Uma Introdução aos Espaços de Hilbert e uma Caracterização Geométrica de Subespaços Gaussianos em Dimensão Infinita

L. Cioletti

Outubro de 2025

Resumo

Neste texto apresentamos alguns fatos elementares da teoria dos espaços de Hilbert sobre o corpo dos números complexos, com foco na classe dos espaços separáveis de dimensão infinita e em aplicações à Teoria de Probabilidade. A apresentação é feita em caráter introdutório e praticamente todos os resultados apresentados são provados em detalhes. Após estabelecidos os fatos mais simples sobre espaços de Hilbert e apresentadas algumas de suas estruturas algébricas e topológicas introduzimos o conceito de base ortonormal no sentido de Schauder e provamos que todo vetor admite uma representação única como uma série incondicionalmente convergente. Em seguida, estudamos o problema de aproximação ótima em subespaços finito-dimensionais e como consequência mostramos a validade da famosa Identidade de Parseval. Na sequência provamos outro resultado fundamental que afirma que quaisquer dois espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita são isometricamente isomorfos, explicitando como qualquer bijeção entre suas bases pode ser unicamente estendida a uma isometria linear entre os respectivos espaços. Por fim, aplicamos estes resultados para estudar as propriedades probabilísticas dos elementos de um subespaço fechado de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, muito especial, construído a partir de variáveis aleatórias normais independentes. Esta aplicação revela uma fascinante e não-trivial relação entre a geometria do espaço e propriedades probabilísticas de seus elementos. Mais precisamente, todos elementos de cada esfera centrada na origem, vistos como variáveis aleatórias, possuem distribuição gaussiana de média zero e variância igual ao quadrado do raio desta esfera. Com intuito de manter esta parte de aplicações mais autocontida possível, apresentamos na íntegra e em detalhes as provas da Desigualdade Maximal de Kolmogorov e do Teorema de Khintchine-Kolmogorov. Mostramos como estes dois resultados podem ser usados como poderosas ferramentas para "promover" convergências no sentido L^2 para convergências no sentido quase certo, tornando assim viáveis a identificação da distribuição dos elementos das esferas mencionadas acima.

Este é um texto de divulgação e tem como um dos seus principais objetivos o de apresentar os resultados mencionados acima em material escrito na língua portuguesa com enfoque didático e acessível. O texto é voltado para estudantes de Matemática, Física e de outras áreas que estejam interessados em aplicações da Teoria de Probabilidade. Ressaltamos que o texto não possui conteúdo original ou inovador e é baseado nas referências [1, 2, 3].

1. Espaços com Produto Interno

Nestas notas relacionamos alguns resultados elementares a respeito de espaços de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Para as aplicações que temos em mente é suficiente trabalhar com espaços de Hilbert separáveis. Portanto, decidimos conduzir as discussões neste nível de generalidade. Uma exposição, muito clara e bem feita, do caso geral pode ser encontrada, por exemplo, na clássica referência [2].

Definição 1 (Produto Interno)**.** Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Um produto interno em $\mathcal{H}$ é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ e tomando valores em $\mathbb{C}$ que satisfaz para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $u, v, w \in \mathcal{H}$:

1. $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$;
2. $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle + \overline{\beta} \langle u, w \rangle$;
3. $\langle u, u \rangle \geqslant 0$ e além do mais $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$;
4. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, para qualquer par $u, v \in \mathcal{H}$.

Exemplo 2. Seja $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$ um espaço de medida, onde $\mathscr{B}([0,1])$ é a sigma-álgebra de Borel de $[0,1]$ e λ a medida de Lebesgue. Denote por W o conjunto das funções complexas definidas sobre $[0,1]$ que são Borel-mensuráveis e de valor absoluto ao quadrado integrável, isto é,

$$W \equiv \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \ : \text{a função } f \text{ é Borel-mensurável e } \int_{[0,1]} |f|^2 \, d\lambda < +\infty \right\}.$$

Considere o espaço quociente

$$V \equiv W/\underset{\lambda}{\sim},$$

onde a relação de equivalência $\underset{\lambda}{\sim}$ é definida da seguinte forma. Dadas $f, g \in W$ dizemos que $f \underset{\lambda}{\sim} g$ se, e somente se,

$$\lambda\Big(\{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\}\Big) = 0.$$

A rigor, os elementos de V são classes de equivalência de funções que coincidem módulo conjuntos de medida λ-nula. Uma maneira precisa de se referir a classe de equivalência de f poderia ser, escrevendo $[f]_\lambda$, onde $[f]_\lambda \equiv \{g \in W : g \underset{\lambda}{\sim} f\}$ mas como de costume vamos abusar da notação e denotar a classe de equivalência de f simplesmente por f. Com esta convenção em mente, podemos mostrar que V possui estrutura natural de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $V \times V$ em $\mathbb{C}$ dada por

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{[0,1]} f \, \overline{g} \, d\lambda$$

define um produto interno sobre V.

Para mostrar que V possui estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, usamos as operações usuais de soma de funções e multiplicação por escalar em W e observamos que estas operações induzem naturalmente uma estrutura algébrica em V. Porém resta argumentar que para qualquer par $f, g \in V$ temos que $|f+g|^2$ é integrável, com respeito à medida λ. Isto pode ser feito com auxílio da seguinte desigualdade $2ab \leqslant (a^2 + b^2)$ que é válida para quaisquer

$a, b \in \mathbb{R}$. De fato, das propriedades elementares do valor absoluto de números complexos e da desigualdade que acabamos de mencionar segue que

$$\begin{aligned} |f+g|^2 = |f|^2 + 2\mathrm{Re}(f \cdot g) + |g|^2 &\leqslant |f|^2 + 2|\mathrm{Re}(f \cdot g)| + |g|^2 \\ &\leqslant |f|^2 + 2|f \cdot g| + |g|^2 \\ &\leqslant 2|f|^2 + 2|g|^2, \end{aligned}$$

para quaisquer que sejam f e g em V. Portanto

$$\int_{[0,1]} |f+g|^2 \, d\lambda \leqslant 2 \int_{[0,1]} |f|^2 \, d\lambda + 2 \int_{[0,1]} |g|^2 \, d\lambda < +\infty,$$

o que mostra que soma de dois elementos de V também pertence a V. O produto por escalar segue diretamente das propriedades elementares da integral de Lebesgue.

Para mostrar que $\langle f, g \rangle$ está bem-definido para qualquer par $f, g \in V$, é necessário provar que a integral abaixo existe (como número complexo)

$$\int_{[0,1]} f \, \overline{g} \, d\lambda$$

e não depende das escolhas dos representantes das classes de equivalência de f e g.

Para a existência da integral basta mostrar que o valor absoluto da função produto $|f\, g|$ é integrável com respeito à medida de Lebesgue. Para isto podemos usar novamente a desigualdade $2ab \leqslant (a^2 + b^2)$ e que $|f \, \overline{g}| = |f| \cdot |\overline{g}| = |f| \cdot |g| = |f \, g|$. De fato,

$$\int_{[0,1]} |f \, \overline{g}| \, d\lambda = \int_{[0,1]} |f \, g| \, d\lambda \leqslant \frac{1}{2} \left(\int_{[0,1]} |f|^2 \, d\lambda + \int_{[0,1]} |g|^2 \, d\lambda \right) < +\infty.$$

A verificação que $\langle f, g \rangle$ é independente das escolhas dos representantes da classe de equivalência é padrão, mas vamos apresentá-la para conveniência do leitor.

Sejam $f_1, f_2 \in [f]_\lambda$ e $g_1, g_2 \in [g]_\lambda$. Então pela definição da relação de equivalência $\underset{\lambda}{\sim}$ podemos afirmar que existem Z e $N \in \mathscr{B}([0,1])$, conjuntos de medida de Lebesgue nula tais que $f_1 \mathbb{1}_{Z^c} = f_2 \mathbb{1}_{Z^c}$ e $g_1 \mathbb{1}_{N^c} = g_2 \mathbb{1}_{N^c}$.

Observe que $(N^c \cap Z^c) \cup (N \cup Z)$ é uma partição mensurável do intervalo $[0,1]$. Portanto segue das propriedades elementares da integral de Lebesgue que

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f_1 \, \overline{g_1} \, d\lambda &= \int_{[0,1]} f_1 \, \overline{g_1} \, (\mathbb{1}_{N^c \cap Z^c} + \mathbb{1}_{N \cup Z}) \, d\lambda \\ &= \int_{[0,1]} f_1 \, \overline{g_1} \cdot \mathbb{1}_{N^c \cap Z^c} \, d\lambda + \int_{[0,1]} f_1 \, \overline{g_1} \cdot \mathbb{1}_{N \cup Z} \, d\lambda \\ &= \int_{[0,1]} f_1 \, \mathbb{1}_{Z^c} \cdot \overline{g_1} \, \mathbb{1}_{N^c} \, d\lambda \\ &= \int_{[0,1]} f_1 \, \mathbb{1}_{Z^c} \cdot \overline{g_1 \, \mathbb{1}_{N^c}} \, d\lambda \\ &= \int_{[0,1]} f_2 \, \mathbb{1}_{Z^c} \cdot \overline{g_2 \, \mathbb{1}_{N^c}} \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_2 \, \overline{g_2} \cdot \mathbb{1}_{Z^c \cap N^c} \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_2 \, \overline{g_2} \, d\lambda, \end{aligned}$$

o que prova que $\langle f, g\rangle$ independe das escolhas dos representantes das classes de equivalência de f e g.

Finalmente, vamos mostrar que as propriedades 1 a 4 da Definição 1 são satisfeitas. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $f, g, h \in V$. Então segue da linearidade da integral de Lebesgue

$$\begin{aligned}\langle \alpha f + \beta g, h\rangle &= \int_{[0,1]} (\alpha f + \beta g)\,\overline{h}\; d\lambda \\ &= \alpha \int_{[0,1]} f\,\overline{h}\; d\lambda + \beta \int_{[0,1]} g\,\overline{h}\; d\lambda \\ &= \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle.\end{aligned}$$

Analogamente, usando também as propriedades elementares da conjugação complexa temos

$$\begin{aligned}\langle f, \alpha h + \beta g\rangle &= \int_{[0,1]} f\,\overline{\alpha h + \beta g}\; d\lambda \\ &= \int_{[0,1]} f\,\overline{\alpha h}\; d\lambda + \int_{[0,1]} g\,\overline{h\beta}\; d\lambda \\ &= \overline{\alpha} \int_{[0,1]} f\,\overline{h}\; d\lambda + \overline{\beta} \int_{[0,1]} g\,\overline{h}\; d\lambda \\ &= \overline{\alpha}\langle f, h\rangle + \overline{\beta}\langle g, h\rangle,\end{aligned}$$

o que prova que as propriedades 1 e 2 são satisfeitas.

