, *Revista Linhas Críticas.*, Vol. 8, nº 15 – A criatividade na escola: três direções de trabalho. p. 189 a 206, (2002).
- [4] WECHSLER, SOLANGE MUGLIA, *Revista Linhas Críticas.*, Vol. 8, nº 15 – Criatividade e desempenho escolar: uma síntese necessária. p. 179 a 188, (2002).

## Uma proposta de exame de proficiência em Cálculo Diferencial e Integral.

Fabio Henrique Gomes (fabiofhg@hotmail.com)  
Universidade de Brasília

**Resumo:** O intuito deste trabalho é desenvolver um modelo de exame de proficiência em Cálculo Diferencial e Integral para o Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. No estudo, será discorrido sobre as dificuldades de aprendizagem dos estudantes nas disciplinas de matemática dos anos iniciais da graduação, assim como será apresentar uma breve descrição dos modelos mais usuais da Teoria de Resposta ao Item utilizados em avaliação de larga escala. Durante o trabalho será analisado a proposta de construção do banco de itens de Cálculo desenvolvida pelo Departamento para construir um modelo teórico de exame de proficiência em Cálculo Diferencial e Integral e criar um instrumento de feedback para os alunos que participarem do exame.

Trabalho em colaboração com *Mauro Luiz Rabelo*.

## Referências

- [1] M.L. RABELO, *Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro.*, Rio de Janeiro: SBM, (2013).

## As conexões entre a etnomatemática como modelo pedagógico com os estudos sobre a ideia de jogos de linguagem formuladas por Ludwig Wittgenstein

Janaína Mendes Pereira da Silva (janaina.mendes.ps@gmail.com)  
Faculdade Projeção

**Resumo.** Neste artigo, apresentamos uma pesquisa bibliográfica que tem por objetivo analisar as possibilidades de convergências entre a matemática, a etnomatemática e o pensamento filosófico de

Ludwig Wittgenstein em sua obra “Investigações Filosóficas”. Buscou-se repensar as concepções que temos da matemática, da etnomatemática e da prática pedagógica perpassando diferentes abordagens sobre a ciência matemática, seus fundamentos epistemológicos e seu ensino nas instituições. O presente trabalho apoia-se nos pensamentos do filósofo Ludwig Wittgenstein e com base numa perspectiva etnomatemática como modelo pedagógico em diferentes concepções, contextualizando os jogos de linguagem matemáticos. Para análise, buscou-se suporte em autores que tratam a concepção de matemática, cultura, linguagem e etnomatemática, evidenciado neste artigo os seguintes pesquisadores: Ubiratan D’Ambrósio (1979, 1996, 1997, 1998, 1999, 2001, 2006), Ludwig Wittgenstein (1999), Gelsa Knijnik (2001, 2006, 2008, 2013), Maria Aparecida Viggiani Bicudo (2010, 2012), Fernanda Wanderer (2008, 2012, 2013) e Denise Vilela (2007).

## Referências

- [1] BICUDO, MARIA APARECIDA VIGGIANI; MIARKA, ROGER, *Matemática e/na/ou Etnomatemática?*, Revista Latinoamericana de Etnomatemática. Vol. 5, N<sup>o</sup>. 1. Colômbia, 2012, p. 149-158. Disponível em: <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3894645>. Acesso em: 10 de mai. 2015 (2012).
- [2] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL, *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3<sup>o</sup> e 4<sup>o</sup> ciclos do ensino fundamental)*, Brasília: MEC (1998).
- [3] CAFEZEIROS, IZABEL; KUBRUSLY, RICARDO, *Traduções, desvios, problematizações, transgressões e desdisciplinaridades, Anais Eletrônicos do 14<sup>o</sup> Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia – 14<sup>o</sup> SNHCT.*, Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: [www.14snhct.sbhcc.org.br/arquivo/download?ID\\_ARQUIVO=1747](http://www.14snhct.sbhcc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=1747). Acesso em: 15 de mar. 2015. (2014).
- [4] CAVASSANE, RICARDO PERAÇA, *A natureza da crítica do segundo Wittgenstein à tradição filosófica*, Revista de Iniciação Científica da Faculdade de Filosofia e Ciências. Marília: Ed: UNESP, n. 2, vol. 10. Disponível em: [www.marilia.unesp.br/Home/.../RicardoPeraca\(72-81\).pdf](http://www.marilia.unesp.br/Home/.../RicardoPeraca(72-81).pdf)>. Acessado em: 18 de mai. 2015. (2009).
- [5] D’AMBRÓSIO, UBIRATAN, “*Adequate Mathematics for Third World Countries: Consideranda and Strategies*”, *Developing Mathematics in Third World Countries*, ed. M. El Tom, Mathematics Studies 33, North-Holland Pub. Co., Amsterdam; pp. 33-46. (1979).
- [6] *A era da consciência*, São Paulo: Editora Fundação Petrópolis (1997).
- [7] *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer*, Brasília: 5. ed. São Paulo: Ática (1998).
- [8] *A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática.*, In: BICUDO, M. A. V.(org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP. p. 97-115 (1999).
- [9] *Paz, Educação Matemática e Etnomatemática*, Revista Teoria e Prática da Educação (Maringá,PR), vol. 4, n<sup>o</sup> 8, pp.15-33, junho 2001. Disponível em: <http://www.ufpa.br/npadc/gemaz/textos/artigos/paz%20educacao%20e%20etnomatemática.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2015.

- [10] DUARTE, CLÁUDIA GLAVAN; MAGALHÃES, AMANDA, *Jogos de linguagem matemáticos de mulheres rendeiras de Florianópolis-SC-Brasil*, Memórias I CEMACYC. Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC, p. 1-10. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/4232/>. Acessado em: 18 de mai. 2015 (2013).
- [11] FANTINATO, MARIA CECÍLIA; SANTOS, FÁBIO, LENNON MARCHON DOS, *Possibilidades para “uma” Fundamentação Teórica da Etnomatemática?*, Boletim do LABEM, ano 3, n. 5, jul/dez de 2012. Disponível em [www.labem.uff.br/images/Boletim...n.5/boletim\\_labem\\_pp.1-8.pdf](http://www.labem.uff.br/images/Boletim...n.5/boletim_labem_pp.1-8.pdf). Acesso em: 14 de mar. 2015.
- [12] FIORENTINI, DÁRIO; LORENZATO, SÉRGIO, *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*, Campinas: Autores Associados (2006).
- [13] FREIRE, PAULO, *Entrevista a Ubiratan D’Ambrosio*, Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=245kJbs04tE>. Acesso em: 30 de mar. 2015.
- [14] GERDES, PAULUS, *Sobre aritmética e ornamentação geométrica: análise de alguns cestos de índios do Brasil*, BOLEMA, Special no.1, 11-34, reproduzido em: QUIPU, 6, 171-187 (1989).
- [15] HACKER, P. M. S., *Wittgenstein: sobre a natureza humana*, São Paulo: Unesp (1999).
- [16] KNIJNIK, GELSA, *Educação matemática, exclusão social e política do conhecimento*, Bolema: Boletim de Educação Matemática. São Paulo: Ed: UNESP, vol. 16, p. 12-28 (2001).
- [17] KNIJNIK, GELSA; WANDERER, FERNANDA, *Discursos produzidos por colonos do sul do país sobre a matemática e a escola de seu tempo*, Revista Brasileira de Educação. 13( 39), 555-599 (2008).
- [18] MACHADO, ALXANDRE N., *As Investigações Filosóficas de Wittgenstein: Estilo e Método.*, II Colóquio Prazer do Texto, UFBA, 2006. Disponível em: [http://www.academia.edu/292110/As\\_Investiga%C3%A7%C3%B5es\\_Filos%C3%B3ficas\\_De\\_Wittgenstein\\_Estilo\\_E\\_M%C3%A9todo](http://www.academia.edu/292110/As_Investiga%C3%A7%C3%B5es_Filos%C3%B3ficas_De_Wittgenstein_Estilo_E_M%C3%A9todo). Acesso em: 13 mar. 2015.
- [19] NEVES, CRISTIANO, *A linguagem viva Wittgenstein e os jogos de linguagem: a comunicação em uma organização prisional*, Tese de Doutorado em Ciências da Linguagem: Universidade do Sul de Santa Catarina, (2014).
- [20] PASSOS, CAROLINE MENDES, *Conexões Teóricas e Práticas entre Etnomatemática e Educação Matemática Crítica*, Disponível em: [http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/236-1-A-gt7\\_passos\\_tc.pdf](http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/236-1-A-gt7_passos_tc.pdf). Acesso em: 15 mar. 2015.
- [21] RUY, MATEUS CAZELATO, *O conceito de jogos de linguagem nas Investigações Filosóficas de Wittgenstein*, Disponível em [www.uel.br/eventos/sepech/sepech08/arqtxt/resumos-anais/MateusCRuy.pdf](http://www.uel.br/eventos/sepech/sepech08/arqtxt/resumos-anais/MateusCRuy.pdf). Acessado em 20 de maio. 2015.
- [22] SANTOS, BENERVAL PINHEIRO, *Etnomatemática e suas possibilidades pedagógicas: algumas indicações.*, VII Encontro Paulista de Educação Matemática, São Paulo. (s/p) Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~mat1287/texto/etnomatematica.htm> Acesso em: 30 mar. 2015. (2006).
- [23] VIEIRA, RICARDO, *Da Multiculturalidade à Educação Intercultural: A Antropologia da Educação na Formação de Professores*, Revista Educação Sociedade & Culturas, no 12, 123-162 (1999).

- [24] VILELA, DENISE S., *Matemáticas nos usos e jogo de linguagem: ampliando concepções na Educação Matemática*, 247p. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Unicamp. Campinas, SP. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica>. Acessado em: 18 de mai. 2015 (2007).
- [25] WANDERER, FERNANDA, *Educação Matemática e artefatos pedagógicos de escolas rurais multisseriada*, In: Caderno pedagógico, Lajeado, v. 9, n. 1, p. 51-66 (2012).
- [26] WANDERER, FERNANDA, *Etnomatemática e o pensamento de Ludwig Wittgenstein. Revista de Ensino e Ciências e Matemática*, Acta Scientiae: Canoas, ano 15, n. 2. p. 257-270 (2013).
- [27] WITTGENSTEIN, LUDWIG, *Investigações Filosóficas*, Brasília: Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural (1999).

## Fórmula de Euler e aplicações no Ensino Médio

João Mário Nepomuceno Aragão e Silva (joaolord@gmail.com)  
Universidade de Brasília

**Resumo.** No ensino médio, o estudo dos Números Complexos é caracterizado quase exclusivamente pela abordagem algébrica quando, no entanto, esses podem ainda ser apresentados em uma outra forma bastante útil, decorrente da fórmula de Euler. As fórmulas e as notações de Euler permitem a resolução de cálculos que, em um primeiro instante, parecem laboriosos, através das propriedades de potências conhecidas pelos alunos do ensino médio.

O estudo do Conjunto dos Números Complexos faz parte do currículo do terceiro ano do ensino médio. Assim a Fórmula de Euler e os cálculos associados a ela serão apresentados através de aulas expositivas e dialogadas com resoluções de exercícios em sala de aula. Serão necessárias cinco aulas para a abordagem teórica e resolução de exercícios e, mais um encontro para a aplicação de uma avaliação para a verificação da aprendizagem dos alunos. A pesquisa será realizada em 3 (três) etapas: 1ª Etapa – Aulas expositivas. Serão ministradas cinco aulas expositivas de 50 minutos abordando as notações dos Números complexos enfatizando a Fórmula de Euler. Durante as aulas serão propostos exercícios e problemas que envolvam em sua resolução a aplicação da fórmula citada. 2ª Etapa – Avaliação. Será aplicado um teste com questões que envolvam o conteúdo ministrado nas aulas expositivas. 3ª Etapa – Análise dos dados. Serão corrigidos os testes e será feita uma análise sobre o desempenho dos alunos na resolução de cálculos com a Fórmula de Euler.

## Referências

- [1] ÁVILA, G., *Variáveis Complexas e Aplicações.*, LTC Editora, Rio de Janeiro, (2000).
- [2] CARMO, M. P. , MORGADO, A. C. , WAGNER, E., *Trigonometria e Números Complexos.*, IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, (1991).
- [3] DANTE, LUIZ ROBERTO, *Contexto e Aplicações.*, Editora Ática: São Paulo, (2010).

## Princípios básicos de uso do computador na visualização de entidades geométricas euclidianas no espaço em laboratórios do PROINFO/MEC

Jorge Barros de Abreu (ficmatin10@gmail.com)

Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal

**Resumo.** Todas as técnicas de criação de figuras aqui expostas podem ser reduzidas à montagem de figuras espaciais, definindo-as como compostas por polígonos planos. Por exemplo, o tetraedro regular é composto por quatro triângulos equiláteros e o cone reto de folha simples pode ser visualizado no computador como sendo construído por 100 triângulos isósceles e um polígono regular de 100 lados na base. De outra forma, pode-se definir um tetraedro mostrando somente os pontos dos quatro vértices, mas pode também mostrar além dos quatro pontos dos quatro vértices mais quatro pontos centrais de cada face ou mais três pontos em cada face ou mais 100 pontos em cada face. No computador, o tetraedro apareceria mais definido à medida que se aumentasse o número de pontos. Vale ressaltar que o Geomview trata pontos como vértices e traz tudo para dentro do cubo unitário, mas isso pode ser modificado. O Geomview e a OOGI foram desenvolvidos pelo “Geometry Center” da Universidade de Minnesota (EUA). Apesar de o “Geometry Center” ter sido desfeito, o Geomview continuou e é uma excelente ferramenta de visualização de objetos tridimensionais.

## GGBOOK: uma multiplataforma educativa para o ensino de matemática

Jorge Cássio C. Nóbriga (jcassio@gmail.com)

Universidade Católica de Brasília

**Resumo.** O GeoGebra é um *software* educativo matemático que vem se destacando mundialmente. Trata-se de um *software* que integra as potencialidades dos *softwares* de Geometria Dinâmica com as potencialidades dos *softwares* de álgebra computacional (CAS). Tal *software* permite construções que possibilitam a visualização de conceitos e propriedades matemáticas, experiências matemáticas e exploração interativa. Dessa forma, pode contribuir para o ensino integrado da geometria, álgebra e até mesmo do cálculo. O *software* oferece duas representações de cada objeto: a componente numérica e algébrica mostra as coordenadas dos pontos, as equações explícitas ou implícitas, ou na forma paramétrica, enquanto que a componente geométrica exibe a representação correspondente (HOHENWARTER, 2002). Ou seja, o *software* permite construir diferentes representações num mesmo ambiente. Temos trabalhado com o GeoGebra há vários anos e, apesar de percebermos grandes contribuições para o ensino de matemática, também detectamos alguns limites do *software*. Um deles está relacionado com seu ambiente texto que utiliza o recurso LaTeX para a representação de expressões matemáticas. Apesar de ser uma ferramenta poderosa para edição de texto em alta qualidade, tal recurso não é intuitivo e exige do usuário conhecimentos de comandos necessários para especificar a estrutura lógica do texto. Fundamentado na teoria das Representações Semióticas de Duval (DUVAL, 2009, 2011) e buscando encontrar soluções para os limites detectados no GeoGebra, desenvolvemos uma plataforma educativa que chamamos de GGBOOK (NÓBRIGA, 2015). Trata-se de um sistema que integra o GeoGebra com um editor de texto e equações. Os dois se “comunicam” de forma dinâmica, de maneira que quando se alteram as propriedades de um objeto no ambiente gráfico, os valores a ele remetidos no ambiente texto também se alteram. Nesta comunicação, apresentaremos

o protótipo do GGBOOK com seus recursos, modos de funcionamentos, possibilidades de exploração e contribuições.

