Integrais e Variáveis Aleatórias Gaussianas

L. Cioletti

Outubro de 2025

Resumo

Neste texto apresentamos algumas identidades básicas satisfeitas pelas integrais Gaussianas. Como aplicação, mostramos como calcular explicitamente o produto de convolução entre as funções densidade de duas variáveis aleatórias com distribuição Gaussiana e consequentemente que a soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição Gaussiana é também uma variável aleatória com distribuição Gaussiana cujos os parâmetros são dados pela soma dos parâmetros de cada uma das parcelas.

1. Integrais Gaussianas em uma Dimensão

Poucas integrais definidas na Matemática possuem um resultado tão elegante e uma aplicabilidade tão vasta quanto a integral Gaussiana. É a partir de sua identidade fundamental,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}, \tag{1}$$

obtida via coordenadas polares e o Teorema de Fubini-Tonelli, que construiremos todos os resultados deste texto:

Proposição 1. Fixados $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\, dx = \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Prova. Fixe $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Observe que podemos verificar imediatamente, via completamento de quadrados, que vale a seguinte identidade

$$-ax^2 + bx = -\left(\sqrt{a}\, x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usando a identidade acima podemos reescrever a exponencial que aparece na integral do enunciado da proposição como segue

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{b^2}{4a}}\, dx \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}\, dx
\end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$u = \sqrt{a}\,x - \frac{b}{2\sqrt{a}} \qquad \Longrightarrow \qquad dx = \frac{1}{\sqrt{a}}du,$$

substituindo este valores na integral acima e, em seguida, usando a identidade fornecida em (1) ficamos com

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\, dx &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}\, dx \\
&= \frac{e^{\frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 2. Sejam $\alpha, \beta > 0$. Então para cada $y \in \mathbb{R}$ fixado, temos

$$\frac{1}{2\pi\alpha\beta}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\alpha^2} - \frac{x^2}{2\beta^2}\right)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha^2+\beta^2)}} \exp\left(\frac{-y^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right)$$

Prova. A ideia é usar a identidade anterior. Para isto será necessário reescrever na forma $-ax^2+bx$ a expressão que aparece no argumento da exponencial dentro da integral acima.

$$\begin{aligned}
-\frac{(y-x)^2}{2\alpha^2} - \frac{x^2}{2\beta^2} &= -\frac{y^2-2xy+x^2}{2\alpha^2} - \frac{x^2}{2\beta^2} \\
&= -\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\frac{1}{2\beta^2}\right)x^2 - \frac{y^2-2xy}{2\alpha^2} \\
&= -\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\frac{1}{2\beta^2}\right)x^2 + \frac{y}{\alpha^2}\,x - \frac{y^2}{2\alpha^2} \\
&\equiv -ax^2+bx-\frac{y^2}{2\alpha^2},
\end{aligned}$$

onde

$$a \equiv \left(\frac{1}{2\alpha^2}+\frac{1}{2\beta^2}\right) \qquad \text{e} \qquad b \equiv \frac{y}{\alpha^2}. \tag{2}$$

Substituindo a expressão acima na integral que desejamos calcular e usando em seguida a Proposição 1, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\alpha\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\alpha^2}-\frac{x^2}{2\beta^2}\right)\,dx &= \frac{1}{2\pi\alpha\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-ax^2+bx-\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi\alpha\beta}\exp\left(-\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2+bx}\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi\alpha\beta}\exp\left(-\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)\ \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)\ \sqrt{\frac{\pi}{a}}.
\end{aligned}$$

Observe que pelas definições de a e b em (2) temos

$$a=\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\frac{1}{2\beta^2}\right)=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha^2\beta^2}\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{4a}=\frac{\alpha^2\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}\quad\Longrightarrow\quad\frac{b^2}{4a}=\frac{y^2\beta^2}{2\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Substituindo esta expressões no valor encontrado para a integral acima ficamos com

