

# Caracterizações Espectrais e Funcionais de Transformações Misturadoras

L. Cioletti

Abril de 2026

## Resumo

Este texto faz parte de uma série de notas de aula de um curso de Teoria Ergódica ministrado pelo autor no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. O objetivo central é apresentar diversas caracterizações das propriedades de mistura fraca e forte (*weak-mixing* e *strong-mixing*) para transformações que preservam medida em espaços de probabilidade. Iniciamos com a definição de mistura fraca e um resultado sobre seqüências que convergem para zero no sentido de Cesàro, o que permite obter uma caracterização equivalente via conjuntos de densidade nula. Em seguida, para espaços de probabilidade com base enumerável, demonstramos que o conjunto excepcional de densidade nula pode ser tomado independentemente dos conjuntos  $A$  e  $B$ . Estabelecemos também caracterizações funcionais para ergodicidade, mistura fraca e mistura forte em termos do operador de Koopman em  $L^2$ , e estudamos a relação entre mistura fraca e produtos diretos, provando que  $T$  é fracamente misturadora se, e somente se,  $T \times T$  é ergódica (ou equivalentemente, fracamente misturadora).

Na segunda parte, relacionamos a mistura fraca com o espectro do operador de Koopman, demonstrando que uma transformação invertível é fracamente misturadora precisamente quando possui espectro contínuo. Em seguida, apresentamos exemplos que ilustram esses resultados: mostramos que rotações em grupos compactos jamais são fracamente misturadoras; que para endomorfismos sobrejetores de grupos compactos abelianos as três noções: ergodicidade; mistura fraca e mistura forte, coincidem. Em seguida, estendemos essa equivalência a aplicações afins. Encerramos com os shifts de Bernoulli e de Markov: provamos que o shift de Bernoulli é fortemente misturador e estabelecemos, para shifts de Markov, a equivalência entre mistura fraca, mistura forte, irreducibilidade e aperiodicidade da matriz de transição, e a convergência das potências da matriz ao vetor estacionário, conectando assim a teoria ergódica abstrata à teoria clássica das cadeias de Markov.



# 1. Transformações Fracamente Misturadoras

**Definição 1** (Transformações Fracamente Misturadoras). Seja  $T : X \rightarrow X$  uma transformação que preserva medida de um espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ . Dizemos que  $T$  é fracamente misturadora se para todo par  $A, B \in \mathcal{B}$  temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(T^{-i}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

**Teorema 2.** Seja  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência limitada de números reais. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 0$ ;

(ii) existe  $J \subseteq \mathbb{Z}_+$  conjunto de densidade nula, isto é,

$$\frac{\#(J \cap \{0, 1, \dots, n-1\})}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{tal que} \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{N} \setminus J}} a_n = 0;$$

(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^2 = 0$ .

**Prova.** Ao longo de toda esta prova vamos usar a seguinte notação. Para cada subconjunto  $M \subseteq \mathbb{Z}_+$ , defina

$$\alpha_M(n) \equiv \#(\{0, 1, \dots, n-1\} \cap M).$$

(i)  $\implies$  (ii). Para cada inteiro  $k \geq 1$  considere o conjunto

$$J_k \equiv \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{1}{k} \leq |a_n| \right\}.$$

Observe que segue diretamente da definição que  $J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$ . Afirmamos que, para cada  $k \geq 1$  fixado, o conjunto  $J_k$  tem densidade nula. De fato,

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k} \alpha_{J_k}(n) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$$

e como  $k$  está fixado segue da desigualdade acima e da hipótese que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \alpha_{J_k}(n) \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 0.$$

Portanto, segue da definição de limite que existem inteiros  $0 = l_0 < l_1 < l_2 < \dots$  tais que se  $n \geq l_k$

$$\frac{1}{n} \alpha_{J_{k+1}}(n) < \frac{1}{k+1}. \tag{1}$$

O próximo passo é considerar o conjunto  $J$  definido abaixo e mostrar que ele possui densidade nula em  $\mathbb{Z}_+$

$$J \equiv \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[ J_{k+1} \cap [l_k, l_{k+1}) \right].$$

Para provar a afirmação feita acima, primeiro observamos que  $J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$ . Em seguida, tomando  $n$  tal que  $l_k \leq n < l_{k+1}$  temos

$$J \cap [0, n) = \left[ J \cap [0, l_k) \right] \cup \left[ J \cap [l_k, n) \right] \subseteq \left[ J_k \cap [0, l_k) \right] \cup \left[ J_{k+1} \cap [0, n) \right].$$

Da continência acima e da desigualdade (1) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \alpha_J(n) &\leq \frac{1}{n} \left( \alpha_{J_k}(l_k) + \alpha_{J_{k+1}}(n) \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \left( \alpha_{J_k}(n) + \alpha_{J_{k+1}}(n) \right) \\ &< \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}, \quad \forall n \in \{l_k, l_k + 1, \dots, l_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Desta forma segue da observação acima que

$$\frac{1}{n} \alpha_J(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

mostrando que  $J$  possui densidade zero.

Para concluir a prova observe que se  $n > l_k$  e  $n \notin J$ , então existe algum inteiro  $m$  tal que  $k \leq m$  e  $l_m \leq n < l_{m+1}$ . Mas como  $n \notin J$ , então  $n$  não pode pertencer à  $J_{m+1}$ , caso contrário  $n$  estaria em  $J$ . Mas como  $J_{k+1} \subseteq J_{m+1}$ , então devemos concluir que  $n \notin J_{k+1}$ .

Logo segue da definição de  $J_{k+1}$  que

$$|a_n| < \frac{1}{k+1}.$$

Portanto, segue da definição de limite que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin J}} |a_n| = 0.$$

(ii)  $\implies$  (i). Suponha que  $|a_n| \leq K$  para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Por hipótese, podemos afirmar que dado  $\varepsilon > 0$ , existe algum  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N_\varepsilon$  com  $n \notin J$ , temos  $|a_n| < \varepsilon$  e também  $\alpha_J(n)/n < \varepsilon$ . Logo, para  $n \geq N_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| &= \frac{1}{n} \left[ \sum_{i \in J \cap \{0, \dots, n-1\}} |a_i| + \sum_{i \in \{0, \dots, n-1\} \setminus J} |a_i| \right] \\ &< \frac{1}{n} K \alpha_J(n) + \frac{1}{n} \sum_{i \in \{0, \dots, n-1\} \setminus J} |a_i|. \end{aligned} \tag{2}$$

Já que toda sequência que converge para zero, também converge para zero no sentido de Cesàro, segue da hipótese que existe algum  $M_\varepsilon \geq N_\varepsilon$  tal que

$$|a_n| < \varepsilon, \quad \forall n \in \{M_\varepsilon, M_\varepsilon + 1, \dots\} \setminus J \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} \sum_{i \in \{0, \dots, n-1\} \setminus J} |a_i| < 2\varepsilon.$$

Usando a última desigualdade acima em (2) podemos afirmar que para todo  $n \geq M_\varepsilon$  temos

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \leq \frac{1}{n} K \alpha_J(n) + \frac{1}{n} \sum_{i \in \{0, \dots, n-1\} \setminus J} |a_i| < K\varepsilon + 2\varepsilon = \varepsilon(k+2).$$

O que encerra a prova de que (ii)  $\implies$  (i).

(i)  $\implies$  (iii). Já sabemos que se vale (i), então existe algum subconjunto  $J$  contido em  $\mathbb{Z}_+$  tal que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin J}} |a_n| = 0.$$

Evidentemente, segue da igualdade acima que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin J}} |a_n|^2 = 0.$$

Aplicando o resultado provado acima, (ii)  $\implies$  (i), para a sequência  $b_n \equiv |a_n|^2$ , concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^2 = 0. \quad \blacksquare$$

**Teorema 3.** Se  $T: X \rightarrow X$  preserva medida em  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

(i)  $T$  é fracamente mixing;

(ii) para cada par  $A, B \in \mathcal{B}$ , existe um conjunto  $J(A, B) \subseteq \mathbb{Z}_+$  de densidade zero tal que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin J(A, B)}} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B);$$

(iii) para todo par de elementos  $A, B \in \mathcal{B}$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \mu(T^{-i}A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \right|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Prova.** Basta aplicar o Teorema 2 à sequência  $a_n \equiv \mu(T^{-n}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)$ .  $\blacksquare$

**Definição 4.** Dizemos que um espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  tem base enumerável, se existe uma sequência  $\{B_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{B}$  tal que, para cada  $\varepsilon > 0$  e cada  $B \in \mathcal{B}$ , existe  $B_k$  satisfazendo  $\mu(B \Delta B_k) < \varepsilon$ .

**Proposição 5.** Um espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  possui base enumerável se e somente se  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$  é separável.

**Prova.** Suponha inicialmente que  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  possui uma base enumerável  $\{B_k\}_{k \geq 1}$ . Defina

$$D \equiv \left\{ \sum_{i=1}^n q_i \mathbb{1}_{B_{k_i}} : n \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}, k_i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Claramente  $D$  é um conjunto enumerável. Afirmamos que  $D$  é denso em  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ . De fato, sejam  $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$  e  $\varepsilon > 0$ . Nosso objetivo é mostrar que é possível construir uma  $\varepsilon$ -aproximação de  $f$  por um elemento de  $D$ . Isto será feito em três etapas.