Trabalho em colaboração com *Gilberto Lacerda dos Santos, Bruno Santos Ferreira e Regina da Silva Pina Neves.*

## Referências

- [1] DUVAL, R., *Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.*, Tradução L. F LEVY; M.R.A SILVEIRA. 1. ed. S.P.: Livraria da Física,(2009).
- [2] DUVAL, R., *Ver e Ensinar a Matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.*, São Paulo: PROEM,(2011).
- [3] HOHENWARTER, M., *GeoGebra-a software system for dynamic geometry and algebra in the plane.*, Master's thesis—Salzburg: University of Salzburg, (2002).
- [4] NÓBRIGA, J. C. C., *GGBOOK: Uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica GeoGebra com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de Narrativas Matemáticas Dinâmicas*, Tese de Doutorado em Educação, Universidade de Brasília, Brasília, (2015)a.

## Investigação dos motivos pelos quais os alunos do ensino médio apresentam baixo desempenho em geometria plana

José Gutemberg Lima Rodrigues (jgutemberg@hotmail.com)

Universidade de Brasília

**Resumo.** Observando os resultados de olimpíadas, provas de exames vestibulares e de sistemas de avaliação de larga escala, de uma forma geral, constata-se que os estudantes apresentam baixo desempenho em matemática, especialmente no que se refere a temas relacionados à geometria plana. Para compreender melhor esse problema, decidiu-se desenvolver este trabalho, que tem como objetivo principal investigar as causas que contribuem para o baixo desempenho dos alunos do ensino médio em geometria plana e alguns temas correlatos. A pesquisa será feita em pelo menos quatro escolas de ensino médio da Rede Pública do Distrito Federal, nas quais serão analisados os livros didáticos, o acompanhamento do planejamento das aulas pelos professores e o desempenho dos alunos. Será aplicado aos alunos do terceiro ano um teste (sobre um conteúdo específico) ou uma avaliação diagnóstica, juntamente com um questionário, cujo objetivo será buscar indicadores sobre os seus conhecimentos e preferências em matemática. Será realizada uma entrevista com os professores para que relatem suas experiências com o ensino da matemática, em especial, com o da geometria plana. Após discussão e análise dos dados que serão coletados, espera-se obter algumas respostas que auxiliem na compreensão das razões para o problema mencionada. Esses resultados e propostas de melhoria serão encaminhados para as escolas envolvidas.

## Referências

- [1] RABELO, M.L., *Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro.*, Rio de Janeiro: SBM, (2013).

- [2] PAVANELLO, REGINA MARIA, *O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica.*, (Dissertação em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (1989).
- [3] SILVA, ELIANE MARIA E OUTROS, *Concepções sobre o ensino-aprendizagem de geometria plana e espacial em escolas públicas. Disponível em: <http://www.jozeildo.com/documentos/artigo-concepcoes-sobre-o-ensino-de-geometria.pdf> - Acessado em 07/12/15.*
- [4] DE JESUS, MARCOS ANTONIO SANTOS, *Análise do Desempenho em Geometria e das Atitudes em Relação à Matemática de Alunos do Ensino Médio.*

## Algumas contribuições para a prática do professor de matemática do ensino básico: o cálculo diferencial e integral as estruturas algébricas no ensino de funções e equações

Josinalva Estacio Menezes (jomene@bol.com.br)  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

**Resumo:** Neste trabalho, objetivamos discutir a importância da disciplina Cálculo I e das Estruturas Algébricas na formação do professor de matemática que vai atuar no ensino básico, enfocando o ensino de funções e a resolução de equações algébricas que são abordadas nesse nível de ensino. A discussão é feita em dois momentos. Inicialmente, são mostrados alguns encaminhamentos históricos sobre funções, a evolução do conceito e a abordagem do ensino em especial os gráficos, junto com alguns equívocos na referida abordagem. Em seguida, foram feitas algumas considerações sobre como o Cálculo I pode auxiliar nesse processo. Noutro momento, abordaremos o ensino das equações e as conexões entre os passos da resolução com as propriedades de estruturas algébricas como os anéis e os corpos. A Cada momento, referente a um tópico, apresentou-se uma ilustração com exemplos que reforçam a importância dessas estruturas concernentes ao Cálculo I e à Álgebra. Concluímos constatando que as discussões teóricas apresentadas e a apresentação e as discussões dos exemplos mostraram algumas possibilidades de como alguns tópicos do Cálculo I e das Estruturas Algébricas podem auxiliar o trabalho do professor de matemática na prática ao abordar estes dois conteúdos do ensino básico. Amadurecendo as ideias, o licenciando, na perspectiva de atuar como professor, deverá ter no Cálculo I e na Álgebra poderosas ferramentas fortalecedoras de ideias a serem discutidas com seus alunos ao realizar o seu trabalho docente.

## Referências

- [1] BOYER, C. B., *História da Matemática.*, Ed.2. São Paulo: Edgar,(1996).
- [2] BRAZ, R. A. F. S. , *Uma proposta de utilização de material manipulativo no aprendizado da função exponencial.*, Dissertação de mestrado. Recife: UFRPE-PPGEC, (2007).
- [3] GARBI, G. G., *O romance das equações algébricas.* , São Paulo: Livraria da Física, (2010) 4ª Ed.
- [4] KLEINER, I., *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey.*, The College Mathematics Journal, September 1989, 20 (4), 282–300, 1989. Disponível em [www.maa.org/pubs/Calc\\_articles/ma001.pdf](http://www.maa.org/pubs/Calc_articles/ma001.pdf). Acesso 01/03/08.

- [5] LIMA ET AL., *Exame de Textos: Análise de Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio.*, Editora SBM. Rio de Janeiro, (2001).
- [6] REGO, R. G., *Um estudo sobre a construção do conceito de função.*, Tese de Doutorado, UFRN, Rio Grande do Norte, (2000).
- [7] YOUSCHKEVITCH, A. P., *The concept of fuction up to middle of the 19th century.*, In: Archive for History of Exact Sciences. Editions Springer, 1976, v. 1, n. 1.

## Projeto simulado de uma escola pública do DF: convergência para a perspectiva formativa

Josué Sergio de Souza (josuesergio@uol.com.br)  
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal  
Universidade de Brasília

**Resumo.** A avaliação no contexto escolar, é um processo no qual o professor tem a oportunidade de verificar se as metodologias de ensino adotadas são eficientes para favorecer a aprendizagem dos alunos. Ela é útil, por exemplo, para informar quais das habilidades foram adquiridas durante as aulas, tornando possível tanto a recuperação contínua do aluno que tem dificuldades no conteúdo ministrado, quanto o incentivo a projetos mais complexos para o aluno com maior proficiência. Segundo Perrenoud[1], nossas práticas de avaliação podem ser classificadas em, entre outras, formativa ou somativa. Enquanto a somativa relaciona-se basicamente em classificar os alunos, a formativa preocupa-se com o processo de ensino-aprendizagem, com os caminhos que o aluno percorre, prevenindo eventuais fracassos e reposicionando o aluno no processo educativo. A ideia de que a avaliação na forma escrita deve ser meramente somativa, visando apenas classificação, aprovação e reprovação, ainda é comum entre os professores[2]. Utilizar-se da lógica formativa na avaliação escrita parece um desafio para muitos professores, e esse é o problema em um centro educacional da rede pública do DF. O centro educacional em questão possui um projeto que compõe a proposta pedagógica para a avaliação, descrito no seu Projeto Político-Pedagógico (PPP), denominado Projeto Simulado, que consiste em um projeto incluindo uma prova escrita, aplicada uma vez por bimestre, caracterizada pela interdisciplinaridade, pela multidisciplinaridade e pela estrutura similar à do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O PPP, em obediência ao Art. 176 do Regimento Escolar, preconiza como critério a avaliação formativa e diagnóstica[3], mas, na prática, o Projeto Simulado tem se caracterizado como uma avaliação somativa, apenas. Tal projeto encontra-se em fase de reformulação por parte do corpo docente do centro educacional, visando justamente esta adequação ao PPP. Neste cenário, surge como objetivo geral deste trabalho mostrar como um teste de múltipla escolha pode ser eficiente como meio do processo ensino-aprendizagem, com o auxílio de recursos da psicometria[4] e da engenharia de itens[5], no contexto da Rede Pública de Ensino do Distrito Federal.

## Referências

- [1] PERRENOUD, PHILIPPE, *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens - entre duas Lógicas.*, Porto Alegre: Artes Médicas Sul (1999).
- [2] VILLAS-BOAS, BENIGNA M. DE FREITAS, *Planejamento da avaliação escolar*, Pró-posições, v.9, n. 3, p. 19-27 (1999).

- [3] DISTRITO FEDERAL. SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO, *Currículo em Movimento da Educação Básica - Ensino Médio*, SEDF, 2015.
- [4] PASQUALI, LUIZ, *Psicometria: teoria dos testes na psicologia e na educação*, 3. ed. - Petrópolis, RJ: Vozes, 2009.
- [5] RABELO, MAURO, *Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro*, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

## Um estudo de caso sobre o processo de escolha do livro didático e a abordagem de estatística

Karly Barbosa Alvarenga (karlyba@yahoo.com.br)

Universidade Federal de Goiás

**Resumo.** Esta pesquisa tem como o objetivo verificar como se dá o processo de escolha de livros didáticos pelos professores e como eles veem a abordagem de Estatística nesse material. Para isso, foi aplicado um questionário a docentes que lecionavam no Ensino Médio e estavam no mestrado de Matemática na Universidade Federal de Sergipe, utilizando a técnica de análise de dados Análise de Conteúdo, que é uma análise qualitativa, mas com respaldos quantitativos com a Estatística descritiva. O perfil dessa amostra é de professores do sexo masculino, que fazem mestrado, com idade média de 33 anos, com pouco tempo de atuação no magistério, que atuam em mais de uma escola, preferencialmente na rede pública e privada. No processo de escolha, o Guia de Livros Didáticos não está presente, sendo o assédio das editoras ou mesmo critérios objetivos adotados pelos professores, a forma mais comum de adoção da coleção. Na opinião da maioria dos respondentes, o livro didático aborda a Estatística de forma parcialmente satisfatória, porque tem um conteúdo resumido e ajuda na elaboração de projetos que envolvem a coleta de dados.

Trabalho em colaboração com *Danilo Messias Nascimento e Santos*.

## Referências

- [1] BARDIN, LAURENCE., *Análise de conteúdo.*, Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, (2011).
- [2] BRASIL. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA., *PCN+: Ensino Médio orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.*, Brasília: MEC, (2002).
- [3] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA (SEB)., *Edital de convocação para processo de inscrição e avaliação de obras didáticas para o PNLD 2015.*, Brasília: 2013. 81p.

## O ensino de matemática para alunos surdos do ensino médio: uma análise da prática de professores do Distrito Federal

Luciana de Jesus Lemos (lulemos54@gmail.com)

Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal

**Resumo.** Este artigo apresenta uma análise da prática de professores intérpretes educacionais (segundo Quadros (2007), o intérprete educacional (IE) é o profissional que atua como intérprete de

língua de sinais em ambiente escolar) de línguas de sinais e professores de Matemática, que atuam em duas escolas públicas do Distrito Federal, com o objetivo de verificar a relevância do intérprete educacional de língua de sinais que atua como facilitador no aprendizado dos alunos surdos em aulas de Matemática. A metodologia de pesquisa utilizou questionários aplicados aos intérpretes educacionais de língua de sinais e professores de Matemática, de uma escola pública regular comum do Ensino Médio e de uma escola pública bilíngue. Os resultados permitem concluir que a presença do intérprete educacional, apesar de não garantir a aprendizagem Matemática, é fundamental como auxiliar no trabalho do professor e indicam que deve haver um envolvimento e um trabalho de parceria entre o intérprete educacional e o professor de Matemática para sejam alcançados melhores resultados de aprendizagem; além disso, é necessário o desenvolvimento de sinais específicos para as aulas de Matemática. A preparação do intérprete educacional em termos do domínio do conteúdo ensinado é determinante nessa aprendizagem, confirmando as ideias de Costa e Magalhães (2011), Lacerda e Santos (2014), Tuxi (2009) e outros.

Trabalho em colaboração com *Raquel Carneiro Dörr*.

## Referências

- [1] COSTA, W.C.L.; MAGALHÃES, P.G.S., *Ensino de matemática para alunos surdos: importância do tradutor-intérprete de Libras.*, VIII EPAEM. Encontro Paraense de Educação Matemática. SBEM – PA. Disponível em: < [https : //ersalles.files.wordpress.com/2011/10/ensino – de – matemc3a1tica – para – alunos – surdos.pdf](https://ersalles.files.wordpress.com/2011/10/ensino-de-matemc3a1tica-para-alunos-surdos.pdf). > Acesso em dezembro de 2014.(2011).
- [2] LACERDA, CRISTINA; SANTOS, LARA FERREIRA, *Tenho um aluno surdo e agora?*, Introdução à LIBRAS e educação de surdos. São Carlos: EdUFSCar, (2014).
- [3] N. QUADROS, RONICE MÜLLER, *O tradutor e o intérprete de língua brasileira de sinais e língua portuguesa.*, Secretaria de Estado de Educação; Programa Nacional de Apoio à Educação de Surdos. Brasília: MEC/SEESP, (2007).
- [4] TUXI, PATRÍCIA, *A atuação do intérprete educacional no ensino fundamental.*, Dissertação (Mestrado). Brasília, UNB, 2009. Disponível em: < [http : //www.apilrj.org.br/artigos/PatriciaTuxi.pdf](http://www.apilrj.org.br/artigos/PatriciaTuxi.pdf). > Acesso em março de 2015. (2009).

## **Expressões Algébricas no Ensino Fundamental Anos Finais: A validação de atividades de ensino junto a estudantes e professores.**

**Ludimila Cássia Coelho de Andrade** (ludimat@gmail.com)  
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal  
Universidade de Brasília

**Resumo.:** O presente texto tem como objetivo validar atividades de ensino para o Ensino e Aprendizagem de Expressões Algébricas junto a estudantes e professores no Ensino Fundamental Anos Finais. Para tanto, propomos extrair e construir os dados desta pesquisa por meio de cenários coletivos, nos quais serão consideradas: ações, oralidade e escrita. Recorremos à criação de situações conflituosas, que levem estudantes e professores a uma investigação e formulação de hipóteses, posteriormente

analisadas e discutidas pelo grupo. A priori, a pesquisa será dividida em cinco sessões que contarão com a participação da pesquisadora e dos professores do Ensino Fundamental Anos Finais, da rede pública de ensino. Os dois primeiros encontros serão voltados para o contato entre os professores e as atividades. As sessões seguintes serão destinadas à aplicação das atividades nas escolas públicas nas quais atuam os professores participantes da pesquisa, por meio dos mesmos. No quinto encontro proposto, serão avaliadas as experiências vivenciadas, destacando os acertos e limitações, propondo a reelaboração das mesmas e da experiência de aplicação em sala de aula, visando a validação das atividades de ensino desenvolvidas durante este trabalho. É importante salientar que todas as atividades de ensino propostas neste trabalho são dotadas de intencionalidade, pois propiciam a interação entre os sujeitos e estão relacionadas ao conteúdo matemático de expressões algébricas.

