UnB | Departamento de Matemática

Processos Estocásticos

Lista de Exercícios - Data de Entrega: 28/11/2025

---

1. Denotamos por $C_0^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o espaço das funções da reta na reta possuindo segunda derivada contínua e suporte compacto, isto é, existe algum $M > 0$ tal que $f(x) = 0$, para todo $x \notin [-M, M] \subset \mathbb{R}$. Seja $x \in \mathbb{R}$ fixado e considere o Movimento Browniano $\{B_t^x : t \in [0, +\infty)\}$ que inicia no tempo $t = 0$ no ponto x.

   (a) Use o Teorema da Mudança de Variáveis e mostre que para todo $t > 0$ temos

   $$\mathbb{E}[f(B_t^x)] = \int_{\mathbb{R}} f(x+y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy.$$

   (b) Mostre que

   $$\frac{\mathbb{E}[f(B_t^x)] - f(x)}{t} = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+u\sqrt{t}) - f(x)}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

   (c) Usando a fórmula de Taylor

   $$f(x+y\sqrt{t}) - f(x) = f'(x)y\sqrt{t} + \frac{1}{2} f''(x+\theta y\sqrt{t})y^2 t, \quad \text{para algum } \theta \equiv \theta(x,y,t) \in [0,1],$$

   mostre que para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado temos:

   $$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[f(B_t^x)] - f(x)}{t} = \frac{1}{2} f''(x).$$

2. Sejam $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$ um Movimento Browniano padrão, $\mathscr{F}_t \equiv \sigma(B_s : 0 \leqslant s \leqslant t)$ e $f \in C_0^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mostre que, se

   $$\mathbb{E}\left[f(B_t^x) - f(B_s^x) - \int_s^t \frac{1}{2} f''(B_u^x)\, du \,\middle|\, \mathscr{F}_s \right] = 0, \quad \forall t \geqslant s,$$

   então o processo $\{M_t : t \in [0, +\infty)\}$ definido por

   $$M_t \equiv f(B_t^x) - \int_0^t \frac{1}{2} f''(B_u^x)\, du, \qquad \forall t \in [0, +\infty),$$

   é um martingale com respeito à filtração $\{\mathscr{F}_t : t \in [0, +\infty)\}$.

3. Mostre que $\{B_t^x : t \in [0,+\infty)\}$ e $\{B_t : t \in [0,+\infty)\}$ podem ser construídos no mesmo espaço de probabilidade. Neste caso temos

$$\mathscr{F}_t^x \equiv \sigma(B_s^x : 0 \leqslant s \leqslant t) = \sigma(B_s : 0 \leqslant s \leqslant t) \equiv \mathscr{F}_t, \qquad \forall t \in [0,+\infty).$$

4. Se $\{B_t^x : t \in [0,+\infty)\}$ denota um Movimento Browniano partindo do ponto x em $t = 0$, descreva explicitamente a função de densidade do incremento $B_t^x - B_s^x$, para cada par s, t satisfazendo $0 \leqslant s < t$.

5. Assuma como nos exercícios anteriores que $0 \leqslant s < t$ e que a função $f \in C_0^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Usando o Exercício 10 da Lista 1, mostre que

   (a) $\mathbb{E}\left[f(B_t^x)|\mathscr{F}_s\right] = h_1(B_s^x)$, onde $h_1(y) = \mathbb{E}[f(B_{t-s}^x + y)]$;

   (b) $\mathbb{E}[f(B_s^x)|\mathscr{F}_s] = h_2(B_s^x)$, onde $h_2(y) = f(y)$;

   (c) $\mathbb{E}\left[\int_s^t \frac{1}{2} f''(B_u^x)\,du \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] = h_3(B_s^x)$, onde $h_3(y) = \mathbb{E}\left[\int_0^{t-s} \frac{1}{2} f''(B_r + y)\,dr\right]$;

   (d) Para cada $y \in \mathbb{R}$ defina $h(y) \equiv h_1(y) - h_2(y) - h_3(y)$. Mostre que

$$h(y) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left[f(B_t^x) - f(B_s^x) - \int_s^t \frac{1}{2} f''(B_u^x)\,du \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] = 0,$$