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\alpha\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\alpha^2}-\frac{x^2}{2\beta^2}\right)\,dx &= \frac{1}{2\pi\alpha\beta}\exp\left(-\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)\ \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)\ \sqrt{\frac{\pi}{a}}.\\
&= \frac{1}{2\pi\alpha\beta}\exp\left(-\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)\exp\left(\frac{y^2\beta^2}{2\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)}\right)\ \sqrt{\frac{\pi}{a}}\\
&= \frac{1}{2\pi\alpha\beta}\exp\left(-\frac{y^2}{2\alpha^2}+\frac{y^2\beta^2}{2\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)}\right)\ \sqrt{\frac{\pi}{a}}\\
&= \frac{1}{2\pi\alpha\beta}\exp\left(\frac{-y^2(\alpha^2+\beta^2)+y^2\beta^2}{2\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)}\right)\ \sqrt{\frac{\pi}{a}}\\
&= \frac{1}{2\pi\alpha\beta}\exp\left(\frac{-y^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right)\ \sqrt{\frac{\pi}{a}}\\
&= \frac{1}{2\pi\alpha\beta}\exp\left(\frac{-y^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right)\ \sqrt{\frac{2\pi\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha^2+\beta^2)}}\exp\left(\frac{-y^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right)
\end{aligned}$$

o que encerra a prova da proposição. ■

2. Variáveis Aleatórias Gaussianas

Definição 3 (Variáveis Aleatórias Gaussianas)**.** Dizemos que uma variável aleatória X definida em algum espaço de probabilidade tem distribuição Gaussiana (ou normal) com média $\mu\in\mathbb{R}$ e variância $\sigma^2>0$, notação $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, se X possui função densidade dada pela seguinte expressão

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Em particular, se $X \sim N(0,1)$, dizemos que X tem distribuição normal padrão.

Proposição 4. Sejam X uma variável aleatória definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ possuindo distribuição normal padrão $(\, X \sim N(0,1)\,)$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ fixados. Então

i) a variável aleatória $Z \equiv \sigma X + \mu$ tem distribuição $N(\mu, \sigma^2)$;

ii) se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim da forma $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $f(Z) \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Prova. Suponha inicialmente que $\sigma > 0$. Então, temos para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(Z \leqslant t) = \mathbb{P}(\sigma X + \mu \leqslant t) = \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\, dx.$$

Observando que a função acima é diferenciável em toda parte e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo e Regra da Cadeia, podemos concluir que Z possui densidade dada pela função

$$f_Z(t) \equiv \frac{d}{dt}\mathbb{P}(Z \leqslant t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

mostrando que $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Analogamente, se $\sigma < 0$, então temos

$$\mathbb{P}(Z \leqslant t) = \mathbb{P}(\sigma X + \mu \leqslant t) = \mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \int_{\frac{t-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\, dx.$$

Derivando ambos lados da igualdade acima, com respeito à variável t, e observando que $0 < -\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ obtemos

$$f_Z(t) \equiv \frac{d}{dt}\mathbb{P}(Z \leqslant t) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

mostrando que neste caso também temos $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ e portanto que o item *i)* está provado.

Agora vamos provar o item *ii)*. A prova é semelhante ao item anterior. Vamos apresentar a prova para o caso $a > 0$ e deixamos o caso $a < 0$ como exercício para leitor interessado.

Assumindo que $a > 0$, temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(f(Z) \leqslant t) = \mathbb{P}(aZ + b \leqslant t) = \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{t-b}{a}\right)& \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\, dx.\end{aligned}$$

Como no item anterior, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbb{P}(f(Z) \leqslant t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\frac{t-b}{a} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-(b+a\mu))^2}{2a^2\sigma^2}\right), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

■

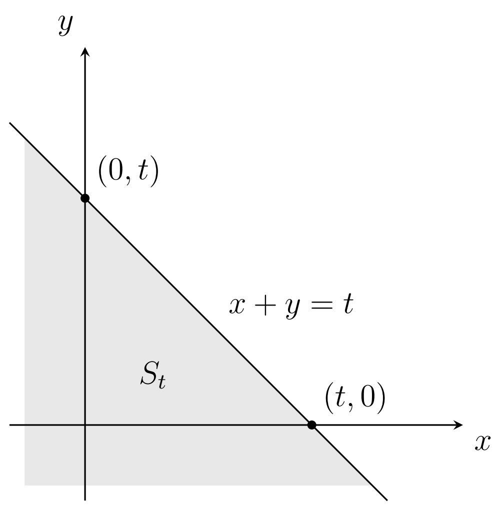
Proposição 5. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, possuindo funções densidade f_X e f_Y, respectivamente. Então a variável aleatória $Z \equiv X + Y$ possui função densidade e além do mais, sua expressão é dada por

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x) f_Y(x)\, dx \equiv f_X * f_Y(z), \qquad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Prova. Observe que para cada $t \in \mathbb{R}$, fixado temos

$$\mathbb{P}(Z \leqslant t) = \mathbb{P}(X + Y \leqslant t) = \mathbb{P}((X,Y) \in S_t),$$

onde S_t é o semiplano fechado em $\mathbb{R}^2$, dado por $S_t \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leqslant t\}$.



