



# Processos Estocásticos

Lista Exercícios - Data de Entrega: 17/11/2025

## Lista de Exercícios - Parte 1

1. Seja  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um Movimento Browniano contínuo e considere a filtração

$$\mathcal{F}_t \equiv \bigcap_{s \in (t, +\infty)} \sigma(\mathcal{G}_s \cup \mathcal{N}), \quad (1)$$

onde  $\mathcal{N}$  é coleção de todos os subconjuntos dos conjuntos de probabilidade nula e  $\mathcal{G}_s \equiv \sigma(B_t : 0 \leq t \leq s)$ . Mostre que

- a1) Seja  $(M, d)$  um espaço métrico e  $F \subseteq M$  um subconjunto arbitrário. Mostre que a aplicação  $x \mapsto d(x, F)$  é uma aplicação contínua de  $M$  para  $\mathbb{R}$ . Dica: Mostre que  $|d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y)$ .
- a2) se  $F \subseteq \mathbb{R}$  é um conjunto fechado não-vazio, então  $\tau_F \equiv \inf\{t \in [0, +\infty) : B_t \in F\}$  é um tempo de parada, com respeito a filtração determinada por (1) e que temos  $\mathbb{P}(\tau_F < +\infty) = 1$ .
- b) se  $A \subseteq \mathbb{R}$  é um conjunto aberto, então  $\tau_A \equiv \inf\{t \in [0, +\infty) : B_t \in A\}$  é um tempo de parada, com respeito a filtração determinada por (1);
- c) se  $\tau$  e  $\sigma$  são tempos de parada, com respeito a filtração determinada por (1), mostre que a v.a.  $\tau \wedge \sigma \equiv \min\{\tau, \sigma\}$  também é um tempo de parada com respeito a esta filtração.
- d) se  $\tau$  e  $\sigma$  são tempos de parada, com respeito a filtração determinada por (1), mostre que  $\tau \vee \sigma \equiv \max\{\tau, \sigma\}$  também é um tempo de parada com respeito a esta filtração.
2. Sejam  $\sigma$  e  $\tau$  tempos de parada (com respeito à filtração regular  $\{\mathcal{F}_t\}$ ) tais que  $\sigma \leq \tau$ , quase certamente. Mostre que  $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$ .

**Dica:** Use diretamente a definição de  $\mathcal{F}_\sigma$  e  $\mathcal{F}_\tau$ . Você precisa mostrar que se  $M \in \mathcal{F}_\sigma$ , então  $M \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  para todo  $t \geq 0$ . Decomponha o evento  $\{\tau \leq t\}$  usando  $\sigma$ . Este resultado formaliza a intuição de que “quanto mais tarde paramos, mais informação acumulamos”.

3. Para  $t > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  considere a densidade de transição

$$p(t, x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right). \quad (2)$$

Verifique que esta função é uma solução da seguinte equação de difusão

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}.$$

4. Seja  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um Movimento Browniano independente de uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}$ . Sejam  $T_1, T_2, \dots, T_m : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  variáveis aleatórias  $\mathcal{G}$ -mensuráveis. Mostre que, para qualquer função  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$  contínua e limitada temos

$$\mathbb{E}[f(B_{T_1}, B_{T_2}, \dots, B_{T_m}) | \mathcal{G}] = g(T_1, T_2, \dots, T_m),$$

onde  $g(t_1, t_2, \dots, t_m) = \mathbb{E}[f(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_m})]$  para cada  $(t_1, \dots, t_m) \in [0, +\infty)^m$  fixado.

5. Sejam  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um Movimento Browniano contínuo e  $0 \leq s < t$ . Mostre que

$$\mathbb{P}(B_t \in A | B_s) = \int_A p(t-s, B_s, y) dy,$$

onde  $p(t, x, y)$  é a densidade de transição definida em (2).

6. Um processo estocástico  $\{M_t : t \in [0, +\infty)\}$  definido sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  é chamado de um martingale contínuo, com respeito a filtração  $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, +\infty)\}$ , se as seguintes condições são satisfeitas:

- $M_t$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável para todo  $t \geq 0$  (adaptado);
- $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$  para todo  $t \geq 0$  (integrável);
- As trajetórias  $t \mapsto M_t(\omega)$  são contínuas (quase certamente);
- $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ , para todos  $0 \leq s < t$  (a propriedade de martingal).

Sejam  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um Movimento Browniano padrão definido sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  completo. Mostre que este Movimento Browniano

- (a) é um martingale contínuo com respeito a filtração natural determinada por  $\mathcal{G}_t \equiv \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$ .
- (b) é um martingale contínuo com respeito a filtração determinada por (1).

**Dica:** a parte delicada deste item é provar a propriedade de martingal. Abaixo segue uma sugestão de roteiro de como esta prova pode ser feita.