6. Sejam $f \in C_0^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}$ fixados.

   (a) Mostre que $\|f''\|_\infty < +\infty$;

   (b) defina $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ por $g(t) \equiv \mathbb{E}[f(B_t + x)]$. Fixe $t > 0$. Mostre, usando a Fórmula de Taylor com resto, que para cada $h \in \mathbb{R}$ com $|h| < t$, existe uma v.a. $\lambda \equiv \lambda(t,h) \in (0,1)$ tal que

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{1}{2h}\mathbb{E}\left[f''(B_t + x + \lambda(B_{t+h} - B_t)) \cdot (B_{t+h} - B_t)^2\right].$$

   (c) Mostre que se $Z \sim N(0,h)$, então $\mathbb{E}[Z^4] = 3h^2$.

   (d) Para cada $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seja

$$R(h) \equiv \frac{1}{2h}\mathbb{E}\Big[\big(f''(B_t + x + \lambda(B_{t+h} - B_t)) - f''(B_t + x)\big) \cdot (B_{t+h} - B_t)^2\Big].$$

   Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz mostre que

$$|R(h)| \leqslant \frac{1}{2|h|} \cdot h\sqrt{3} \cdot \sqrt{\mathbb{E}\Big[\big(f''(B_t + x + \lambda(B_{t+h} - B_t)) - f''(B_t + x)\big)^2\Big]}.$$

   (e) Usando os itens anteriores mostre que $R(h) \to 0$, quando $h \to 0$.

   (f) Usando os itens (b) e (d) conclua que

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{1}{2}\mathbb{E}[f''(B_t + x)].$$

7. Como no exercício anterior, fixe $f \in C_0^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}$. Usando a função g do exercício anterior mostre que para cada $t > 0$ temos a seguinte igualdade

$$\mathbb{E}\left[f(B_t^x) - f(x) - \int_0^t \frac{1}{2} f''(B_s^x)\, ds\right] = 0.$$

8. Usando os exercícios (5) e (2) conclua que o processo $\{M_t : t \in [0,+\infty)\}$ definido por

$$M_t \equiv f(B_t^x) - \int_0^t \frac{1}{2} f''(B_u^x)\, du, \qquad \forall t \in [0,+\infty),$$

é um martingale com respeito à filtração $\{\mathscr{F}_t : t \in [0,+\infty)\}$.

9. O objetivo deste exercício é mostrar que o seguinte problema de Dirichlet unidimensional:

$$u''(x) = -g(x) \quad \forall x \in [a,b], \quad u(a) = A, \quad u(b) = B, \quad a < b,$$

onde $g(x)$ é uma função contínua, tem solução única e que pode ser representada usando o Movimento Browniano.

(a) Sejam $\{B_t : t \in [0,+\infty)\}$ um Movimento Browniano, $x \in (a,b)$ um número real fixado e $\tau = \inf\{t \geqslant 0; B_t + x \notin [a,b]\}$. Mostre que para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\{\tau > n\} \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \{|B_k^x - B_{k-1}^x| \leqslant (b-a)\}$$

(b) Mostre que existe algum número $p \equiv p(a,b) \in (0,1)$ tal que $\mathbb{P}(\tau > n) \leqslant p^n$.

(c) Mostre que $\mathbb{P}(\tau = +\infty) = 0$.

(d) Mostre que $\mathbb{E}[\tau] < +\infty$.

(e) Mostre que B_τ^x é uma variável aleatória assumindo apenas dois valores e determine $\mathbb{E}[B_\tau^x]$.

(f) Argumente que se a função $[a,b] \ni x \longmapsto u(x)$ é uma solução do problema de Dirichlet descrito acima, então u pode ser estendida à uma função em $C_0^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(g) Usando a extensão obtida no item anterior, que será também denotada por u, e os exercícios anteriores mostre que o processo definido abaixo é um martingale com respeito à filtração $\{\mathscr{F}_t : t \geqslant 0\}$

$$M_t^x \equiv u(B_t^x) - \int_0^t \frac{1}{2} u''(B_r^x)\, dr$$

(h) Usando Teorema da Parada Opcional de Doob (Teorema 1) mostre que $\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau}^x] = \mathbb{E}[M_0^x]$.