Trabalho em colaboração com *Regina da Silva Pina Neves*.

## Referências

- [1] BACCARIN, S.A. DE O., *Investigação Matemática: Uma análise da sua contribuição na construção de conceitos algébricos.*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília (2008).
- [2] BORBA, M.DE C., *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.*, Belo Horizonte: Autêntica (2004).
- [3] CEDRO, W.L, *O espaço de aprendizagem e o ensino: O Clube de Matemática.*, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo (2004).  
*Clube de matemática: vivências, experiências e reflexões.* Curitiba, PR: CRV (2015).
- [4] PINA NEVES, R. DA S., *A divisão e os Números Racionais: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores.*, Tese de doutorado, Universidade de Brasília, Brasília. (2008).
- [5] RIBEIRO, A.J., *Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função.*, Belo Horizonte: Autêntica (2015).

## Estatística no Ensino Médio, uma maneira diferente de ensinar e aprender

Marcio Melo Freitas (anesioamancio@gmail.com)

**Resumo.** Visto as dificuldades e o desinteresse por parte dos alunos para estudarem matemática, proponho uma forma diferente para estudar o assunto de estatística que normalmente é visto no 3º ano do Ensino Médio o aprendizado vem de fora para dentro da escola, por isso oriento os alunos a escolherem um tema de seu cotidiano, elaborar um questionário sobre o tema, aplicar o questionário em sua comunidade e, a partir daí, começar o estudo de estatística no Ensino Médio, (média, moda, mediana, variância, desvio padrão, tabelas de frequência, ...) com os dados obtidos pelos próprios alunos.

## Referências

- [1] BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.
- [2] Ministério da Educação. Secretária de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio. Brasília-2002. Introdução.
- [3] FREIRE, Paulo. Ação cultural para a liberdade. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1981.

## A utilização de jogos na aprendizagem da matemática no ensino médio

Marcos Paulo Barbosa (marcospaulopos@gmail.com)  
Universidade de Brasília

**Resumo.** Esta pesquisa discorre sobre o emprego da ludicidade e atividades colaborativas em grupo, utilizando-se de raciocínio lógico, de jogos matemáticos e de jogos estratégicos para o ensino-aprendizagem da Matemática na educação básica, mais especificamente no ensino médio. A pesquisa participante foi aplicada em 2013 a um grupo formado por 40 alunos do Centro de Ensino Médio 09 de Ceilândia - CEM 09, todos classificados na primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP. O grupo participou do projeto extracurricular intitulado “Projeto Matemática Todo Dia”, em horário diferente ao da aula tradicional. Os conteúdos matemáticos foram repassados em encontros semanais, num total de quinze, por meio de raciocínio lógico e jogos diversos. O projeto enriqueceu o currículo e mostrou aos alunos que as estratégias são diversas na resolução de problemas; o raciocínio lógico-quantitativo e os jogos matemáticos foram trabalhados para repassar conceitos matemáticos dos diversos conteúdos diluídos nas regras; a aplicação dos conceitos e a modelagem dos problemas foram repassadas de forma menos tradicional que o tão famoso quadro e giz. Ao final, foi utilizada uma abordagem qualitativa para avaliar o projeto, ficando evidenciado o aprendizado significativo e a qualidade desse aprendizado, um passo importante para a transformação das práticas pedagógicas.

Trabalho em colaboração com *Alessandra Lisboa da Silva*.

## Referências

- [1] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, *Parâmetros Curriculares Nacionais.*, Brasília: SEF. Disponível em: < [portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf) >. Acesso em: 20 out 2015, (1998).
- [2] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, *PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação - SAEB: ensino médio, matrizes de referência, tópicos e descritores.*, Brasília: SEF. Disponível em: < [portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb\\_matriz2.pdf](http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf) >. Acesso em: 20 out 2015, (2011).
- [3] CRESWELL, JOHN W, *Projeto de Pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto.*, John W Creswell. Tradução Magda Lopes; consultoria, supervisão e revisão técnica desta edição Dirceu da Silva. – 3. Ed. – Porto Alegre: Artmed, (2010).

- [4] D'AMBRÓSIO, UBIRATAN, *Filosofia, Matemática e formação de professores.*, In: FÁVERO, Maria Helena.; CUNHA, Célio da. *Psicologia do conhecimento: o diálogo entre as ciências e a cidadania.* Brasília: UNESCO, Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília, Liber Livro Editora. 332p, (2009).
- [5] GRANDO, REGINA CÉLIA., *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.*, Campinas. Disponível em: < [http : //www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos\\_teses/2010/Matematica/tese\\_grando.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/2010/Matematica/tese_grando.pdf) . > Acesso em: 20 out 2015, (2000).
- [6] HUIZINGA, JOHAN, *Homo Ludens.*, São Paulo: Perspectiva, (2007).
- [7] POLYA, G., *A Arte de Resolver Problemas.*, Rio de Janeiro: Interciência, (1978).
- [8] SÁ, ANTÔNIO VILLAR MARQUES; VELOSO, ROSÂNGELA RAMOS, *Reflexões sobre o jogo: conceitos, definições e possibilidades.*, Revista efdeportes, Buenos Aires, ano 14, n. 132, maio 2009. Disponível em:< [http : //www.efdeportes.com/efd132/reflexoes – sobre – o – jogo.htm](http://www.efdeportes.com/efd132/reflexoes-sobre-o-jogo.htm) >. Acesso em: 20 out 2015, (2009).
- [9] SMOLR, KÁTIA ET AL., *Ensino Médio Cadernos do Mathema: Jogos de Matemática de 1º a 3º ano.*, Porto Alegre: Artmed, (2008).
- [10] SKOVSMOSE, OLE, *Preocupações de uma educação matemática crítica.*, In: FÁVERO, Maria Helena.; CUNHA, Célio da. *Psicologia do conhecimento: o diálogo entre as ciências e a cidadania.* Brasília: UNESCO, Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília, Liber Livro Editora. 332p, (2009).

## **A pesquisa de intervenção no desenvolvimento de competências matemáticas: um estudo com alunos dos quinto ano do Ensino Fundamental**

**Maria Juliana de Freitas Carvalho Lopes** ([mariju.fcl@gmail.com](mailto:mariju.fcl@gmail.com))  
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal

**Resumo.** Resultados de pesquisas nacionais e internacionais indicam que o ensino da Matemática tem se pautado prioritariamente pela utilização de regras e algoritmos formalizados. Observa-se que os alunos apresentam uma incompreensão da lógica do Sistema de Numeração Decimal, embora, como alternativa aos algoritmos formalizados, eles produzam suas próprias notações para a resolução de cálculos e situações problemas. Contudo, esses procedimentos próprios dos alunos, que representam o raciocínio, na situação em questão, são, na maioria das vezes, desqualificados e rejeitados pelos docentes. Reforçando essa conjuntura, as publicações nos periódicos de Psicologia e Educação apontam um baixo desempenho dos alunos. Outros estudos apontam que são necessárias mudanças nas práticas de ensino e sugerem que os alunos sejam encorajados no uso de procedimentos pessoais de cálculos no processo de construção da compreensão dos algoritmos matemáticos formalizados. As publicações, analisadas neste estudo, evidenciam uma escassez significativa de pesquisas metodológicas de intervenção com alunos que apresentam baixo desempenho escolar. Considerando esses aspectos, esta pesquisa teve como objetivo a realização de uma pesquisa metodológica de intervenção psicológica com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública do Distrito Federal, que eram considerados, por suas professoras, com baixo desempenho escolar em matemática, visando

o desenvolvimento de competências conceituais nessa mesma disciplina. Participaram dois alunos do quinto ano, um do sexo feminino e outro do sexo masculino, ambos com 11 anos de idade. A perspectiva metodológica adotada foi a desenvolvida por Fávero (2009a, 2009b, 2011, 2012). A coleta de dados foi dividida em duas fases. Na primeira, foi realizada a avaliação psicopedagógica das competências e dificuldades em matemática, com foco na lógica do sistema numérico decimal e sua notação. Evidenciaram-se dificuldades dos sujeitos quanto à lógica do sistema de numeração decimal e a sua notação; além de competências em relacionar as palavras número às suas quantidades, realização de cálculos mentais de pequenas quantidades, competência para adicionar ou subtrair a partir de uma quantidade já existente, realização de contagem termo a termo, cardinalização e investigação de estados iniciais ou transformações de cálculos aritméticos envolvendo pequenas quantidades. Na segunda fase da pesquisa, desenvolveram-se sessões de intervenção psicopedagógica interativas, focadas no desenvolvimento de competências relacionadas ao sistema numérico decimal e sua notação. Os dados obtidos evidenciaram que: 1) os sujeitos passaram da negação do uso de materiais concretos, para a sua utilização como suporte para as resoluções de situações problemas; 2) substituíram a ação de indicar uma resposta a um problema, de forma imediata, pela investigação de procedimentos pertinentes à sua resolução; 3) construíram a compreensão do valor posicional, do uso da vírgula nos números decimais e a função e o uso do numeral zero; 4) desenvolveram as competências relacionadas aos componentes do significado de número. Esses dados evidenciam a relação entre dificuldades e competências e demonstram que, por meio da intervenção psicopedagógica com foco na mediação semiótica, podem se desenvolver processos de tomada de consciência relativos aos conceitos matemáticos.

Trabalho em colaboração com *Maria Helena Fávero*.

## Referências

- [1] FÁVERO, M. H., *La Psicología del conocimiento y la construcción de competencias conceptuales en la escuela.*, Revista Internacional Magisterio Educación e Pedagogia, 39, 18-22. (2009a).
- [2] FÁVERO, M. H., *Os fundamentos teóricos e metodológicos da psicologia do conhecimento.*, In M. H. Fávero & C. Cunha (Eds.), *Psicologia do conhecimento: O diálogo das ciências e a cidadania.* (9-20). Brasília: Liber Livro, (2009b).
- [3] FÁVERO, M. H., *A pesquisa de intervenção na psicologia da Educação Matemática: aspectos conceituais e metodológicos.*, Educar em Revista, 1, 47-62, (2011).
- [4] FÁVERO, M. H., *A pesquisa de intervenção na construção de competências conceituais.*, Psicologia em Estudo, 17, 103-110, (2012).

## A formação em serviço dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais de escolarização: saberes docentes e práticas pedagógicas

Marilene Xavier dos Santos (mxavierpb@gmail.com)  
Universidade de Brasília

**Resumo.** Esse trabalho é uma pesquisa de mestrado que será realizada no ano de 2016. A referida pesquisa tem como objetivo principal analisar as possíveis implicações entre a formação em serviço,

os saberes docentes e a práxis pedagógica de três professores de uma escola pública do Distrito Federal, que participaram de uma formação oferecida pelo MEC em parceria com as Universidades Federais, governo federal, estados, municípios e o Distrito Federal, sendo a ação principal do Pacto Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) realizado em 2014, no referido ano. O objetivo dessa formação foi o aprofundamento e ampliação dos temas tratados em 2013 (Linguagem), tendo como eixo central o ensino e aprendizagem da Matemática. A formação em serviço e no ambiente de trabalho é um componente essencial para a profissionalização docente, para a constituição de comunidades de aprendizagem. Sendo assim, a pesquisadora pretende acompanhar as relações entre professor e aluno, as práticas pedagógicas dos professores, a observação e a análise dos caminhos percorridos por esses profissionais e pelas crianças para chegar à construção de conceitos matemáticos e à resolução de situações-problema em um ambiente de trocas, divergências, acordos e parcerias. Os eixos teóricos serão a formação continuada em serviço, a práxis pedagógica, a formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais de escolarização e ensino e a aprendizagem da matemática. Será uma pesquisa qualitativa do tipo participante (BRANDÃO e STRECK, 2006) para a análise dos dados utilizar-se-á a análise de dados (BARDIN,2011).

## Referências

- [1] ALRO, H. E. S. O., *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.*, 1ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, (2006).
- [2] BITTAR, M. E. M. C. A., *A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.*, 1ª. ed. Curitiba: CRV, (2009).
- [3] CONTRERAS, J., *Autonomia de professores.*, 2ª ed.. ed. São Paulo, SP.: Cortez, (2012).
- [4] D'AMBRÓSIO, U., *Educação matemática: da teoria à prática.*, 19ª ed. ed. Campinas: SP: Papirus, (1996).
- [5] FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M., *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensina matemática.*, Campinas, SP: Musa Editora - GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, (2005).
- [6] GATTI, B. A.; BARETTO, E. S. D. S.; ANDRÉ, M. E. D. D. A., *Políticas docentes: no Brasil: um estado da arte.*, Brasília: UNESCO, (2011).
- [7] MUNIZ, C. A., *Pedagogia – Educação e linguagem matemática - PEDEaD.*, [S.l.]: [s.n.], Sd..
- [8] NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. D. S.; PASSOS, C. L. B., *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental – Tecendo fios do ensinar e do aprender.*, 2ª ed. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, (2014).
- [9] SILVA, K. A. C. P. C. A FORMAÇÃO DE PROFESSORES NA PERSPECTIVA CRÍTICO-EMANCIPADORA., *Revista Linhas Críticas.*, FE/UNB: Brasília, v. v.17, p. p. 12-31, jan/abril. 2011. ISSN n. 32. (2011).
- [10] SMOLE, K. S. E. M. C. A., *A matemática em sala de aula- reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental.*, 1ª. ed. Porto Alegre: Penso, (2013).
- [11] VASQUEZ, A. S., *Filosofia da Práxis.*, Rio de Janeiro: Paz e Terra, (1968).

## Auto-regulação da aprendizagem matemática dos alunos do Centro de Ensino Médio 01 do Paranoá

Mateus Henrique Oba Becker (japamoicano@gmail.com)  
Universidade de Brasília

**Resumo.** O intuito deste trabalho é verificar a independência do aluno em relação a própria aprendizagem, os diferentes níveis de metacognição e propor uma forma de capacitar os estudantes de ensino médio na autoregulação da aprendizagem. Apesar deste estudo ser abrangente e pertinente a todos estudantes, o trabalho focará nos alunos de ensino médio do Paranoá, principalmente no que diz respeito à autoregulação da aprendizagem em Matemática. Além do estudo teórico, será feito um estudo de casos. A primeira experiência consiste na autoregulação da aprendizagem orientada, ou seja, será sugerido um tema e um material de estudo. A segunda experiência não será orientada, ou seja, apenas será sugerido o tema e os subtemas que se espera que os alunos aprendam. Ambas as atividades terão um teste diagnóstico no início, seguido de um período para estudo e serão finalizadas com um teste de conhecimentos. Após a aplicação das duas atividades, será feito um estudo em relação ao desempenho dos alunos e a gestão dos próprios estudos.

Palavras-chaves: Auto-regulação, aprendizagem, matemática, Ensino Médio, Educação.

Trabalho em colaboração com *Rui Seimetz*.

## Referências

- [1] L. FREIRE, *Auto-regulação da aprendizagem.*, Lisboa: Faculdade de psicologia e Ciências da Educação, (2009).
- [2] N. LIMA, *Competências e habilidades para a pesquisa escolar desenvolvidas no Ensino Médio.*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, (2011).