Para qualquer $f \in V$ temos

$$\langle f, f\rangle = \int_{[0,1]} f\,\overline{f}\; d\lambda = \int_{[0,1]} |f|^2\, d\lambda \geqslant 0.$$

Além do mais, segue das propriedades da integral de Lebesgue que $\langle f, f\rangle = 0$, se e somente se, $|f(x)|^2 = 0$, λ-quase todo ponto e portanto $f = [0]_\lambda$ que é o elemento nulo do espaço vetorial V. Mostrando que a propriedade 3 é satisfeita.

Para verificar que a propriedade 4 também é satisfeita basta notar que

$$\langle f, g\rangle = \int_{[0,1]} f\,\overline{g}\; d\lambda = \int_{[0,1]} \overline{\overline{f}\,\overline{\overline{g}}}\; d\lambda = \overline{\int_{[0,1]} \overline{f}\,\overline{\overline{g}}\; d\lambda} = \overline{\int_{[0,1]} \overline{f}\, g\; d\lambda} = \overline{\int_{[0,1]} g\,\overline{f}\; d\lambda} = \overline{\langle g, f\rangle}.$$

Portanto $\langle \cdot, \cdot\rangle$ define um produto interno em V. Neste ponto é importante mencionar que o espaço V é conhecido na literatura como o espaço de Lebesgue das funções complexas de valor absoluto ao quadrado integrável. Este espaço é comumente denotado por $L^2([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$.

Teorema 3 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em um espaço vetorial $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{C}$, então

$$|\langle u,v\rangle|^2 \leqslant \langle u,u\rangle\,\langle v,v\rangle, \qquad \forall u,v\in\mathcal{H}.$$

Prova. Considere a função auxiliar $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por $P(\alpha)=\langle u-\alpha v\,,\,u-\alpha v\rangle$. Pela propriedade 3 da definição de produto interno podemos afirmar que a imagem de P está contida em $[0,+\infty)$ e $P(\alpha)=0$, se e somente se, $u-\alpha v=0$, ou seja $u=\alpha v$. Neste caso segue, das propriedades 2 e 4 de produto interno que

$$\begin{aligned}|\langle u,v\rangle|^2=|\langle \alpha v,v\rangle|^2=|\alpha|^2|\langle v,v\rangle|^2=\alpha\,\overline{\alpha}\,\langle v,v\rangle\,\overline{\langle v,v\rangle}=\alpha\,\langle v,\alpha v\rangle\,\overline{\langle v,v\rangle}&=\langle \alpha v,\alpha v\rangle\,\overline{\langle v,v\rangle}\\ &=\langle \alpha v,\alpha v\rangle\,\langle v,v\rangle\\ &=\langle u,u\rangle\,\langle v,v\rangle,\end{aligned}$$

mostrando que a desigualdade é na verdade uma igualdade se, e somente se, u é um múltiplo escalar de v.

Vamos mostrar agora a validade da desigualdade estrita no caso em que u não é múltiplo escalar de v o que no caso de dois vetores é equivalente a dizer que eles são linearmente independentes. Neste caso temos para todo $\alpha\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}0<\langle u-\alpha v\,,\,u-\alpha v\rangle&=\langle u,u\rangle-\overline{\alpha}\langle u,v\rangle-\alpha\langle v,u\rangle+|\alpha|^2\langle v,v\rangle\\ &=\langle u,u\rangle-\overline{\alpha}\langle u,v\rangle-\alpha\overline{\langle u,v\rangle}+|\alpha|^2\langle v,v\rangle\\ &=\langle u,u\rangle-2\mathrm{Re}(\overline{\alpha}\langle u,v\rangle)+|\alpha|^2\langle v,v\rangle\end{aligned}$$

Tomando α na desigualdade acima como sendo $\alpha=t\overline{\langle u,v\rangle}$, onde $t\in\mathbb{R}$, ficamos com

$$\begin{aligned}0<\langle u,u\rangle-2\mathrm{Re}(\overline{\alpha}\langle u,v\rangle)+|\alpha|^2\langle v,v\rangle&=\langle u,u\rangle-2\mathrm{Re}\left(t\langle u,v\rangle\,\langle u,v\rangle\right)+\left|t\,\overline{\langle u,v\rangle}\right|^2\langle v,v\rangle\\ &=\langle u,u\rangle-2|\langle u,v\rangle|^2\cdot t+|\langle u,v\rangle|^2\,\langle v,v\rangle\cdot t^2.\end{aligned}$$

Note que podemos pensar no lado direito da desigualdade acima como uma função polinomial $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com coeficientes em $\mathbb{R}$ de grau dois, dada por

$$p(t)=at^2+bt+c,\quad \text{onde } a\equiv|\langle u,v\rangle|^2\,\langle v,v\rangle,\ b\equiv-2|\langle u,v\rangle|^2\quad\text{e}\quad c\equiv\langle u,u\rangle$$

Da desigualdade acima sabemos que p é polinômio quadrático que assume apenas valores estritamente positivos, logo podemos afirmar que seu discriminante é necessariamente estritamente negativo, isto é,

$$4|\langle u,v\rangle|^4-4\,|\langle u,v\rangle|^2\,\langle v,v\rangle\langle u,u\rangle\equiv b^2-4ac<0\quad\Longleftrightarrow\quad 4|\langle u,v\rangle|^4<4\,|\langle u,v\rangle|^2\,\langle v,v\rangle\langle u,u\rangle.$$

Note que se $|\langle u,v\rangle|=0$, então a conclusão do teorema com desigualdade estrita segue da propriedade 3 da definição de produto interno e de u e v serem linearmente independentes, o que implica que nenhum destes dois vetores pode ser o vetor nulo. Caso contrário, isto é, $|\langle u,v\rangle|\neq 0$, podemos dividir ambos lados da desigualdade acima por $4\,|\langle u,v\rangle|^2$ e concluir que

$$|\langle u,v\rangle|^2<\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle.$$

O que encerra a prova do teorema. ■

2. Norma Induzida por um Produto Interno

Definição 4 (Norma)**.** Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Uma norma em $\mathcal{H}$ é uma aplicação $\|\cdot\|$ definida em $\mathcal{H}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ que satisfaz para todos $\alpha \in \mathbb{C}$ e $u, v \in \mathcal{H}$:

1. $\|u\| \geqslant 0$, valendo a igualdade $\|u\| = 0$ se, e somente se, $u = 0$;
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$;
3. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$;

Corolário 5. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em $\mathcal{H}$. Então a aplicação $u \longmapsto \|u\| \equiv \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ define uma norma em $\mathcal{H}$.

Prova. Vamos ver a seguir que segue diretamente das propriedades da definição de um produto interno que a aplicação $u \longmapsto \|u\| \equiv \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ satisfaz as propriedades 1 e 2 da definição de uma norma. Entretanto, para verificar que esta aplicação também satisfaz a propriedade 3 da definição de norma, conhecida como Desigualdade Triangular, vamos ter que utilizar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 3).

Para verificar a validade da propriedade 1 da definição de norma, basta observar que $\|u\| \equiv \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$, para qualquer $u \in \mathcal{H}$, pela propriedade 3 da definição de um produto interno. Além do mais, segue da propriedade 4 da definição de produto interno que $\|u\| \equiv \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} = 0$ se, e somente se, $u = 0$. O que prova que a propriedade 1 da definição de norma é satisfeita pela aplicação $u \longmapsto \|u\| \equiv \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Para verificar a validade da propriedade 2 da definição de norma, bastar usar as propriedades 1 e 2 da definição de produto interno. De fato, para todos $\alpha \in \mathbb{C}$ e $u \in \mathcal{H}$ temos

$$\|\alpha u\| = \langle \alpha u, \alpha u\rangle^{\frac{1}{2}} = \Big((\alpha\overline{\alpha})\langle u, u\rangle\Big)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2 \langle u, u\rangle)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|u\|.$$

Vamos finalmente mostrar a validade da desigualdade triangular, propriedade 3 da definição de norma. Sejam $u, v \in \mathcal{H}$ vetores arbitrários. Então temos da definição de $\|\cdot\|$ e das propriedades 1 e 2 da definição de produto interno que

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 = \langle u + v \,,\, u + v\rangle &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
&= \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} + \|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle u, v\rangle) + \|v\|^2 \\
&\leqslant \|u\|^2 + 2|\mathrm{Re}(\langle u, v\rangle)| + \|v\|^2 \\
&\leqslant \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2.
\end{aligned}$$

Para prosseguir vamos precisar da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Já que esta desigualdade garante que $|\langle u, v\rangle|^2 \leqslant \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$, tomando raíz quadrada em ambos lados, temos $|\langle u, v\rangle| \leqslant \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}} = \|u\| \cdot \|v\|$. Usando este fato na desigualdade estabelecida acima temos

$$\|u + v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Finalmente, tomando a raíz quadrada em ambos lados da desigualdade acima ficamos com $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$, o que encerra a prova do corolário. ■

3. Espaços de Hilbert

Um espaço vetorial $\mathcal{H}$, sobre $\mathbb{C}$, com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pode sempre ser equipado com a norma $\| \cdot \|$ induzida pelo produto interno, como visto no Corolário 5. Além do mais, esta norma por sua vez induz uma noção de métrica ou distância em $\mathcal{H}$. Mais precisamente.

Definição 6 (Espaço Métrico)**.** Um espaço métrico é par ordenado (M, d), onde M é um conjunto qualquer e d é uma função definida em $M \times M$ e tomando valores em $\mathbb{R}$, chamada distância (ou métrica), que satisfaz para todo $x, y, z \in M$

- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, y) \geqslant 0$ e além do mais, $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Note que a definição de espaço métrico é muito geral. Em particular, ela não exige que o conjunto M tenha nenhuma estrutura particular. Por exemplo, não há necessidade que haja qualquer noção de soma ou produto por escalar definida em M. O que são exigências presentes, por exemplo, nas definições de produto interno e norma.

Definição 7 (Convergência de Sequências em Espaços Métricos)**.** Sejam (M, d) é um espaço métrico e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em M. Dizemos que x_n converge para x, em (M, d), quando $n \to \infty$, se para cada $\varepsilon > 0$ dado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ temos $d(x, x_n) < \varepsilon$.

Observamos que a noção de convergência de sequência em um espaço métrico definida acima, é completamente dependente da métrica de (M, d). Caso fique claro pelo contexto qual métrica estamos considerando em M, podemos escrever simplesmente $x_n \to x$, quando $n \to \infty$ ou usar notação $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, para denotar que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x, em (M, d), quando $n \to \infty$. Além do mais, o limite de uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço métrico (M, d) é único. De fato, se $x_n \to x$ e $x_n \to y$, quando $n \to \infty$, em (M, d), então temos da desigualdade triangular e da definição de distância que $0 \leqslant d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, tomando o limite, quando $n \to \infty$, em ambos lados desta desigualdade concluímos que $d(x, y) = 0$ e consequentemente que $x = y$.