1. Pela densidade do conjunto das funções simples em  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$  sabemos que existe uma função simples  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  escrita em sua forma canônica como  $\varphi \equiv \sum_{j=1}^m a_j \mathbb{1}_{A_j}$ , onde os conjuntos  $A_j$ 's são dois a dois disjuntos e

$$\|f - \varphi\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

2. Para cada  $j$  com  $a_j \neq 0$ , escolha  $B_{k_j}$  tal que

$$\mu(A_j \Delta B_{k_j}) < \frac{\varepsilon^2}{9m^2 a_j^2}.$$

Então  $\|\mathbb{1}_{A_j} - \mathbb{1}_{B_{k_j}}\|_2 = \sqrt{\mu(A_j \Delta B_{k_j})} < \frac{\varepsilon}{3m|a_j|}$ , e pela desigualdade triangular,

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j \mathbb{1}_{A_j} - \sum_{j=1}^m a_j \mathbb{1}_{B_{k_j}} \right\|_2 \leq \sum_{j=1}^m |a_j| \|\mathbb{1}_{A_j} - \mathbb{1}_{B_{k_j}}\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

3. Para cada  $j$ , escolha  $q_j \in \mathbb{Q}$  com  $|a_j - q_j| < \varepsilon/(3m)$ . Como  $\|\mathbb{1}_{B_{k_j}}\|_2 \leq 1$ ,

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j \mathbb{1}_{B_{k_j}} - \sum_{j=1}^m q_j \mathbb{1}_{B_{k_j}} \right\|_2 \leq \sum_{j=1}^m |a_j - q_j| \|\mathbb{1}_{B_{k_j}}\|_2 \leq \sum_{j=1}^m |a_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Segue das três desigualdades estabelecidas acima e da desigualdade triangular, o elemento  $g \equiv \sum_{j=1}^m q_j \mathbb{1}_{B_{k_j}} \in D$  e satisfaz  $\|f - g\|_2 < \varepsilon$ . Como  $f$  é um elemento arbitrário de  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$  concluimos que este espaço é separável.

Reciprocamente, suponha que  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$  seja separável e seja  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  um subconjunto enumerável denso. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  e cada  $r \in \mathbb{Q}$ , defina

$$B_{n,r} \equiv \{x \in X : f_n(x) > r\} \in \mathcal{B}.$$

A coleção  $\{B_{n,r}\}$  é enumerável. Mostremos que ela forma uma base enumerável para o espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ .

Sejam  $B \in \mathcal{B}$  e  $\varepsilon > 0$ . Como estamos trabalhando em um espaço de probabilidade temos que  $\mathbb{1}_B \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ . Já que  $\{f_n\}$  é denso, então podemos garantir que existe algum elemento  $f_n$  tal que

$$\|f_n - \mathbb{1}_B\|_2 < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}.$$

Tome  $r = 1/2$ . Afirmamos que vale a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2} \leq |f_n(x) - \mathbf{1}_B(x)|, \quad \forall x \in B \Delta B_{n, \frac{1}{2}} \quad (3)$$

De fato, se  $x \in B$  e  $x \notin B_{n, 1/2}$ , então temos que  $f_n(x) \leq 1/2$  e  $\mathbf{1}_B(x) = 1$ . Logo

$$\frac{1}{2} \leq 1 - f_n(x) = |f_n(x) - \mathbf{1}_B(x)|.$$

Por outro lado, se  $x \notin B$  e  $x \in B_{n, 1/2}$ , então temos que  $\mathbf{1}_B(x) = 0$  e  $f_n(x) > 1/2$ , Logo

$$\frac{1}{2} < f_n(x) = |f_n(x) - \mathbf{1}_B(x)|.$$

O que estabelece a validade da desigualdade (3).

Portanto, segue de (3) que  $\mathbf{1}_{B \Delta B_{n, 1/2}} \leq 4 |f_n - \mathbf{1}_B|^2$   $\mu$ -qtp. Consequentemente, integrando ambos lados desta desigualdade, concluímos que

$$\mu(B \Delta B_{n, 1/2}) \leq 4 \|f_n - \mathbf{1}_B\|_2^2 < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Logo  $\{B_{n, r}\}$  é uma base enumerável para  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ . ■

**Proposição 6.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $\tau_d$  a topologia sobre  $X$  induzida pela distância  $d$ . Se a topologia  $\tau_d$  possui uma base enumerável e  $\mathcal{B}(X) \equiv \sigma(\tau_d)$ , então  $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$  possui base enumerável para qualquer medida de probabilidade  $\mu$  sobre  $\mathcal{B}(X)$ .

**Prova.** A estratégia consiste em mostrar que a coleção dos conjuntos arbitrariamente bem aproximados, com respeito à medida  $\mu$ , pela álgebra gerada por uma base enumerável de  $\tau_d$  é uma  $\sigma$ -álgebra que contém essa álgebra, logo coincide com  $\mathcal{B}(X)$ .

Seja  $\{U_n\}_{n \geq 1}$  uma base enumerável para a topologia  $\tau_d$ . Defina  $\mathcal{A}$  como a álgebra gerada por  $\{U_n\}_{n \geq 1}$ , isto é, a menor coleção de subconjuntos de  $X$  contendo todos os  $U_n$  e fechada por uniões finitas, interseções finitas e complementação.

Vamos mostrar que  $\mathcal{A}$  é uma coleção enumerável de subconjuntos de  $X$ . Considere a torre indutiva  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \dots$ , onde  $\mathcal{A}_0 \equiv \{U_n : n \geq 1\} \cup \{\emptyset, X\}$  e, para cada  $k \geq 0$ ,  $\mathcal{A}_{k+1}$  é obtida juntando a  $\mathcal{A}_k$  todos os complementos e todas as uniões finitas de elementos de  $\mathcal{A}_k$ . Cada  $\mathcal{A}_k$  é enumerável e  $\mathcal{A} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}_k$  é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis, sendo portanto enumerável. Seja  $\{A_k\}_{k \geq 1}$  uma enumeração arbitrária dos elementos de  $\mathcal{A}$ .

Vamos mostrar que  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(X)$ . Como  $\{U_n\}_{n \geq 1}$  é base de  $\tau_d$ , todo aberto é uma união enumerável de elementos de  $\{U_n\}_{n \geq 1}$ . Sendo assim,  $\tau_d \subseteq \sigma(\{U_n\}_{n \geq 1}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$  e, portanto,  $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ . A inclusão recíproca é imediata, pois  $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\tau_d) = \mathcal{B}(X)$ .

Seja  $\mu$  uma medida de probabilidade qualquer sobre  $\mathcal{B}(X)$ . Considere a seguinte coleção:

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ B \in \mathcal{B}(X) : \forall \varepsilon > 0, \exists A_k \in \mathcal{A} \text{ tal que } \mu(B \Delta A_k) < \varepsilon \right\}.$$

Afirmamos que  $\mathcal{S}$  é uma  $\sigma$ -álgebra que contém  $\mathcal{A}$ .

De fato,  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$  trivialmente, pois dado  $A \in \mathcal{A}$  e  $\varepsilon > 0$ , basta tomar  $A_k = A$  na definição de  $\mathcal{S}$ . Para verificar que  $\mathcal{S}$  é uma  $\sigma$ -álgebra, procedemos em três etapas:

1.  $X \in \mathcal{S}$ , pois  $X \in \mathcal{A}$ .
2. Se  $B \in \mathcal{S}$  e  $\varepsilon > 0$ , escolha  $A_k \in \mathcal{A}$  com  $\mu(B \Delta A_k) < \varepsilon$ . Como  $B^c \Delta A_k^c = B \Delta A_k$  (pois  $X \setminus E \Delta X \setminus F = E \Delta F$  para quaisquer  $E, F \subseteq X$ ) e  $A_k^c \in \mathcal{A}$  (pois  $\mathcal{A}$  é álgebra), concluímos que  $B^c \in \mathcal{S}$ .
3. Sejam  $\{B_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{S}$  e  $B \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , para cada  $n$  escolha  $A_{k_n} \in \mathcal{A}$  tal que

$$\mu(B_n \Delta A_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Da inclusão

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Delta \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \Delta A_{k_n})$$

e da  $\sigma$ -subaditividade de  $\mu$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mu\left(B \Delta \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \Delta A_{k_n})\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \Delta A_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Como  $\mu$  é finita, segue da propriedade de continuidade da medida que existe  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \setminus \bigcup_{n=1}^N A_{k_n}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja  $A \equiv \bigcup_{n=1}^N A_{k_n}$ . Como  $\mathcal{A}$  é uma álgebra,  $A \in \mathcal{A}$ . Notando que  $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$ , a diferença simétrica entre estes conjuntos coincide com a diferença  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \setminus A$ , e a desigualdade triangular fornece:

$$\begin{aligned} \mu(B \Delta A) &\leq \mu\left(B \Delta \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \Delta A\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto  $B \in \mathcal{S}$ .

Mostramos assim que  $\mathcal{S}$  é uma  $\sigma$ -álgebra contendo  $\mathcal{A}$ . Como  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(X)$ , concluímos que  $\mathcal{S} = \mathcal{B}(X)$ . Isto significa precisamente que para todo  $B \in \mathcal{B}(X)$  e todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $A_k \in \mathcal{A}$  com  $\mu(B \Delta A_k) < \varepsilon$ .

Já que  $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k \geq 1}$  é enumerável, segue da [Definição 4](#) que  $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$  possui base enumerável. ■

**Teorema 7.** Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de probabilidade com base enumerável e  $T: X \rightarrow X$  uma transformação que preserva medida. Então  $T$  é fracamente misturadora se, e somente se, existe um subconjunto  $J \subseteq \mathbb{Z}_+$  (independente de  $A$  e  $B$ ) possuindo densidade zero tal que, para todo  $A, B \in \mathcal{B}$ ,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin J}} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

**Prova.** Se existe um conjunto  $J \subseteq \mathbb{Z}_+$  de densidade zero, satisfazendo o limite do enunciado, e se tomamos  $J(A, B) \equiv J$ , para cada par  $A, B \in \mathcal{B}$ , então temos que a condição (ii) do **Teorema 3** é satisfeita. Logo podemos concluir que  $T$  é fracamente misturadora.

Reciprocamente, suponha que  $T$  é fracamente misturadora e seja  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma base enumerável de  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , cuja existência é garantida por hipótese. Defina, para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,

$$a_n \equiv \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{|\mu(T^{-n}B_i \cap B_j) - \mu(B_i)\mu(B_j)|}{2^{i+j}}.$$

Como cada termo é majorado por  $2^{-i-j}$  e  $\sum_{i,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} = 1$ , a série converge absolutamente e  $0 \leq a_n \leq 1$  para todo  $n$ .