## Registros de avaliação do 1o. semestre de 1962: um material do arquivo permanente do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília

Mônica Menezes de Souza (profmonicams@yahoo.com.br)  
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal

**Resumo.** O Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática – COMPASSODF, desde o início de 2014, está envolvido na pesquisa *A constituição do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília – UnB*, coordenado pela professora Dra. Maria Terezinha Jesus Gaspar. Esse trabalho tem por objetivo apresentar e analisar alguns documentos do arquivo permanente do Departamento de Matemática – MAT referentes ao primeiro semestre de 1962, os quais denominamos de registros de avaliação. Nossa análise deteve-se a um bloco com 25 folhas de registros de avaliação individual, sendo cada folha referente a um estudante que cursou a disciplina Matemática para o curso de Arquitetura – Supletivo, no primeiro semestre de funcionamento da UnB. Essa disciplina, segundo Pinto (2014) foi criada para dar uma base matemática aos novos universitários que eram trabalhadores na nova capital e de repente tiveram a oportunidade de ingressar numa universidade. Dessa forma, as disciplinas

supletivas ou de recuperação foram criadas na universidade dada a necessidade dos novos estudantes. Durante a análise dos registros de avaliação, aproximamo-nos de Julia (2001), que considera que as disciplinas escolares são um produto específico da escola e são inseparáveis de sua finalidade educativa, e de Chervel (1990) para quem as disciplinas são produzidas na escola em suas relações com a cultura escolar. O acesso a esses documentos colocou-nos em contato com indícios de práticas docentes que ocorreram no ensino de matemática nos primeiros anos de Brasília.

Trabalho em colaboração com *Edilene Simões Costa, Rosália Policarpo Fagundes de Carvalho, Maria Terezinha Jesus Gaspar e Carmyra Oliveira Batista.*

## Referências

- [1] CHERVEL, A. , *História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa.*, Teoria e Educação, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990. Disponível em: < [http : //moodle.fct.unl.pt/pluginfile.php/122510/mod\\_resource/content/0/Leituras/Chervel01.pdf](http://moodle.fct.unl.pt/pluginfile.php/122510/mod_resource/content/0/Leituras/Chervel01.pdf) >. Acesso em: 24 jul. 2014.
- [2] JULIA, D., *A cultura escolar como objeto histórico.*, Revista brasileira de História da Educação, n. 1. Campinas: Autores Associados, jan./jun. 2001, p. 9 – 43.
- [3] PINTO, K. F. , *Entrevista sobre os registros de avaliação concedida ao Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática – COMPASSODF.* , (Locutor),Brasília,2014.

## Razão áurea: uma proposta para o ensino

Paulo Luiz da Silva Ramos (plsr83@gmail.com)  
Universidade de Brasília

**Resumo :** Este projeto visa propor uma maneira diferente de trabalhar alguns conteúdos no ensino básico. Utilizando a razão áurea como fator motivacional, trabalhei com cinco encontros, de duas horas cada, nos quais pude trabalhar construções geométricas básicas para desenvolver construções mais elaboradas. A premissa utilizada é que quando o aluno está interessado no assunto, ele acaba assimilando melhor os conteúdos ministrados. A razão áurea, também conhecida como média extrema razão, foi descrita formalmente por Euclides, em *Os elementos*, e depois disso estudada por muitos matemáticos, entre eles Luca Paccioli. Ela representa, segundo estudiosos, a mais agradável proporção entre dois segmentos ou duas medidas, e pode ser definida inicialmente através do segmento áureo e calculada como segue.

*Definição:* um segmento  $\overline{AB}$  é denominado áureo se for dividido por um ponto  $D$  tal que  $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB}$ .

A partir da definição é possível calcular o valor da razão áurea conforme segue Digamos que  $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB} = \Phi$ , daí segue

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB} &\Rightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AD}{DB} \\ &\Rightarrow 1 + \frac{DB}{AD} = \frac{AD}{DB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} &= \Phi \\ \Rightarrow \Phi + 1 &= \Phi^2 \\ \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \Phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Denotaremos nesse texto  $\Phi$  (Lê-se fi) como sendo a razão áurea maior e  $\varphi = \frac{1}{\Phi} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  como a razão áurea menor. Esses dois símbolos se referem a mesma letra grega, a primeira sendo a notação maiúscula e a segunda a minúscula.

Pela grande quantidade de aparições desta razão na natureza, no corpo humano e em muitas construções feitas pelo homem, esta razão intriga e motiva bastante os alunos. Ela está intimamente ligada com a sequência de Fibonacci ( $F_n$ ), com  $n \in \mathbb{N}$ , dada por

$$\begin{aligned}F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3.\end{aligned}$$

E esta sequência também tem uma grande quantidade de aparições em diversos elementos na natureza. Através desses motivadores, os alunos tiveram um grande aprendizado e foram aulas bem tranquilas nas quais os alunos eram os protagonistas e o professor apenas alguém que direciona o trabalho.

## Referências

- [1] Daher, A. F. B., *Aluno e professor: protagonistas do processo de aprendizagem*.
- [2] Larrosa, Jorge. *Notas sobre a experiência e o saber da experiência.*, Revista Brasileira de Educação. São Paulo: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, n.19, J./abr, p. 20-28, 2002.
- [3] Livio, Mario, *Razão áurea: a história de fi, um número surpreendente*, Record (2006).
- [4] Lorenzato, S. *Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis.*, In: Lorenzato, Sérgio. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006. pg 3-38.
- [5] Passos, C. L. B. *Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática*, In: Lorenzato, Sérgio. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006. pg 39-56.
- [6] Queiroz, Rosania Maria, *Razão áurea*, (2007).
- [7] Rodrigues, F. C. e Gazire, E.S., *Reflexões sobre o uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão*, (2012).
- [8] Wilberstaedt, Giorgio *As formas e os números da natureza* Florianópolis (SC), 2004
- [9] <http://convergencias.esart.ipcb.pt/artigo.php?id=131> acessado 14/9/2015
- [10] <http://engenhariacivildauesc.blogspot.com.br/2010/11/vitruvio-e-seu-legado-para-aquitetura-e.html> acessado 16/9/2015

- [11] <http://www.entreculturas.com.br/2011/03/curso-de-fotografia-aula-4/> acessado 16/9/2015
- [12] <http://www.ciencia-cultura.com/astrologia/avan%C3%A7ado.html> acessado 18/9/2015
- [13] <http://www.montfort.org.br/a-beleza-no-mundo-no-homem-e-em-deus-a-filosofia-da-arte-a-sabedoria-de-deus-na-criacao-e-a-vida-espiritual-parte-7/> acessado 18/9/2015
- [14] <https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci> acessado em 22/9/2015

## **Aprendizagem matemática de docentes: um olhar para os professores que ensinam matemática nos anos iniciais**

**Raimunda de Oliveira** (deoliveirarai@hotmail.com)  
Universidade de Brasília

**Resumo.** A dinâmica de desenvolvimento profissional docente está vinculada ao enriquecimento das diferentes aprendizagens que cada educador vai construindo ao longo da carreira. As formações, tanto inicial quanto continuada, deveriam se estabelecer como espaços privilegiados de contribuição para um desenvolvimento profissional pleno e engajado na função social que ancora a docência. No entanto, muitas pesquisas apontam que tal situação não tem se configurado na prática e na realidade das escolas. Com base nesse quadro, esta pesquisa pretende analisar os processos de aprendizagem matemática de docentes em serviço. Para tanto, propõe-se uma pesquisa participante, vinculada a um processo formativo orientado pelas Teorias das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986) e Teorias dos Campos Conceituais de Vergnaud (1998). O cenário da pesquisa é uma escola situada na cidade de Ceilândia – Distrito Federal, e os sujeitos são professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental atuantes no 4º e 5º anos.

Trabalho em colaboração com *Cristiano Alberto Muniz*.

## **Referências**

- [1] BRANDÃO, CARLOS RODRIGUES; STRECK, DANILO ROMEU, *Pesquisa Participante: o saber da partilha.*, Aparecida – SP: Ideias & Letras (2006).
- [2] BROUSSEAU, GUY, *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino.*, São Paulo: Editora Ática, (2008).
- [3] SILVA, KÁTIA AUGUSTA CURADO PINHEIRO CORDEIRO, *A Formação de professores na perspectiva crítico-emancipadora.*, Brasília: FE/UNB: Revista Linhas Críticas, v.17, n. 32, p. 12-31, jan/abril (2011).
- [4] VERGNAUD, GÉRARD, *O que é aprender?*, In: Bittar, Marilena; Muniz, Cristiano Alberto. *A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*. Curitiba: Editora CRV, (2009).

# Uma nova propriedade do Triângulo de Pascal e um problema de caminhos do plano

Rogério Cesar dos Santos (rogerc@unb.br)  
Faculdade UnB Planaltina  
Universidade de Brasília

**Abstract.** : As a didactic problem of finding the point most visited by paths leads to new properties of the Pascal's Triangle, that involve inequalities between operations with their elements.

## Referências

- [1] A. L. MELO AND R. C. SANTOS, *Desigualdades no Triangulo de Pascal.*, Revista Eletronica Paulista de Matematica, 3 (2014).
- [2] C. M. L. NAGAMINE, A. HENRIQUES, M. C. UTSUMI AND I. M. CAZORLA, *Analise Praxeologica dos Passeios da Monica.*, Bolema, (2011).
- [3] R. C. SANTOS AND J. E. CASTILHO, *O problema do ponto mais visitado.*, Revista do Professor de Matemática, 82, 50-53 (2013).

## A Formação Geométrica de Licenciandos em Matemática de Instituições de Ensino Superior de Goiás e do Distrito Federal

Sandra Aparecida Oliveira Baccarin (sandrabaccarin@gmail.com)  
Laboratório de Novas Tecnologias  
Universidade Federal Fluminense

**Resumo.** Relatos de dificuldades relacionadas à formação geométrica dos estudantes, desde a Educação Básica até cursos de formação de professores, têm sido recorrentes no cenário educacional brasileiro desde a última década do século passado e persistem até os dias de hoje. Pavanello [5], Perez [6] e Pais [3] apresentam vários argumentos para explicar tal dificuldade, entre elas a falta de preparo dos professores e a omissão diretamente relacionada às condições de ensino e aprendizagem da geometria, no Ensino Fundamental e Médio, e nos cursos de formação de professores. Em função disso, mantém-se a não superação dessas dificuldades como enfatizam muitos estudos: alunos e professores apresentam dificuldades em reconhecer figuras planas e tridimensionais [2]; os alunos têm acentuadas dificuldades em resolver problemas envolvendo conceitos geométricos [12]. Apesar das iniciativas de recuperação do ensino da Geometria e da reformulação dos livros didáticos, ainda hoje ela é pouco estudada nas escolas [4]. No entanto, outros estudos têm mostrado possibilidades de enfrentamento e demarcam caminhos em prol de melhorias para o ensino e aprendizagem da Geometria. Várias iniciativas exitosas podem ser conhecidas nos anais de grandes eventos da área de ensino de Matemática realizados no Brasil, como é o caso do Encontro Nacional de Educação Matemática e o Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (Para conhecer as propostas acesse: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/sipem.html> e [http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/anais\\_enem.html](http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/anais_enem.html)). Apesar das inúmeras iniciativas de recuperação do ensino da Geometria e da reformulação dos livros didáticos, ainda hoje ela não é

estudada a contento nas escolas brasileiras, em especial, nas públicas [3] e seu ensino encontra forte resistência, até mesmo no Ensino Superior. Diante disso, temos desenvolvido, desde 2005, estudos no âmbito de um projeto de pesquisa, que tem como objetivo compreender as dificuldades e as competências de ingressantes e concluintes de cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia de instituições públicas e privadas, do Estado de Goiás e do Distrito Federal, nos vários domínios do conhecimento que integram essa formação. Esse projeto tem produzido resultados valiosos no que se refere: 1. à investigação das capacidades conceituais dos licenciandos, quando estes ingressam nos cursos; 2. à reflexão da prática docente dos formadores de professores; 3. à aquisição conceitual por parte dos estudantes; 4. aos processos de análise e reconstrução do Projeto Pedagógico dos cursos e 5. ao papel da pesquisa educacional para os processos de formação de professores. Discutimos esses resultados em Pina Neves, Baccarin, Muniz e Nascimento [9]; Pina Neves, Silva e Baccarin [10]; Baccarin e Pina Neves [1], Baccarin, Pina Neves e Silva [1]; Silva, Pina Neves e Baccarin [13], Pina Neves, Baccarin e Silva [11], entre outros. Desse modo, neste trabalho, optamos por apresentar um *survey*, reunindo as pesquisas realizadas até o momento, no âmbito da Geometria, bem como os dados e as informações obtidas e os modos que temos utilizado a replicação de questões do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) para a compreensão das competências e das dificuldades conceituais dos ingressantes e concluintes dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Trabalho em colaboração com *Regina da Silva Pina Neves e Jhone Caldeira Silva*.

## Referências

- [1] S. A. O. BACCARIN; R. S. PINA NEVES, *A formação estatística de ingressantes em um curso de licenciatura em matemática*, Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife – PE (2011).
- [2] S. A. O. BACCARIN; R. S. PINA NEVES; J. C. SILVA, *A Formação Geométrica de uma Instituição Pública*, Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Petrópolis – RJ (2012).
- [3] P. F. LIMA; J. B. P. CARVALHO, *A Geometria Escolar hoje: conversas com o professor que ensina matemáticas*, In: M. C. L. SILVA; W. R. VALENTE (org.). *A geometria nos primeiros anos escolares: história e perspectivas atuais*. Campinas: Papirus, 83-128 (2014).
- [4] L. NASSER; L. TINOCO, *Argumentações e provas no ensino de matemática*, Projeto Fundação, Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 109p. (2001).
- [5] L. C. PAIS, *Transposição didática*, In: S. D. A. Machado (org.). *Educação matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 13-42 (1999).
- [6] C. L. PASSOS, *Que Geometria acontece na sala de aula?*, In: M. G. N. Mizukami; A. M. M. R., Reali. *Processos formativos da docência: conteúdos e práticas*. São Carlos: EDUFSCar, 16-44 (2005).
- [7] M. R. PAVANELLO, *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências*, Revista Zetetiké, Campinas, ano 1, n. 1, 7-17 (1993).
- [8] G. PEREZ, *Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicos da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas (1991).

- [9] R. S. PINA NEVES; S. A. O. BACCARIN; C. A. MUNIZ; A. M. P. NASCIMENTO, *Formação inicial de professores de matemática: uma análise a partir dos dados do ENADE 2005*, Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte – MG (2007).
- [10] R. S. PINA NEVES; J. C. SILVA; S. A. O. BACCARIN, *A formação do licenciado em matemática: em análise a aprendizagem dos conceitos geométricos a partir dos dados do ENADE de 2005 e 2008*, Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Brasília – DF (2009).
- [11] R. S. PINA NEVES; S. A. O. BACCARIN; J. C. SILVA, *A produção escrita de estudantes da licenciatura em Matemática em questão do Exame Nacional do Ensino Médio*, Anais do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Pirenópolis – GO (2015).
- [12] N. PIROLA, *Solução de problemas geométricos: dificuldades perspectivas*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas (2003).
- [13] J. C. SILVA; R. S. PINA NEVES; S. A. O. BACCARIN, *Geometria Espacial na Licenciatura em Matemática: em análise a formação dos futuros professores de Matemática de uma instituição pública*, Anais do VII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática, Montevideo – UR (2013).