Em contextos nos quais é natural considerar um conjunto M equipado com métricas distintas é importante mencionar com respeito a qual métrica a convergência está sendo considerada.

Definição 8 (Sequência de Cauchy em um Espaço Métrico)**.** Sejam (M, d) um espaço métrico e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em M. Dizemos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (M, d), se para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geqslant n_0$ temos $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definição 9 (Espaço Métrico Completo)**.** Dizemos que (M, d) é um espaço métrico completo, se toda sequência de Cauchy em (M, d) é convergente. Em outras palavras, para cada sequência de Cauchy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, em (M, d), existe um único $x \in M$ tal que $x_n \to x$, quando $n \to \infty$.

Se $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathcal{H}$ chamamos a métrica $d(\cdot, \cdot)$ definida, para cada par $u, v \in \mathcal{H}$, por $d(u, v) \equiv \|u - v\| \equiv \langle u - v, u - v \rangle^{\frac{1}{2}}$ de métrica induzida pelo produto interno. Obviamente se d é a métrica induzida por um produto interno em $\mathcal{H}$ então o par ordenado $(\mathcal{H}, d)$ é um espaço métrico.

Definição 10 (Espaço de Hilbert)**.** Um par ordenado $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em $\mathcal{H}$ é chamado de um espaço de Hilbert se o espaço métrico $(\mathcal{H}, d)$, onde d é a métrica induzida pelo produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, é um espaço métrico completo, no sentido da Definição 9.

Em geral, provar que um espaço normado é completo pode não ser uma tarefa das mais simples, dependendo do caso. Abaixo apresentamos uma ferramenta muito poderosa para provar que um espaço normado é completo. Vamos usar este resultado mais à frente para provar uma versão, para espaços de Hilbert, do famoso Teorema de Riesz-Fischer.

Antes de apresentar o enunciado e prova deste resultado vamos apresentar a seguinte definição.

Definição 11 (Séries Convergentes e Absolutamente Convergentes em Espaços Normados)**.** Sejam $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{H}$. Vamos dizer que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ converge se a sequência de somas parciais $s_n \equiv h_1 + \ldots + h_n$ converge, com respeito à norma $\|\cdot\|$, para algum elemento $h \in \mathcal{H}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ é dita absolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| < +\infty$.

Teorema 12. Um espaço normado arbitrário $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ é completo se, e somente se, toda série absolutamente convergente em $\mathcal{H}$ é convergente.

Prova. Suponha inicialmente que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ é um espaço normado completo. e Seja $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitraria em $\mathcal{H}$ tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| < +\infty$. Considere a sequência de somas parciais $s_n \equiv h_1 + \ldots + h_n$. Então segue da convergência da série acima que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geqslant n \geqslant n_0$ temos

$$\|s_n - s_m\| = \|h_{m+1} + \ldots + h_n\| \leqslant \|h_{m+1}\| + \ldots + \|h_n\| < \varepsilon.$$

Mostrando que a sequência das somas parciais $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$. Como estamos assumindo que este espaço é completo, então temos que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Reciprocamente, suponha que toda série absolutamente convergente em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ é convergente. Seja $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy arbitrária em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$. Observe que para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado, podemos encontrar $n_j \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geqslant n_j$, então $\|h_n - h_m\| \leqslant 2^{-j}$. Além do mais, os índices n_j's podem ser escolhidos de modo que a sequência $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ seja estritamente crescente, isto é, $n_j < n_{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Considere a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_1 \equiv h_{n_1}$ e $x_j \equiv h_{n_j} - h_{n_{j-1}}$, para cada $j \geqslant 2$. Observando que as somas parciais da sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são somas telescópicas, temos a seguinte igualdade $x_1 + \ldots + x_k = h_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Além do mais, temos da definição da sequência $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| &\leqslant \|x_1\| + \sum_{j=2}^{\infty} \|x_j\| \\ &= \|x_1\| + \sum_{j=2}^{\infty} \|h_{n_j} - h_{n_{j-1}}\| \\ &\leqslant \|x_1\| + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j} < +\infty.\end{aligned}$$

Como estamos assumindo que toda série absolutamente convergente é uma série convergente, então podemos concluir da desigualdade acima que existe o seguintes limite

$$h \equiv \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} x_j = \lim_{k\to\infty} h_{n_k}.$$

Como estamos assumindo que a sequência $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, então podemos concluir facilmente que $h_n \to h$, quando $n \to \infty$. O que encerra a prova da completude de $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$. ■

Vamos mostrar agora como usar o teorema anterior para provar a seguinte versão do Teorema de Riesz-Fischer.

Teorema 13 (Riesz-Fischer para L^2)**.** Sejam $(X, \mathscr{X}, \mu)$ um espaço de medida arbitrário e $L^2(X, \mathscr{X}, \mu)$ o espaço das funções (módulo μ) $\mathscr{X}$-mensuráveis, definidas sobre X e tomando valores complexos com de valor absoluto ao quadrado integrável. Então o espaço normado $(L^2(X, \mathscr{X}, \mu), \|\cdot\|_2)$, onde

$$\|f\|_2 \equiv \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}} \equiv \left(\int_X |f(x)|^2\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

é completo.

Prova. Como mencionado acima a ideia é usar o Teorema 12. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^2(X, \mathscr{X}, \mu)$ satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 \equiv B < +\infty$. Defina para cada $n \in \mathbb{N}$

$$G_n \equiv \sum_{k=1}^{n} |f_k| \qquad \text{e} \qquad G \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|.$$

Observe que segue da desigualdade triangular que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|G_n\|_2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_2 \leqslant B \tag{1}$$

Como todas as parcelas de G_n são não-negativas temos que

$$G_n^2 \leqslant G_{n+1}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad G_n^2 \uparrow G^2.$$

Portanto segue do Teorema da Convergência Monótona e da desigualdade (1) que

$$\int_X G^2\, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} G_n^2\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X G_n^2\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \|G_n\|_2^2 \leqslant B^2 < +\infty.$$

e portanto que $G \in L^2(X, \mathscr{X}, \mu)$. Em particular, $G(x) < +\infty$ para μ-quase todo x. Ou seja, para μ-quase todo x temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|(x) \equiv G(x) < +\infty$$

Da desigualdade acima, concluímos que para cada x fixado (no conjunto em que vale a desigualdade acima) que $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|(x) < +\infty$. Portanto segue das propriedades elementares de séries de números reais que a série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ é convergente. Vamos denotar o valor para o qual esta série converge por $F(x)$. Observe que segue da desigualdade triangular na reta que $|F(x)| \leqslant G(x)$, portanto $|F(x)|^2 \leqslant G(x)^2$ e como esta desigualdade vale para μ-quase todo x segue que $F \in L^2(X, \mathscr{X}, \mu)$. Além do mais, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left|F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant 2G(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \left|F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|^2 \leqslant 4G(x)^2$$

Da segunda desigualdade acima e da integrabilidade de G^2 segue que podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada para concluir que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\|F - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_2^2 &= \lim_{n\to\infty} \int_X \left|F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|^2 d\mu(x) \\
&= \int_X \lim_{n\to\infty} \left|F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|^2 d\mu(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

mostrando que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge em $L^2(X, \mathscr{X}, \mu)$ e consequentemente pelo Teorema 12 que $(L^2(X, \mathscr{X}, \mu), \|\cdot\|)$ é um espaço normado completo, encerrando a prova do teorema. ■

Exemplo 14. O espaço finito dimensional $\mathbb{C}^n \equiv \{(z_1, \ldots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}\}$ munido do produto interno definido por

$$\langle z, w\rangle \equiv \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$$

é um espaço de Hilbert.

Exemplo 15. O espaço das sequências de números reais de quadrado somável

$$\ell^2(\mathbb{N}) \equiv \left\{(a_1, a_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty\right\}$$

é um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Neste exemplo, se substituindo as sequências de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por sequências em $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ agora com valor absoluto ao quadrado somável também obtemos um novo exemplo de espaço de Hilbert, mas agora sobre $\mathbb{C}$. Para verificar a completude deste espaço basta aplicar o Teorema de Riesz-Fischer (Teorema 13) com $X \equiv \mathbb{N}$, $\mathscr{X} \equiv \mathscr{P}(\mathbb{N})$ e μ sendo a medida de contagem.

Exemplo 16. Seja $(X, \mathscr{X}, \mu)$ um espaço de medida arbitrário. Então o espaço de Lebesgue $L^2(X, \mathscr{X}, \mu)$ das funções à valores complexos de valor absoluto ao quadrado integrável com produto interno e norma dados, respectivamente, por

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x) \qquad \|f\|_{L^2(X,\mathscr{X},\mu)} \equiv \left(\int_X |f(x)|^2\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert, pelo Teorema de Riesz-Fischer (Teorema 13).

4. Bases Ortonormais em Espaços de Hilbert Separáveis

Definição 17 (Ortogonalidade)**.** Seja $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert. Dizemos que $u, v \in \mathcal{H}$ são ortogonais (ou perpendiculares) se $\langle u, v \rangle = 0$. Mais geralmente, dois subconjuntos $A, B \subseteq \mathcal{H}$ são ditos ortogonais se para todos vetores $u \in A$ e $v \in B$ temos que $\langle u, v \rangle = 0$.

