

O Teorema da Recorrência de Poincaré

L. Cioletti e G. Andrade

Março de 2026

Resumo

Neste texto, apresentamos uma demonstração detalhada e autocontida do Teorema da Recorrência de Poincaré. Informalmente, esse teorema afirma que se $T : X \rightarrow X$ é um sistema dinâmico que preserva uma medida de probabilidade μ , então quase todo ponto de um conjunto de medida positiva (com respeito a μ) retorna a esse conjunto infinitas vezes ao longo de sua órbita.

Partimos da definição de transformações que preservam medida e, em seguida, apresentamos três exemplos clássicos: a aplicação $x \mapsto 2x \pmod{1}$, rotações do círculo unitário e o operador shift no espaço simbólico $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Por fim, enunciamos e demonstramos o Teorema da Recorrência de Poincaré.

Ressaltamos que este é um texto de caráter expositivo cujo principal objetivo é apresentar, de forma didática, clara e rigorosa, esse importante resultado a estudantes que estão iniciando seus estudos em Teoria Ergódica.

1. Introdução e Algumas Notações Básicas

O Teorema da Recorrência de Poincaré, publicado originalmente no contexto da mecânica celeste no final do século XIX, é um dos primeiros e mais elegantes resultados da teoria moderna de sistemas dinâmicos. Informalmente, o teorema afirma que se um sistema evolui preservando uma medida de probabilidade, então quase toda configuração inicial deste sistema, em seu espaço de estados, eventualmente retorna arbitrariamente próximo de si mesma. Na realidade, isso ocorre um número infinito de vezes. Esse resultado surpreendente tem consequências profundas tanto em Teoria Ergódica quanto em Mecânica Estatística e fornece uma motivação concreta para o estudo de transformações que preservam medida.

Como mencionado no resumo, o texto é organizado da seguinte maneira. Na [Seção 2](#) introduzimos o conceito de transformações que preservam medidas e apresentamos alguns exemplos de tais objetos. Em seguida, na [Seção 3](#) apresentamos o enunciado preciso e a prova do Teorema da Recorrência de Poincaré. Para complementar a discussão o texto encerra com um apêndice que apresenta os conceitos necessários e a prova do famoso Teorema π - λ de Dynkin, ferramenta utilizada em diversas ocasiões na [Seção 2](#).

Ao longo do texto, utilizamos as seguintes notações e convenções. A tripla ordenada $(X, \mathcal{B}, \mu)$ denota um espaço de probabilidade. Dada uma aplicação $T : X \rightarrow X$ e um inteiro $n \geq 0$, denotamos por T^n a n -ésima iterada de T (com a convenção $T^0 \equiv \text{Id}_X$). Como de costume $T^{-n}(E) \equiv \{x \in X : T^n(x) \in E\}$ denota a imagem inversa, por T^n , do conjunto $E \subseteq X$. Como de costume, adotamos a convenção $\inf(\emptyset) = +\infty$.

2. Transformações que Preservam Medida e Exemplos

Nesta seção, introduzimos formalmente o conceito de transformação que preserva medida e apresentamos três exemplos clássicos que ilustram essa definição na prática. É importante mencionar que em Teoria Ergódica, verificar se uma dada transformação preserva uma medida de probabilidade específica é um passo fundamental, porém frequentemente desafiador e trabalhoso. Para contornar as dificuldades técnicas inerentes a essa verificação, em cada um dos nossos três exemplos, vamos utilizar uma ferramenta poderosa: o **Corolário 12**, que é no fundo uma consequência direta do Teorema π - λ de Dynkin.

Definição 1 (Transformações que Preservam Medida). Sejam $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ espaços de **probabilidade**. Dizemos que uma transformação $T : X_1 \rightarrow X_2$ é mensurável se, para todo $B_2 \in \mathcal{B}_2$, temos que $T^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}_1$. Se $T : X_1 \rightarrow X_2$ é uma transformação mensurável e satisfaz

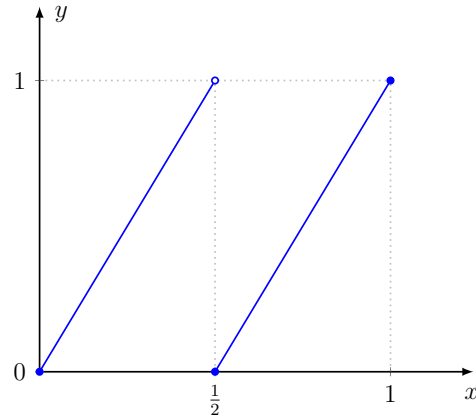
$$\mu_1(T^{-1}(B_2)) = \mu_2(B_2), \quad \forall B_2 \in \mathcal{B}_2,$$

então dizemos que T é uma transformação que preserva medida.