(i) Mostre que é possível usar o Teorema da Convergência Dominada e os itens anteriores para mostrar que

$$\mathbb{E}[M_0^x] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[M_{t\wedge\tau}^x] = \mathbb{E}[M_\tau^x].$$

(j) Usando os itens anteriores mostre que o problema de Dirichlet enunciado acima possui uma única solução que é dada por

$$u(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \frac{1}{2} g(B_s^x)ds + A \cdot \mathbb{1}_{\{B_\tau^x = a\}} + B \cdot \mathbb{1}_{\{B_\tau^x = b\}}\right]$$

10. Usando o Teorema 4.6.1 (referência [1, pag. 53]) e a Fórmula de Itô, mostre que se $u \in C_0^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ então

$$M_t^x \equiv u(B_t^x) - \int_0^t \frac{1}{2} u''(B_r^x)\, dr$$

é um Martingale com respeito à filtração $\{\mathscr{F}_t : t \in [0, +\infty)\}$ induzida pelo Movimento Browniano.

11. Use a Fórmula de Itô (d-dimensional) para mostrar que se $u \in C_0^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ então o processo

$$M_t \equiv u(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}) - \int_0^t \frac{1}{2} \triangle u(B_s^{(1)}, B_s^{(2)})ds,$$

onde $B(t) \equiv (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ é um Movimento Browniano bidimensional, é um martingale, com respeito à filtração $\{\mathscr{F}_t : t \in [0, +\infty)\}$ induzida por $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$.

12. Suponha que $D \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto limitado e $u \in C^2(\overline{D}, \mathbb{R})$ é uma solução para o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \triangle u & = -g \quad \text{em } D; \\ u & = f \quad \text{em } \partial D. \end{cases}$$

onde $g : D \to \mathbb{R}$ e $f : \partial D \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e limitadas. Mostre que a solução u do problema acima admite a seguinte representação:

$$u(x) = \mathbb{E}\left[f(B_\tau^x) + \int_0^\tau \frac{1}{2} g(B_t^x)dt\right], \quad \forall x \in \overline{D};$$

onde, B_t^x denota o Movimento Browniano bidimensional iniciando no ponto x e τ é o tempo de parada

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0; B_t^x \notin D\}.$$

13. Seja $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$ um Movimento Browniano padrão. Encontre todas as funções de classe C^1 $\rho : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tais que $M_t \equiv \exp(B_t + \rho(t))$ é um martingale, com respeito à filtração natural induzida pelo Movimento Browniano.

14. Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e limitada e $\Delta_n \equiv \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$. Mostre que

$$\sum_{i=1}^n g(B_{t_{i-1}})\Big((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\Big) \xrightarrow[\|\Delta_n\| \to 0]{L^2(\Omega)} 0.$$

15. Sejam $B_t^{(1)}$ e $B_t^{(2)}$ Movimentos Brownianos independentes e $\Delta_n \equiv \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} (B_{t_i}^{(1)} - B_{t_{i-1}}^{(1)})^2 \cdot (B_{t_i}^{(2)} - B_{t_{i-1}}^{(2)})^2 \xrightarrow[\|\Delta_n\| \to 0]{L^2(\Omega)} 0.$$

16. Aplicando a Fórmula de Itô para $\theta(t,x) = x^n$, mostre que

$$d((B_t)^n) = \frac{n(n-1)}{2}(B_t)^{n-2}\, dt + n(B_t)^{n-1} dB_t.$$

17. Seja $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$ um Movimento Browniano padrão. Use a Fórmula de Itô para mostrar que o processo definido por

$$M_t \equiv B_t^3 - 3tB_t, \quad \forall t \geqslant 0,$$

é um martingale com respeito à filtração natural $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$.

Dica: Considere a função $f(t,x) = x^3 - 3tx$ e verifique que o termo de "drift" na Fórmula de Itô se anula.