**Parte 1.** Vamos mostrar que

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} a_l \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Como cada  $a_l$  é uma série absolutamente convergente de termos não-negativos, a soma finita em  $l$  comuta com a série em  $(i, j)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} a_l &= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{|\mu(T^{-l}B_i \cap B_j) - \mu(B_i)\mu(B_j)|}{2^{i+j}} \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} c_{i,j}(n), \end{aligned}$$

onde

$$c_{i,j}(n) \equiv \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} |\mu(T^{-l}B_i \cap B_j) - \mu(B_i)\mu(B_j)|.$$

Pela hipótese de mistura fraca de  $T$  e por **Teorema 3**,  $c_{i,j}(n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  para cada par  $(i, j)$  fixado. Além disso,  $0 \leq c_{i,j}(n) \leq 1$  para todo  $n$  e  $\sum_{i,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \cdot 1 = 1 < \infty$ . O Teorema da Convergência Dominada, aplicado à medida de contagem em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , permite passar o limite para dentro da série:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} a_l = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} \lim_{n \rightarrow \infty} c_{i,j}(n) = 0.$$

**Parte 2.** Como observado acima, a sequência  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de números reais não-negativos, limitada e converge para zero, no sentido de Cesàro. Então pelo **Teorema 2**, existe algum conjunto  $J \subseteq \mathbb{Z}_+$  de densidade zero, dependendo apenas da sequência  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin J}} a_n = 0.$$

Como cada parcela da série que define  $a_n$  é não-negativa, isto implica

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin J}} \mu(T^{-n}B_i \cap B_j) = \mu(B_i)\mu(B_j), \quad \forall i, j \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Note que  $J$  depende apenas da base  $\{B_k\}$  e da transformação  $T$ , sendo, portanto, independente de qualquer par  $(A, B)$  específico.

**Parte 3.** Agora, vamos mostrar como estender a igualdade (4) à conjuntos arbitrários  $A, B \in \mathcal{B}$ . Sejam  $A, B \in \mathcal{B}$  e  $\varepsilon > 0$ . Pela definição de base enumerável, existem  $B_i, B_j \in \{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tais que

$$\mu(A \Delta B_i) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \mu(B \Delta B_j) < \varepsilon.$$

Como  $T$  é uma transformação que preserva a medida  $\mu$ , podemos afirmar que vale a seguinte igualdade  $\mu(T^{-n}(A \Delta B_i)) = \mu(A \Delta B_i)$ . Usando a desigualdade  $|\mu(E) - \mu(F)| \leq \mu(E \Delta F)$  e a inclusão  $(E \cap G) \Delta (F \cap G) \subseteq E \Delta F$ , obtemos:

$$\begin{aligned} |\mu(T^{-n}A \cap B) - \mu(T^{-n}B_i \cap B_j)| &\leq |\mu(T^{-n}A \cap B) - \mu(T^{-n}B_i \cap B)| \\ &\quad + |\mu(T^{-n}B_i \cap B) - \mu(T^{-n}B_i \cap B_j)| \\ &\leq \mu(T^{-n}A \Delta T^{-n}B_i) + \mu(B \Delta B_j) \\ &= \mu(A \Delta B_i) + \mu(B \Delta B_j) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Analogamente, como  $\mu(A), \mu(B), \mu(B_i), \mu(B_j) \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} |\mu(B_i)\mu(B_j) - \mu(A)\mu(B)| &\leq |\mu(B_i) - \mu(A)|\mu(B_j) + \mu(A)|\mu(B_j) - \mu(B)| \\ &\leq \mu(B_i \Delta A) + \mu(B_j \Delta B) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Combinando as duas estimativas com a desigualdade triangular,

$$|\mu(T^{-n}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq |\mu(T^{-n}B_i \cap B_j) - \mu(B_i)\mu(B_j)| + 4\varepsilon.$$

Por (4), existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|\mu(T^{-n}B_i \cap B_j) - \mu(B_i)\mu(B_j)| < \varepsilon$  para todo  $n \geq N$  com  $n \notin J$ . Logo, para tais  $n$ ,

$$|\mu(T^{-n}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| < 5\varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, conclui-se

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin J}} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{B},$$

com  $J$  independente do par  $(A, B)$ , como desejado. ■

**Observação 8.** Em espaços de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  com base enumerável, o Teorema 7 admite a seguinte interpretação probabilística: se  $T$  é fracamente misturadora, então os eventos  $T^{-n}A$  e  $B$  são assintoticamente independentes, ao longo dos tempos  $n \notin J$ , sendo  $J \subseteq \mathbb{Z}_+$  um conjunto de densidade nula comum a todos os pares  $A, B \in \mathcal{B}$ .

## 2. Caracterizações Funcionais: Ergodicidade e Misturas

**Teorema 9.** Suponha que  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  é um espaço de probabilidade e  $T : X \rightarrow X$  preserva medida.

(i) As seguintes afirmações são equivalentes:

(1)  $T$  é ergódica.

(2) Para todas  $f, g \in L^2(\mu)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle U_T^i f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle$ .

(3) Para toda  $f \in L^2(\mu)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle U_T^i f, f \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle$ .

(ii) As seguintes afirmações são equivalentes:

(1)  $T$  é fracamente misturadora.

(2) Para todas  $f, g \in L^2(\mu)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \langle U_T^i f, g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \right| = 0$ .

(3) Para toda  $f \in L^2(\mu)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \langle U_T^i f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right| = 0$ .

(4) Para toda  $f \in L^2(\mu)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \langle U_T^i f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right|^2 = 0$ .

(iii) As seguintes afirmações são equivalentes:

(1)  $T$  é fortemente misturadora.

(2) Para todas  $f, g \in L^2(\mu)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle$ .

(3) Para toda  $f \in L^2(\mu)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, f \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle$ .

**Prova.** As provas das equivalências em cada um dos itens (i), (ii) e (iii) são análogas e portanto vamos apresentar na íntegra apenas a prova das equivalências listadas no item (iii).

(2)  $\implies$  (1). Basta tomar  $f \equiv \chi_A$  e  $g \equiv \chi_B$  na condição (2), pois  $\chi_A, \chi_B \in L^2(\mu)$  e  $\langle U_T^n \chi_A, \chi_B \rangle = \mu(T^{-n}A \cap B)$ .

(1)  $\implies$  (3). Suponha que  $T$  é fortemente misturadora. Então para todos  $A, B \in \mathcal{B}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Em termos do operador de Koopman, isto se escreve como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n \chi_A, \chi_B \rangle = \langle \chi_A, 1 \rangle \langle 1, \chi_B \rangle.$$

Fixado  $B \in \mathcal{B}$ , a igualdade acima se estende por linearidade a qualquer função simples  $h \equiv \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n h, \chi_B \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle \chi_{A_i}, 1 \rangle \langle 1, \chi_B \rangle = \langle h, 1 \rangle \langle 1, \chi_B \rangle.$$

Fixando, agora,  $h$  simples e repetindo o argumento para a segunda entrada (aqui é importante observar que o produto interno é sesquilinear), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n h, h \rangle = \langle h, 1 \rangle \langle 1, h \rangle, \quad (5)$$

para toda função simples  $h$ .

Seja agora  $f \in L^2(\mu)$  arbitrária e  $\varepsilon > 0$ . Pela densidade das funções simples em  $L^2(\mu)$ , existe uma função simples  $h$  tal que  $\|f - h\|_2 < \varepsilon$ . Pela igualdade (5), sabemos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$ ,

$$\left| \langle U_T^n h, h \rangle - \langle h, 1 \rangle \langle 1, h \rangle \right| < \varepsilon. \quad (6)$$

Para  $n \geq N$ , decompomos a diferença:

$$\begin{aligned} \left| \langle U_T^n f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right| &\leq \left| \langle U_T^n f, f \rangle - \langle U_T^n h, f \rangle \right| + \left| \langle U_T^n h, f \rangle - \langle U_T^n h, h \rangle \right| \\ &\quad + \left| \langle U_T^n h, h \rangle - \langle h, 1 \rangle \langle 1, h \rangle \right| + \left| \langle h, 1 \rangle \langle 1, h \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, h \rangle \right| \\ &\quad + \left| \langle f, 1 \rangle \langle 1, h \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right|. \end{aligned}$$

Estimamos cada parcela separadamente. Usando a desigualdade de Cauchy–Schwarz e que  $U_T$  é uma isometria, obtemos a seguinte cota para a primeira parcela:

$$\left| \langle U_T^n f, f \rangle - \langle U_T^n h, f \rangle \right| = \left| \langle U_T^n (f - h), f \rangle \right| \leq \|U_T^n (f - h)\|_2 \|f\|_2 = \|f - h\|_2 \|f\|_2 < \varepsilon \|f\|_2.$$

Para a segunda:

$$\left| \langle U_T^n h, f \rangle - \langle U_T^n h, h \rangle \right| = \left| \langle U_T^n h, f - h \rangle \right| \leq \|U_T^n h\|_2 \|f - h\|_2 < \|h\|_2 \varepsilon.$$

A terceira parcela é menor que  $\varepsilon$  por (6). Para a quarta parcela, como temos  $|\langle 1, h \rangle| \leq \|h\|_2$ , então obtemos a seguinte estimativa

$$\left| \langle h, 1 \rangle \langle 1, h \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, h \rangle \right| = |\langle 1, h \rangle| |\langle h - f, 1 \rangle| \leq \|h\|_2 \|f - h\|_2 < \|h\|_2 \varepsilon.$$

A estimativa para a quinta parcela é análoga já que é possível concluir à partir de Cauchy–Schwarz que  $|\langle f, 1 \rangle| \leq \|f\|_2$  e portanto

$$\left| \langle f, 1 \rangle \langle 1, h \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right| = |\langle f, 1 \rangle| |\langle 1, h - f \rangle| \leq \|f\|_2 \|f - h\|_2 < \|f\|_2 \varepsilon.$$

Somando as cinco parcelas, concluímos que para todo  $n \geq N$ , temos

$$\left| \langle U_T^n f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right| < \varepsilon (2\|f\|_2 + 2\|h\|_2 + 1).$$

Como  $\|h\|_2 \leq \|f\|_2 + \|f - h\|_2 < \|f\|_2 + \varepsilon$ , obtemos

$$\left| \langle U_T^n f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right| < \varepsilon (4\|f\|_2 + 2\varepsilon + 1).$$

Já que  $\|f\|_2$  é fixo e  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, f \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle, \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