Neste texto, estaremos mais interessados no caso em que os espaços de probabilidade da definição acima coincidem, isto é, $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1) = (X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$. Neste caso, usamos a notação $(X, \mathcal{B}, \mu)$ para designar o espaço de probabilidade e podemos pensar em uma transformação $T : X \rightarrow X$ que preserva medida como um sistema dinâmico mensurável.

Exemplo 2. Considere o espaço de probabilidade $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mu)$, onde μ é a medida de Lebesgue no intervalo fechado $[0, 1]$. Podemos verificar que a aplicação $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$T(x) \equiv \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 2x - 1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



é uma transformação mensurável. Ademais, afirmamos que T é uma transformação que preserva medida em $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mu)$. Para provar esta última afirmação, basta mostrar que

$$\mu(T^{-1}((a, b])) = \mu((a, b])), \quad \forall a, b \in [0, 1] \text{ satisfazendo } 0 \leq a < b \leq 1, \quad (1)$$

já que a coleção $\mathcal{P} \equiv \{(a, b] \subset [0, 1] : 0 \leq a < b \leq 1\}$ é um π -sistema que gera $\mathcal{B}([0, 1])$.

De fato, a aplicação $\nu : \mathcal{B}([0, 1]) \rightarrow [0, 1]$ dada por $\nu(B) \equiv \mu(T^{-1}(B))$ define uma medida de probabilidade sobre $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$. Se para todo intervalo semi-aberto do π -sistema $\mathcal{P}$ temos $\mu(T^{-1}((a, b])) = \mu((a, b])$, então temos $\nu((a, b]) = \mu((a, b])$ para todo intervalo semi-aberto de $\mathcal{P}$. Como ν e μ são ambas medidas de probabilidade e a σ -álgebra gerada pelo π -sistema $\mathcal{P}$ satisfaz $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}([0, 1])$, segue do Teorema π - λ de Dynkin que $\nu = \mu$.

Para verificar a validade de (1), basta observar que para todo par de números reais a, b satisfazendo $0 \leq a < b \leq 1$ temos

$$T^{-1}((a, b]) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}, \frac{1}{2} + \frac{b}{2}\right]$$

e conseqüentemente

$$\mu(T^{-1}((a, b])) = \frac{(b-a)}{2} + \frac{(b-a)}{2} = b-a = \mu((a, b]).$$

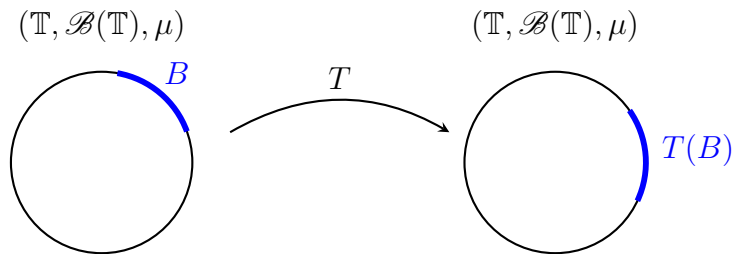
Exemplo 3. Neste exemplo, vamos olhar para o círculo unitário $\mathbb{T} \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ como elementos de um grupo cuja operação binária é definida pela operação usual de produto de dois números complexos. Além disso, observamos que se considerarmos $\mathbb{T}$ como espaço topológico munido da topologia subespaço definida a partir da topologia usual de $\mathbb{C}$, então podemos mostrar que $\mathbb{T}$ possui estrutura natural de grupo compacto. Pelo Teorema 0.13 da referência [1] sabemos que cada grupo compacto admite uma única medida de Haar que nosso caso será denotada por μ . No nosso caso, μ é uma medida de probabilidade definida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ e satisfaz: para cada $z \in \mathbb{T}$ fixado, a igualdade $\mu(zB) = \mu(B)$, para todo boreliano $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$.