## Atividades de formação no contexto do PIBID da matemática da Universidade de Brasília: experiências a partir da análise de notações de estudantes

Suelen Ferreira de Sousa (suellenamri1515@hotmail.com)  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

**Resumo.** O estudo analisa a produção escrita de escolares da educação básica em atividades ligadas ao Programa Institucional de Bolsa a Iniciação a Docência (PIBID) de matemática da Universidade de Brasília, Brasil, com dois objetivos centrais: 1) Compreender os processos de conceituação matemática de escolares da educação básica, revelados em suas produções escritas e, 2) compreender como a análise da produção escrita de escolares da educação básica desenvolve os licenciandos para a mediação em processos de conceituação matemática. Participaram deste estudos 2 licenciandos em Matemática com mais de 90% do curso realizado. Cada um dos licenciandos ministrava aulas 1 vez por semana, com duração de 2 horas cada, totalizando 26 horas cada, entre os meses de março a junho de 2015. Um dos licenciandos desenvolveu atividades que relacionavam os conceitos de simetria e noções de probabilidade e funções junto a 13 estudantes de uma escola da rede pública do Distrito Federal. Os escolares apresentaram escrita matemática e em língua portuguesa incoerentes com o ano escolar em questão e dificuldades conceituais relacionadas aos conceitos abordados. O licenciado desenvolveu novas estratégias metodológicas e discurso mediacional a fim de auxiliar os escolares na superação das dificuldades, por meio da análise constante da produção escrita revelada nos encontros. Já a outra licencianda desenvolveu atividades que abordavam conceitos geométricos junto a 2 estudantes que também eram de escola da rede pública do Distrito Federal. Os resultados mostraram que os escolares apresentavam baixa conceituação geométrica, em especial, em tópicos curriculares anteriores. Ao longo do processo mediacional, novas competências foram desenvolvidas

por meio da análise constante da produção escrita produzida nos encontros. Desse modo a análise da produção escrita de escolares mostrou-se vital para o processo de formação inicial em curso.

Trabalho em colaboração com *Leonardo Gomes Pires e Regina da Silva Pina Neves e Jhone Caldeira Silva.*

## Referências

- [1] CURY, H.N. 2008. *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1ª edição, 1ª reimpressão, BH. Autêntica.*
- [2] CELESTE, L. B. A. 2008. *Produção Escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina.*
- [3] BURIASCO, R. L. C. 2004. *Análise da Produção Escrita: a busca do conhecimento escondido. XII Endipe - Encontro Nacional De Didática E Prática De Ensino - Anais. Curitiba: 113 Champagnat. 3: 243-251.*
- [4] PINA NEVES, R. S.; BACCARIN, S. A. O.; SILVA, J. C. 2013. *Geometria Espacial na Licenciatura em Matemática: em análise a formação dos futuros professores de Matemática de uma instituição pública. VII Congresso Iberoamericano De Educación Matemática - Anais. Montevideo-UR.*
- [5] MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. 2003. *Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. Zetetiké. 11(19): 57-80.*
- [6] FIORENTINI, D. 2004. *A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. VII Encontro de Pesquisa em Educação Matemática Paulista, São Paulo-BR.*
- [7] SKOVSMOSE, O. 2000. *Cenários para investigação. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 14:66-91.*
- [8] SZCZPANSKI, K.; GREBOT, G. 2013. *O estudo da esfera através da sua construção. VII congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (Montevideu).*

## Algoritmo de Euclides

Susiane Bezerra Caixeta (susicaixeta@gmail.com)  
Universidade de Brasília

**Resumo.** A justificativa para a escolha do tema foi a dificuldade encontrada pelos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental II (6o. e 7o. anos) em realizar com perícia a operação de divisão. O objetivo deste trabalho é justificar toda a base matemática que está por trás do Algoritmo de Euclides e dessa forma auxiliar o público-alvo, que são os professores de educação básica, a entenderem melhor como ocorre o processo de divisão entre números inteiros e, dessa forma, aprimorarem suas aulas referentes a esse conteúdo. A dissertação se inicia com uma introdução falando sobre a parte histórica que envolve esse assunto, sendo baseada na referência BOYER (1996). Além disso, a introdução também traz a importância de buscar exemplos do dia a dia para serem usados em sala de aula,

como se encontra justificado na referência DEVLIN (2009). Nos capítulos 2 e 3 serão construídos os conjuntos dos números naturais e inteiros, respectivamente. Essas construções serão feitas de forma axiomática, através de definições e com teoremas, proposições e corolários com suas respectivas demonstrações. Esses dois capítulos serão baseados nas referências FERREIRA (2011), COELHO e MILIES (2006) e GODINHO e SHOKRANIAN (1999). No capítulo 4, será introduzido o conceito de divisibilidade, com algumas propriedades interessantes e, por fim, o Algoritmo da Divisão, ou Algoritmo de Euclides. Esse capítulo será baseado nas referências FERREIRA (2011) e COELHO e MILIES (2006). No capítulo 5 serão sugeridas atividades a serem aplicadas em turmas de 6o. e 7o. anos do ensino fundamental II. Essas atividades serão baseadas na referência TAHAN (2014) e em uma atividade feita com calendários (encontrar o dia da semana a que uma determinada data corresponde). Caso seja possível aplicar as atividades propostas, teremos o capítulo 6 com os resultados e experiências do desenvolvimento dessas com os alunos das séries em questão.

Trabalho conjunto com *Aline Gomes da Silva Pinto*.

## Referências

- [1] BOYER, CARL BENJAMIN, *História da Matemática*, São Paulo: Edgard Blücher, 2a. edição (1996).
- [2] FERREIRA, JAMIL, *A construção dos números*, Rio de Janeiro: SBM, 2a. edição (2011).
- [3] MILIES, CÉSAR POLCINO; COELHO, SÔNIA PITTA, *Números: Uma introdução à Matemática*, São Paulo: Edusp, 2a. edição (2006).
- [4] SHOKRANIAN, SALAHODDIN; SOARES, MARCUS; GODINHO, HEMAR, *Teoria dos Números*, Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2a. edição (1999).
- [5] TAHAN, MALBA, *O Homem que Calculava*, Rio de Janeiro: Record, 86a. edição (2014).
- [6] DEVLIN, KEITH J., *O instinto matemático*, Rio de Janeiro: Record, (2009).

## Geometria de Galileu

Vicente Lopes da Luz (prof.vicente@gmail.com)  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

**Resumo.** Quando o tema é geometria não euclidiana, logo nos vem à mente o modelo de geometria criado a partir do quinto postulado de Euclides. Neste trabalho, apresentamos uma situação diferente, um modelo pouco conhecido chamado de geometria de Galileu, devido à sua origem ser a mecânica estudada por Galileu Galilei. Esta geometria não euclidiana ou semi-euclidiana é desenvolvida no sistema de coordenadas  $xOy$ , onde a abscissa  $x$  é a coordenada temporal e a ordenada  $y$  a espacial. De acordo com F. Klein(1849-1925), geometria é o estudo das propriedades invariantes de uma figura. Assim, as transformações de Galileu

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b, \end{cases}$$

que permitem passar de um referencial inercial para outro referencial inercial, são as isometrias desta geometria. Seguindo a orientação do regimento do PROFMAT, a proposta desta monografia é desenvolver um referencial teórico envolvendo as propriedades e as transformações comuns e não comuns nos dois modelos. Será elaborada uma série de atividades para serem aplicadas em sala de aula.

## Referências

- [1] YAGLOM, ISAAK MOISEEVICH. *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*. Nauka, Moscow, 1969.

## A percepção da avaliação da aprendizagem de alunos de cálculo diferencial e integral da Universidade de Brasília

Wesley Well Vicente Bezerra (wescley@unb.br)  
Universidade de Brasília

**Resumo:** Esse projeto de pesquisa tem por objetivo analisar as percepções dos alunos de Cálculo Diferencial e Integral da Universidade de Brasília sobre a avaliação da aprendizagem, identificando e analisando as práticas avaliativas relatadas pelos discentes e seu perfil socioeconômico. Além disso, busca-se compreender a relação entre sucesso/insucesso na disciplina e as práticas avaliativas utilizadas e o potencial formativo que as percepções sobre a avaliação possam ter no desenvolvimento dos discentes e docentes de Cálculo 1. Trata-se, quanto à natureza, de uma pesquisa quali-quantitativa ou mista, a partir do uso do método *survey*, que tem o questionário como principal método de levantamento de dados.

Trabalho em colaboração com *Cleyton Hércules Gontijo*.

## Referências

- [1] CRESWELL, JOHN W., *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Artmed, 2007.
- [2] FIORENTINI, DARIO E LORENZATO, SERGIO, *Investigação em Educação Matemática / percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.
- [3] HOFFMANN, JUSSARA, *Avaliação: mito e desafio*. Porto Alegre, RS: Mediação, 2014.
- [4] LUCKESI, CIPRIANO CARLOS, *Avaliação da aprendizagem / componente do ato pedagógico*. São Paulo: Cortez, 2011.

# Geometria

## Operadores diferenciais em variedades Riemannianas e aplicações

José Nazareno Gomes Vieira (jnvvgomes@gmail.com)  
Instituto de Ciências Exatas  
Universidade Federal do Amazonas

**Resumo.** Fazer uma introdução ao estudo de equações diferenciais parciais sobre Variedades Riemannianas e estudar os principais operadores diferenciais nesses ambientes.

## Referências

- [1] A. D. Alexandrov, *Uniqueness Theorems for surfaces in the Large*, I. Vestnik Leningrad Univ., 11, 5-17 (1956).
- [2] A. Barros and J. N. Gomes, *A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature*, J. Math. Anal. Appl. 401, 702-705 (2013).
- [3] A. Barros, J. N. Gomes and E. Ribeiro, *A note on rigidity of the almost Ricci soliton*, Arch. der Math., 100, 481-490 (2013).
- [4] R. J. Biezuner, *Equações Diferenciais Parciais I/II*, Notas de Aula, Minas Gerais (2010).
- [5] S. Brendle, *Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 117, 247-269 (2013).
- [6] . Brickell and R. S. Clark, *Differential Manifolds*, London Van Nostrand Reinhold Co. (1973).
- [7] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (2011).
- [8] M. P. do Carmo, *O Método do Referencial Móvel*, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro (2012).
- [9] M. P. do Carmo, *Formas Diferenciais e Aplicações*, Oitavo Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro (1971).
- [10] J. Cheeger, *Finiteness theorems for Riemannian manifolds*, Amer. J. Math., 92, 61-74 (1970).
- [11] J. R. Furlanetto, *Sobre Equações Elípticas e Aplicações*, Dissertação de Mestrado em Matemática, Curitiba (2007).
- [12] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, New York (2001).
- [13] J. N. Gomes, *Rigidez de Superfícies de Contato e Caracterização de Variedades Riemannianas Munidas de um Campo Conforme ou de Alguma Métrica Especial*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza (2012).

- [14] E. Heintze and H. Karcher, *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. École Norm., 11, 451-470 (1978).
- [15] W. Klingenberg, *Contributions to Riemannian Geometry in the large*, Ann. of Math., 69, 654-666 (1959).
- [16] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York (2003).
- [17] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-Verlag, New York (2011).
- [18] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, New York (1997).
- [19] E. L. Lima, *Curso de Análise vol. 2*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (2010).
- [20] R. R. Mesquita, *Fórmulas variacionais tipo Hadamard para os autovalores do  $\eta$ -laplaciano e aplicações*. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Amazonas, Manaus (2014).
- [21] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York (1998).
- [22] H. E. Rauch, *A contribution to differential geometry in the large*, Ann. of Math., 54, 38-55 (1951).
- [23] A. Ros, *Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures*. Revista Matemática Iberoamericana, 3, 447-453 (1987).
- [24] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish (1979).

## Third order differential equations and local isometric immersions of pseudospherical surfaces

Tarcísio Castro Silva (cisocastro@gmail.com)  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

**Abstract.** The class of differential equations describing pseudospherical surfaces enjoys important integrability properties which manifest themselves by the existence of infinite hierarchies of conservation laws (both local and non-local) and the presence associated linear problems. It thus contains many important known examples of integrable equations, like the sine-Gordon, Liouville, KdV, mKdV, Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations, and is also home to many new families of integrable equations. Our paper is concerned with the question of the local isometric immersion in  $\mathbf{E}^3$  of the pseudospherical surfaces defined by the solutions of equations belonging to the class introduced by Chern and Tenenblat [1]. In the case of the sine-Gordon equation, it is a classical result that the second fundamental form of the immersion depends only on a jet of finite order of the solution of the pde. A natural question is therefore to know if this remarkable property extends to equations other than the sine-Gordon equation within the class of differential equations describing pseudospherical surfaces. In a pair of earlier papers [2], [3] it was shown that this property fails to hold for all  $k$ -th order evolution equations  $u_t = F(u, u_x, \dots, u_{x^k})$  and all other second order equations of the form  $u_{xt} = F(u, u_x)$ , except for the sine-Gordon equation and a special class of equations for which the coefficients of the second fundamental form are universal, that is functions of  $x$  and  $t$  which

are independent of the choice of solution  $u$ . In the present paper, we consider third order equations of the form  $u_t - u_{xxt} = \lambda uu_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , which describe pseudospherical surfaces with the Riemannian metric given in [4]. This class contains the Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations as special cases. We show that whenever there exists a local isometric immersion in  $\mathbf{E}^3$  for which the coefficients of the second fundamental form depend on a jet of finite order of  $u$ , then these coefficients are universal in the sense of being independent on the choice of solution  $u$ . This result further underscores the special place that the sine-Gordon equations seems to occupy amongst integrable partial differential equations in one space variable.

Joint work with *Niky Kamran*.

## Referências

- [1] Chern, S. S.; Tenenblat, K. *Pseudospherical surfaces and evolution equations*. Stud. Appl. Math. **74** (1986), 55-83.
- [2] Kahouadji, N.; Kamran, N.; Tenenblat, K. *Second-order equations and local isometric immersions of pseudo-spherical surfaces*. arXiv: 1308.6545, 25 pages. To appear in Comm. Analysis and Geometry, 2015.
- [3] Kahouadji, N.; Kamran, N.; Tenenblat, K. *Local isometric immersions of pseudo-spherical surfaces and evolution equations*. Hamiltonian Partial Differential Equations and Applications, Guyenne, P.; Nichols, D.; Sulem, C. Editors Fields Institute Communications, Springer-Verlag, **75** (2015), 369-381.
- [4] Castro Silva, T.; Tenenblat, K. *Third order differential equations describing pseudospherical surfaces*. J. Diff. Eq. **259** (2015), 4897-4923.

# Matemática Aplicada

## Dinâmica de Fluidos

### Sound propagation in lined annular ducts with mean swirling flow

Ana Luisa Pereira Maldonado (analuisamaldonado@gmail.com)  
Institute of Sound and Vibration Research  
University of Southampton

**Abstract.** The current trends for turbofan engines are towards shorter nacelles and increased distances between the fan and the outlet guide vanes. This leads to an overall reduction in lined surface areas as well as an increase in the relative importance of the interstage liner, which is the liner placed between the rotor blades and the stator vanes. The interstage is different in that the liner is subject to a mean flow with a strong swirl component and shear. This work aims to evaluate the effect of swirl on liner attenuation in annular ducts. The analysis presented is based on the governing equations for an isentropic swirling mean flow and a homentropic unsteady field. The eigenvalue problem is obtained by applying normal mode analysis to the linearized Euler Equations together with the Ingard-Myers boundary condition. Results from the Finite Difference Code are compared to measured data from the Advanced Noise Control Fan (ANCF) from NASA Glenn Research Center.