Teorema 18 (Teorema de Pitágoras)**.** Sejam $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert, um número inteiro $n \geqslant 2$ e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em $\mathcal{H}$ dois-a-dois ortogonais. Então

$$\|u_1 + \ldots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_n\|^2.$$

Prova. A prova será feita por indução em n. O caso base será o caso $n = 2$. Para este caso, vamos considerar $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$ dois vetores ortogonais arbitrários. Então a validade da afirmação neste caso segue diretamente da igualdade abaixo

$$\|u_1 + u_2\|^2 = \langle u_1 + u_2 \, , \, u_1 + u_2 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle + 2\mathrm{Re}(\langle u_1, u_2 \rangle) + \langle u_2, u_2 \rangle = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2.$$

Assuma, como hipótese de indução, que a igualdade seja válida para $n = k$, isto é, para qualquer conjunto de vetores $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset \mathcal{H}$ formado por k vetores dois-a-dois ortogonais temos

$$\|u_1 + \ldots + u_k\|^2 = \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_k\|^2.$$

Seja $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}\} \subset \mathcal{H}$ um conjunto arbitrário formado por $k + 1$ vetores dois-a-dois ortogonais. Note que segue da propriedade 1 da definição produto interno que u_{k+1} e $s_k \equiv u_1 + \ldots + u_k$ são vetores ortogonais. De fato,

$$\langle s_k, u_{k+1} \rangle = \langle (u_1 + \ldots + u_k), u_{k+1} \rangle = \langle u_1, u_{k+1} \rangle + \ldots + \langle u_k, u_{k+1} \rangle = 0.$$

Agora, usando o caso base, para o par de vetores s_k e u_{k+1} e em seguida, aplicando a hipótese de indução para s_k, obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\|u_1 + \ldots + u_k + u_{k+1}\|^2 = \|s_k + u_{k+1}\|^2 &= \|s_k\|^2 + \|u_{k+1}\|^2 \\ &= \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_k\|^2 + \|u_{k+1}\|^2.\end{aligned}$$

O que encerra a prova do teorema. ■

Definição 19 (Família Ortonormal)**.** Seja $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e Λ um conjunto arbitrário de índices. Uma família $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de vetores em $\mathcal{H}$ é dita ortonormal, se para quaisquer índices $\alpha, \beta \in \Lambda$ temos

$$\langle u_\alpha \, , \, u_\beta \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \neq \beta; \\ 1, & \text{se } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Chegou finalmente o momento de introduzir o conceito de base de um espaço de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Neste ponto a discussão fica bem delicada. A razão disto é que se $\mathcal{H}$ não é um espaço vetorial de dimensão finita, então existem várias definições não equivalentes de base, usadas na literatura. Os dois conceitos de base mais conhecidos são: de base no sentido Hamel; e de base no sentido de Schauder. Uma base de $\mathcal{H}$ no sentido de Hamel é uma coleção $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de vetores linearmente independentes satisfazendo: se $u \in \mathcal{H}$, então este vetor pode ser escrito como um combinação linear finita de vetores da base. Usando o

Lema de Zorn podemos provar que qualquer espaço vetorial possui uma base de Hamel. O problema é que em dimensão infinita este tipo base pode ser de pouca utilidade, já que ela é necessariamente composta por um conjunto não-enumerável de vetores e, em geral, não apresenta uma relação muito boa com as estruturas herdadas da topologia de $(\mathcal{H}, d)$, onde d é a métrica induzida pelo produto interno de $\mathcal{H}$. Em muitos casos quando $\mathcal{H}$ tem dimensão infinita a noção de base no sentido de Schauder acaba sendo mais adequada já que ela estabelece de partida uma certa compatibilidade entre a estrutura algébrica de espaço vetorial de $\mathcal{H}$ e a estrutura topológica que $\mathcal{H}$ possui quando munido da métrica induzida pelo produto interno. Mas antes de apresentarmos esta definição, precisamos lembrar de mais uma definição importante da teoria de espaços métricos.

Sejam $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert, d a métrica induzida pelo produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $A \subseteq \mathcal{H}$ um subconjunto arbitrário. O **fecho** de A em $\mathcal{H}$, com respeito à métrica d, notação $\overline{A}$, é definido como sendo o conjunto

$$\overline{A} \equiv \left\{ u \in \mathcal{H} : \begin{array}{c} \text{existe alguma sequência } \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ de elementos de } A \\ \text{tal que } d(u, u_n) \to 0, \text{ quando } n \to \infty \end{array} \right\}.$$

Dizemos que um subconjunto $A \subseteq \mathcal{H}$ é **denso** em $\mathcal{H}$, com respeito a métrica d, se o fecho de A em $\mathcal{H}$, com respeito à métrica d, e igual ao próprio $\mathcal{H}$, ou seja, $\overline{A} = \mathcal{H}$.

Definição 20 (Base Ortonormal)**.** Sejam $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert e Λ um conjunto de índices arbitrário. Uma família $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ortonormal em $\mathcal{H}$ é chamada de uma base ortonormal (no sentido de Schauder) de $\mathcal{H}$, se o conjunto de todas as combinações lineares finitas de membros desta família é denso em $\mathcal{H}$.

De agora em diante, vamos usar o termo base exclusivamente no sentido da definição acima, isto é, no sentido de Schauder.

Dizemos que um espaço de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é **separável** se existe alguma base ortonormal $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $\mathcal{H}$, onde o conjunto de índices Λ é enumerável. Todos os espaços de Hilbert considerados nestas notas são separáveis. A hipótese de separabilidade é muito conveniente pois ela permite caracterizar vários conceitos topológicos usando apenas sequências convergentes, evitando-se assim introduzir conceitos mais abstratos como, por exemplo, os de redes topológicas.

Para alguns dos próximos resultados vamos assumir que $\mathcal{H}$ tem base enumerável e que o conjunto de índices $\Lambda = \mathbb{N}$. Mais tarde, porém, vamos mostrar que não há perda de generalidade em assumir que o conjunto de índices $\Lambda = \mathbb{N}$.

Exemplo 21. Considere o espaço de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$. Então a coleção

$$\mathscr{B} \equiv \left\{ e_j \in \ell^2(\mathbb{N}) : \text{ para cada } j \in \mathbb{N},\ e_j \equiv (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{j\text{-ésima posição}}, 0, 0, \ldots) \right\}$$

é uma base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exemplo 22. Considere o espaço de medida $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$, onde λ é a medida de Lebesgue e o espaço de Hilbert $L^2([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$, das funções à valores complexos definidas sobre $[0,1]$ e Borel mensuráveis. Então podemos mostrar, usando a Teoria de Séries de Fourier, que a coleção de funções

$$\mathscr{B} \equiv \{e_n : [0,1] \to \mathbb{C} : \text{ para cada } n \in \mathbb{Z},\ \text{a função } e_n \text{ é dada por } \ e_n(x) \equiv \exp(2\pi i n x)\}$$

é uma base ortonormal de $L^2([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$.

5. Aproximações em Subespaços Finito-Dimensionais

Lema 23 (Aproximação Ótima em Subespaços Finito-Dimensionais)**.** Sejam $\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\mathcal{H}_n$ como sendo o subespaço finito-dimensional de $\mathcal{H}$ dado por $\mathcal{H}_n \equiv \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$, isto é, o subespaço gerado pelos n-primeiros vetores da base $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Então para cada $u \in \mathcal{H}$ fixado temos que

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\| \leqslant \|u - v\|, \qquad \forall v \in \mathcal{H}_n.$$

Prova. A prova deste lema é baseada na prova do Teorema de Pitágoras (Teorema 18). Primeiro observamos que $u - (\langle u, u_1\rangle u_1 + \ldots + \langle u, u_n\rangle u_n)$ é ortogonal a qualquer vetor em $\mathcal{H}_n$. Para isto basta mostrar que este vetor é ortogonal a todos os vetores da base de $\mathcal{H}_n$, isto é, os vetores $\{u_1, \ldots, u_n\}$. De fato, para qualquer $k = 1, \ldots, n$ temos da propriedade 1 da definição de produto interno e da ortonormalidade dos vetores u_n's que

$$\begin{aligned}\left\langle u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \ , \ u_k \right\rangle &= \langle u, u_k\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \ , \ u_k \right\rangle \\ &= \langle u, u_k\rangle - \langle u, u_k\rangle\langle u_k, u_k\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

É claro que se v é um vetor arbitrário em $\mathcal{H}_n$, então v é da forma $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ e temos da propriedade 2 da definição de produto interno e da igualdade acima que

$$\left\langle u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \ , \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \left\langle u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \ , u_k \right\rangle = 0. \tag{2}$$

Como $\mathcal{H}_n$ é um subespaço vetorial, podemos garantir que para qualquer $v \in \mathcal{H}_n$ temos que o vetor diferença $(\langle u, u_1\rangle u_1 + \ldots + \langle u, u_n\rangle u_n) - v$ pertence à $\mathcal{H}_n$. Pela afirmação que acabamos de provar, podemos afirmar que este vetor é necessariamente ortogonal ao vetor $u - (\langle u, u_1\rangle u_1 + \ldots + \langle u, u_n\rangle u_n)$. Este fato nos permite aplicar o Teorema de Pitágoras (Teorema 18) (justificando a igualdade abaixo) para mostrar que

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\|^2 \leqslant \left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j - v \right\|^2 = \|u - v\|^2,$$

para qualquer que seja $v \in \mathcal{H}_n$. Tomando a raíz quadrada de ambos lados concluímos a prova do lema. ■

Teorema 24. Sejam $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert, $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. Então para qualquer vetor $u \in \mathcal{H}$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\| = 0.$$

Equivalentemente, todo elemento $u \in \mathcal{H}$ pode ser representado como

$$u = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, u_j\rangle u_j, \tag{3}$$

onde o limite que aparece logo acima, deve ser entendido como um limite com respeito ao espaço métrico $(\mathcal{H}, d)$.

Prova. Dado $u \in \mathcal{H}$ temos, por definição de base, que existe uma sequência de vetores $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contida no conjunto das combinações lineares finitas de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $d(u, v_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Mantendo a notação do Lema 23, para cada inteiro $n \geqslant 1$, denotamos por $\mathcal{H}_n \equiv \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$, o subespaço de $\mathcal{H}$ gerado pelos vetores $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Já que para cada $n \in \mathbb{N}$ o vetor v_n é uma combinação linear finita dos vetores da base $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, podemos encontrar $k_n \in \mathbb{N}$ com a propriedade de ser o menor inteiro positivo para o qual $v_n \in \mathcal{H}_{k_n}$. Pelo Lema 23 temos que

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{k_n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\| \leqslant \|u - v_n\|$$

Portanto tomando o limite em ambos lado da desigualdade acima ficamos com

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u - \sum_{j=1}^{k_n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|u - v_n\| = 0. \tag{4}$$

O que mostra que alguma **subsequência** da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$s_n \equiv \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j,$$

converge, em $(\mathcal{H}, d)$, para u.