(3)  $\implies$  (2). Seja  $f \in L^2(\mu)$  fixada. Defina

$$\mathcal{F}_f \equiv \left\{ g \in L^2(\mu) : \lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \right\}.$$

Afirmamos que  $\mathcal{F}_f$  é um subespaço fechado de  $L^2(\mu)$  que contém  $f$  e as funções constantes. De fato, a linearidade de  $\mathcal{F}_f$  segue da linearidade do produto interno. Para verificar que  $\mathcal{F}_f$  é fechado, tome uma sequência  $\{g_k\} \subseteq \mathcal{F}_f$  com  $g_k \rightarrow g$  em  $L^2(\mu)$ . Para cada  $k$ ,

$$\left| \langle U_T^n f, g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \right| \leq \left| \langle U_T^n f, g - g_k \rangle \right| + \left| \langle U_T^n f, g_k \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g_k \rangle \right| + \left| \langle f, 1 \rangle \langle 1, g_k - g \rangle \right|.$$

A primeira e a terceira parcelas são majoradas por  $\|f\|_2 \|g - g_k\|_2$ . Fixando  $k$  e tomando o limite superior em  $n$ , a segunda parcela tende a zero (pois  $g_k \in \mathcal{F}_f$ ). Desta forma segue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \langle U_T^n f, g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \right| \leq 2\|f\|_2 \|g - g_k\|_2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como  $\|g - g_k\|_2 \rightarrow 0$ , o limite superior é zero e conseqüentemente  $g \in \mathcal{F}_f$ . A condição (3) garante que  $f \in \mathcal{F}_f$ , e é imediato que toda função constante pertence a  $\mathcal{F}_f$ .

Mostremos agora que  $U_T \mathcal{F}_f \subseteq \mathcal{F}_f$ . Se  $g \in \mathcal{F}_f$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, U_T g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^{n+1} f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, U_T g \rangle,$$

onde usamos que  $\langle 1, U_T g \rangle = \langle 1, g \rangle$ , que é uma afirmação verdadeira pois  $T$  preserva  $\mu$ . Portanto, concluímos que  $U_T g \in \mathcal{F}_f$ .

Seja  $\mathcal{H}_f$  o menor subespaço fechado de  $L^2(\mu)$  contendo  $f$  e as funções constantes tal que  $U_T \mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{H}_f$ . Como  $\mathcal{F}_f$  é um subespaço fechado contendo  $f$  e as funções constantes e também  $U_T$ -invariante, temos  $\mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{F}_f$ .

Afirmamos que  $\mathcal{H}_f^\perp \subseteq \mathcal{F}_f$ . De fato, se  $g \in \mathcal{H}_f^\perp$ , então para todo  $n \geq 0$ ,  $U_T^n f \in \mathcal{H}_f$  (pois  $f \in \mathcal{H}_f$  e  $\mathcal{H}_f$  é  $U_T$ -invariante) e portanto  $\langle U_T^n f, g \rangle = 0$ . Além disso,  $\langle 1, g \rangle = 0$  pois  $1 \in \mathcal{H}_f$ . Conseqüentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, g \rangle = 0 = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle,$$

e  $g \in \mathcal{F}_f$ , estabelecendo  $\mathcal{H}_f^\perp \subseteq \mathcal{F}_f$ .

Das duas inclusões obtemos

$$\mathcal{F}_f^\perp \subseteq \mathcal{H}_f^\perp \subseteq \mathcal{F}_f.$$

Como  $\mathcal{F}_f$  é um subespaço fechado,  $L^2(\mu) = \mathcal{F}_f \oplus \mathcal{F}_f^\perp$ . Já que  $\mathcal{F}_f^\perp \subseteq \mathcal{F}_f$  e a interseção  $\mathcal{F}_f \cap \mathcal{F}_f^\perp = \{0\}$  segue que  $\mathcal{F}_f^\perp = \{0\}$ , donde  $\mathcal{F}_f = L^2(\mu)$ . Destes fatos concluímos finalmente que para toda função  $g \in L^2(\mu)$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle,$$

provando (2) e encerrando a demonstração. ■

### 3. Produtos Diretos, Misturas e Ergodicidade

**Definição 10.** Seja  $T_i: X_i \rightarrow X_i$  uma transformação que preserva medida sobre um espaço de probabilidade  $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ , para  $i = 1, 2$ . O produto direto destas duas transformações, notação,  $T_1 \times T_2$  é definido como sendo a transformação, que preserva medida sobre o espaço de probabilidade  $(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ , dada pela seguinte expressão:

$$(T_1 \times T_2)(x_1, x_2) = (T_1(x_1), T_2(x_2)).$$

O próximo teorema mostra a relação entre as propriedades de mistura fraca de uma transformação  $T: X \rightarrow X$  e a ergodicidade de sua versão duplicada, isto é, sua versão duplicada  $T \times T$ :

**Teorema 11.** Se  $T$  é uma transformação que preserva a medida sobre um espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $T$  é fracamente misturadora.
- (ii)  $T \times T$  é ergódica.
- (iii)  $T \times T$  é fracamente misturadora.

**Prova.** Primeiro vamos mostrar  $(i) \implies (iii)$ . Sejam  $A, B, C$  e  $D \in \mathcal{B}$ . Sabemos pelo **Teorema 3** que existem subconjuntos de densidade nula  $J(A, B)$  e  $J(C, D) \subseteq \mathbb{Z}_+$  tais que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{N} \setminus J(A, B)}} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{N} \setminus J(C, D)}} \mu(T^{-n}C \cap D) = \mu(C)\mu(D).$$

Logo, segue das propriedades elementares da medida produto e das igualdades acima que

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{N} \setminus (J(A, B) \cup J(C, D))}} (\mu \times \mu) \left( (T \times T)^{-n} (A \times C) \cap (B \times D) \right) \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{N} \setminus (J(A, B) \cup J(C, D))}} \mu(T^{-n}A \cap B) \mu(T^{-n}C \cap D) \\ &= \mu(A)\mu(B)\mu(C)\mu(D) \\ &= (\mu \times \mu)(A \times C) (\mu \times \mu)(B \times D). \end{aligned}$$

Destas igualdades e do **Teorema 2** segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| (\mu \times \mu) \left( (T \times T)^{-i} (A \times C) \cap (B \times D) \right) - (\mu \times \mu)(A \times C) (\mu \times \mu)(B \times D) \right| = 0.$$

Já que a coleção dos retângulos mensuráveis formam uma semi-álgebra que gera a  $\sigma$ -álgebra produto  $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$  segue do **Teorema 26** que  $(T \times T)$  é fracamente misturadora.

Para mostrar  $(iii) \implies (i)$ , basta observar que sob a hipótese de  $(T \times T)$  ser fracamente misturadora, podemos usar o item (i) do **Teorema 26** para assegurar que  $(T \times T)$  é ergódica.

Vamos mostrar agora que  $(ii) \implies (i)$ . Pelo **Teorema 3** basta mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \mu(T^{-i}A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \right)^2 = 0.$$

De fato, pela ergodicidade de  $(T \times T)$  e pelo item (i) do **Teorema 26** temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\mu \times \mu) \left( (T \times T)^{-i} (A \times X) \cap (B \times X) \right) \\ &= (\mu \times \mu)(A \times X) (\mu \times \mu)(B \times X) \\ &= \mu(A)\mu(B). \end{aligned}$$

Observe que mais uma aplicação da ergodicidade de  $(T \times T)$  e do (i) do **Teorema 26** fornece

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\mu(T^{-i}A \cap B))^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\mu \times \mu) \left( (T \times T)^{-i} (A \times A) \cap (B \times B) \right) \\ &= (\mu \times \mu)(A \times A) (\mu \times \mu)(B \times B) \\ &= \mu(A)^2 \mu(B)^2. \end{aligned}$$

Usando as igualdades estabelecidas concluímos finalmente que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \mu(T^{-i}A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B)^2 - 2\mu(T^{-i}A \cap B)\mu(A)\mu(B) + \mu(A)^2\mu(B)^2 \\ &= \mu(A)^2\mu(B)^2 - 2\mu(A)^2\mu(B)^2 + \mu(A)^2\mu(B)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

O que encerra a prova do teorema. ■

Próximo passo é relacionar a propriedade dinâmica, fracamente misturadora, de uma transformação  $T : X \rightarrow X$ , que preserva medida sobre  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  com as propriedades espectrais do operador de Koopman  $U_T : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ , associado à  $T$ .

**Definição 12.** Seja  $T : X \rightarrow X$  uma transformação que preserva medida sobre um espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ . Vamos dizer que  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor de  $T$  se  $\lambda$  é um autovalor da isometria  $U_T : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ , isto é, se existe alguma  $f \in L^2(\mu)$ , com  $f \neq 0$ , tal que  $U_T f = \lambda f$ . Equivalentemente,  $f(T(x)) = \lambda f(x)$   $\mu$ -qtp. Tal função  $f$  é chamada de autofunção associada ao autovalor  $\lambda$ .

### Observações

(i) Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor de  $T$ , então  $|\lambda| = 1$ , já que

$$\|f\|^2 = \|U_T f\|^2 = \langle U_T f, U_T f \rangle = \langle \lambda f, \lambda f \rangle = |\lambda|^2 \|f\|^2.$$

- (ii) Toda transformação  $T : X \rightarrow X$  que preserva medida tem  $\lambda = 1$  como autovalor e qualquer função constante não-nula é uma autofunção correspondente a este autovalor.

**Definição 13.** Dizemos que uma transformação  $T : X \rightarrow X$  que preserva medida sobre um espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  tem espectro contínuo, se  $\lambda = 1$  é o único autovalor de  $T$  e além do mais, as únicas autofunções correspondentes a este autovalor são apenas as funções constantes.

**Proposição 14.** Seja  $T : X \rightarrow X$  uma transformação que preserva medida sobre um espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ . A transformação  $T$  possui espectro contínuo se, e somente se,  $\lambda = 1$  é o único autovalor de  $T$  e  $T$  é ergódica.