Joint work with *Braulio Gutierrez Pimenta*.

### Referências

- [1] A. L. P. MALDONADO, R. J. ASTLEY, J. COUPLAND, G. GABARD, D. L. SUTLIFF, *Sound Propagation in Lined Annular Ducts with Mean Swirling Flow*, 21th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA 2015-2518, 2015.

### Predição numérica de ruído de turbinas aeronáuticas utilizando a metodologia da fronteira imersa móvel

Braulio Gutierrez Pimenta (braulio.pimenta@gmail.com)  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade de Brasília

**Abstract.** Seminário sobre a simulação numérica da predição de ruído em aeronaves. Tida como uma das piores formas de poluição, o ruído emitido por aeronaves tem forte impacto social e econômico sobre as áreas próximas a aeroportos. O objetivo do trabalho desenvolvido que será apresentado visa

predizer numericamente o ruído emitido pela interação aeroacústica do conjunto rotor e estator de turbofans aeronáuticos. Este tipo de interação é responsável pela maior parte do ruído gerado pela aeronave em algumas fases do voo. Será apresentada em detalhe a metodologia da fronteira imersa móvel, aplicada ao método de volumes finitos com as equações de Euler na forma compressível para o cálculo aeroacústico da interação rotor-estator. Os casos de validação da metodologia numérica apresentados incluem o rotor nos regimes de escoamento subsônico, transônico e supersônico com aproximação anular bidimensional.

## Referências

- [1] R. F. BOBENRIETH MISERDA, B. GUTIERREZ P., R. L. BITES LEÃO E A. L. P. MALDONADO, *Validation of a Moving-Body High-Order Immersed Boundary Method for Direct Tonal Noise Predictions of Rotor-Stator Interactions*, 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA 2013-2292, 2013.
- [2] B. GUTIERREZ P., R. F. BOBENRIETH MISERDA, *Direct Noise Computation of Linear and Nonlinear Rotor-Stator Interaction Modes in Transonic Cascades*, 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA 2014-2947, 2014.
- [3] B. GUTIERREZ P., R. F. BOBENRIETH MISERDA, *Validation of a Moving-Body High-Order Immersed Boundary Method for the Multiple Pure Tone Noise Generated by Supersonic Rotor Cascades*, 21th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA 2015-2518, 2015.

## Usos de operadores adjuntos em mecânica dos fluidos: otimização, sensibilidade e receptividade de escoamentos

Bruno Souza Carmo (bruno.carmo@usp.br)  
Escola Politécnica  
Universidade de São Paulo

**Resumo.** O aumento da capacidade computacional ocorrido nas últimas décadas tornou possível realizar cálculos de estabilidade linear global de escoamentos complexos. A aplicação deste tipo de análise acabou também por motivar o desenvolvimento de outras ferramentas capazes de fornecer informações que não estão imediatamente disponíveis a partir da simulação direta dos escoamentos. Muitas destas ferramentas baseiam-se em algoritmos que empregam o operador adjunto das equações de Navier-Stokes, e elas serão o assunto desta palestra. Serão abordadas técnicas de otimização, cálculo de sensibilidade e cálculo de receptividade de escoamentos usando uma abordagem variacional, que permite que as ideias apresentadas possam ser aplicadas também a outros fenômenos modelados por equações diferenciais parciais. Mostraremos que o uso destas técnicas pode ser de grande valia em aplicações tecnológicas e análises científicas.

## Autômatos celulares generalizados pela função iota-delta: aplicação a equações diferenciais parciais

Lucas Parreira de Faria Borges (lucaspdfborges@gmail.com)  
Departamento de Engenharia Civil  
Universidade de Brasília

**Resumo.** Até cerca de quarenta anos atrás, a modelagem da natureza como meio contínuo dominava o ideário dos cientistas das mais diversas áreas do conhecimento. O fato, no entanto, de problemas recorrentes à época não encontrarem solução fundamentada no princípio do contínuo despertou especial interesse nos cientistas. Em um primeiro momento, a Física Atômica passou por uma grande mudança em seus conceitos, qual seja: a introdução dos quanta. Posteriormente, a natureza discreta dos fenômenos naturais concernentes a várias áreas da ciência – inclusive a Engenharia Geotécnica – mostrou-se determinante na construção de um novo tipo de ciência, o qual se baseia em caos, fractais e autômatos celulares. Esses últimos são, reconhecidamente, o paralelo discreto das equações diferenciais parciais haja vista modelarem fenômenos dinâmicos em domínios discretos. A partir dos princípios introduzidos por Wolfram e de aritmética modular, uma nova fórmula que descreve todos os autômatos de Wolfram é deduzida. Por meio de um paralelo entre o método das diferenças finitas e a fórmula geral derivada, pode-se conferir valoração quantitativa aos autômatos celulares, mostrando que as equações diferenciais parciais são de fato um caso especial desse tipo de modelagem inovadora. Buscou-se aplicar a formulação proposta ao estudo de fluxo de solutos em meios porosos.

Trabalho conjunto com *André Brasil e Luan Carlos de Sena Monteiro Ozelim.*

## Referências

- [1] OZELIM, L.C. DE S.M., CAVALCANTE, A.L.B. AND BORGES, L.P. DE F. ,  
(2013). *On the iota-delta function: Universality in Cellular Automata's Definition.* , Complex Systems. V. 21 (4), pp. 283-296.
- [2] OZELIM, L.C. DE S.M., CAVALCANTE, A.L.B. AND BORGES, L.P. DE F. ,  
(2013). *Continuum versus Discrete: A Physically Interpretable General Rule For Cellular Automata By Means of Modular Arithmetic.* , Complex Systems. V. 22 (1), pp. 75-99.

## Race car aerodynamics, the pursuit of the extra millisecond

Luis Felipe de Aguilar Paulinyi (paulinyi@unb.br)  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade de Brasília

**Abstract.** In the past half century, race car teams have evolved from the iconic *garagistes era*, where intrepid drivers and mechanics competed with their insightful designs for glory and for sheer speed, for a complex multi-billion dollar innovation industry with hundreds of employees and engineers trying to optimize a car design making use of the latest technological and scientific advances, with

aerodynamics playing a leading role in reducing lap times and CFD becoming a standard tool in F1 car development in the last 15 years.

With the ever increasing computing power and the evolution of flow modelling and computer algorithms, teams not only started to use CFD as tool to better understand the flow over the car, but also as an important development tool, that reduces costs and lead time of model making for wind tunnel testing and allow them to test thousands of concepts per week.

An example of such a design methodology for aerodynamic optimisation using CFD tools will be shown, with an overview of a project for developing an efficient aero-design for a single seater open-wheel hill-climb racing car. The investigation of the flow field of the vehicle and the design methodology which included optimisation algorithms and management techniques that resulted in the test of 42 different full car configurations will be presented.

Joint work with *Pozo, J. ; Brito, M. D. ; Giovanetti, M. ; Rajan, P. ; Torro, R. P.*

## Referências

- [1] PAULINYI, L. F. A.; POZO, J. ; BRITO, M. D. ; GIOVANETTI, M. ; RAJAN, P. ; TORRO, R. P., *Aerodynamic Optimization of an Open Whelless Race Car.*, University of Southampton (2013).
- [2] KATZ, J., *Race Car Aerodynamics: Designing for Speed.*, Cambridge, Ma: Bentley Publishers (2006).
- [3] SMITH, A. M. O., *High-Lift Aerodynamics.*, AIAA Journal of Aircraft, Vol. 12, No. 6, pp. 501-530 (1975).
- [4] LIEBECK, R. H., *Design of Subsonic Airfoils for High Lift.*, J. Aircraft, Vol. 15, No. 9, pp. 547- 561 (1978).
- [5] ZERIHAN, J., ZHANG, X., TOET, W., *Ground Effect Aerodynamics of Race Cars.*, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 59, No. 1, pp. 33-49 (2006)

## Numerical investigation of thermal stratification in scaled down model of liquid metal fast breeder reactor (LMFBR)

**Shyam Sumanta Das** ([das.shyamsumanta@gmail.com](mailto:das.shyamsumanta@gmail.com))  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

**Abstract.** In the present day world, nuclear energy is one of the vital energy sources for the production of electricity throughout the world. It has many advantages over other renewal energy sources such as wind and solar. Over the year, various types of nuclear reactors were designed across the world. Researchers are focusing on the efficient design and implementation of Liquid metal fast breeder reactors (LMFBR) in developing countries across the world. The occurrence of thermal stratification near the upper plenum of the reactor during safety control rod accelerated movement (SCRAM) conditions is catastrophic for the structural integrity of the reactor. Therefore, the study of thermal stratification is essential for efficient thermal hydraulic design of pool type LMFBRs. In

the past, few numerical works were carried out to study the effects of turbulence models on thermal stratification. The proposed turbulence model in the literature contains several model parameters which leads to excessive empiricism. In view of this, the present work focuses on the selection of a turbulence model which contains few model parameters and can predict the flow field properly. Three turbulence models (Standard  $k-\epsilon$  model, Standard  $k-\omega$  model and SST  $k-\omega$  model) were taken and a detailed comparative study was carried out on thermal stratification and its characteristics. Computational work was carried out by using a commercial code FLUENT 6.3 (2009). It was interesting to note that, standard  $k-\omega$  model is able to capture the flow field. Thermal stratification characteristics such as rising speed of the stratification interface were captured by standard  $k-\omega$  model. It was also found that, during the transient conditions the size of the circulation cells plays a crucial role in determining the speed of the stratification interface.

Joint work with *Akshaya K. Sahoo*.

## Modelagem da Voz

### Jitter generation in voice signals produced by a two-mass stochastic mechanical model

**Edson Luiz Cataldo Ferreira** (ecataldo@im.uff.br)  
Instituto de Matemática  
Universidade Federal Fluminense

**Abstract.** Jitter is a phenomenon caused by the perturbation in the length of the glottal cycles due to the quasi-periodic oscillation of the vocal folds in the production of the voice. It can be modeled as a random phenomenon described by the deviations of the glottal cycle length in relation to a mean value. Its study has been developed due to important applications such as aid in identification of pathological voices, when its values are large, because a normal voice has naturally a low level of jitter. The aim of this paper is to construct a stochastic model of jitter using a two-mass mechanical model of the vocal folds, assuming complete right-left symmetry of the vocal folds and considering the motion of the vocal folds only in the horizontal direction. The stiffnesses taken into account in the model are considered as stochastic processes and their modeling are proposed. Glottal signals and voice signals are generated with jitter and the probability density function of the fundamental frequency is constructed for several values of the hyperparameters that control the level of jitter.

### Coupled oscillators in voice modeling

**Jorge C. Lucero** (lucero@unb.br)  
Departamento de Ciência da Computação  
Universidade de Brasília

**Abstract.** Coupled oscillators are ubiquitous in mathematical physiology. Since the classical study of Van der Pol and Van der Mark on the heartbeat almost a century ago, coupled oscillators have

been applied to model the physiology of the intestine, circadian rhythms, the cardiovascular system, biped locomotion, visual perception and several other systems.

Coupled oscillators also play a central role in voice production. In normal phonation, the left and right vocal folds at the larynx are symmetric and oscillate in complete in-phase synchrony. Abnormalities such as tissue lesions and neurological disorders introduce right-left asymmetries which may restrict the synchronization and cause complex entrainment regimes, quasi-periodic oscillations and other nonlinear phenomena.

Further, the vocal fold oscillator is coupled with other nearby oscillatory structures, such as the ventricular and aryepiglottic folds, and to the resonant cavities of the vocal tract and trachea. When the oscillation frequency is near a resonance, frequency jumps, bifurcations and other voice instabilities may occur. Still, the cycles of breathing, heartbeat and neurological oscillators associated with muscle innervation of larynx, vocal tract and lungs, affect the oscillation and cause frequency and amplitude fluctuations. The vibrato, ornament in singing, is a voluntary fluctuation generated by coupling to a neuromuscular oscillator.

In this talk, we present our progress in the application of coupled oscillators to model phonation and and simulate normal and disordered voices.

## Economia Matemática

### Ensaio em teoria de contratos aplicada no setor de telecomunicações com foco nos investimentos - Análise de licitações para celebração de Termos de Ajustamento de Conduta na Anatel

Hélio Mauricio Miranda da Fonseca (hmmfonseca@gmail.com)

Departamento de Economia

Universidade de Brasília

Anatel - Agência Nacional de Telecomunicações

**Abstract.** O presente trabalho trata da definição de um mecanismo de licitação que visa maximizar a eficiência do processo de celebração de termos de ajustamento de conduta por parte da Anatel, bem como, por consequência, a maximizar a eficiência dos investimentos no setor. Utiliza-se uma abordagem baseada na teoria de leilões, sendo uma das duas modelagens relativa às licitações sequenciais com a definição do preço de reserva endógeno que busca verificar a hipótese de que o referido mecanismo é mais vantajoso para o Estado do que o modelo de licitação padrão, no sentido de promover a implementação de projetos relevantes para o desenvolvimento das telecomunicações, com o menor custo para o Estado. O resultado obtido aponta em sentido diverso, isto é, o modelo de licitação padrão mostrou-se mais vantajoso, contribuindo para descartar a ideia do modelo sequencial aventada. Sendo assim, pode-se afirmar que o presente trabalho buscou contribuir com o debate recente no setor de telecomunicações do Brasil. Considerando a importância do setor de telecomunicações sobre o crescimento econômico, e as recentes dificuldades enfrentadas pelo setor no que se refere ao volume de multas aplicadas, surge uma oportunidade de realizar investimentos economicamente menos atrativos de forma eficiente, via mecanismo de licitação, que de outra maneira não seriam feitos no curto prazo.

# The dynamics of supply-side liquidity/profit-rate cycles in the presence of the Marxian reserve army mechanism with state intervention

Ricardo Azevedo Araujo (rsaaraujo@unb.br)

Departamento de Economia

Universidade de Brasília

**Abstract.** In the present paper we study how the dynamics of Foley's model may be affected by the presence of a Marxian reserve army mechanism, i.e., a money wage Phillips curve with a perfect spill-over of price inflation on wage inflation to the model. The upshot is a model with endogenous price and wage dynamics in which the equilibrium is then shown to be unstable, meaning that the integration of the liquidity profit rate cycle of Foley with the Goodwin employment rate profitability cycle requires state intervention in order to stabilize the economy. With this approach we show that Foley's initial insight is consistent with flexible prices and wages only in the presence of a monetary authority entrusted with the role of establishing a rule for money supply. The obtained equilibrium may degenerate into a limit cycle if the growth rate of liquidity decreases to a sufficient degree. In order to illustrate this result we carry on the analysis both in terms of general functions as well as in terms of a particular example.

Joint work with *Helmar Nunes Moreira and Peter Flaschel.*

# Probabilidade

## Probabilidades assintóticas de somas ponderadas de variáveis aleatórias com cauda pesada

Debora Borges Ferreira (debora@ccet.ufrn.br)  
Departamento de Matemática  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

**Resumo.** Esse é um breve estudo sobre as caudas de somas ponderadas de variáveis com cauda pesada, baseados no trabalho de Hai-zhong Yang *Asymptotic Tail Probability of Randomly Weighted Sums of Dependent Random Variables with Dominates Variation*. Aplicaremos tal resultado em Teoria da Ruína e em Alocação de Capital.