Considere o espaço de probabilidade $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \mu)$, onde μ é a medida de Haar descrita acima. Fixe um elemento arbitrário $a \in \mathbb{T}$ e considere a aplicação $T : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ definida por $T(z) = az$, para todo $z \in \mathbb{T}$. Afirmamos que T é uma transformação que preserva medida no espaço $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \mu)$. De fato, observe inicialmente que a aplicação T é bijetiva e sua inversa é dada por $T^{-1}(z) = a^{-1}z$. Dessa forma, se B é um boreliano arbitrário de $\mathbb{T}$, então sua imagem inversa por T é dada pelo conjunto $T^{-1}(B) = a^{-1}B$. Logo segue das propriedades elementares da medida de Haar e da igualdade anterior que

$$\mu(T^{-1}(B)) = \mu(a^{-1}B) = \mu(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}),$$

o que encerra a prova de que T é uma transformação que preserva medida.

Este exemplo formaliza a ideia de que as rotações do plano complexo agindo no círculo unitário preservam a medida que generaliza a ideia de comprimento de arco no círculo.



Exemplo 4. Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números inteiros positivos e $X \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ o espaço produto equipado com sua σ -álgebra produto usual, que será denotada por $\mathcal{B}$. Seja ν uma

medida de probabilidade arbitrária definida sobre o conjunto das partes de $\{0, 1\}$ e considere a medida produto definida sobre $(X, \mathcal{B})$ e dada por

$$\mu \equiv \prod_{j \in \mathbb{N}} \nu_j, \quad \text{onde } \nu_j = \nu \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Considere a transformação $T : X \rightarrow X$, denominada descolamento para a esquerda (ou simplesmente “shift”), definida para cada $x \equiv (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X$ por

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Afirmamos que T é uma transformação que preserva medida no espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Para provar essa afirmação, começaremos mostrando que T é uma transformação mensurável. Para isso, é suficiente mostrar que a imagem inversa de um conjunto cilíndrico em X é também um conjunto cilíndrico. Já que a σ -álgebra produto $\mathcal{B}$ é gerada pelos conjuntos cilíndricos de X da forma

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] \equiv \{x \in X : x_j = a_j, j = 1, \dots, n\},$$

onde $(a_1, \dots, a_n)$ é um elemento fixado de $\{0, 1\}^n$, a mensurabilidade de T segue diretamente da igualdade abaixo:

$$T^{-1}([a_1, a_2, \dots, a_n]) = [0, a_1, a_2, \dots, a_n] \cup [1, a_1, a_2, \dots, a_n]. \quad (2)$$

Agora vamos mostrar que a transformação T preserva medida no espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Primeiro, observamos que segue diretamente da definição da medida produto que

$$\mu([a_1, a_2, \dots, a_n]) = \nu(\{a_1\}) \cdot \dots \cdot \nu(\{a_n\}).$$

Agora, usando as duas igualdades anteriores e o fato que a união que aparece em (2) é uma união de conjuntos disjuntos, podemos concluir que vale a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \mu\left(T^{-1}([a_1, a_2, \dots, a_n])\right) &= \mu\left([0, a_1, a_2, \dots, a_n] \cup [1, a_1, a_2, \dots, a_n]\right) \\ &= \mu\left([0, a_1, a_2, \dots, a_n]\right) + \mu\left([1, a_1, a_2, \dots, a_n]\right) \\ &= \nu(\{0\})\nu(\{a_1\}) \cdot \dots \cdot \nu(\{a_n\}) + \nu(\{1\})\nu(\{a_1\}) \cdot \dots \cdot \nu(\{a_n\}) \\ &= \left(\nu(\{0\}) + \nu(\{1\})\right) \cdot \nu(\{a_1\}) \cdot \dots \cdot \nu(\{a_n\}) \\ &= \nu(\{a_1\}) \cdot \dots \cdot \nu(\{a_n\}) \\ &= \mu\left([a_1, a_2, \dots, a_n]\right), \end{aligned}$$

para todo conjunto cilíndrico da forma $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. Já que a coleção de tais conjuntos cilíndricos forma um π -sistema que gera a σ -álgebra produto, segue do Teorema π - λ de Dynkin que $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Consequentemente, concluímos que T é uma transformação que preserva medida no espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

O leitor mais atento deve ter observado que a transformação T deste exemplo age preservando medida em uma quantidade infinita de espaços de probabilidade distintos, já que temos infinitas possibilidades de escolhas distintas para a medida ν que define a medida produto considerada neste exemplo.

3. O Teorema da Recorrência de Poincaré

De maneira informal podemos dizer que o Teorema da Recorrência de Poincaré afirma que, em um sistema dinâmico que preserva uma medida de probabilidade, quase todo ponto de qualquer conjunto de medida positiva retorna a esse conjunto infinitas vezes. A seguir apresentamos o enunciado preciso e a prova desse teorema.