**Prova.** Suponha que  $T$  possui espectro contínuo. Então, por definição,  $\lambda = 1$  é o único autovalor de  $T$  e as únicas autofunções associadas a este autovalor são as funções constantes  $\mu$ -qtp. Em particular, se  $f \in L^2(\mu)$  satisfaz  $f(Tx) = f(x)$   $\mu$ -qtp., então  $f$  é constante  $\mu$ -qtp., logo  $T$  é ergódica.

Reciprocamente, suponha que  $\lambda = 1$  é o único autovalor de  $T$  e que  $T$  é ergódica. Da ergodicidade de  $T$  segue que as únicas funções  $f \in L^2(\mu)$  satisfazendo  $f(Tx) = f(x)$   $\mu$ -qtp. são as funções constantes  $\mu$ -qtp. Como  $\lambda = 1$  é, por hipótese, o único autovalor de  $T$ , concluímos que as únicas autofunções de  $T$  são as funções constantes (associadas a  $\lambda = 1$ ). Portanto  $T$  possui espectro contínuo. ■

A seguir, enunciamos o Teorema Espectral para Operadores Unitários. Este resultado será usado na prova do Teorema 17 que relaciona o conceito de mistura fraca e espectro contínuo. A prova do Teorema Espectral pode ser encontrada por exemplo na referência [2].

**Definição 15.** Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert sobre  $\mathbb{C}$ . Um operador linear limitado  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é dito **unitário** se satisfaz as seguintes condições:

$$U^*U = UU^* = I$$

onde  $U^*$  é o operador adjunto e  $I$  é a identidade em  $\mathcal{H}$ .

Observamos que segue diretamente da definição que todo operador unitário  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  preserva produto interno, isto é,  $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$  e que a aplicação  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é sobrejetiva. Outra observação importante é que o espectro de um operador unitário  $U$  está contido no círculo unitário do plano complexo,  $\mathbb{S}^1 \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

**Teorema 16** (Teorema Espectral para Operadores Unitários). Sejam  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert e  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador unitário. Então para cada  $f \in \mathcal{H}$  existe uma única medida de Borel não-negativa e finita  $\mu_f$  definida sobre  $\mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$  tal que para todo  $n \in \mathbb{Z}$  temos

$$\langle U^n f, f \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \lambda^n d\mu_f(\lambda). \quad (7)$$

Em particular, se  $T : X \rightarrow X$  é uma transformação invertível que preserva medida, então o operador de Koopman  $U_T : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$  é um operador unitário. Além do mais, se  $T$  possui espectro contínuo e  $\langle f, 1 \rangle = 0$ , então  $\mu_f$  não possui átomos o que implica  $\mu_f(\{z\}) = 0$ , para todo  $z \in \mathbb{S}^1$ .

**Teorema 17.** Se  $T : X \rightarrow X$  é uma aplicação invertível que preserva medida sobre um espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , então  $T$  é fracamente misturadora se, e somente se,  $T$  possui espectro contínuo.

**Observação 18.** A hipótese de invertibilidade é necessária apenas para a recíproca, onde utilizamos o Teorema Espectral para Operadores Unitários. A implicação direta ( $T$  fracamente misturadora  $\implies$  espectro contínuo) é válida para qualquer transformação que preserva medida, sem a exigência de invertibilidade.

**Prova.** Vamos supor inicialmente que  $T : X \rightarrow X$  seja uma transformação fracamente misturadora. Seja  $f \in L^2(\mu)$  tal que  $U_T f = \lambda f$ . Vamos mostrar que se  $\lambda \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ , então  $f(x) = 0$   $\mu$ -qtp e conseqüentemente  $\lambda$  não é autovalor de  $T$ . De fato, integrando ambos lados da igualdade  $U_T f = \lambda f$  ficamos com

$$\int_X f d\mu = \int_X U_T f d\mu = \lambda \int_X f d\mu \quad \implies \quad \langle f, 1 \rangle = \int_X f d\mu = 0.$$

Por outro lado, segue da propriedade de mistura fraca, do item (ii) do Teorema 9 e da última igualdade acima que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\langle U_T^i f, f \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \implies \quad \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\langle \lambda^i f, f \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Como  $|\lambda| = 1$ , segue da igualdade acima que  $\langle f, f \rangle = 0$  e, conseqüentemente,  $f = 0$   $\mu$ -qtp.

Agora, resta mostrar que as únicas autofunções associadas à  $\lambda = 1$ , são as funções constantes  $\mu$ -qtp. De fato, como  $T$  é fracamente misturadora, temos que  $T$  é ergódica. Portanto se  $f(Tx) = f(x)$   $\mu$ -qtp, então segue que  $f$  é constante  $\mu$ -qtp. (Esta parte da prova não utilizou o teorema espectral.)

Para provar a recíproca, é suficiente, pelo item (ii) do Teorema 9, mostrar que se  $T$  possui espectro contínuo então vale a seguinte igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\langle U_T^i f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle|^2 = 0, \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Vamos separar a análise em dois casos.

**Caso 1.** A função  $f$  é constante  $\mu$ -qtp. Suponha que  $f \equiv \alpha$ , onde  $\alpha \in \mathbb{C}$  é uma constante. Neste caso, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\langle U_T^i f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\langle \alpha, \alpha \rangle - \langle \alpha, 1 \rangle \langle 1, \alpha \rangle|^2 = 0.$$

**Caso 2.** A função  $f$  pertence ao subespaço perpendicular ao subespaço gerado pelas funções constantes  $\mu$ -qtp. Agora, o que precisamos mostrar é que  $\langle f, 1 \rangle = 0$  implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\langle U_T^i f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\langle U_T^i f, f \rangle|^2 = 0, \quad \forall f \in \text{Span}(1)^\perp.$$

Como estamos assumindo que  $T : X \rightarrow X$  é uma transformação invertível que preserva medida sobre o espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , podemos aplicar o Teorema Espectral

para Operadores Unitários, e portanto para provar que o limite acima é zero, basta mostrar que para cada  $f \in L^2(\mu)$  satisfazendo  $\langle f, 1 \rangle = 0$ , temos

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{\mathbb{S}^1} \lambda^i d\mu_f(\lambda) \right|^2 \rightarrow 0.$$

Note que segue das propriedades elementares do valor absoluto de números complexos, das propriedades elementares da integral de Lebesgue de funções complexas e do Teorema de Fubini para funções complexas que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{\mathbb{S}^1} \lambda^i d\mu_f(\lambda) \right|^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{\mathbb{S}^1} \lambda^i d\mu_f(\lambda) \cdot \int_{\mathbb{S}^1} \lambda^{-i} d\mu_f(\lambda) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{\mathbb{S}^1} \lambda^i d\mu_f(\lambda) \cdot \int_{\mathbb{S}^1} \tau^{-i} d\mu_f(\tau) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \iint_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1} (\lambda\bar{\tau})^i d(\mu_f \times \mu_f)(\lambda, \tau) \quad (\text{pelo Teorema de Fubini}) \\ &= \iint_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda\bar{\tau})^i \right) d(\mu_f \times \mu_f)(\lambda, \tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Note que para cada par  $(\lambda, \tau)$  fixado, fora da diagonal  $\Delta \equiv \{(z, z) : z \in \mathbb{S}^1\}$  de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , temos

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda\bar{\tau})^i \right| = \left| \frac{1}{n} \left[ \frac{1 - (\lambda\bar{\tau})^n}{1 - \lambda\bar{\tau}} \right] \right| \leq \frac{2}{n} \frac{1}{|1 - \lambda\bar{\tau}|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Como  $\langle f, 1 \rangle = 0$  e  $T$  possui espectro contínuo, segue do Teorema Espectral que  $\mu_f$  não possui átomos. Portanto a diagonal  $\Delta$  de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  tem medida  $\mu_f \times \mu_f$  nula. De fato, pelo Teorema de Fubini, a medida produto da diagonal  $\Delta$  pode ser calculada como segue

$$\begin{aligned} (\mu_f \times \mu_f)(\Delta) &= \int_{\mathbb{S}^1} \left[ \int_{\mathbb{S}^1} \chi_{\Delta}(z, w) d\mu_f(w) \right] d\mu_f(z) \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} \left[ \int_{\mathbb{S}^1} \chi_{\{z\}}(w) d\mu_f(w) \right] d\mu_f(z) \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} \mu_f(\{z\}) d\mu_f(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta observação e da anterior concluímos que  $(1/n) \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda\bar{\tau})^i \rightarrow 0$   $(\mu_f \times \mu_f)$ -qtp. Já que o módulo do integrando em (8) é limitado por 1, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{\mathbb{S}^1} \lambda^i d\mu_f(\lambda) \right|^2 = 0.$$

Para finalizar a prova da recíproca, basta observar que  $L^2(\mu) = \text{span}(1) \oplus \text{span}(1)^\perp$  e portanto para cada  $f \in L^2(\mu)$  existem únicas constante  $\alpha$  e  $g \in \text{span}(1)^\perp$  tais que  $f = \alpha + g$ .

Logo

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\langle U_T^i f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle|^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\langle U_T^i(\alpha + g), (\alpha + g) \rangle - \langle (\alpha + g), 1 \rangle \langle 1, (\alpha + g) \rangle|^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\langle (\alpha + U_T^i g), (\alpha + g) \rangle - \langle (\alpha + g), 1 \rangle \langle 1, (\alpha + g) \rangle|^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| |\alpha|^2 + \langle U_T^i g, \alpha \rangle + \langle U_T^i g, g \rangle - |\alpha|^2 \right|^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \bar{\alpha} \int_X g \circ T^i d\mu + \langle U_T^i g, g \rangle \right|^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \bar{\alpha} \int_X g d\mu + \langle U_T^i g, g \rangle \right|^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\langle U_T^i g, g \rangle|^2 = 0.
\end{aligned}$$

■

## 4. Exemplos

A aplicação identidade  $I : X \rightarrow X$  sobre um espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  é uma transformação ergódica se, e somente se, para todo  $B \in \mathcal{B}$  temos  $\mu(B) \in \{0, 1\}$ . Similarmente,  $I : X \rightarrow X$  é fortemente misturadora se, e somente se, para todo  $B \in \mathcal{B}$  temos  $\mu(B) \in \{0, 1\}$ .