Vamos mostrar a seguir que a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u. Para isto é suficiente mostrar que a sequência de números reais $e_n \equiv \|u - s_n\|$ é uma sequência de número não-negativos monótona não-crescente. A monotonicidade desta sequência é consequência direta do Lema 23. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $s_n \in \mathcal{H}_{n+1}$, portanto segue do Lema 23 que

$$e_{n+1} \equiv \|u - s_{n+1}\| \leqslant \|u - s_n\| \equiv e_n.$$

Uma vez que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números não-negativos monótona não-crescente sabemos que o seguinte limite existe e coincide com o ínfimo abaixo

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} e_n.$$

De (4) e da definição de e_n, segue que a subsequência $e_{k_n} \to 0$, quando $n \to \infty$. Portanto o ínfimo da igualdade acima tem que ser zero. Logo $e_n \to 0$, quando $n \to \infty$, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\| \equiv \lim_{n\to\infty} \|u - s_n\| \equiv \lim_{n\to\infty} e_n = 0.$$

o que encerra a prova do teorema. ■

Corolário 25. Sejam $\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ e $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação(bijeção) arbitrária do conjunto dos números naturais. Então para todo $u \in \mathcal{H}$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n\rangle u_n \ = \ u \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_{\pi(n)}\rangle u_{\pi(n)}.$$

Prova. Seja $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação arbitrária do conjuntos dos números naturais e para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $v_n \equiv u_{\pi(n)}$. Claramente o fecho do conjunto das combinações lineares finitas $\overline{\langle u_1, u_2, \ldots\rangle}$ e $\overline{\langle v_1, v_2, \ldots\rangle}$ coincidem, já que como conjuntos $\{u_1, u_2, \ldots\}$ e $\{v_1, v_2, \ldots\}$ são iguais. Claramente $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de vetores ortonormais, e portanto podemos concluir que esta família é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. Para obter a igualdade do enunciado basta aplicar o Teorema 24 para $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Um fato muito interessante que decorre do corolário acima é que a expansão em série (3) de um vetor u em um espaço de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, com base enumerável, é incondicionalmente convergente. Ou seja, qualquer que seja a ordem em que as somas parciais da série (3) são feitas, estas somas parciais serão convergentes e vão convergir para o mesmo vetor. Desta forma se $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma base ortonormal enumerável de $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, então podemos dar um sentido preciso à notação

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} \langle u, u_\alpha\rangle u_\alpha,$$

já que escolhida qualquer enumeração do conjunto Λ o Corolário 25 garante que a série (3) associada a esta enumeração converge em $(\mathcal{H}, d)$ para u.

6. Identidade de Parseval

Teorema 26 (Identidade de Parseval)**.** Seja $\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert e suponha que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. Então para todo $u \in \mathcal{H}$ temos

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, u_n\rangle|^2.$$

Prova. A ideia da prova é usar o Teorema de Pitágoras (Teorema 18) e o Teorema 24. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $\mathcal{H}_n$ como no Lema 23, isto é, o subespaço gerado pelos vetores $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Como feito em (2) podemos verificar que os vetores

$$u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j,$$

são ortogonais. Logo uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras garante que

$$\|u\|^2 = \left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j + \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\|^2 = \left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\|^2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além do mais, como os vetores $\{\langle u, u_1\rangle u_1, \ldots, \langle u, u_n\rangle u_n\}$ são ortogonais, também podemos aplicar o Teorema de Pitágoras a segunda parcela do lado direito da igualdade acima ficando com a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \|\langle u, u_j\rangle u_j\|^2 \\
&= \left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\langle u, u_j\rangle|^2 \ \|u_j\|^2 \\
&= \left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\langle u, u_j\rangle|^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Note que podemos aplicar o Teorema 24 à primeira parcela da última igualdade. E assim podemos concluir que esta parcela tende a zero, quando $n \to \infty$. Portanto

$$\|u\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|u\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\|^2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |\langle u, u_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, u_j\rangle|^2,$$

o que encerra a prova do teorema. ■

7. Espaços de Hilbert Isométricos

Definição 27 (Isometria Lineares entre Espaços de Hilbert)**.** Sejam $(\mathcal{H}_1\,, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_1})$ e $(\mathcal{H}_2\,, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_2})$ espaços de Hilbert. Denote por $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ a norma induzida por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_1}$ em $\mathcal{H}_1$ e analogamente $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_2}$ a norma induzida por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_2}$ em $\mathcal{H}_2$. Uma isometria linear de $\mathcal{H}_1$ para $\mathcal{H}_2$ é uma aplicação linear bijetiva $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que para todo $u \in \mathcal{H}_1$ temos

$$\|u\|_{\mathcal{H}_1} = \|T(u)\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Note que a inversa $T^{-1} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$, de uma isometria linear $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, também define uma isometria linear, mas agora de $\mathcal{H}_2$ para $\mathcal{H}_1$. De fato, como T^{-1} é a função inversa de uma bijeção linear, então T^{-1} é necessariamente uma bijeção linear. Para cada $v \in \mathcal{H}_2$, existe um único $u \in \mathcal{H}_1$ tal que $v = T(u)$ e vice-versa $T^{-1}(v) = u$. Como estamos assumindo que $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é uma isometria de $\mathcal{H}_1$ para $\mathcal{H}_2$, temos

$$\|T^{-1}(v)\|_{\mathcal{H}_1} = \|u\|_{\mathcal{H}_1} = \|T(u)\|_{\mathcal{H}_2} = \|T(T^{-1}(v))\|_{\mathcal{H}_2},$$

ou seja,

$$\|v\|_{\mathcal{H}_2} = \|T^{-1}v\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Como $v \in \mathcal{H}_2$ é um vetor abitrário segue que a aplicação $T^{-1} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ é uma isometria linear de $\mathcal{H}_2$ para $\mathcal{H}_1$.

Outro fato importante que será necessário ao longo do texto sobre isometrias entre espaços de Hilbert é que elas são aplicações lineares que preservam distâncias e também produtos internos. Mais precisamente.

Teorema 28. Sejam $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1})$ e $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_2})$ espaços de Hilbert e $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ uma isometria linear de $\mathcal{H}_1$ para $\mathcal{H}_2$, então para todo par de vetores $u, v \in \mathcal{H}_1$ temos

$$\|u - v\|_{\mathcal{H}_1} = \|T(u) - T(v)\|_{\mathcal{H}_2} \qquad \text{e} \qquad \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle T(u), T(v) \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Prova. A primeira igualdade é consequência direta da definição de isometria. De fato, $\|u - v\|_{\mathcal{H}_1} = \|T(u - v)\|_{\mathcal{H}_2} = \|T(u) - T(v)\|_{\mathcal{H}_2}$.

Para provar a segunda igualdade do enunciado do teorema vamos usar as seguintes identidades de polarização:

$$\|u + \lambda v\|^2_{\mathcal{H}_1} = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle_{\mathcal{H}_1} = \|u\|^2_{\mathcal{H}_1} + 2\mathrm{Re}(\langle u, \lambda v \rangle_{\mathcal{H}_1}) + |\lambda|^2 \|v\|^2_{\mathcal{H}_1}, \tag{5}$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$ é um escalar arbitrário (na verdade, como veremos logo abaixo, vamos precisar considerar esta identidade apenas para os casos $\lambda = 1$ e, em seguida, $\lambda = i$).

A segunda identidade de polarização que vamos precisar é análoga a anterior, mas válida para vetores em $\mathcal{H}_2$

$$\begin{aligned} \|T(u) + T(\lambda v)\|^2_{\mathcal{H}_2} &= \langle T(u) + T(\lambda v), T(u) + T(\lambda v) \rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \|T(u)\|^2_{\mathcal{H}_2} + 2\mathrm{Re}(\langle T(u), T(\lambda v) \rangle_{\mathcal{H}_2}) + |\lambda|^2 \|T(v)\|^2_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Usando que T é uma isometria linear de $\mathcal{H}_1$ para $\mathcal{H}_2$ podemos garantir que (5) e (6) coincidem. Além do mais, o lado esquerdo e também as primeiras e terceiras parcelas do lado direito de (5) e (6) coincidem, respectivamente. Portanto podemos concluir que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ temos

$$2\mathrm{Re}(\langle u, \lambda v \rangle_{\mathcal{H}_1}) = 2\mathrm{Re}(\langle T(u), T(\lambda v) \rangle_{\mathcal{H}_2}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(\overline{\lambda} \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_1}) = \mathrm{Re}(\overline{\lambda} \langle T(u), T(v) \rangle_{\mathcal{H}_2})$$

Tomando na última igualdade acima $\lambda = 1$, obtemos $\mathrm{Re}(\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_1}) = \mathrm{Re}(\langle T(u), T(v) \rangle_{\mathcal{H}_1})$. Por outro lado, usando a identidade $\mathrm{Re}(-iz) = \mathrm{Re}(-i(x + iy)) = y = \mathrm{Im}(z)$, válida para qualquer número complexo z, e tomando na igualdade acima $\lambda = i$ ficamos com

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\Big(\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_1}\Big) = \mathrm{Re}\Big((-i)\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_1}\Big) &= \mathrm{Re}\Big(\bar{i}\, \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_1}\Big) \\ &= \mathrm{Re}\Big(\bar{i}\, \langle T(u), T(v) \rangle_{\mathcal{H}_2}\Big) \\ &= \mathrm{Re}\Big((-i)\langle T(u), T(v) \rangle_{\mathcal{H}_2}\Big) \\ &= \mathrm{Im}\Big(\langle T(u), T(v) \rangle_{\mathcal{H}_2}\Big). \end{aligned}$$

Portanto as partes real e imaginária de $\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_1}$ e $\langle T(u), T(v) \rangle_{\mathcal{H}_2}$ coincidem, Logo podemos concluir que

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle T(u), T(v) \rangle_{\mathcal{H}_2},$$

o que encerra a prova do teorema. ■

Antes de enunciar o próximo resultado desta seção, vamos provar um fato simples mas que será útil a seguir. Este resultado afirma que em um espaço de Hilbert a função que associa qualquer vetor à sua norma é um função contínua. Mais precisamente,

Proposição 29. Seja $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ e $\|\cdot\|$ a norma em $\mathcal{H}$ induzida pelo produto interno. Então a função $u \longmapsto \|u\|$ definida em $\mathcal{H}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ é uma função contínua, ou seja, para toda sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores em $\mathcal{H}$ que converge para u temos

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \left\|\lim_{n\to\infty} u_n\right\| = \|u\|. \tag{7}$$

Prova. A ideia é usar a desigualdade triangular e, em seguida, a definição de limite de uma sequência em $(\mathcal{H}, d)$, onde d é a métrica induzida pelo produto interno de $\mathcal{H}$.

Seja $u \in \mathcal{H}$ um vetor arbitrário e suponha que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência arbitraria convergindo para u, quando $n \to \infty$. Da desigualdade triangular temos para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|u\| = \|u - u_n + u_n\| \leqslant \|u - u_n\| + \|u_n\| \quad \Longrightarrow \|u\| - \|u_n\| \leqslant \|u - u_n\|$$

e analogamente

$$\|u_n\| = \|u_n - u + u\| \leqslant \|u - u_n\| + \|u\| \qquad \Longrightarrow \|u_n\| - \|u\| \leqslant \|u - u_n\|.$$

Da definição de valor absoluto e das duas últimas desigualdades segue que

$$\Big|\|u\| - \|u_n\|\Big| \leqslant \|u - u_n\|.$$

Como estamos assumindo que $u_n \to u$, quando $n \to \infty$, em $(\mathcal{H}, d)$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos afirmar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant n_0$ então temos $\|u - u_n\| < \varepsilon$. Consequentemente, temos $\Big|\|u\| - \|u_n\|\Big| \leqslant \|u - u_n\| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$, mostrando que $\|u_n\| \to \|u\|$, quando $n \to \infty$. ■

8. Construindo Isometrias entre Espaços de Hilbert Separáveis

Teorema 30. Sejam $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_1})$ e $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_2})$ espaços de Hilbert com bases enumeráveis $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Seja $T : \{u_1, u_2, \ldots\} \to \{v_1, v_2, \ldots\}$ uma bijeção qualquer. Então T admite uma única extensão linear a todo espaço $\mathcal{H}_1$ que é uma isometria de $\mathcal{H}_1$ para $\mathcal{H}_2$, que por abuso de notação também será denotada por $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$.