Teorema 5 (Teorema da Recorrência de Poincaré). Seja $T : X \rightarrow X$ uma aplicação que preserva medida em um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Seja $E \in \mathcal{B}$ um conjunto mensurável arbitrário satisfazendo $\mu(E) > 0$. Então, os iterados de quase todo ponto de E , por T , retornam infinitas vezes ao conjunto E . Mais precisamente, existe um subconjunto $\mathcal{B}$ -mensurável $F \subseteq E$ satisfazendo $\mu(F) = \mu(E)$ e também que para cada $x \in F$, existe uma sequência infinita de números naturais estritamente crescente $n_1(x) < n_2(x) < \dots$ tal que $T^{n_i(x)}(x) \in E$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Prova. Seja $E \in \mathcal{B}$ um conjunto mensurável satisfazendo $\mu(E) > 0$. Para cada número inteiro $N \geq 0$, defina

$$E_N \equiv \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}(E). \quad (3)$$

Já que $T : X \rightarrow X$ é uma aplicação mensurável, temos imediatamente que E_N é um conjunto mensurável para cada $N \geq 0$. Além do mais, observe que $x \in E_N$ se, e somente se, existe algum inteiro não-negativo $n \geq N$ tal que $x \in T^{-n}(E)$, ou seja, $T^n(x) \in E$. Em outras palavras, os pontos de E_N são os pontos do espaço X que após um número suficientemente grande de iterações de T , entram em E .

Agora vamos considerar o conjunto

$$\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N = \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}(E) \equiv \limsup_{n \rightarrow \infty} T^{-n}(E). \quad (4)$$

Evidentemente, o conjunto acima é também um conjunto $\mathcal{B}$ -mensurável e constituído pelo conjunto dos pontos de X que entram em E infinitas vezes por iterados de T .

Observe que se o conjunto definido em (4) é não-vazio, podemos afirmar que para cada $x \in \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N$, temos $x \in E_N$, para cada $N \geq 0$ e conseqüentemente o ínfimo que aparece na expressão abaixo determina um número inteiro não-negativo (aqui usamos a convenção $\inf(\emptyset) = +\infty$)

$$n_0 \equiv n_0(x) \equiv \inf\{n \in [0, \infty) \cap \mathbb{Z} : T^n(x) \in E\}.$$

Além do mais, podemos construir recursivamente, usando um processo formal de indução, uma sequência estritamente crescente de números inteiros não-negativos $\{n_i\}_{i \geq 0}$ tal que para cada índice $i \geq 1$, temos

$$n_i \equiv n_i(x) \equiv \inf\{n \in (n_{i-1}, \infty) \cap \mathbb{Z} : T^n(x) \in E\}. \quad (5)$$

De fato, suponha, por hipótese de indução, que tenhamos construído números inteiros não-negativos $0 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_{i-1} < +\infty$, satisfazendo (5). Vamos verificar que o seguinte subconjunto dos inteiros não-negativos $\{n \in (n_{i-1}, \infty) \cap \mathbb{Z} : T^n(x) \in E\}$ é não-vazio. Suponha, por absurdo, que este conjunto seja vazio. Então para qualquer N inteiro

não-negativo satisfazendo $n_{i-1} < N$ temos que $T^n(x) \notin E$ para todo $n \geq N$. Mas neste caso $x \notin E_N$, o que contradiz a hipótese de que $x \in \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N$.

Já que foi estabelecido que $\{n \in (n_{i-1}, \infty) \cap \mathbb{Z} : T^n(x) \in E\} \neq \emptyset$, então temos do princípio da boa ordenação que este conjunto deve possuir um elemento mínimo e nesse caso este elemento mínimo é exatamente o ínfimo deste conjunto e portanto neste caso, a expressão n_i dada por (5) define um número inteiro não-negativo (finito) e além do mais satisfaz $n_i > n_{i-1}$. O que encerra a prova do passo de indução.