Uma rotação  $T : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $T(z) = az$ , nunca é fracamente misturadora sobre  $(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu)$ , onde  $\mu$  é a medida de probabilidade de Haar. De fato, a função  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = z$  satisfaz a equação de autovalor  $f(Tz) = Tz = az = af(z)$ . Desta forma,  $T$  não possui espectro contínuo, logo segue do [Teorema 17](#) que  $T$  não é fracamente misturadora.

**Teorema 19.** Nenhuma rotação  $T : G \rightarrow G$  com  $Tx = ax$ , definida sobre um grupo compacto  $(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ , onde  $\mu$  é a medida de probabilidade de Haar, é fracamente misturadora.

**Prova.** Suponha, por contradição, que  $T$  é fracamente misturadora. Como visto anteriormente, se  $T$  é fracamente misturadora, então  $T$  é ergódica. Neste caso,  $G$  é necessariamente abeliano (se uma translação  $x \mapsto ax$  é ergódica, então a órbita  $\{a^n\}$  é densa em  $G$ , o que força a comutatividade de  $G$ ; veja, por exemplo, [3]). Além do mais, temos  $\gamma(Tx) = \gamma(a)\gamma(x)$ , para todo  $x \in G$ , logo  $T$  não possui espectro contínuo. Portanto, outra aplicação do [Teorema 17](#) mostra que  $T$  não pode ser fracamente misturadora, o que é uma contradição. ■

**Teorema 20.** Seja  $T : G \rightarrow G$  um endomorfismo (homomorfismo contínuo) sobrejetor definido sobre um grupo compacto abeliano  $(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ , onde  $\mu$  é a medida de probabilidade de Haar. Neste caso, temos:

$T$  é ergódica  $\iff T$  é fracamente misturadora  $\iff T$  é fortemente misturadora.

**Prova.** É suficiente mostrar que se  $T$  é um endomorfismo sobrejetivo ergódico, então  $T$  é fortemente misturador.

Primeiro, lembramos que se  $\gamma, \delta \in \widehat{G}$  são caracteres distintos, então

$$\langle \gamma, \delta \rangle \equiv \int_G \gamma(x) \overline{\delta(x)} d\mu(x) = 0.$$

Para um endomorfismo sobrejetivo de um grupo compacto abeliano,  $T$  é ergódico se, e somente se, o endomorfismo dual  $\widehat{T} : \widehat{G} \rightarrow \widehat{G}$  dado por  $\widehat{T}\gamma = \gamma \circ T$  não possui órbitas finitas não-triviais (veja, por exemplo, [3]). Em particular, sendo  $T$  ergódico, a sequência  $\{U_T^i \gamma\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$  é formada por caracteres dois a dois distintos para todo  $\gamma \neq 1$ . Logo  $\langle U_T^n \gamma, \delta \rangle = 0$ , exceto para no máximo um índice  $n$ . Portanto, se  $\gamma, \delta \in \widehat{G}$  são caracteres distintos, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n \gamma, \delta \rangle = \langle \gamma, 1 \rangle \langle 1, \delta \rangle$$

Para finalizar a prova precisamos estender a igualdade acima para quaisquer pares de funções  $L^2(\mu)$ . Primeiro, fixe  $\delta \in \widehat{G}$  e considere o conjunto

$$\mathcal{H}_\delta \equiv \left\{ f \in L^2(\mu) : \lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, \delta \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, \delta \rangle \right\}.$$

Afirmamos que  $\mathcal{H}_\delta$  é um subespaço fechado de  $L^2(\mu)$ . A verificação que  $\mathcal{H}_\delta$  é um subespaço vetorial segue diretamente das propriedades elementares de limites e da linearidade do produto interno em sua primeira entrada. A verificação de que  $\mathcal{H}_\delta$  é um subconjunto fechado é um pouco mais delicada. Vamos provar este fato, considerando separadamente os casos: (1)  $\delta \equiv 1$  e (2)  $\delta \neq 1$ .

Suponha que  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $\mathcal{H}_\delta$  tal que  $\|f_k - f\|_2 \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , para alguma função  $f \in L^2(\mu)$ . Temos que mostrar que  $f \in \mathcal{H}_\delta$ . Vamos considerar inicialmente o caso (1)  $\delta \equiv 1$ . Neste caso, temos para qualquer  $f \in L^2(\mu)$  que  $\langle U_T^n f, 1 \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, 1 \rangle$  e portanto  $\mathcal{H}_1 = L^2(\mu)$ .

No caso (2) temos  $\delta \in \widehat{G} \setminus \{1\}$  e conseqüentemente  $\langle 1, \delta \rangle = 0$ . Usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \langle U_T^n f, \delta \rangle \right| &\leq \left| \langle U_T^n f, \delta \rangle - \langle U_T^n f_k, \delta \rangle \right| + \left| \langle U_T^n f_k, \delta \rangle \right| \\ &\leq \|f - f_k\|_2 \|\delta\|_2 + \left| \langle U_T^n f_k, \delta \rangle \right|. \end{aligned}$$

Tomando o limite superior, quando  $n \rightarrow \infty$ , em ambos os lados e usando que  $f_k \in \mathcal{H}_\delta$  implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f_k, \delta \rangle = \langle f_k, 1 \rangle \langle 1, \delta \rangle = 0$ , obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \langle U_T^n f, \delta \rangle \right| \leq \|f - f_k\|_2 \|\delta\|_2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como a desigualdade acima é válida para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $\|f_k - f\|_2 \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , concluímos que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \langle U_T^n f, \delta \rangle \right| = 0$ . Logo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, \delta \rangle = 0 = \langle f, 1 \rangle \langle 1, \delta \rangle$  e portanto  $f \in \mathcal{H}_\delta$ . Isto mostra que  $\mathcal{H}_\delta$  é fechado.

Como  $\widehat{G} \subseteq \mathcal{H}_\delta$ , então segue do Teorema de Peter-Weyl que  $\mathcal{H}_\delta = L^2(\mu)$ .

Para finalizar, fixamos  $f \in L^2(\mu)$  e consideramos a coleção

$$\mathcal{L}_f \equiv \left\{ g \in L^2(\mu) : \lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \right\}.$$

Argumentando como acima, podemos verificar que  $\mathcal{L}_f$  é um subespaço de  $L^2(\mu)$ . Pelo resultado anterior sabemos que  $\widehat{G} \subseteq \mathcal{L}_f$ . Portanto  $\mathcal{L}_f = L^2(\mu)$ , para qualquer função  $f \in L^2(\mu)$ . ■

**Teorema 21.** Seja  $G$  um grupo compacto abeliano métrico e  $T : G \rightarrow G$  uma aplicação afim dada por  $T(x) = aA(x)$ , onde  $a \in G$  e  $A : G \rightarrow G$  é um endomorfismo sobrejetor. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $T$  é fortemente misturadora.
- (ii)  $T$  é fracamente misturadora.
- (iii)  $A$  é ergódica.

**Prova.** (iii)  $\implies$  (i): Definimos o endomorfismo  $B : G \rightarrow G$  por  $B(x) = A(x)x^{-1}$ . Para mostrar que  $B$  é sobrejetor, consideramos o seu homomorfismo dual  $\widehat{B} : \widehat{G} \rightarrow \widehat{G}$ , dado por  $\widehat{B}(\gamma) = (\gamma \circ A)\gamma^{-1}$ . Note que se  $\widehat{B}(\gamma) = 1$ , então  $\gamma \circ A = \gamma$ . Como  $A$  é ergódica, as únicas funções invariantes em  $L^2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$  são as constantes. Como  $\gamma \in \widehat{G}$ , isso implica que  $\gamma = 1$ . Logo, o núcleo de  $\widehat{B}$  é trivial, o que mostra que  $\widehat{B}$  é injetor. Uma vez que  $G$  é um grupo compacto abeliano, a injetividade do dual implica a sobrejetividade do endomorfismo original, portanto  $B(G) = G$ .

Dessa forma, existe  $b \in G$  tal que  $B(b) = a$ , ou seja,  $A(b)b^{-1} = a$ , o que implica  $ba = A(b)$ . Definimos a translação  $\phi : G \rightarrow G$  por  $\phi(x) = bx$ . Note que  $\phi$  é um isomorfismo de espaços de medida que preserva a medida de Haar  $\mu$ . Além disso, para qualquer  $x \in G$ , temos:

$$(\phi \circ T)(x) = \phi(aA(x)) = baA(x) = A(b)A(x) = A(bx) = (A \circ \phi)(x).$$

Como assumimos que a transformação  $A : G \rightarrow G$  é ergódica, segue do Teorema 20 que a transformação  $A : G \rightarrow G$  é fortemente misturadora. Observe também que  $\phi \circ T = A \circ \phi$  implica  $\phi \circ T^{-n} = A^{-n} \circ \phi$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Desta forma dados  $C, D \in \mathcal{B}(G)$  temos

$$\begin{aligned} \mu(T^{-n}C \cap D) &= \mu(\phi(T^{-n}C \cap D)) \\ &= \mu(\phi(T^{-n}C) \cap \phi D) \\ &= \mu(A^{-n}\phi C \cap \phi D). \end{aligned}$$

Como  $A$  é fortemente misturadora, temos que  $\mu(A^{-n}\phi C \cap \phi D) \rightarrow \mu(\phi C)\mu(\phi D)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Além do mais, como  $\phi$  preserva  $\mu$ , temos  $\mu(\phi C)\mu(\phi D) = \mu(C)\mu(D)$ . Portanto  $\mu(T^{-n}C \cap D) \rightarrow \mu(C)\mu(D)$ , mostrando que  $T$  é fortemente misturadora.

(i)  $\implies$  (ii): Esta implicação é trivial.