Prova. Pelo Teorema 24 sabemos que cada vetor $u \in \mathcal{H}_1$ pode ser representado como

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n\rangle_{\mathcal{H}_1} u_n \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left\| u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle_{\mathcal{H}_1} u_j \right\|_{\mathcal{H}_1} = 0.$$

Para estender a bijeção $T : \{u_1, u_2, \ldots\} \to \{v_1, v_2, \ldots\}$ a uma aplicação linear definida em todo espaço $\mathcal{H}_1$, o primeiro passo será mostrar que a série definida abaixo, para cada $u \in \mathcal{H}_1$ fixado,

$$T(u) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n\rangle_{\mathcal{H}_1} v_n \tag{8}$$

converge em $(\mathcal{H}_2, d_{\mathcal{H}_2})$, onde $d_{\mathcal{H}_2}$ é a distância em $\mathcal{H}_2$ induzida por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_2}$.

Para mostrar que a série definida em (8) converge em $(\mathcal{H}_2, d_{\mathcal{H}_2})$, basta mostrar que a sequência de somas parciais associada a esta série é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{H}_2, d_{\mathcal{H}_2})$. Vamos denotar a sequência das somas parciais da série em (8) por

$$s_n \equiv \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j \rangle_{\mathcal{H}_1} v_j$$

Antes de prosseguir lembramos que a identidade de Parseval (Teorema 26) garante

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, u_n \rangle_{\mathcal{H}_1}|^2 = \|u\|_{\mathcal{H}_1}^2. \tag{9}$$

Em particular, que a série do lado esquerdo da igualdade acima é convergente. Portanto dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geqslant n_0$ então temos (supondo que $n < m$)

$$\sum_{j=n+1}^{m} |\langle u, u_j \rangle_{\mathcal{H}_1}|^2 < \varepsilon$$

Já que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_2$, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras à diferença das somas parciais abaixo, ficando com a seguinte desigualdade para todo $n, m \geqslant n_0$

$$\begin{aligned}
\|s_n - s_m\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \langle u, u_j \rangle_{\mathcal{H}_1} v_j \right\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \sum_{j=n+1}^{m} \|\langle u, u_j \rangle_{\mathcal{H}_1} v_j\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
&= \sum_{j=n+1}^{m} |\langle u, u_j \rangle_{\mathcal{H}_1}|^2 \|v_j\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
&= \sum_{j=n+1}^{m} |\langle u, u_j \rangle_{\mathcal{H}_1}|^2 \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

o que mostra que a sequência das somas parciais $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{H}_2, d_{\mathcal{H}_2})$. Como este espaço métrico é completo podemos então afirmar que a série definida em (8) converge em $(\mathcal{H}_2, d_{\mathcal{H}_2})$. Como sugere a notação em (8) vamos chamar o limite para o qual esta série converge de $T(u)$.

Como o argumento de convergência acima é independente da escolha de $u \in \mathcal{H}_1$ temos que (8) determina uma função $u \longmapsto T(u)$ tomando valores em $\mathcal{H}_2$ e definida em todo espaço $\mathcal{H}_1$. Além do mais, esta aplicação é uma extensão do mapa $T : \{u_1, u_2, \ldots\} \to \{v_1, v_2, \ldots\}$. De fato, para cada $k \in \mathbb{N}$, tome $u = u_k$ em (8). Então temos da ortonormalidade da base $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que

$$T(u_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_k, u_n \rangle_{\mathcal{H}_1} v_n = v_k.$$

Vamos verificar agora que esta extensão é de fato uma extensão linear. Para isto sejam $u, w \in \mathcal{H}_1$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então segue da propriedade 1 da definição de produto interno e dos argumentos de convergência dados acima que

$$\begin{aligned}
T(u+\alpha w) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle u+\alpha w, u_n\rangle_{\mathcal{H}_1}\, v_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\langle u, u_n\rangle_{\mathcal{H}_1} + \alpha \langle w, u_n\rangle_{\mathcal{H}_1} \Big)\, v_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n\rangle_{\mathcal{H}_1}\, v_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \langle w, u_n\rangle_{\mathcal{H}_1}\, v_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n\rangle_{\mathcal{H}_1}\, v_n + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \langle w, u_n\rangle_{\mathcal{H}_1}\, v_n \\
&= T(u) + \alpha T(w).
\end{aligned}$$

Para finalizar a prova do teorema precisamos mostrar que $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é uma isometria linear de $\mathcal{H}_1$ para $\mathcal{H}_2$ e sua unicidade. Assim além da unicidade, resta mostrar que T preserva norma e é bijetiva, já que a linearidade foi obtida acima. Note que mostrando que T preserva norma, vamos poder concluir imediatamente que T é injetiva e portanto feito isto resta apenas provar a unicidade e que T é sobrejetiva.

Vamos prosseguir mostrando que T preserva norma. De fato, da continuidade da norma (Proposição 29), do Teorema de Pitágoras e da igualdade (9) segue que

$$\begin{aligned}
\|T(u)\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle_{\mathcal{H}_1}\, v_j \right\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle_{\mathcal{H}_1}\, v_j \right\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \| \langle u, u_j\rangle_{\mathcal{H}_1}\, v_j \|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |\langle u, u_j\rangle_{\mathcal{H}_1}|^2 \|v_j\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |\langle u, u_j\rangle_{\mathcal{H}_1}|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, u_j\rangle_{\mathcal{H}_1}|^2 \\
&= \|u\|_{\mathcal{H}_1}^2.
\end{aligned}$$

Tomando raíz quadrada de ambos lados da igualdade acima temos que

$$\|u\|_{\mathcal{H}_1} = \|T(u)\|_{\mathcal{H}_2} \qquad \forall u \in \mathcal{H}_1.$$

mostrando que T preserva norma. Como já mencionado, este fato junto com a linearidade implicam imediatamente que T é uma aplicação injetiva, pois se $u, w \in \mathcal{H}_1$ são distintos, então $0 \neq \|u-w\|_{\mathcal{H}_1} = \|T(u)-T(w)\|_{\mathcal{H}_2}$ e logo $T(u) \neq T(w)$.

Vamos mostrar agora que $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é sobrejetiva. Seja $v \in \mathcal{H}_2$ um vetor arbitrário. Como $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_2$ sabemos do Teorema 24 que o vetor v pode ser escrito como

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n \rangle_{\mathcal{H}_2} v_n. \tag{10}$$

Da identidade de Parseval temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, v_n \rangle_{\mathcal{H}_2}|^2 = \|v\|_{\mathcal{H}_2}^2 \tag{11}$$

e portanto a série que aparece à esquerda da igualdade acima é convergente. De modo semelhante a que fizemos na prova da extensão de T, vamos definir um vetor $u \in \mathcal{H}_1$ por

$$u \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n \rangle_{\mathcal{H}_2} u_n.$$

Para verificar que a expressão acima para u está bem definida, basta argumentar que a sequência das somas parciais da série que define u é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{H}_1, d_{\mathcal{H}_1})$. De fato, para todo par de números naturais n, m com $n \leqslant m$, temos do Teorema de Pitágoras que

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \langle v, v_j \rangle_{\mathcal{H}_2} u_j - \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle_{\mathcal{H}_2} u_j \right\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \langle v, v_j \rangle_{\mathcal{H}_2} u_j \right\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |\langle v, v_j \rangle_{\mathcal{H}_2}|^2$$

Da convergência da série em (11) sabemos que o lado direito da igualdade acima é arbitrariamente pequeno, quando m, n são suficientemente grandes. Desta identidade podemos concluir que a sequência das somas parciais da série que define u é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{H}_1, d_{\mathcal{H}_1})$ e portanto convergente neste espaço, já que ele é completo.

Afirmamos que $T(u) = v$. De fato, como mostrado acima, a aplicação T é linear e preserva norma e portanto satisfaz $\|T(u) - T(w)\|_{\mathcal{H}_2} = \|u - w\|_{\mathcal{H}_1}$ para todo par $u, w \in \mathcal{H}_1$. Logo T é uma aplicação contínua. Da continuidade de T segue que

$$\begin{aligned} T(u) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n \rangle_{\mathcal{H}_2} u_n\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle_{\mathcal{H}_2} u_j\right) &= \lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle_{\mathcal{H}_2} u_j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle_{\mathcal{H}_2} T(u_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle_{\mathcal{H}_2} v_j \\ &= v, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos (10).

Só resta provar a unicidade. Suponha que $\widetilde{T}$ é uma extensão linear isométrica de $T : \{u_1, u_2, \ldots\} \to \{v_1, v_2, \ldots\}$. Claramente uma isometria linear de $\mathcal{H}_1$ para $\mathcal{H}_2$ define uma função contínua. Usando o Teorema 24 concluímos que para todo $u \in \mathcal{H}_1$

$$\begin{aligned}
(T-\widetilde{T})(u) &= (T-\widetilde{T})\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle u,u_j\rangle u_j\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}(T-\widetilde{T})\left(\sum_{j=1}^{n}\langle u,u_j\rangle u_j\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle u,u_j\rangle (T-\widetilde{T})\,(u_j)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{T}(u) = T(u)$ para todo $u \in \mathcal{H}_1$, mostrando a unicidade e finalmente encerrando a prova do teorema. ■

9. Espaços de Hilbert Gerados por Normais Independentes

Esta seção é voltada para algumas aplicações da Teoria de Espaços de Hilbert na Teoria de Probabilidade e ela pressupõem do leitor certa familiaridade com a Teoria de Probabilidade.

Nosso objetivo aqui é construir um espaço de Hilbert separável contido em $L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ possuindo relações muito interessantes e altamente não-triviais entre suas estruturas métricas e mensurável.