O próximo passo é verificar que $\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N \neq \emptyset$. Para isto observamos que $\{E_N\}_{N \geq 0}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis monótona não-crescente, isto é, $\dots \subseteq E_2 \subseteq E_1 \subseteq E_0$ e que segue da propriedade de continuidade da medida que

$$\mu\left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(E_N). \quad (6)$$

Usando a definição de E_N temos

$$T^{-1}(E_N) = T^{-1}\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}(E)\right) = \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-(n+1)}(E) = \bigcup_{n=N+1}^{\infty} T^{-n}(E) = E_{N+1}.$$

Usando agora a hipótese de que T é uma transformação que preserva medida temos da igualdade acima que

$$\mu(E_{N+1}) = \mu(T^{-1}(E_N)) = \mu(E_N) \implies \mu(E_0) = \mu(E_N), \quad \forall N \geq 0. \quad (7)$$

Por definição, temos $E_0 = E \cup T^{-1}(E) \cup T^{-2}(E) \cup \dots$ e como estamos assumindo que $\mu(E) > 0$ segue da monotonicidade da medida que $0 < \mu(E) \leq \mu(E_0)$. Usando esta estimativa e a última igualdade em (7) concluímos de (6) que

$$\mu\left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(E_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(E_0) = \mu(E_0) > 0 \quad (8)$$

e conseqüentemente que $\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N \neq \emptyset$.

Para finalizar a prova, consideramos o conjunto F definido por

$$F \equiv E \cap \left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right). \quad (9)$$

Afirmamos que $\mu(F) = \mu(E)$. Observe que

$$E_0 \cap \left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right) = \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N.$$

Em (8) mostramos que

$$\mu(E_0) = \mu\left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right) \implies \mu\left(E_0 \setminus \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right) = \mu(E_0) - \mu\left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right) = 0.$$

Note também que segue da última igualdade acima e da propriedade de monotonicidade da medida que

$$0 \leq \mu\left((E_0 \cap E) \setminus \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right) \leq \mu\left(E_0 \setminus \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right) = 0$$

e conseqüentemente que

$$\mu \left((E_0 \cap E) \setminus \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N \right) = 0.$$

Já que $E \subseteq E_0$, temos $E \cap E_0 = E$. Usando das propriedades elementares de medidas de probabilidade, a igualdade obtida acima e a definição do conjunto F dada em (9), verificamos que valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E \cap E_0) = \mu \left((E \cap E_0) \cap \left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N \right) \right) + \mu \left((E_0 \cap E) \setminus \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N \right) \\ &= \mu \left((E \cap E_0) \cap \left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N \right) \right) \\ &= \mu \left(E \cap \left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N \right) \right) \\ &= \mu(F). \end{aligned}$$

Como estamos assumindo que $\mu(E) > 0$, segue da igualdade acima que $\mu(F) > 0$ e conseqüentemente F é um conjunto não-vazio. Fixado um ponto arbitrário $x \in F$, temos que $x \in E$ e $x \in \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N$. Já que $\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N$ é um conjunto não-vazio, vimos acima que a expressão (5) define uma sequência infinita $\{n_i(x)\}_{i \geq 0}$ estritamente crescente de números inteiros não-negativos. Segue diretamente da definição da sequência $\{n_i(x)\}_{i \geq 0}$ que $T^{n_1(x)}(x) \in E$. Observe também que para todo inteiro $j > 1$, temos

$$T^{n_j(x)-n_1(x)}(T^{n_1(x)}(x)) = T^{n_j(x)}(x) \in E,$$

Além do mais, como $\{n_i(x)\}_{i \geq 0}$ é uma sequência de números inteiros não-negativos estritamente crescente, podemos afirmar que para cada inteiro $N \geq 0$ fixado, existe algum $j \in \mathbb{N}$ tal que $n_j(x) - n_1(x) \geq N$. Deste fato e da igualdade acima podemos concluir que $T^{n_1(x)}(x) \in E_N$. Como $N \geq 0$ é arbitrário concluímos que $T^{n_1(x)}(x) \in \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N$. Como já havíamos observado que $T^{n_1(x)}(x) \in E$, temos que $T^{n_1(x)}(x) \in F$. De maneira análoga, substituindo no argumento acima $n_1(x)$ por $n_k(x)$, temos que $T^{n_k(x)}(x) \in F$, para todo $k \geq 1$. O que de fato é importante nesta substituição é que pela construção da sequência $\{n_i(x)\}_{i \geq 0}$, podemos garantir que $n_j(x) - n_k(x) \rightarrow \infty$, quando $j \rightarrow \infty$. Dessas observações concluímos finalmente que para todo ponto $x \in F$, existe uma sequência infinita $\{n_i(x)\}_{i \geq 0}$ de números inteiros não-negativos estritamente crescente tal que $T^{n_i(x)}(x) \in F$, para todo $i \geq 1$, o que encerra a demonstração do teorema. ■

Uma pergunta natural que surge após a demonstração do **Teorema 5** é se a hipótese $\mu(E) > 0$ é realmente essencial para a validade da conclusão do teorema. O exemplo a seguir mostra que a resposta é afirmativa: quando $\mu(E) = 0$, a conclusão do teorema pode falhar de maneira completa, no sentido de que nenhum ponto de E jamais retorna a E sob iterações de T .