## Métodos de integração de equações diferenciais estocásticas

Hugo Alexander de la Cruz Casino (hugo.delacruz@fgv.br)  
Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro

**Resumo.** A teoria de equações diferenciais estocásticas (EDEs) é um tópico na área de análise estocástica, no cruzamento de processos aleatórios e equações diferenciais, com um enorme desenvolvimento nos últimos anos e com uma ampla variedade de aplicações na modelagem de fenômenos e situações práticas onde a incerteza desempenha um papel significativo. Exemplos incluem finanças, neurociências e sistemas biológicos, entre outros. Uma vez que obter soluções dessas equações é raramente possível, muita atenção tem sido dada à construção de integradores numéricos para a simulação de EDEs. O objetivo do minicurso é apresentar uma vasta introdução aos métodos disponíveis para a integração numérica e simulação computacional de EDEs. Discutiremos métodos de discretização, desenhados para a aproximação forte de trajetórias do processo solução, e esquemas fracos apropriados para a simulação Monte Carlo de funcionais da solução. Analisaremos também as propriedades de estabilidade de esses integradores e questões relacionadas à implementação dos algoritmos estocásticos resultantes da discretização numérica. As possíveis aplicações na construção de métodos probabilísticos para EDP determinísticas também serão consideradas.

## Referências

- [1] D. J. Higham, *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*, SIAM Review, 43, 3, 525-546 (2001).
- [2] P. E. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* (1999).
- [3] G. N. Milstein and M. V. Tretyakov, *Stochastic Numerics for Mathematical Physics* (2004).
- [4] T. Sauer, *Computational solution of stochastic differential equations*. WIREs Comput Stat, doi: 10.1002/wics.1272 (2013).

## Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos

**Paulo Regis Caron Ruffino** (ruffino@ime.unicamp.br)  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Universidade Estadual de Campinas

**Resumo.** A intenção deste minicurso é divulgar a teoria de sistemas dinâmicos estocásticos, suas motivações, exemplos clássicos, seu potencial, aplicações e na medida do possível, instigar e provocar os alunos de graduação com problemas em aberto que tem enunciados compreensíveis neste nível. No livro texto *Uma Iniciação aos Sistemas Dinâmicos Estocásticos*, depois de construir os objetos básicos da teoria, apresento com mais detalhes, sem perder o caráter elementar dos argumentos e da motivação, uma série de propriedades, resultados e exemplos que venho apresentando em palestras de divulgação que venho fazendo há vários anos.

## Referências

- [1] P. R. C. Ruffino, *Uma Iniciação aos Sistemas Dinâmicos Estocásticos*, IMPA, Publicações Matemáticas, 3a. Edição (2009).

## Estimation and forecasting in processes derived from the solution of generalized Langevin equation.

**Silvia R. C. Lopes** (slopes@mat.ufrgs.br)  
Instituto de Matemática  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Abstract.** In this talk we present a class of continuous-time processes arising from the solution of the generalized Langevin equation and show some of its properties. We define three different dependence measures for stochastic processes and we study their empirical counterparts. These dependence measures replace the autocovariance function when it is not well defined. The maximum likelihood estimation procedure as well as the Bayesian estimation methodology are proposed to estimate the parameters of the process arising from the classical Langevin equation, i.e., the Ornstein-Uhlenbeck process, and of the so-called Cosine process. We present a simulation study for these two processes and the forecasting based on two techniques for the Ornstein-Uhlenbeck process. A long-range dependence process is briefly mentioned in the end. This talk is based on the paper *Continuous Processes Derived from the Solution of Generalized Langevin Equation: Theoretical Properties and Estimation*, by J. Stein, S.R.C. Lopes and A.V. Medino. To be published in *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2016.

# Sistemas Dinâmicos

## The variational principle for locally compact spaces

André Caldas de Souza (andrecaldas@unb.br)  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

**Abstract.** We have extended the *variational principle* for entropies to continuous transformations  $T : X \rightarrow X$  defined over locally compact separable metrizable spaces. To each  $T$ -invariant Radon probability measure  $\mu$ , there is an associated *Kolmogorov-Sinai* entropy,  $h_\mu(T)$ . The *Bowen entropy*,  $h_d(T)$ , is defined for each metric  $d$  compatible with the topology of  $X$ . And when  $X$  is compact, Adler, Konheim e McAndrew have defined the *topological entropy*,  $h(T)$ , in terms of open coverings.

To deliver a theory similar to the compact case (Theorem 8.6 in [4]), we have extended the concept of *topological entropy* using open coverings such that at least one of its members has compact complement (see [2]). Using this new definition, we have shown that

$$\sup_{\mu} h_{\mu}(T) = h(T) = \min_d h_d(T),$$

where the minimum of  $h_d(T)$  is attained when  $d$  is the restriction to  $X$  of any metric defined over its *one point compactification*.

The *variational principle* and the specific properties of those different kinds of entropy were applied in order to determine the entropy of certain Lie group endomorphisms (see [3]).

Joint work with *Mauro Patrão*.

## Referências

- [1] A. CALDAS AND M. PATRÃO. *Princípio Variacional e Entropia de Endomorfismos de Grupos de Lie*. PhD thesis, Universidade de Brasília — Instituto de Ciências Exatas — Departamento de Matemática, (2012).
- [2] A. CALDAS AND M. PATRÃO, *Entropy and Its Variational Principle for Locally Compact Metrizable Systems*. arXiv:1511.02057, (2015).
- [3] A. CALDAS AND M. PATRÃO, *Dynamics of endomorphisms of Lie groups*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 33, (2013).
- [4] P. WALTERS, *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, Berlin, (2000).

## The characteristic function of a semigroup

Laércio José dos Santos (ljdsantos@gmail.com)  
Departamento de Matemática  
Universidade Federal de Juiz de Fora

**Abstract.** We define the characteristic function of a semigroup with nonempty interior, in a noncompact semi-simple Lie group and we find a subset where the function is defined. This is done

through general theory of semigroups in semi-simple groups (see [2] and [3]). The characteristic function is used, together with some additional assumptions, to create a Riemannian metric in the orbits of the subgroup of the units of the semigroup. We showed that the units in the semigroup are isometry for this metric. As a consequence, we gave a necessary condition for a subgroup to be embedded in a proper semigroup with nonempty interior.

The definition of the characteristic function of a semigroup is a generalization of the characteristic function of a cone, in a vector space, that was defined as the Laplace transform of the function that is 1 in the cone and 0 otherwise. This function has several good properties: it is positive, real analytic and its log is a strictly convex function. As a result its Hessian is a Riemannian metric. A reference for this function is the text [1].

Joint work with *Luiz A. B. San Martin*.

## Referências

- [1] J. HILGERT AND K.-H. NEEB, *Lie Semigroups and their Applications*, Lecture Notes in Math., 1552, Springer-Verlag (1993).
- [2] L.A.B. SAN MARTIN AND P.A. TONELLI, *Semigroup actions on homogeneous spaces*, Semigroup Forum, 50, 59-88 (1995).
- [3] L.A.B. SAN MARTIN, *Maximal semigroups in semi-simple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 353, 5165-5184 (2001).

## Homology of real isotropic Grassmannians

**Lonardo Rabelo** (lonardo@gmail.com)  
Departamento de Matemática  
Universidade Federal de Juiz de Fora

**Abstract.** In this talk we present the computation of the integer homology of the real isotropic Grassmannians based in the paper [5]. We realize them as minimal flag manifolds of classical real split Lie groups of type B,C and D which corresponds respectively to the even orthogonal, isotropic and odd orthogonal real Grassmannians. The results are well understood and illustrated in terms of a kind of shifted Young diagram whose construction is based on the the works of Buch-Kresch-Tamvakis [1, 2], Ikeda-Naruse [4] and Graham-Kreiman [3].

Joint work with *Jordan Lambert Silva*.

## Referências

- [1] BUCH, A. S., KRESCH, A., TAMVAKIS, H., *A Giambelli formula for isotropic Grassmannians*, Preprint 2010, 39 pages.
- [2] BUCH, A. S., KRESCH, A., TAMVAKIS, H., *A Giambelli formula for even orthogonal Grassmannians*, Preprint 2013, 30 pages.

- [3] GRAHAM, W., KREIMAN, V., *Excited Young diagrams, equivariant K-theory, and Schubert varieties*, Trans. Amer. Math. Soc., 367, no. 9, 6597-6645 (2015).
- [4] IKEDA, T., NARUSE, H., *Excited Young Diagrams and Equivariant Schubert Calculus*, Trans. Amer. Math. Soc., 361, no. 10, 5193- 5221 (2008).
- [5] SILVA, J., RABELO, L., *Homology of Real Isotropic Grassmannians*, In preparation.

## Topologia de subespaços invariantes

Lucas Conque Seco Ferreira (l.c.s.ferreira@mat.unb.br)

Departamento de Matemática

Universidade de Brasília

**Resumo.** O foco desse minicurso é o estudo dos subespaços invariantes de uma matriz nilpotente, que podem ser estudados por meio dos pontos fixos dessa matriz agindo numa variedade *flag*. Esses pontos fixos são bem difíceis de descrever e são assunto de pesquisa até hoje: as chamadas fibras de Springer. A decomposição de Bruhat é a ferramenta básica para esse estudo e no minicurso vamos introduzir essa decomposição no  $GL(n)$ , através do conceito de posição relativa entre dois *flags*, e vamos demonstrar, de modo elementar, algumas de suas propriedades. Em seguida vamos generalizar essa decomposição para a decomposição de Bruhat em quociente duplo, a qual vamos obter por argumentos geométricos. O passo principal é mostrar que os pontos fixos de uma matriz diagonal agindo numa variedade *flag* é uma variedade *flag* menor mergulhada. Desenvolvidos esses pré-requisitos nas primeiras aulas, nas últimas voltaremos ao problema de pontos fixos de uma matriz nilpotente agindo num *flag* e trataremos alguns casos. Notadamente, pontos fixos de matrizes nilpotentes com dois blocos de tamanhos  $1 \times n$  e  $2 \times 2$ .

## Referências

- [1] C. de Concini, G. Lusztig and C. Procesi, *Homology of the zero-set of a nilpotent vector field on a flag manifold*. J. Amer. Math. Soc., 1, 15-34 (1988).
- [2] L. Seco, *A Note on the Bruhat Decomposition of Semisimple Lie Groups*, Journal of Lie Theory, 18, 725-731 (2008).
- [3] N. Spaltenstein, *The fixed point set of a unipotent transformation on the flag manifold*, Indag. Math., 38, 452–456 (1976).

## Caos e criptografia

Marcio Lima do Nascimento (marcionufpa@gmail.com)

Faculdade de Matemática

Universidade Federal do Pará

**Resumo.** Existem vários modelos de sistemas dinâmicos usados em criptografia caótica, principalmente relacionados a dinâmica unidimensional. Discutiremos nesta palestra especificamente a dinâmica de uma aplicação não linear do intervalo e do círculo como um novo modelo de um cripto-sistema.

# Teoria da Computação

## Intersection types for nominal terms

Ana Cristina R. O. Valverde (anacrismarie@gmail.com)  
Departamento de Ciência da Computação  
Universidade de Brasília

**Abstract.** Nominal systems are an alternative to deal with variable binding using first order logic and names, in a natural way, instead of indices, as done in explicit substitutions calculi. In this context, alpha-equivalence, that is equivalence between terms modulo renaming of bound object-level variables (atoms), is decidable under some side conditions, namely freshness conditions, via deductive rules. Moreover, nominal alpha-unification is also decidable using only first-order logic techniques and it was proven to be in  $O(n^2)$ . Type systems have been used to guarantee several levels of consistence and soundness for logical and computational specifications for more than a century; in particular, intersection types have been studied for almost forty years and some good properties were proved for them as, for instance, characterisation of strong normalisation and of solvability and existence of principal typings in the higher-order approach of lambda calculus. In the nominal syntax, some type systems were analysed as simple, polymorphic and dependent type systems. In this talk we are going to present a work in progress that extends this study of types for the nominal syntax, providing an adapted version of an intersection type system and presenting the main properties that are valid in the nominal approach as the preservation of types to alpha-equivalent terms.

Joint work with *Mauricio Ayala-Rincón* and *Maribel Fernández*.

## Referências

- [1] A. M. PITTS. *Nominal Sets: Names and Symmetry in Computer Science*. Cambridge University Press, 2013.
- [2] J. R. HINDLEY. *Types with Intersection: An Introduction*. Formal Aspects of Computing 4(5): 470-486, 1992.
- [3] S. VAN BAKEL, M. DEZANI-CIANCAGLINI. *Characterising Strong Normalisation for Explicit Substitutions*. LATIN 2002: 356-370
- [4] S. VAN BAKEL. *Essential Intersection Type Assignment*. FSTTCS 1993: 13-23
- [5] J. B. WELLS. *The Essence of Principal Typings*. ICALP 2002: 913-925

## Analizando terminação: size change principle X dependency pairs.

**Ariane A. Almeida** (arianealvesalmeida@gmail.com)  
Departamento de Ciência da Computação  
Universidade de Brasília

**Resumo.** Terminação é uma propriedade importante em sistemas de reescrita de termos TRSs, utilizada não somente para determinar se um sistema para ou não, mas também essencial para análise de correção destes. Embora seja um problema indecidível no geral, é possível analisar a terminação em casos particulares, como quando é possível verificar o decrescimento de uma medida a cada passo de redução. Para isso, existem diversos critérios que podem ser utilizados, dentre eles, Princípio de Mudança de Tamanho (Size Change Principle) e Pares Dependentes (Dependency Pairs). Assim como os outros critérios conhecidos, devido à indecidibilidade da terminação, a aplicação do Princípio de Mudança de Tamanho e da técnica de Pares Dependentes, não permitem detectar terminação de todos os TRSs que são terminantes.

O Princípio de Mudança de Tamanho analisa a relação entre os lados esquerdo e direito das regras de um TRS a fim de verificar o decrescimento do tamanho dos argumentos das funções. Assim, com este princípio pode-se determinar a terminação via reduções mais internas referentes às funções definidas pelo TRS.

Já a técnica de Pares Dependentes compara o lado esquerdo de cada regra de um TRS com subtermos iniciados com símbolos definidos pelo TRS, a fim de verificar a terminação de possíveis loops infinitos. Com esta técnica pode ser determinada a terminação do TRS via verificação da não existência de cadeias de dependência infinitas entre os pares dependentes gerados. Mesmo sendo abordagens diferentes, é possível relacionar as duas técnicas e analisar a equivalência entre elas.

Joint work with *Mauricio Ayala-Rincón*.

## Referências

- [1] T. ARTS AND J. GIESL, *Termination of Term Rewriting Using Dependency Pairs.*, Theoretical Computer Science, 236, 133-178 (2000).
- [2] R. THIEMANN AND J. GIESL, *Size-Change Termination for Term Rewriting.*, Rewriting Techniques and Applications (RTA), 264-278 (2003).