(ii)  $\implies$  (iii): Suponha que  $T$  é fracamente misturadora mas  $A$  não é ergódica. Como  $A$  é um endomorfismo de um grupo compacto, se  $A$  não é ergódica, então existe um caractere não-trivial cuja órbita sob o dual  $\widehat{A}$  é finita (lembrando que o dual  $\widehat{A}$  age em um elemento

$\gamma \in \widehat{G}$  da seguinte forma  $\widehat{A}\gamma \equiv \gamma \circ A$ ). De fato, como  $A$  não é ergódica, existe algum  $f \in L^2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$  não constante com  $f \circ A = f$   $\mu$ -qtp. Escrevendo

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \gamma_j$$

na base ortonormal de caracteres, a invariância  $f \circ A = f$  implica

$$c_j = c_{\widehat{A}(\gamma_j)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

O suporte  $S = \{\gamma_j : c_j \neq 0\}$  é invariante por  $\widehat{A}$ , ou seja,  $\widehat{A}(S) \subseteq S$ . Como  $f \in L^2$ , temos da identidade de Parseval que  $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$ . Se algum  $\gamma \in S \setminus \{1\}$  tivesse órbita infinita  $\{\gamma, \widehat{A}(\gamma), \widehat{A}^2(\gamma), \dots\}$  (com todos os elementos distintos), então os coeficientes ao longo dessa órbita seriam todos iguais a  $c_\gamma \neq 0$ , o que contradiz a convergência da série. Logo todo elemento de  $S \setminus \{1\}$  tem órbita finita sob  $\widehat{A}$ . Em particular, existe  $\gamma \in \widehat{G} \setminus \{1\}$  cuja órbita  $\{\gamma \circ A^n : n \in \mathbb{N}\}$  sob  $\widehat{A}$  é finita. Seja  $\mathcal{V} \subset L^2(G)$  o subespaço gerado por essa órbita finita. Claramente,  $\mathcal{V}$  é um subespaço de dimensão finita que é invariante pelo operador de Koopman  $U_A f = f \circ A$ .

Note que o operador de Koopman associado a  $T$  é dado por  $(U_T f)(x) = f(aA(x))$ . Se  $f \in \mathcal{V}$ , então  $f$  é uma combinação linear de caracteres, digamos  $f = \sum_{j=1}^m c_j \gamma_j$ . Então:

$$(U_T f)(x) = \sum_{j=1}^m c_j \gamma_j(aA(x)) = \sum_{j=1}^m c_j \gamma_j(a) \gamma_j(A(x)) = \sum_{j=1}^m (c_j \gamma_j(a)) (U_A \gamma_j)(x).$$

Como cada  $U_A \gamma_j$  pertence a  $\mathcal{V}$ , segue que  $U_T(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ . Sendo  $\mathcal{V}$  um subespaço invariante de dimensão finita,  $U_T$  restrito a  $\mathcal{V}$  possui pelo menos um autovalor  $\lambda \in \mathbb{C}$  e uma autofunção correspondente  $f \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ . Como  $U_T$  é uma isometria,  $|\lambda| = 1$ . Além disso, como cada elemento de  $\mathcal{V}$  é ortogonal às funções constantes (pois  $\gamma \in \widehat{G} \setminus \{1\}$ ), temos que  $f$  é uma autofunção não constante. Isso contradiz o [Teorema 17](#), que afirma que uma transformação fracamente misturadora possui espectro contínuo (ou seja, não possui autofunções não constantes). Portanto,  $A$  deve ser ergódica. ■

**Teorema 22.** Sejam  $Y \equiv \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $X \equiv Y^{\mathbb{Z}}$  e  $p \equiv (p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$  um vetor de probabilidade de coordenadas estritamente positivas. Seja  $T : X \rightarrow X$  a aplicação de deslocamento (*shift*) para esquerda, definido por

$$(Tx)_n \equiv x_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in X.$$

Considere a medida de Bernoulli  $\mu$  sobre a  $\sigma$ -álgebra produto de  $X$ , que para cada cilindro da forma  $[a_0, a_1, \dots, a_q]_m \equiv \{x \in X : x_m = a_0, x_{m+1} = a_1, \dots, x_{m+q} = a_q\}$ , é dada por

$$\mu([a_0, a_1, \dots, a_q]_m) = p_{a_0} p_{a_1} \cdots p_{a_q}. \quad (9)$$

Então  $T : X \rightarrow X$  é uma aplicação que preserva medida sobre o espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  e além do mais,  $T$  é fortemente misturadora.

**Prova.** Pelo [Teorema 26](#) basta verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

para quaisquer elementos da semi-álgebra dos cilindros finito-dimensionais.

De fato, considere um par arbitrário de cilindros no espaço produto  $X$ , da forma

$$A \equiv [a_0, a_1, \dots, a_q]_m \quad \text{e} \quad B \equiv [b_0, b_1, \dots, b_r]_s.$$

Observe que  $T^{-n}A = [a_0, a_1, \dots, a_q]_{m+n}$ . Para que os suportes desses cilindros sejam disjuntos, os conjuntos de índices  $\{m+n, m+n+1, \dots, m+n+q\}$  e  $\{s, s+1, \dots, s+r\}$  não devem se interceptar. Isso ocorre sempre que  $m+n > s+r$ , ou seja, para todo  $n > s+r-m$ .

Nestas condições, pela propriedade de independência da medida produto (medida de Bernoulli), temos:

$$\begin{aligned} \mu(T^{-n}A \cap B) &= \mu([a_0, a_1, \dots, a_q]_{m+n} \cap [b_0, b_1, \dots, b_r]_s) \\ &= (p_{a_0} \cdots p_{a_q}) \cdot (p_{b_0} \cdots p_{b_r}) \\ &= \mu(A)\mu(B). \end{aligned}$$

Como a igualdade  $\mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$  vale para todo  $n$  suficientemente grande, o limite, quando  $n \rightarrow \infty$ , é imediato, o que mostra que  $T$  é fortemente misturadora.  $\blacksquare$

**Observação 23.** De forma similar, podemos mostrar que o deslocamento (*shift*) para esquerda em  $X \equiv Y^{\mathbb{N}}$  é uma transformação que preserva a medida  $(p_0, \dots, p_{k-1})$  de Bernoulli e além do mais é uma transformação fortemente misturadora.

Seja  $Y \equiv \{0, 1, \dots, k-1\}$  um conjunto finito e considere o espaço produto  $X \equiv Y^{\mathbb{Z}}$  equipado com a  $\sigma$ -álgebra produto  $\mathcal{B}$ . Dada uma matriz estocástica  $P = (P_{ij})_{i,j \in Y}$  e um vetor de probabilidade  $p = (p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$ , satisfazendo  $pP = p$ , sabemos do Teorema 23 da referência [1] que existe uma única medida de probabilidade  $\mu$  em  $(X, \mathcal{B})$  tal que, para qualquer cilindro da forma  $[a_0, a_1, \dots, a_n]_m \in \mathcal{S}$ , temos

$$\mu([a_0, a_1, \dots, a_n]_m) = p_{a_0} P_{a_0 a_1} P_{a_1 a_2} \cdots P_{a_{n-1} a_n}, \quad (10)$$

Esta medida  $\mu$  é chamada de medida  $(p, P)$ -Markoviana.

**Teorema 24.** Sejam  $Y \equiv \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $X \equiv Y^{\mathbb{Z}}$  e  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  o espaço de probabilidade onde,  $\mathcal{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra produto sobre  $X$  e  $\mu$  a medida  $(p, P)$ -Markoviana dada em (10). Assuma que  $p_j > 0$  para todo  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . Se  $T : X \rightarrow X$  denota a aplicação de deslocamento para esquerda, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $T$  é fracamente misturadora.
- (ii)  $T$  é fortemente misturadora.
- (iii) A matriz  $P$  é irredutível e aperiódica (isto é, existe  $N > 0$  tal que a matriz  $P^N$  não possui entradas nulas).
- (iv) Para todos os estados  $i, j \in Y$ , temos  $P_{ij}^{(n)} \rightarrow p_j$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Prova.** Claramente (ii)  $\implies$  (i).

Vamos mostrar que (i)  $\implies$  (iii). Fixados  $i, j \in Y$  temos da definição de transformação fracamente misturadora que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(T^{-n}([j]_0) \cap [i]_0) - \mu([i]_0)\mu([j]_0)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (11)$$

Pela construção da medida  $(p, P)$ -Markoviana temos

$$\mu(T^{-n}([j]_0) \cap [i]_0) = p_i P_{ij}^{(n)} \quad \text{e} \quad \mu([i]_0)\mu([j]_0) = p_i p_j.$$

Como estamos assumindo que todas as coordenadas do vetor de probabilidade  $p \in \mathbb{R}^k$  são estritamente positivas segue de (11), colocando  $p_i$  em evidência, que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |P_{ij}^{(n)} - p_j| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (12)$$

Da convergência acima e do **Teorema 2**, podemos afirmar que existe algum conjunto  $J(i, j)$  de densidade nula em  $\mathbb{Z}^+$  tal que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{N} \setminus J(i, j)}} P_{ij}^{(n)} = p_j.$$

Já que para cada  $i, j \in Y$  o conjunto  $J(i, j)$  possui densidade nula em  $\mathbb{Z}^+$  temos que a união finita dada por

$$J \equiv \bigcup_{i, j \in Y} J(i, j),$$

também possui densidade nula em  $\mathbb{Z}_+$  e além do mais temos

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{N} \setminus J}} P_{ij}^{(n)} = p_j, \quad \forall i, j \in Y.$$

Como estamos assumindo que as coordenadas de  $p \in \mathbb{R}^k$  são todas estritamente positivas, segue que existe algum  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $P_{ij}^{(N)} > 0$ , para todo  $i, j \in Y$  e portanto que  $P$  é irredutível e aperiódica.

(iv)  $\implies$  (iii). Assuma que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = p_j$ , para todos  $i, j \in Y$ . Como, por hipótese,  $p_j > 0$  para todo estado  $j \in Y$ , a definição de limite nos garante que para cada par de estados  $(i, j)$ , existe um inteiro  $N(i, j) > 0$  tal que para todo  $n \geq N(i, j)$ , temos  $P_{ij}^{(n)} > 0$ . Sendo o espaço de estados  $Y$  finito, podemos tomar o máximo  $N = \max_{i, j \in Y} N(i, j)$ . Segue que  $P_{ij}^{(N)} > 0$  para todos  $i, j \in Y$ . Ou seja, todas as entradas da matriz  $P^N$  são estritamente positivas. Isto significa, por definição, que a matriz  $P$  é primitiva, o que é equivalente a dizer que  $P$  é irredutível e aperiódica.