Exemplo 6 (Falha da recorrência quando $\mu(E) = 0$). Considere o espaço de probabilidade $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \mu)$, onde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ é o círculo unitário e μ é a medida de Haar, como no **Exemplo 3**. Fixe $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e considere a rotação irracional $T : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ definida por

$$T(z) \equiv e^{2\pi i b} z, \quad \forall z \in \mathbb{T}.$$

Como visto no **Exemplo 3**, a aplicação T preserva a medida de Haar μ .

Considere agora o conjunto unitário $E \equiv \{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$. Temos claramente que $E \neq \emptyset$ e que $\mu(E) = 0$. Afirmamos que nenhum ponto de E retorna a E sob iterações de T . De fato, para o único elemento $z = 1 \in E$, temos que para todo $n \geq 1$

$$T^n(1) = e^{2\pi i n b}.$$

Para que $T^n(1) \in E = \{1\}$, seria necessário que $e^{2\pi i n b} = 1$, ou equivalentemente, que $nb \in \mathbb{Z}$. Porém, como b é irracional e $n \geq 1$ é um inteiro não-nulo, o produto nb é necessariamente irracional e portanto $nb \notin \mathbb{Z}$. Logo $T^n(1) \notin E$, para todo $n \geq 1$.

Consequentemente, não existe nenhum subconjunto $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ -mensurável não-vazio $F \subseteq E$ tal que, para todo $x \in F$, exista uma sequência infinita $n_1(x) < n_2(x) < \dots$ de números naturais satisfazendo $T^{n_i(x)}(x) \in F$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Este exemplo evidencia que a hipótese $\mu(E) > 0$ no **Teorema 5** é indispensável e não meramente um artifício técnico da demonstração.

Outra observação importante sobre o Teorema da Recorrência de Poincaré é que ele permanece válido também em contextos em que trabalhamos com uma noção de “incompressibilidade” fraca, isto é, exigindo apenas o seguinte. Se $B \in \mathcal{B}$ e $T^{-1}(B) \subseteq B$, então $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$. Ou seja, exigimos que a igualdade $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ seja válida apenas para conjuntos mensuráveis $B \in \mathcal{B}$ satisfazendo $T^{-1}(B) \subseteq B$ e não para todos os elementos da σ -álgebra $\mathcal{B}$, como na definição de transformação que preserva medida.

Outra pergunta interessante é se podemos obter resultados semelhantes ao do Teorema da Recorrência de Poincaré em contextos onde a definição de transformação que preserva medida seja generalizada para espaços gerais de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, onde μ não é necessariamente uma medida de probabilidade. A resposta é negativa, em geral. Por exemplo, considere o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, onde λ denota a medida de Lebesgue, e a transformação $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x + 1$. Neste caso, evidentemente, não podemos usar a **Definição 1** para dizer que T é uma transformação que preserva medida pois nosso espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ não é um espaço de probabilidade. Porém, se considerarmos a noção de transformação que preserva medida como sendo semelhante à da **Definição 1**, mas agora permitindo que $(X, \mathcal{B}, \mu)$ seja um espaço de medida arbitrário, então nossa aplicação T seria sim uma “aplicação que preserva medida”, já que $\lambda(T^{-1}(B)) = \lambda(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por outro lado, considere o conjunto $E \equiv [0, 1]$, que satisfaz $\lambda(E) = 1 > 0$. Para qualquer $x \in E$ temos $T^n(x) = x + n \rightarrow +\infty$, e portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) \notin E$, para todo $n \geq n_0$. Desta forma, nenhum ponto de E retorna a E infinitas vezes e a conclusão do **Teorema 5** é falsa para qualquer subconjunto mensurável $F \subseteq E$ com $\lambda(F) > 0$.

Apêndice

A. O Teorema π - λ de Dynkin

Definição 7 (π -Sistema). Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X que é fechada por interseções finitas é chamada de π -sistema. Mais precisamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$ e para cada coleção de n conjuntos $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{P}$ temos $E_1 \cap \dots \cap E_n \in \mathcal{P}$.