18. **(Transiência do Movimento Browniano em Dimensão $d \geqslant 3$).** O objetivo deste exercício é conectar a Teoria do Potencial ao comportamento assintótico das trajetórias do Movimento Browniano, demonstrando que em dimensões altas ($d \geqslant 3$), o processo "escapa para o infinito".

Seja $\{B_t : t \geqslant 0\}$ um Movimento Browniano d-dimensional partindo de $x \in \mathbb{R}^d$, com $x \neq 0$ e $d \geqslant 3$.

(a) Seja $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função C^2. Se definirmos $f(x) = \phi(\|x\|)$ para $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, mostre usando cálculo vetorial que o Laplaciano de f é dado por:

$$\Delta f(x) = \phi''(\|x\|) + \frac{d-1}{\|x\|}\phi'(\|x\|).$$

(b) Encontre a solução geral não-constante da EDO $\phi''(r) + \frac{d-1}{r}\phi'(r) = 0$. Use isso para determinar uma função $v : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ que seja harmônica (i.e., $\Delta v = 0$) e radial, tal que $v(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$.

(c) Defina os tempos de parada para $0 < r < \|x\| < R$:

$$T_r = \inf\{t \geqslant 0 : \|B_t\| = r\} \quad \text{e} \quad T_R = \inf\{t \geqslant 0 : \|B_t\| = R\}.$$

Seja $\tau = T_r \wedge T_R$. Verifique que se $v : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é uma das funções encontradas no item anterior, então esta função é de classe C^2 e aplique a Fórmula de Itô ao processo $M_t = v(B_t)$ para mostrar que $M_{t \wedge \tau}$ é um martingale.

(d) Use o Teorema da Parada Opcional para mostrar que:

$$\mathbb{P}(T_r < T_R) = \frac{v(x) - v(R)}{v(r) - v(R)}.$$

Dica: Observe que $\tau < \infty$ q.c. e que, no tempo τ, temos $\|B_\tau\| \in \{r, R\}$ (justifique por que não pode haver ambiguidade sobre qual fronteira foi atingida primeiro).

(e) Assumindo a fórmula encontrada no item (b) (que deve ser proporcional a $\|x\|^{2-d}$), calcule o limite de $\mathbb{P}(T_r < T_R)$ quando $R \to \infty$. Conclua que, para $d \geqslant 3$, a probabilidade de o Movimento Browniano retornar a uma bola compacta de raio r (partindo de x com $\|x\| > r$) é estritamente menor que 1. Em outras palavras, existe probabilidade positiva de que o processo nunca retorne a essa bola (transiência).

1 Teorema da Parada Opcional

Teorema 1 (Teorema da Parada Opcional de Doob)**.** Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado, com a filtração $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ satisfazendo as chamadas "condições usuais"(completa e contínua à direita) e $\{M_t : t \in [0, +\infty)\}$ um martingal contínuo à direita e com limite à esquerda, adaptado a essa filtração. Sejam α e τ dois tempos de parada tais que $\alpha \leqslant \tau < +\infty$, quase certamente. Se pelo menos uma das seguintes condições for satisfeita:

(i) O tempo de parada τ é limitado (isto é, existe uma constante $K > 0$ tal que $\tau(\omega) \leqslant K$ quase certamente);

(ii) O martingale $\{M_t : t \in [0, +\infty)\}$ é uniformemente integrável;

(iii) Existe uma variável aleatória integrável $Z \in L^1(\Omega)$ tal que $|M_t| \leqslant Z$ quase certamente, para todo $t \geqslant 0$ (condição de dominação);

Então, as variáveis aleatórias M_α e M_τ são integráveis e vale a identidade:

$$\mathbb{E}[M_\tau \mid \mathscr{F}_\alpha] = M_\alpha \quad \text{quase certamente.}$$

Em particular, tomando $\alpha = 0$ temos a igualdade dos seguintes valores esperados

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0].$$

A prova do Teorema da Parada Opcional de Doob é apresentada na referência [2].

Referências

[1] Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to stochastic integration.* Universitext. Springer, New York, 2006.

[2] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.