Esta seção é organizada da seguinte forma. Primeiro apresentamos a prova da chamada Desigualdade Maximal de Kolmogorov (Teorema 31) e em seguida usamos esta desigualdade para provar o Teorema de Khintchine-Kolmogorov (Teorema 32). O Teorema de Khintchine-Kolmogorov será a chave para promover, em determinados casos, uma convergência em $L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ para uma convergência quase certa. Esta relação é então usada para caracterizar um interessante espaço de Hilbert que possui uma base ortonormal formada por uma sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão.

Teorema 31 (Desigualdade Maximal)**.** Sejam $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ uma sequência de v.a.'s independentes satisfazendo $\mathbb{E}[X_n] = 0$ e $\mathrm{Var}(X_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como de costume para cada $k \geqslant 1$, denotamos por $S_k \equiv X_1 + \ldots + X_k$. Então para qualquer $\alpha > 0$ dado temos

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\mathrm{Var}(S_n), \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Prova. Fixe $\alpha > 0$ e para cada inteiro $k \in \mathbb{N}$, defina o evento $A_k \equiv A_k(\alpha) \in \mathscr{F}$ por

$$A_k \equiv \bigcap_{j=1}^{k-1}\{|S_j| < \alpha\} \cap \{|S_k| \geqslant \alpha\}.$$

Note que os eventos A_k's são disjuntos, isto é, para quaisquer $n,m \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$ temos $A_m \cap A_n = \varnothing$. Portanto segue da definição de esperança e das propriedades elementares da integral de Lebesgue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^2] &= \int_\Omega S_n^2 \, d\mathbb{P} \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_n^2 \, d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \left[S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2 \right] \, d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{A_k} \left[S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) \right] \, d\mathbb{P} + \int_{A_k} (S_n - S_k)^2 \, d\mathbb{P} \right] \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \left[S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) \right] \, d\mathbb{P}. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Por definição, podemos notar que A_k e S_k são mensuráveis segundo a sigma-álgebra $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$. Por outro lado, $S_n - S_k \equiv X_{k+1} + X_{k+2} + \ldots + X_n$ é mensurável segundo a sigma-álgebra $\sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n)$. Lembrando que $\mathbb{E}[X_k] = 0$, para todo $k \geqslant 1$, e consequentemente $\mathbb{E}[S_k] = 0$, para todo $k \geqslant 1$, e que os elementos da sequência $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ são independentes, segue do Lema do Agrupamento que

$$
\begin{aligned}
\int_{A_k} \left[2S_k(S_n - S_k) \right] \, d\mathbb{P} &= 2 \int_\Omega \mathbb{1}_{A_k} \, S_k \, (S_n - S_k) \, d\mathbb{P} \\
&= 2\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} \, S_k \, (S_n - S_k)] \\
&= 2\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} \, S_k] \cdot \mathbb{E}[S_n - S_k] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Usando esta igualdade, no lado direito da desigualdade (12) podemos concluir que

$$
\mathbb{E}[S_n^2] \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_k^2 \, d\mathbb{P}.
$$

Pela definição de A_k, podemos afirmar que a variável aleatória $S_k^2 \geqslant \alpha^2$, em A_k. Além do mais, o evento

$$
\left\{ \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha \right\} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.
$$

Destas observações, lembrando que os A_k's são disjuntos e da desigualdade acima temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^2] \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_k^2 \, d\mathbb{P} &\geqslant \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{A_k} \, d\mathbb{P} \\
&= \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \\
&= \alpha^2 \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \\
&= \alpha^2 \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha \right).
\end{aligned}
$$

Já que $\mathbb{E}[S_n] = 0$, então temos que $\mathrm{Var}(S_n) = \mathbb{E}[S_n^2]$ e segue finalmente da desigualdade acima que

$$
\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha \right) \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \mathrm{Var}(S_n).
$$

■

Teorema 32 (Teorema de Khintchine-Kolmogorov)**.** Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes (não necessariamente com mesma distribuição) satisfazendo $\mathbb{E}[X_n] = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) < +\infty$. Defina $S_0 \equiv 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $S_n \equiv X_1 + \ldots + X_n$. Então existe um único elemento $S \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ tal que

- $\lim_{n\to\infty} \|S_n - S\|_{L^2(\Omega)} = 0$;
- $\lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = S(\omega)$, quase certamente;
- $\mathbb{E}[S] = 0$.

Prova. Já que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média zero, podemos verificar imediatamente que o quadrado da distância $L^2(\Omega)$ entre S_n e S_{n+m} é dado por

$$
\|S_{n+m} - S_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathbb{E}[(X_{n+1} + \ldots + X_{n+m})^2] = \mathrm{Var}(X_{n+1}) + \ldots + \mathrm{Var}(X_{n+m}).
$$

Como estamos assumindo que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) < +\infty$, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ temos $\mathrm{Var}(X_{n+1}) + \ldots + \mathrm{Var}(X_{n+m}) < \varepsilon$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim temos da identidade anterior que para todo $\varepsilon > 0$ dado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\|S_{n+m} - S_n\|_{L^2(\Omega)}^2 < \varepsilon, \qquad \text{para todo } n \geqslant n_0 \text{ e } m \in \mathbb{N}.
$$

Mostrando que $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega)$. Já que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e portanto completo, visto como espaço métrico, podemos afirmar que

$$
\exists\ S \in L^2(\Omega) \ \text{ tal que } \ \|S_n - S\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \text{quando } n \to \infty. \tag{13}
$$

Vamos mostrar agora um fato um pouco mais forte, que além de S_n convergir para S no sentido $L^2(\Omega)$ que também temos $S_n \to S$, quando $n \to \infty$, quase certamente. Isto será feito em duas etapas. Primeiro, vamos mostrar que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, quase certamente e consequentemente que existe uma variável aleatória $\widetilde{S}$, definida em Ω, tal que $S_n \to \widetilde{S}$, quando $n \to \infty$, quase certamente. Em seguida, vamos mostrar que $\widetilde{S} = S$, quase certamente.

Para mostrar que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, quase certamente, precisamos provar que o seguinte evento tem probabilidade nula

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sup_{i,j\geqslant n} |S_i - S_j| \geqslant \frac{1}{k} \right\} \equiv \{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ não} \text{ é uma sequência de Cauchy}\}. \tag{14}$$

Para cada $k, n \in \mathbb{N}$ fixados, temos da desigualdade triangular e das propriedades elementares de supremo que

$$\begin{aligned}
\sup_{i,j\geqslant n} |S_i - S_j| = \sup_{i,j\geqslant 0} |S_{n+i} - S_{n+j}| \leqslant \sup_{i,j\geqslant 0} \Big(|S_{n+i} - S_n| + |S_n - S_{n+j}|\Big) \\
= \sup_{i,j\geqslant 0} |S_{n+i} - S_n| + \sup_{i,j\geqslant 0} |S_n - S_{n+j}| \\
= \sup_{i\geqslant 0} |S_{n+i} - S_n| + \sup_{j\geqslant 0} |S_n - S_{n+j}| \\
= 2\sup_{j\geqslant 0} |S_{n+j} - S_n| \\
= 2\sup_{j\geqslant 1} |S_{n+j} - S_n|.
\end{aligned}$$

Desta desigualdade segue imediatamente que

$$\left\{ \sup_{i,j\geqslant n} |S_i - S_j| \geqslant \frac{1}{k} \right\} \subseteq \left\{ 2\sup_{j\geqslant 1} |S_{n+j} - S_n| \geqslant \frac{1}{k} \right\} = \left\{ \sup_{j\geqslant 1} |S_{n+j} - S_n| \geqslant \frac{1}{2k} \right\}. \tag{15}$$

Para cada $n, k \in \mathbb{N}$ fixados, considere o evento $M_r \equiv M_r(k, n)$ definido por

$$M_r \equiv \left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant r} |S_{n+j} - S_n| \geqslant \frac{1}{2k} \right\}. \tag{16}$$

Então, temos da definição de máximo que a coleção de eventos $\{M_r\}_{r\geqslant 1}$ forma uma coleção não-decrescente, isto é, $M_r \subset M_{r+1}$, para todo $r \in \mathbb{N}$ e além do mais, vale a seguinte igualdade

$$\left\{ \sup_{j\geqslant 1} |S_{n+j} - S_n| \geqslant \frac{1}{2k} \right\} = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} M_r = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant r} |S_{n+j} - S_n| \geqslant \frac{1}{2k} \right\}. \tag{17}$$

Fixado $n \in \mathbb{N}$, para cada $j \in \mathbb{N}$, defina $Y_j \equiv X_{n+j}$. Já que os elementos da sequência $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são independentes, segue que $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Para cada $r \in \mathbb{N}$, considere a soma parcial $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_r$. Já que para cada $j \in \mathbb{N}$ temos

$$S_{n+j} - S_n = X_{n+j} + \ldots + X_{n+1} = Y_j + Y_{j-1} + \ldots + Y_1$$

então podemos representar os eventos M_r em termos das somas parciais das variáveis Y_n's como segue

$$M_r \equiv \left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant r} |S_{n+j} - S_n| \geqslant \frac{1}{2k} \right\} = \left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant r} |Y_1 + \ldots + Y_j| \geqslant \frac{1}{2k} \right\}$$

Observando que a sequência $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz as hipóteses da Desigualdade Maximal obtemos a seguinte cota superior para a probabilidade do evento $M_r \equiv M_r(k,n)$

$$\mathbb{P}(M_r) = \mathbb{P}\left(\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant r} |Y_1+\ldots+Y_j| \geqslant \frac{1}{2k}\right\}\right) \leqslant 4k^2\Big(\mathrm{Var}(Y_1)+\ldots+\mathrm{Var}(Y_r)\Big)$$
$$= 4k^2\Big(\mathrm{Var}(X_{n+1})+\ldots+\mathrm{Var}(X_{n+r})\Big)$$

Usando a continuidade de P, que $M_r \subset M_{r+1}$, para todo $r\in\mathbb{N}$ e a desigualdade acima conluímos que para cada k e $n\in\mathbb{N}$ fixados que é válida a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{r\in\mathbb{N}} M_r\right) = \lim_{r\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{s=1}^{r} M_s\right) &= \lim_{r\to\infty}\mathbb{P}(M_r) \\
&= \lim_{r\to\infty}\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant r}|S_{n+j}-S_n| \geqslant \frac{1}{2k}\right\}\right) \\
&\leqslant \lim_{r\to\infty}\Big(4k^2(\mathrm{Var}[X_{n+1}]+\ldots+\mathrm{Var}[X_{n+r}])\Big) \\
&= 4k^2\sum_{j=n+1}^{\infty}\mathrm{Var}[X_j].
\end{aligned}$$

Usando a estimativa acima e a identidade (17) ficamos com

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{j\geqslant 1}|S_{n+j}-S_n| \geqslant \frac{1}{2k}\right\}\right) \leqslant 4k^2\sum_{j=n+1}^{\infty}\mathrm{Var}[X_j].$$