(iii)  $\implies$  (iv). Assuma que  $P$  é irredutível e aperiódica. Por definição, existe um inteiro  $N \geq 1$  tal que  $P^N$  tem todas as suas entradas estritamente positivas, isto é,  $P_{ij}^{(N)} > 0$ , para todos  $i, j \in Y$ . Seja  $\varepsilon \equiv \min_{i, j \in Y} P_{ij}^{(N)} > 0$  e considere o seguinte simplexo de vetores de probabilidade

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ q \in \mathbb{R}^k : q_j \geq 0, \forall j \in Y, \text{ e } \sum_{j \in Y} q_j = 1 \right\},$$

equipado com a métrica de variação total

$$d(q, q') \equiv \frac{1}{2} \sum_{j \in Y} |q_j - q'_j|.$$

Nosso próximo passo será mostrar que a aplicação  $Q : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  dada por  $Q(q) \equiv qP^N$ , define uma contração no espaço métrico  $(\mathcal{S}, d)$ .

Primeiro, vamos verificar que  $Q$  manda elementos de  $\mathcal{S}$  em elementos de  $\mathcal{S}$ . De fato, para todo  $q \in \mathcal{S}$ , temos

$$Q(q)_j = (qP^N)_j = \sum_{i \in Y} q_i P_{ij}^{(N)} \implies \sum_{j \in Y} Q(q)_j = \sum_{j \in Y} \sum_{i \in Y} q_i P_{ij}^{(N)} = \sum_{i \in Y} q_i \sum_{j \in Y} P_{ij}^{(N)} = 1.$$

Para cada  $i, j \in Y$ , defina  $R_{ij}$  por  $P_{ij}^{(N)} = \varepsilon + R_{ij}$ . Pela definição de  $\varepsilon$  temos que  $R_{ij} \geq 0$ . Além do mais, como  $P^N$  é uma matriz estocástica e  $\varepsilon$  é estritamente positivo, temos

$$1 = \sum_{j \in Y} P_{ij}^{(N)} = k\varepsilon + \sum_{j \in Y} R_{ij} \implies 1 - k\varepsilon = \sum_{j \in Y} R_{ij} < \sum_{j \in Y} P_{ij}^{(N)} = 1.$$

Dados dois vetores de probabilidade  $q, q' \in \mathcal{S}$ , temos

$$\begin{aligned} d(Q(q), Q(q')) &= d(qP^N, q'P^N) = \frac{1}{2} \sum_{j \in Y} \left| \sum_{i \in Y} (q_i - q'_i) P_{ij}^{(N)} \right| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in Y} \left| \sum_{i \in Y} (q_i - q'_i) (\varepsilon + R_{ij}) \right| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in Y} \left| \varepsilon \sum_{i \in Y} (q_i - q'_i) + \sum_{i \in Y} (q_i - q'_i) R_{ij} \right| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in Y} \left| \sum_{i \in Y} (q_i - q'_i) R_{ij} \right| \quad (\text{pois } \sum_{i \in Y} q_i = \sum_{i \in Y} q'_i = 1) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i \in Y} \sum_{j \in Y} |q_i - q'_i| R_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in Y} |q_i - q'_i| \left( \sum_{j \in Y} R_{ij} \right) \\ &= (1 - k\varepsilon) \frac{1}{2} \sum_{i \in Y} |q_i - q'_i| \\ &= (1 - k\varepsilon) d(q, q'). \end{aligned} \tag{13}$$

Como na definição da medida  $(p, P)$ -Markoviana, temos que  $pP = p$ , então o vetor  $p = (p_0, \dots, p_{k-1})$  pode também ser pensado como um ponto fixo da aplicação  $Q$ , definida acima. Além do mais, temos que  $pP^m = p$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Para cada índice  $i \in Y$  seja  $e^i \in \mathcal{S}$  o vetor de probabilidade cujas coordenadas são dadas por  $e_j^i = \delta_{ij}$ , onde  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker. É claro que podemos pensar em  $e^i$  como os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^k$  (sua  $i$ -ésima coordenada é 1 e as demais são 0).

Já que todo número  $n \in \mathbb{N}$ , pode ser escrito como  $n = mN + r$ , onde  $0 \leq r < N$  e  $m = \lfloor n/N \rfloor$ , temos como consequência da desigualdade (13) que

$$\begin{aligned} d(e^i P^n, p) &= d((e^i P^r) P^{mN}, p P^{mN}) \\ &= d(Q^m(e^i P^r), Q^m(p)) \\ &\leq (1 - k\varepsilon)^m d(e^i P^r, p) \\ &\leq (1 - k\varepsilon)^{\lfloor n/N \rfloor} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Finalmente, para quaisquer  $i, j \in Y$ , temos

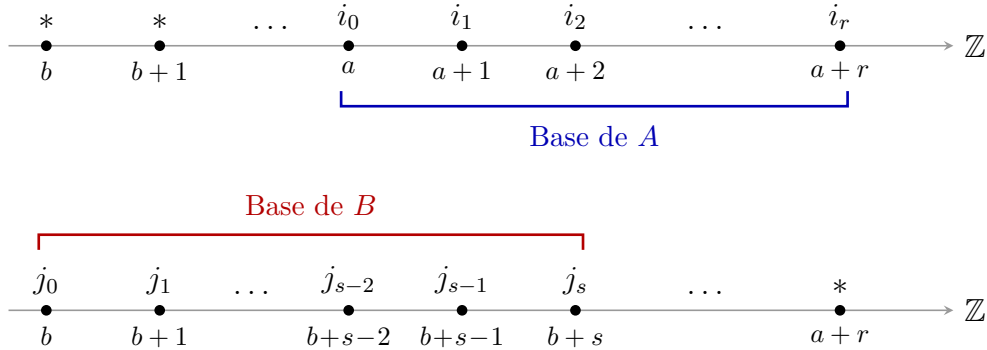
$$|P_{ij}^{(n)} - p_j| = |(e^i P^n)_j - p_j| \leq 2 d(e^i P^n, p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Isso completa a prova de (iii)  $\implies$  (iv).

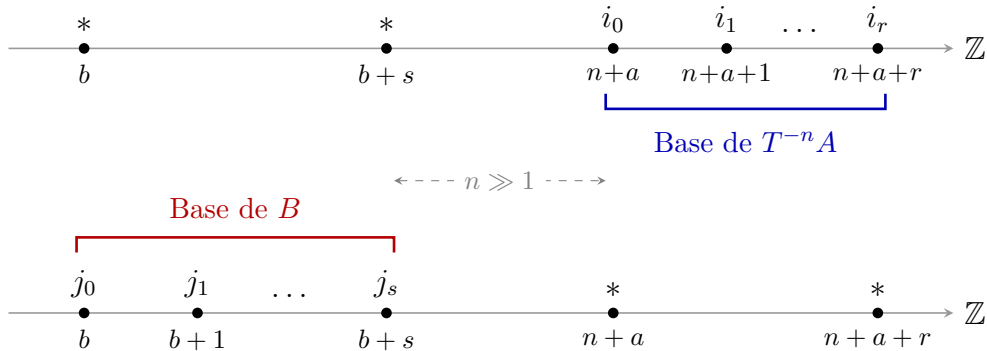
(iv)  $\implies$  (ii). Pelo Teorema 26, basta mostrar que para quaisquer cilindros em  $X$  da forma

$$A = [i_0, \dots, i_r]_a \quad \text{e} \quad B = [j_0, \dots, j_s]_b,$$

temos  $\mu(T^{-n}A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .



Para  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n + a > b + s$ , os conjuntos de índices das bases dos cilindros  $T^{-n}A$  e  $B$  não se interceptam.



Desta forma, já que  $\mu$  é uma medida  $(p, P)$ -Markoviana, temos

$$\mu(T^{-n}A \cap B) = p_{j_0} P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{s-1} j_s} P_{j_s i_0}^{(n+a-(b+s))} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{r-1} i_r}. \quad (14)$$

Como estamos assumindo que  $P_{ij}^{(n)} \rightarrow p_j$  segue da igualdade acima que existe o seguinte limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) &= p_{j_0} P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{s-1} j_s} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} P_{j_s i_0}^{(n+a-(b+s))} \right) P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{r-1} i_r} \\ &= p_{j_0} P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{s-1} j_s} p_{i_0} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{r-1} i_r} \\ &= \mu(A)\mu(B). \end{aligned}$$

■

**Observação 25.** Sabemos que  $T$  é ergódica se, e somente se, para toda  $f \in L^1(\mu)$ ,  $(1/n) \sum_{i=0}^{n-1} U_T^i f \rightarrow \int f d\mu$   $\mu$ -qtp. Existe a seguinte conexão entre mistura forte e a convergência de médias ergódicas: a transformação  $T$  que preserva medida é fortemente misturadora se, e somente se, para toda sequência crescente  $k_1 < k_2 < \dots$  de números naturais e para toda  $f \in L^2(\mu)$ , temos  $\|(1/n) \sum_{i=0}^{n-1} U_T^{k_i} f - \int f d\mu\|_2 \rightarrow 0$  (Blum e Hanson).

## Apêndice - Resultados de Notas Anteriores

Abaixo enunciamos um importante resultado usado ao longo do texto. A prova deste teorema pode ser encontrada nas referências [1, 3].

**Teorema 26.** Sejam  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida e  $\mathcal{S}$  uma semi-álgebra que gera  $\mathcal{B}$ . Seja  $T : X \rightarrow X$  uma transformação que preserva medida. Então:

(i)  $T$  é ergódica se, e somente se, para todos  $A, B \in \mathcal{S}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B) = \mu(A)\mu(B);$$

(ii)  $T$  é fracamente misturadora se, e somente se, para todos  $A, B \in \mathcal{S}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \mu(T^{-i}A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \right| = 0;$$

(iii)  $T$  é fortemente misturadora se, e somente se, para todos  $A, B \in \mathcal{S}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

## Referências

- [1] L. Cioletti. Ergodicidade, mixing e shifts em espaços simbólicos. 2026. MAT-UnB. Lecture Notes in Ergodic Theory.
- [2] P. Halmos. *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 1998. Reprint of the second (1957) edition.
- [3] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.