- i) Se  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$  são sub- $\sigma$ -álgebras tais que para qualquer  $H \in \mathcal{H}$  existe algum  $G \in \mathcal{G}$  satisfazendo  $\mathbb{P}(G \Delta H) = 0$ , então para toda v.a. integrável  $X$  temos  $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X | \mathcal{H}]$ , quase certamente.
- ii) Fixe  $0 \leq s < t$  e  $A \in \mathcal{F}_s \equiv \bigcap_{u \in (s, +\infty)} \sigma(\mathcal{G}_u \cup \mathcal{N})$ . Usando o item (a) mostre que para cada  $u \in (s, t)$  existe um conjunto mensurável  $A_u \in \mathcal{G}_u$  tal que  $\mathbb{P}(A \Delta A_u) = 0$  e  $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A B_t] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_u} B_t]$ .
- iii) Observe que a última igualdade de ii) é válida para qualquer  $A \in \mathcal{F}_s$  e  $u \in (s, t)$ , porém  $B_u$  não é  $\mathcal{F}_s$ -mensurável. Mostre que é possível usar a continuidade para concluir que  $\mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] = B_s$ , quase certamente.

7. Seja  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um movimento browniano padrão e  $\{\mathcal{G}_t : t \in [0, +\infty)\}$  sua filtração natural. Mostre que o processo  $M(t) \equiv \exp(B_t - \frac{t}{2})$  é um martingale, com respeito a esta filtração.

**Sugestão.** Calcule o valor esperado de  $\exp(B_t - B_s)$  para  $0 \leq s < t$ . Condicione em  $\mathcal{G}_s$  e use as propriedades de independência dos incrementos para obter a propriedade de martingale.

8. Seja  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um movimento browniano padrão em uma dimensão. Prove que

$$\mathbb{E}[B_s|B_t] = \frac{s}{t}B_t, \quad \text{quase certamente para } 0 \leq s < t.$$

**Sugestão.** Queremos encontrar uma função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathbb{E}[B_s|B_t] = \varphi(B_t)$ , quase certamente. Equivalentemente, queremos determinar  $\varphi$  de modo que para todo boreliano  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  temos

$$\int_{\{B_t \in B\}} B_s d\mathbb{P} = \int_{\{B_t \in B\}} \varphi(B_t) d\mathbb{P}.$$

Para isto use o teorema da mudança de variáveis e a expressão explícita da distribuição conjunta do vetor aleatório  $(B_s, B_t)$  para reescrever ambos lados da igualdade acima.

## 1 Desigualdades de Doob para Martingais

Nesta parte da lista vamos apresentar a prova de algumas das desigualdades de Doob para Martingais à tempo discreto e formular como exercícios algumas de suas extensões para martingais à tempo contínuo.

**Definição 1** (Martingais). Um processo estocástico à tempo discreto  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  definido sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  é um supermartingal (submartingale) com respeito à uma filtração  $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$  se as seguintes condições são satisfeitas:

1.  $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
2.  $X_n$  é  $\mathcal{F}_n$ -mensurável.
3.  $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$ , q.c.  $\forall n \in \mathbb{N}$  (respectivamente,  $X_n \leq \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$  )

Dizemos que o processo estocástico  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  é um martingal se ele é simultaneamente um supermartingal e um submartingale.

**Definição 2** (Tempo de parada). Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade e  $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$  uma filtração. Uma aplicação  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  é chamada de tempo de parada se

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Teorema 3** (Desigualdade Maximal de Doob). Seja  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  um submartingale não-negativo, com respeito à uma filtração  $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Então para cada  $\lambda > 0$  temos:

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E} \left[ X_n \cdot \mathbf{1}_{\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \lambda \right\}} \right]$$

**Prova.** Para facilitar a notação defina a v.a.

$$M_n \equiv \max_{1 \leq k \leq n} X_k. \tag{3}$$

Fixado  $\lambda > 0$  considere a v.a.

$$\tau \equiv \tau_{n,\lambda} \equiv \begin{cases} \min \{k \in \{1, \dots, n\} : \lambda \leq X_k\}, & \text{se } \exists k \leq n \text{ tal que } \lambda \leq X_k; \\ n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que  $\tau$  define um tempo de parada satisfazendo  $\tau \leq n$ . Já que  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  é um submartingale, não-negativo temos que a aplicação  $j \mapsto \mathbb{E}[X_j]$  é monótona não-decrescente e assim segue da definição de esperança condicional que

$$\mathbb{E}[X_\tau | \tau] = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbb{E}[X_j \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=j\}}]}{\mathbb{P}(\tau=j)} \mathbb{1}_{\{\tau=j\}} \leq \sum_{j=1}^n \frac{\mathbb{E}[X_j]}{\mathbb{P}(\tau=j)} \mathbb{1}_{\{\tau=j\}} \leq \mathbb{E}[X_n] \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mathbb{P}(\tau=j)} \mathbb{1}_{\{\tau=j\}},$$

onde as parcelas em que  $\mathbb{P}(\tau=j) = 0$  são identificadas com a v.a. nula. Das propriedades elementares da esperança condicional e da desigualdade acima temos que

$$\mathbb{E}[X_\tau] \leq \mathbb{E}[X_n].$$

Note que vale a seguinte igualdade

$$\mathbb{E}[X_\tau \cdot \mathbb{1}_{\{M_n \geq \lambda\}}] + \mathbb{E}[X_\tau \cdot \mathbb{1}_{\{M_n < \lambda\}}] = \mathbb{E}[X_\tau].$$