Definição 8 (λ -Sistema). Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção $\mathcal{L}$ de subconjuntos de X é chamada de um λ -sistema em X (ou simplesmente λ -sistema, se for claro pelo contexto qual é o conjunto base X) se satisfaz:

- $X \in \mathcal{L}$;
- se $E \in \mathcal{L}$, então $E^c \in \mathcal{L}$;
- se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{L}$, com $E_n \cap E_m = \emptyset$ se $m \neq n$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{L}$.

Embora toda σ -álgebra seja um λ -sistema a recíproca pode não ser verdadeira. Porém se um λ -sistema é também um π -sistema, então o λ -sistema será sim uma σ -álgebra. A prova é bem simples e será deixada como exercício.

Exercício 1. Seja X um conjunto não-vazio. Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de X . Mostre que se $\mathcal{C}$ é simultaneamente um π -sistema e um λ -sistema, então $\mathcal{C}$ é uma σ -álgebra.

Dica. Uma união enumerável arbitrária pode sempre ser reescrita como uma união enumerável de subconjuntos disjuntos.

Um exemplo importante de λ -sistema e que aparece diversas vezes em Teoria Ergódica é o fornecido pelo exemplo a seguir.

Exemplo 9. Sejam X um conjunto não-vazio, $\mathcal{B}$ uma σ -álgebra de subconjuntos de X , $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ duas medidas de probabilidade. Então a coleção

$$\mathcal{C} \equiv \{E \in \mathcal{B} : \mu(E) = \nu(E)\}$$

é um λ -sistema.

De fato, já que $\mu(X) = 1 = \nu(X)$ temos que $X \in \mathcal{C}$. Para todo $E \in \mathcal{C}$, temos $\mu(E^c) = 1 - \mu(E) = 1 - \nu(E) = \nu(E^c)$ e portanto $E^c \in \mathcal{C}$. Por último, se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{C}$ de conjuntos dois-a-dois disjuntos, então temos da propriedade de σ -aditividade da medida e da definição de $\mathcal{C}$ que

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \nu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right).$$

O que mostra que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$, encerrando a prova de que a coleção $\mathcal{C}$ é um λ -sistema.

Proposição 10. Sejam X um conjunto não-vazio e $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de λ -sistemas sobre X , indexada sobre algum conjunto de índices Λ . Então

$$\mathcal{L} \equiv \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{L}_\alpha$$

é um λ -sistema.

Prova. Já que para todo $\alpha \in \Lambda$, temos que $X \in \mathcal{L}_\alpha$, então $X \in \mathcal{L}$. Se $E \in \mathcal{L}$, então temos que $E \in \mathcal{L}_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Já que $\mathcal{L}_\alpha$ é um λ -sistema temos que $E^c \in \mathcal{L}_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$, logo $E^c \in \mathcal{L}$.

Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos dois-a-dois disjuntos em $\mathcal{L}$, então podemos afirmar que para cada $\alpha \in \Lambda$ fixado que $E_n \in \mathcal{L}_\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Já que $E_n \cap E_m = \emptyset$, se $m \neq n$, então $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{L}_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$. Logo $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{L}$. ■

Seja $\mathcal{C}$ uma coleção arbitrária de subconjuntos de algum conjunto não-vazio X . Seja $\{\mathcal{L}_\alpha(\mathcal{C})\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma indexação da família de todos os λ -sistemas contendo a coleção $\mathcal{C}$. Observe que esta coleção é sempre não-vazia pois $\mathcal{P}(X)$, o conjunto das partes de X , é sempre um λ -sistema que, obviamente, contém a coleção $\mathcal{C}$. Então segue da **Proposição 10** que a coleção abaixo é um λ -sistema

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) \equiv \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{L}_\alpha(\mathcal{C})$$

que é chamado de o λ -sistema gerado por $\mathcal{C}$. Similarmente à construção da σ -álgebra gerada, o λ -sistema gerado por uma coleção $\mathcal{C}$ é o “menor” λ -sistema contendo a coleção $\mathcal{C}$.

Teorema 11 (Teorema π - λ de Dynkin). Sejam X um conjunto não-vazio, $\mathcal{P}$ um π -sistema e $\mathcal{L}$ um λ -sistema. Se $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$, então $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$.