## Raciocínio sobre sistemas concorrentes: uma abordagem lógica

**Bruno Lopes Vieira** (bruno@ic.uff.br)  
Instituto de Computação  
Universidade Federal Fluminense

**Resumo.** Sistemas concorrentes são compostos de dois ou mais agentes que compartilham e/ou disputam recursos. A verificação formal de propriedades apresenta diversos desafios, desde a complexidade na modelagem até a completude nos sistemas de inferências. Apresenta-se uma abordagem baseada no uso de redes de Petri e lógica dinâmica para a modelagem e a realização de inferências.

## Tipos de intersecção

Daniel Lima Ventura (daniel@inf.ufg.br)

Instituto de Informática

Universidade Federal de Goiás

**Resumo.** Tipos de intersecção foram originalmente introduzidos como uma linguagem para descrever e capturar propriedades de lambda termos que escaparam de todas as disciplinas de tipagem introduzidas anteriormente. Por exemplo, eles eram utilizados para dar uma primeira caracterização teórica de tipos para termos fortemente normalizáveis, e depois para termos normalizáveis. O objetivo deste minicurso é introduzir os conceitos principais de tipos de intersecção, sua linguagem e resultados fundamentais, como por exemplo, a relação entre tipos de intersecção e conjuntos abertos compactos em um domínio Scott. Será introduzido um sistema de designação de tipos que associa tipos de intersecção a lambda termos não *tipados*. No fim, uma discussão sobre problemas em aberto e trabalhos futuros será proposta.

## Referências

- [1] H. Barendregt, *The Lambda Calculus - Its Syntax and Semantics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 103, Amsterdam, North-Holland (1984).
- [2] H. Barendregt, W. Dekkers and R. Statman, *Lambda Calculus with Types*, Series Perspectives in Logic, CUP (2013).
- [3] J. Y. Girard, *Linear logic*, Theoretical Computer Science, 1, 50, 1–102 (1987).

## Uma interpretação computacional para a sintaxe de Herbelin sensível a recursos

Daniel Lima Ventura (daniel@inf.ufg.br)

Instituto de Informática

Universidade Federal de Goiás

**Resumo.** No presente trabalho investigamos uma interpretação computacional para um cálculo de sequentes intuicionista focalizado, compatível com uma semântica sensível a recursos. Com este propósito, um sistema de tipos com intersecção não-idempotente é associado a sintaxe do cálculo de Herbelin, juntamente com regras de redução inspiradas no paradigma de substituição à distância.

## Indução, iteração, recursão e boa ordem

**Jorge Petrucio Viana** (petrucio@cos.ufrj.br)

Departamento de Análise

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

**Resumo.** Com frequência, usamos os termos "indução", "iteração" e "recursão" na definição de conjuntos e funções e nas provas das propriedades dos conjuntos e funções definidos por estes processos. Muitas vezes empregamos estes termos como sinônimos e não prestamos atenção nas distinções que devem ser feitas, quando estamos definindo ou provando por indução, iteração ou recursão. Nesta palestra, vamos exemplificar estas diferenças e mostrar como elas se manifestam nas provas das equivalências dos quatro "princípios básicos" que estão por trás das "definições e provas indutivas": o princípio de indução matemática, o teorema da iteração de funções, o teorema da recursão e o princípio da boa ordem.

## Medidas de inconsistência em bases probabilísticas

**Marcelo Finger** (mfinger@ime.usp.br)

Departamento de Ciência da Computação

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo

**Resumo.** Só se conhece bem aquilo que se pode medir, e boas medidas de eficiência acabam atraindo o desenvolvimento de novos algoritmos. Por outro lado, medidas devem refletir a intuição. Intuitivamente, sabemos que algumas teorias são "mais inconsistentes" que outras, apesar de que, no sentido clássico, qualquer teoria é explosiva e permite derivar qualquer sentença. Mesmo assim, nossa intuição de "mais inconsistente" incorpora a noção de "necessita de mais esforço para desfazer a inconsistência". Baseado nessas intuições, a literatura apresenta uma série de postulados de racionalidade para medidas de inconsistência.

Nosso trabalho teve início ao nos depararmos com o fato de que as medidas de inconsistência de teorias clássicas não são consistentes com um comportamento intuitivo das medidas de inconsistência probabilística. Afinal, ao se alterar um pouco as probabilidades, espera-se que a medida de inconsistência varie só um pouco, um comportamento bem conhecido como 'continuidade'. Mas é impossível encontrar uma medida clássica de inconsistência que satisfaça o postulado da continuidade.

Nessa palestra, discutimos este problema, mostramos uma formulação que resolve o problema e discutimos formas de raciocínio na presença de inconsistência baseado na minimização da medida de inconsistência.

# Formalização da terminação de especificações funcionais

**Thiago M. F. Ramos** (thiagomendoncaferreiraramos@yahoo.com.br)

Departamento de Ciência da Computação

Universidade de Brasília

**Resumo.** Terminação é um problema importante em ciência da computação e indecidível, com aplicação importante em verificação formal de software. Entretanto, pode-se criar programas que auxiliem a prova por terminação desde que eles sejam assistidos por humanos. Para isso é preciso criar novas técnicas de prova baseadas em definições equivalentes de terminação e formalizá-las. Assim estão provadas como equivalentes as definições para funções recursivas quando, para qualquer entrada: produz uma saída; o tamanho da árvore de recursão é finita; existe uma relação bem fundada sobre a entrada do algoritmo e as entradas da chamadas recursivas imediatas. Estas definições entre outras estão formalizadas no assistente de prova Prototype Verification System juntamente com e usando uma linguagem funcional de chamada PVS0. Nessa linguagem há a computação de elementos de um único tipo abstrato  $T$ . Nesse contexto a indecidibilidade do problema da parada foi formalizada no supracitado assistente de prova, mas precisou-se assumir que existe uma representação de uma expressão PVS0 em  $T$ . Se essa representação não existe, é possível provar que  $T$  possui tipo finito e que a linguagem PVS0 se assemelhará a uma Máquina de Turing com fita de tamanho finito, onde o problema da parada é decidível. Assim, os objetivos são dois: formalizar a decidibilidade do problema da parada na linguagem PVS0 com tipo finito e formalizar as definições de terminação em uma linguagem próxima ao das funções do Prototype Verification System que será chamada PVS1.

Joint work with *Mauricio Ayala-Rincón*.

## Referências

- [1] B. COOK, A. PODELSKI, AND A. RYBALCHENKO. *Proving thread termination*. In *Proceedings of the 28th Conference on Programming Language Design and Implementation*. PLDI '07, 320–330, 2007.
- [2] A.M. TURING. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(42):230–265, 1936.
- [3] P. MANOLIOS AND D. VROON. *Termination analysis with calling context graphs*. In *Computer Aided Verification*, 4144 of LNCS, 401–414, 2006.
- [4] A. B. AVELAR. *Formalização da automação da terminação através de grafos com matrizes de medida*. 2015.
- [5] C. S. LEE, N. D. JONES, AND A. M. BEN-AMRAM. *The size-change principle for program termination*. In *Proceedings of the 28th Symposium on Principles of Programming Languages*, POPL '01, 81–92, 2001.

## Discrete vs. dense times in the analysis of cyber-physical security protocols

Vivek Nigam (vivek@ci.ufpb.br)  
Departamento de Estatística e Informática  
Universidade Federal da Paraíba

**Abstract.** Many security protocols rely on the assumptions on the physical properties in which its protocol sessions will be carried out. For instance, Distance Bounding Protocols take into account the round trip time of messages and the transmission velocity to infer an upper bound of the distance between two agents. We classify such security protocols as Cyber-Physical. Time plays a key role in design and analysis of many of these protocols. This paper investigates the foundational differences and the impacts on the analysis when using models with discrete time and models with dense time. We show that there are attacks that can be found by models using dense time, but not when using discrete time. We illustrate this with a novel attack that can be carried out on most distance bounding protocols. In this attack, one exploits the execution delay of instructions during one clock cycle to convince a verifier that he is in a location different from his actual position. We propose a Multiset Rewriting model with dense time suitable for specifying cyber-physical security protocols. We introduce Circle-Configurations and show that they can be used to symbolically solve the reachability problem for our model. Finally, we show that for the important class of balanced theories the reachability problem is PSPACE-complete.

## A formalisation of nominal equivalence with associative and commutative function symbols

Washington Luís R. de Carvalho Segundo (wtonribeiro@gmail.com)  
Departamento de Ciência da Computação  
Universidade de Brasília

**Abstract.** The unification problem is a fundamental issue in several areas, including automatic deduction, theorem provers, term rewriting systems, functional programming, design of formal systems, etc. Roughly speaking two terms  $s$  and  $t$  are known as *syntactically unifiable* if there is a substitution  $\sigma$  that applied to  $s$  and  $t$  simultaneously make them equal ( $s\sigma = t\sigma$ ). This relation of *equality* can be extended to equational theories [1] that are according with  $\alpha$ -equivalence, *commutativity*, *associativity*, *idempotence* etc. This kind of problem is named *unification modulo  $\approx_E$*  where  $E$  is a set of identities describing an *equivalence relation* between two terms.

In particular  $\alpha$ -equivalence plays an important role into unification. This notion occurred by the first time in the *lambda calculus* and capture the notion of *bounded variables*. At a first glance it seems to be a very abstract problem but one can give a very concrete example where a simple *renaming* of variables result in a syntactically different but  $\alpha$ -equal functions.

---

$$f(m, n) := \begin{cases} \text{if } m = 0 \text{ or } n = 0 \text{ then } m + n \\ \text{else } \begin{cases} \text{if } m \geq n \text{ then } f(m - n, n) \\ \text{else } f(n, m) \end{cases} \end{cases} & g(i, j) := \begin{cases} \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \text{ then } i + j \\ \text{else } \begin{cases} \text{if } i \geq j \text{ then } g(i - j, j) \\ \text{else } g(i, j) \end{cases} \end{cases}$$

---

In this work we will present a formalisation in Coq [2] of soundness of  $\alpha$ -equivalence in the nominal syntax and its extension to some equational theories ( $\approx_{E_\alpha}$ ). Specifically, we present

1. a specification in Coq of the notion of  $\alpha$ -equivalence
2. a formal proof that the relation  $\approx_\alpha$ , which will be based on the weak equivalence property ( $\sim_\omega$ ) as suggested by Urban in [3], is indeed an equivalence relation.
3. a formalisation extending the soundness property to the relations  $\alpha$ -equality modulo associativity ( $\approx_{A_\alpha}$ ) and  $\alpha$ -equality modulo associativity and commutativity ( $\approx_{AC_\alpha}$ ).

This nominal development will allow formal management of theories in which some functions are associative and other both associative and commutative as well as dealing modulo other equational theories.

Joint work with *M. Ayala-Rincón*, *M. Fernández* and *D. Nantes-Sobrinho*.

## Referências

- [1] F. BAADER AND W. SNYDER. *Unification Theory*. Handbook of Automated Reasoning, 1, 445-532 (2001).
- [2] THE COQ DEVELOPMENT TEAM. *The Coq Proof Assistant Reference Manual Version 8.1*. INRIA-Rocquencourt (1993).
- [3] C. URBAN. *Nominal Unification Revisited*, 24th International Workshop on Unification (2010).

## Índice Remissivo

- Adriane Martins Arruda, 37  
Aldo Alves Ferreira, 37  
Alessandra Lisboa da Silva, 38  
Alex Carrazedo Dantas, 14  
Amilcar Pacheco, 14  
Ana Cristina Vieira, 15  
Ana Cristina R. O. Valverde, 88  
Ana Luisa Pereira Maldonado, 76  
Ana Maria Porto, 40  
André Caldas de Souza, 85  
Andréia Júlio De Oliveira Rocha, 41  
Angel Carocca, 15  
Anna Carolina Lafetá, 15  
Ariane A. Almeida, 89  
Artur Vitor Soares Lima, 42  
Augusto Hung, 43  
Author Name, 64
- Barbara Lutaif Bianchini, 25  
Benedetta Pellacci, 21  
Braulio Gutierrez Pimenta, 76  
Bruno Lopes Vieira, 89  
Bruno Souza Carmo, 77
- Cília Cardoso Rodrigues da Silva, 44  
Carine Almeida Silva Noletto, 44  
Carmela Sica, 16  
Cesar Polcino Milies, 16  
Cleudiana dos Santos Feitoza Zonzini, 46  
Csaba Schneider, 17
- Daniel Lima Ventura, 90  
Danilo Sanção da Silveira, 17  
Debora Borges Ferreira, 83  
Deleir Inácio de Assis, 47  
Dessislava Kochloukova, 18
- Eamonn O'Brien, 18  
Edson Luiz Cataldo Ferreira, 80
- Fabiana Barros de Araújo e Silva, 47  
Fabio Henrique Gomes, 48
- Hélio Mauricio Miranda da Fonseca, 81  
Hugo Alexander de la Cruz Casino, 83  
Humberto José Bortolossi, 26
- Igor dos Santos Lima, 18
- Iilir Snopche, 19  
Irena Rachůnková, 21  
Ivan Shestakov, 19
- Jana Burkotova, 22  
Janaína Mendes Pereira da Silva, 48  
João Mário Nepomuceno Aragão e Silva, 51  
John MacQuarrie, 19  
Jorge Barros de Abreu, 52  
Jorge C. Lucero, 80  
Jorge Cássio C. Nóbriga, 52  
Jorge Petrucio Viana, 91  
José Gutemberg Lima Rodrigues, 53  
José Nazareno Gomes Vieira, 73  
Josinalva Estacio Menezes, 54  
Josué Sergio de Souza, 55
- Karly Barbosa Alvarenga, 56
- Laércio José dos Santos, 85  
Lonardo Rabelo, 86  
Lucas Conque Seco Ferreira, 87  
Lucas Parreira de Faria Borges, 78  
Luciana de Jesus Lemos, 56  
Ludimila Cássia Coelho de Andrade, 57  
Luis Felipe de Aguilar Paulinyi, 78
- Mônica Menezes de Souza, 63  
Marcelo Finger, 91  
Marcio Lima do Nascimento, 87  
Marcio Melo Freitas, 58  
Marcos Paulo Barbosa, 59  
Maria de Lurdes Marquês Serrazina, 29, 30  
Maria Isabel Piteira do Vale, 28  
Maria Juliana de Freitas Carvalho Lopes, 60  
Marilene Xavier dos Santos, 61  
Mario Choquehuanca, 22  
Mateus Henrique Oba Becker, 63  
Mikhail Belolipetsky, 20  
Milan Tvrđý, 23
- Noraí Romeu Rocco, 20
- Olímpio Hiroshi Miyagaki, 24
- Paulo Regis Caron Ruffino, 84  
Pedro Ubilla López, 24
- Raimunda de Oliveira, 66

Regina Luzia Corio de Buriasco, 31, 32

Ricardo Azevedo Araujo, 82

Ricardo Nunes de Oliveira, 18

Ricardo Ramos Fragelli, 33

Rogério Cesar dos Santos, 67

Sílvia C. R. Lopes, 84

Sandra Aparecida Oliveira Baccarin, 67

Shyam Sumanta Das, 79

Suelen Ferreira de Sousa, 69

Susiane Bezerra Caixeta, 70

Tarcísio Castro Silva, 74

Thiago M. F. Ramos, 92

Vicente Lopes, 71

Vivek Nigam, 93

Washington Luís R. de Carvalho Segundo, 93

Wesley Well Vicente Bezerra, 72

Yuriko Yamamoto Baldin, 35



**UnB**