Além do mais, segue das definições acima que se  $M_n \geq \lambda$ , então  $X_\tau \geq \lambda$ . Por outro lado, se ocorre  $M_n < \lambda$ , então temos  $\tau = n$  e consequentemente  $X_\tau = X_n$ . Logo segue dos fatos estabelecidos acima que

$$\lambda \mathbb{P}(M_n \geq \lambda) + \mathbb{E}[X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M_n < \lambda\}}] \leq \mathbb{E}[X_\tau \cdot \mathbb{1}_{\{M_n \geq \lambda\}}] + \mathbb{E}[X_\tau \cdot \mathbb{1}_{\{M_n < \lambda\}}] = \mathbb{E}[X_\tau] \leq \mathbb{E}[X_n].$$

Da desigualdade acima temos imediatamente que

$$\begin{aligned} \lambda \mathbb{P}(M_n \geq \lambda) &\leq \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M_n < \lambda\}}] = \mathbb{E}[X_n (1 - \mathbb{1}_{\{M_n < \lambda\}})] \\ &= \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{M_n \geq \lambda\}}] \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. ■

**Teorema 4** (Desigualdade Maximal de Doob em  $L^2$ ). Seja  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  um submartingale não-negativo, com respeito à uma filtração  $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Se  $\mathbb{E}[|X_n|^2] < +\infty$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então temos

$$\mathbb{E} \left[ \left| \max_{1 \leq k \leq n} X_k \right|^2 \right] \leq 4\mathbb{E}[X_n^2].$$

**Prova.** Como na prova do teorema anterior considere a v.a.

$$M_n \equiv \max_{1 \leq k \leq n} X_k. \tag{4}$$

Usando que  $M_n$  é uma v.a. não-negativa, o **Teorema 3**, o Teorema de Tonelli e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n^2] &= 2 \int_0^\infty t \mathbb{P}(M_n > t) dt \\
&\leq 2 \int_0^\infty \mathbb{E}[X_n \cdot \mathbf{1}_{\{M_n \geq t\}}] dt \\
&= 2 \int_0^\infty \int_\Omega \mathbf{1}_{\{M_n \geq t\}} \cdot X_n d\mathbb{P} dt \\
&= 2 \int_\Omega X_n \left[ \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{M_n \geq t\}} dt \right] d\mathbb{P} \\
&= 2 \int_\Omega X_n M_n d\mathbb{P} \\
&= 2 \left( \int_\Omega X_n^2 d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\Omega M_n^2 d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

É claro que se  $\mathbb{E}[M_n^2] = 0$ , então a desigualdade que desejamos mostrar é óbvia. Caso contrário, segue da desigualdade acima que  $\mathbb{E}[M_n^2]^{1/2} \leq 2\mathbb{E}[X_n^2]^{1/2}$ . Tomando o quadrado em ambos os lados desta última desigualdade concluímos finalmente a prova do teorema. ■

## Lista de Exercícios - Parte 2

1. O objetivo deste exercício é estender a Desigualdade Maximal de Doob em  $L^2$  (**Teorema 4**) para o Movimento Browniano. Mais precisamente, Seja  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um Movimento Browniano e  $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, +\infty)\}$  a filtração determinada por (1). vamos mostrar que para todo  $t > 0$  temos

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |B_s|^2 \right] \leq 4 \mathbb{E}[B_t^2].$$

- (a) Fixe  $t > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Para cada  $k \in \{0, \dots, 2^n\}$  defina

$$X_k^n \equiv \left| B_{\frac{kt}{2^n}} \right|.$$

Mostre que  $\{X_k^n : k \in \{0, \dots, 2^n\}\}$  é um submartingale (possuindo apenas um número finito de v.a's aleatórias), com respeito a filtração  $\{\mathcal{F}_{\frac{kt}{2^n}} : k \in \{0, \dots, 2^n\}\}$ .

- (b) Mostre que

$$\mathbb{E} \left[ \left( \max_{0 \leq k \leq n} X_k^n \right)^2 \right] \leq 4 \mathbb{E}[|B_t|^2], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (c) Mostre que a igualdade abaixo é válida, quase certamente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{0 \leq k \leq n} X_k^n \right)^2 = \sup_{0 \leq s \leq t} |B_s|^2$$

- (d) Mostre que  $X_k^n = X_{2k}^{n+1}$  e conclua que a sequência de v.a.'s  $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$  definida por

$$Y_n \equiv \left( \max_{0 \leq k \leq 2^n} X_k^n \right)^2$$

é uma sequência monótona não-decrescente.

- (e) Usando o Teorema da Convergência Monótona e os itens anteriores conclua que vale a seguinte desigualdade

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} B_s^2 \right] \leq 4 \mathbb{E}[B_t^2].$$