Prova. Observe que para provar o teorema basta mostrar que $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ é uma σ -álgebra. De fato, segue das definições de σ -álgebra e λ -sistema gerados e da hipótese $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$ que valem as seguintes continências

$$\mathcal{P} \subseteq \sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L} \implies \sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}.$$

Como observado anteriormente, no **Exercício 1**, para mostrar que $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ é uma σ -álgebra basta mostrar que este λ -sistema é também um π -sistema.

Para cada $A \subseteq X$ fixado, considere a família

$$\mathcal{L}_A \equiv \{B \subseteq X : B \cap A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})\}$$

Afirmção 1: se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, então $\mathcal{L}_A$ é um λ -sistema. De fato, $X \cap A = A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, logo $X \in \mathcal{L}_A$. Para qualquer $B \in \mathcal{L}_A$, temos que $A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ e como $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, também podemos afirmar que $A^c \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Portanto a união disjunta $A^c \cup (A \cap B) \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Logo o complementar deste conjunto necessariamente está em $\mathcal{L}(\mathcal{P})$, ou seja, $(A^c \cup (A \cap B))^c = A \cap (A^c \cup B^c) = A \cap B^c \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, mostrando que $B^c \in \mathcal{L}_A$. Se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{L}_A$ de conjuntos dois-a-dois disjuntos, então para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $B_n \cap A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Já que $(B_n \cap A) \cap (B_m \cap A) = \emptyset$, se $n \neq m$, então temos que

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \cap A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap A) \in \mathcal{L}(\mathcal{P}).$$

Logo $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{L}_A$ e portanto podemos concluir que $\mathcal{L}_A$ é um λ -sistema.

Afirmção 2: se $A \in \mathcal{P}$, então $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A$. De fato, suponha que $A \in \mathcal{P}$. Já que, por definição do λ -sistema gerado, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{P})$, temos que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Assim podemos usar a Afirmção 1 para assegurar que $\mathcal{L}_A$ é um λ -sistema. Como $\mathcal{P}$ é um π -sistema, para todo $B \in \mathcal{P}$ temos que $A \cap B \in \mathcal{P}$. Consequentemente, $A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ e portanto $B \in \mathcal{L}_A$. Como B é um elemento arbitrário de $\mathcal{P}$, segue que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A$. Pela definição de λ -sistema gerado e pela continência $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A$, concluímos que $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A$, para qualquer $A \in \mathcal{P}$ fixado.

Afirmção 3: se $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ então $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_B$. De fato, primeiro observamos que para qualquer $A \in \mathcal{P}$ segue da Afirmção 2 que $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A$. Desta forma, um conjunto arbitrário $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ satisfaz $B \in \mathcal{L}_A$. Por definição de $\mathcal{L}_A$, temos necessariamente que $A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Já que $A \cap B = B \cap A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, segue pela definição de $\mathcal{L}_B$ que $A \in \mathcal{L}_B$. Uma vez que A é um elemento arbitrário de $\mathcal{P}$, concluímos que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_B$. Além disso, como $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, podemos usar a Afirmção 1 para garantir que $\mathcal{L}_B$ é um λ -sistema. Portanto, pela definição de λ -sistema gerado e pela continência $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_B$, concluímos que $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_B$.

Afirmção 4: $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ é um π -sistema. De fato, dados quaisquer $B, C \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, temos da Afirmção 3 que $C \in \mathcal{L}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_B$, ou seja $C \in \mathcal{L}_B$. Mas pela definição de $\mathcal{L}_B$ podemos afirmar que $B \cap C \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, provando finalmente que $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ é um π -sistema. O que, pela observação feita no segundo parágrafo desta demonstração, encerra a prova do teorema. ■

Corolário 12. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Se ν e μ são medidas de probabilidade sobre $(X, \mathcal{B})$ satisfazendo $\nu(B) = \mu(B)$, para todo $B \in \mathcal{P}$, onde $\mathcal{P}$ é um π -sistema em X tal que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}$. Então $\nu = \mu$.

Prova. Como visto no Exemplo 9 a coleção $\mathcal{C} \equiv \{E \in \mathcal{B} : \mu(E) = \nu(E)\}$ define um λ -sistema em X . Por hipótese $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$. Dessa forma segue do Teorema π - λ de Dynkin que $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{C}$. Como também estamos assumindo que o π -sistema $\mathcal{P}$ gera a σ -álgebra $\mathcal{B}$, isto é, $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}$ temos imediatamente que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Mas por definição $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ e portanto $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ o que encerra a prova do corolário. ■

Referências

- [1] P. Walters. *An introduction to ergodic theory.*, volume 7 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin., 1982.