Usando a continência obtida em (15) e a desigualdade acima verificamos que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{i,j\geqslant n}|S_i-S_j| \geqslant \frac{1}{k}\right\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{\sup_{j\geqslant 1}|S_{n+j}-S_n| \geqslant \frac{1}{2k}\right\}\right) \leqslant 4k^2\sum_{j=n+1}^{\infty}\mathrm{Var}[X_j].$$

Usando a monotonicidade de $\mathbb{P}$, a desigualdade acima e a hipótese do teorema sobre a somabilidade das variâncias, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Var}[X_n] < +\infty$, temos para cada $k\in\mathbb{N}$ fixado

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{i,j\geqslant n}|S_i-S_j| \geqslant \frac{1}{k}\right\}\right) &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{i,j\geqslant n}|S_i-S_j| \geqslant \frac{1}{k}\right\}\right) \\
&\leqslant \limsup_{n\to\infty}\left(4k^2\sum_{j=n+1}^{\infty}\mathrm{Var}[X_j]\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Lembrando de (14), usando as propriedades elementares de uma medida de probabilidade e que o evento acima, para cada $k \in \mathbb{N}$, tem probabilidade nula, obtemos finalmente

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ não } \text{é uma sequência de Cauchy}\}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{i,j\geqslant n}|S_i - S_j| \geqslant \frac{1}{k}\right\}\right) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{i,j\geqslant n}|S_i - S_j| \geqslant \frac{1}{k}\right\}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Da igualdade acima segue que a sequência $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$ é uma sequência de Cauchy, quase certamente. Portanto podemos afirmar que existe uma variável aleatória $\widetilde{S}$ definida em Ω tal que

$$
\widetilde{S} \equiv \lim_{n\to\infty} S_n, \qquad \text{quase certamente.}
$$

Vamos mostrar que $\widetilde{S} = S$, onde S é a variável aleatória obtida na primeira parte do argumento (13), como limite de S_n na norma $L^2(\Omega)$.

De fato, pela convergência quase certamente de S_n para $\widetilde{S}$, quando $n \to \infty$, pelo Lema de Fatou e pela convergência, na norma $L^2(\Omega)$, de S_n para S, quando $n \to \infty$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\|S - \widetilde{S}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \equiv \mathbb{E}\left[\left|S - \widetilde{S}\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty}|S - S_n|^2\right] \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty}\ \mathbb{E}\left[|S - S_n|^2\right] \\
&= \liminf_{n\to\infty}\ \|S - S_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto segue da igualdade acima que $S = \widetilde{S}$, quase certamente.

Para finalizar a prova do teorema, resta mostrar que $\mathbb{E}[S] = 0$. Para isto veja que basta aplicar Desigualdade de Cauchy-Schwarz e usar que $\mathbb{E}[S_n] = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, como segue

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}[S]\right| = \left|\mathbb{E}[S - S_n + S_n]\right| &= \left|\mathbb{E}[S - S_n]\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}[|S - S_n|] \\
&\leqslant \mathbb{E}[\mathbb{1}\cdot|S - S_n|] \\
&\leqslant \mathbb{E}[\mathbb{1}^2]^{\frac{1}{2}}\ \mathbb{E}[|S - S_n|^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= \mathbb{E}[|S - S_n|^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|S - S_n\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Como $|\mathbb{E}[S]| \leqslant \|S - S_n\|_{L^2(\Omega)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue da convergência de S_n para S, quando $n \to \infty$, na norma $L^2(\Omega)$ que $\mathbb{E}[S] = 0$, o que finalmente encerra a prova do teorema. ■

Agora vamos apresentar o espaço de Hilbert mencionado no inicio da seção. Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade suportando a existência de uma sequência $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de v.a.'s iid com $Z_n \sim N(0,1)$. A existência de tal espaço é garantida pelo Teorema da Existência de Kolmogorov.

Já que Z_n tem média zero e variância 1, então

$$\|Z_n\|_2^2 \equiv \int_\Omega Z_n^2 \, d\mathbb{P} = \mathrm{Var}(Z_n) = 1.$$

e consequentemente $Z_n \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere o espaço de Hilbert

$$\ell^2(\mathbb{N}) \equiv \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Para cada $\alpha \in \ell^2(\mathbb{N})$ e $N \in \mathbb{N}$ considere a seguinte soma parcial

$$S_N(\alpha) \equiv \sum_{j=1}^{N} \alpha_j Z_j.$$

Afirmamos que para cada $\alpha \in \ell^2(\mathbb{N})$ fixado, a sequência $\{S_N(\alpha)\}_{N\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ sabemos que fixado $\alpha \in \ell^2(\mathbb{N})$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m \geqslant n_0$ temos $||\alpha_m|^2 + |\alpha_{m+1}|^2 \ldots + |\alpha_n|^2| < \varepsilon$. Logo se $M \geqslant N \geqslant n_0$ temos

$$\begin{aligned} \|S_N(\alpha) - S_M(\alpha)\|_2^2 &= \left\langle \sum_{j=M+1}^{N} \alpha_j Z_j \ , \ \sum_{k=M+1}^{N} \alpha_k Z_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=M+1}^{N} \sum_{j=M+1}^{N} \alpha_j \alpha_k \int_\Omega Z_j Z_k \, d\mathbb{P} \\ &= \sum_{k=M+1}^{N} \sum_{j=M+1}^{N} \alpha_j \alpha_k \mathbb{E}[Z_j Z_k] = |\alpha_{M+1}|^2 + \ldots |\alpha_N|^2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\{S_N(\alpha)\}_{N\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ segue do Teorema de Riesz-Fischer existe algum $S(\alpha)$ tal que

$$\lim_{N\to\infty} S_N(\alpha) = S(\alpha) \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}).$$

Desta forma está bem-definido o seguinte subconjunto de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$

$$\mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \equiv \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n Z_n \ : \ \alpha \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\}.$$

Note que $\mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ possui estrutura natural de espaço vetorial e munido do produto interno herdado de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, este espaço é um espaço com produto interno.

Para facilitar a discussão vamos considerar o fecho na norma $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ do espaço definido acima, isto é,

$$\mathcal{H}(\mathcal{N}) \equiv \overline{\mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})}^{L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})}$$

É claro que $\mathcal{H}(\mathcal{N})$ munido do produto interno de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de Hilbert. Na verdade, vamos verificar que a vale a seguinte igualdade:

$$\mathcal{H}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}). \tag{18}$$

Ou seja, $\mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ já tem naturalmente a estrutura de espaço de Hilbert.

Antes de prosseguir, vamos fazer algumas observações. A família $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é certamente uma família ortonormal em $\mathcal{H}(\mathcal{N})$. Mas *a-priori* não sabemos se a família $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base $\mathcal{H}(\mathcal{N})$. Por outro lado, segue do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, que esta família está contida em alguma base ortonormal de $\mathcal{H}(\mathcal{N})$. Esta pequena observação permite aplicar a Identidade de Parseval (Teorema 26), enunciada aqui apenas para espaços de Hilbert.

Vamos voltar para a prova de (18). Observe que, por definição de completamento, é suficiente mostrar que $\mathcal{H}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Seja $\{V^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Então , para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que existe um elemento $\alpha^{(n)} \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que

$$V^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} Z_k.$$

Aplicando duas vezes a Identidade de Parseval, temos para cada $\varepsilon > 0$ dado, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $m, n \geqslant n_0$,

$$\|\alpha^{(n)} - \alpha^{(m)}\|^2_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}) Z_n \right\|_2^2 = \|V^{(n)} - V^{(m)}\|_2^2 < \varepsilon.$$

O que implica que $\{\alpha^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\ell^2(\mathbb{N})$. Da completude de $\ell^2(\mathbb{N})$ segue que existe algum $\alpha \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que $\|\alpha - \alpha^{(n)}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \to 0$, quando $n \to \infty$. Deste fato e de mais uma aplicação da Identidade de Parseval concluímos que

$$\left\| V^{(n)} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Z_k \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k|^2 = \|\alpha^{(n)} - \alpha\|^2_{\ell^2(\mathbb{N})} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

mostrando que $\mathcal{H}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Para encerrar esta seção vamos mostrar, como aplicação do Teorema de Khintchine-Kolmogorov (Teorema 32) o seguinte fato sobre $\mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Teorema 33. Seja $V \in \mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um elemento arbitrário não-nulo. Então

$$V \stackrel{d}{=} N(0, \|V\|^2_{L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})}).$$

Em outras palavras, $\mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ tal que todos os elementos de cada esfera $\partial B(0, r) \equiv \{V \in \mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) : \|V\|_{L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})} = r\}$, de raio $r > 0$ centrada na origem, vistos como variáveis aleatórias possuem a mesma distribuição, esta por sua vez, dada por uma normal de média zero é variância igual a r^2.

Prova. Se $V \in \mathcal{N}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, então existe algum $\alpha \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n Z_n.$$

Além do mais, segue da Identidade de Parseval que

$$\|V\|_{L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})} = \|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{N})}. \tag{19}$$

Como a sequência $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e com distribuição $N(0,1)$, temos que a sequência $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ definida por $X_n \equiv \alpha_n Z_n$ é uma sequência de v.a.'s normais independentes com $X_n \sim N(0, \alpha_n^2)$. Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{N})} < +\infty.$$

Como $X_n \sim N(0, \alpha_n^2)$, temos que $\mathbb{E}[X_n] = 0$. Desta forma, todas as hipóteses do Teorema de Khintchine-Kolmogorov (Teorema 32) são satisfeitas. Logo, este teorema garante que as somas parciais $S_n \equiv X_1 + \ldots + X_n$ convergem em $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e quase certamente para uma variável aleatória S, com $\mathbb{E}[S] = 0$. Mas já que $S_n = \alpha_1 Z_1 + \ldots + \alpha_n Z_n$ também converge na norma $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ para V, quando $n \to \infty$, temos que $S = V$ e portanto segue da segunda conclusão do Teorema de Khintchine-Kolmogorov que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k Z_k(\omega) = V(\omega), \qquad \text{quase todo } \omega \in \Omega.$$

Para determinar a distribuição de V, basta calcular sua função característica. Neste caso, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\phi_V(t) = \mathbb{E}[\exp(itV)] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(it \lim_{n\to\infty} S_n\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left(itS_n\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right) \\
&= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2\right)
\end{aligned}$$

e portanto segue da igualdade (19) e da Fórmula da Inversão que $V \sim N(0, \|V\|^2_{L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})})$. ■

Referências

[1] P. Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, anniversary edition, 2012. With a foreword by Steve Lalley and a brief biography of Billingsley by Steve Koppes.

[2] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[3] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, volume 40. John Wiley & Sons, second edition, 1999.