Observamos que segue da hipótese de independência e dos resultados básicos da Teoria de Probabilidade que o vetor aleatório (X,Y) possui densidade conjunta $f_{(X,Y)}$, dada por $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto,

$$\mathbb{P}(Z \leqslant t) = \mathbb{P}((X,Y) \in S_t) = \iint_{S_t} f_X(x) f_Y(x)\, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{t-y} f_X(x) f_Y(y)\, dx\right] dy$$

Na integral iterada mais interna, como y está fixado, podemos considerar a seguinte mudança de variáveis $z = x + y$. Assim ficamos com a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leqslant t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{t-y} f_X(x) f_Y(y)\, dx\right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{t} f_X(z-y) f_Y(y)\, dz\right] dy = \int_{-\infty}^{t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy\right] dz.\end{aligned}$$

Mostrando que Z tem densidade dada pelo produto de convolução (3) das funções densidades de X e Y. ■

3. Somas de Variáveis Aleatórias Gaussianas Independentes

Teorema 6. Sejam $X \sim N(0, \alpha^2)$ e $Y \sim N(0, \beta^2)$. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes. Então $Z \equiv X + Y$ é uma variável aleatória com distribuição Gaussiana, mais precisamente $Z \sim N(0, \alpha^2 + \beta^2)$.

Prova. Já que estamos assumindo que X e Y são variáveis aleatórias independentes e ambas possuem distribuição Gaussiana, então podemos aplicar a Proposição 5 para concluir que

$$f_Z(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y - x) f_Y(x)\, dx$$

Usando a expressão explícita das funções de densidade de X e Y e substituindo na integral que aparece no lado direito da igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} f_Z(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\alpha^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\alpha^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right) dx \end{aligned}$$

Agora podemos aplicar Proposição 2 no lado direito da igualdade acima para concluir que

$$f_Z(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha^2 + \beta^2)}} \exp\left(\frac{-y^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)}\right),$$

o que prova que $Z \sim N(0, \alpha^2 + \beta^2)$. ■

Teorema 7. Sejam $X \sim N(\mu, \alpha^2)$ e $Y \sim N(\rho, \beta^2)$. Se X e Y são independentes, então a variável aleatória $Z \equiv X + Y$ tem distribuição Gaussiana. Mais precisamente, a variável aleatória Z tem distribuição $N(\mu + \rho, \alpha^2 + \beta^2)$.

Prova. Observe que $Z = X + Y = (X - \mathbb{E}[X]) + (Y - \mathbb{E}[Y]) + \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$. Desta igualdade segue que

$$Z - \rho - \mu = (X - \mathbb{E}[X]) + (Y - \mathbb{E}[Y]).$$

Isto é, $Z - \rho - \mu$ é soma de duas variáveis aleatórias Gaussianas independentes, ambas com média zero e variâncias iguais a α^2 e β^2, respectivamente. Neste caso o Teorema 6 assegura que $(Z - \rho - \mu) \sim N(0, \alpha^2 + \beta^2)$. Por outro lado, segue desta última observação e do item *ii*) da Proposição 4 que $Z \sim N(\rho + \mu, \alpha^2 + \beta^2)$, finalizando a prova do teorema. ■

Corolário 8. Se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Então a variável aleatória $S_n \equiv X_1 + \ldots + X_n$ possui distribuição Gaussiana $S_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, onde $\mu \equiv \mu_1 + \ldots + \mu_n$ e $\sigma^2 \equiv \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$.

Prova. A prova pode ser feita por indução no número de parcelas. Para $n = 2$ o resultado é consequência direta do Teorema 7. Suponha, por hipótese de indução, que o resultado seja verdadeiro para qualquer soma de k variáveis aleatórias Gaussianas. Isto é, a variável aleatória $S_k \sim N(\mu_1 + \ldots + \mu_k\ ,\ \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)$. Então considere a seguinte soma de v.a.'s $S_{k+1} \equiv X_1 + \ldots + X_k + X_{k+1}$. É claro que $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$. Já que S_k é independente de X_{k+1} e ambas são variáveis aleatórias Gaussianas, segue do Teorema 7 que S_{k+1} é também uma v.a. Gaussiana cujos parâmetros são dados pela soma dos parâmetros de cada parcela. ■